AZZEDDINE FEKAK

Sur les exposants de Lojasiewicz

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 4 « Algèbre », , p. 1-62

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___4_A1_0>

SERIE : A
N° d'Ordre : 978
N° de Série : 168

THESE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Titre de Docteur en Troisième cycle

Spécialité : Mathématiques

par

Azzeddine FEKAK

SUR LES EXPOSANTS DE LOJASIEWICZ

Soutenue le 18 Décembre 1986 devant la Commission d'Examen

MM.	J.-C. TOUGERON	Président
	C. ANDRADAS	
	M. COSTE	Examinateurs
	L. MAHE	
Mme	M.-F. ROY	

Table de matières :

Première partie :

EXPOSANTS DE LOJASIEWICZ POUR LES FONCTIONS SEMI-ALGEBRIQUES

Deuxième partie :

INTERPRETATIONS ALGEBRIQUES DE L'EXPOSANT DE LOJASIEWICZ

Introduction

Nous étudions dans ce travail les exposants de Lojasiewicz pour les fonctions semi-algébriques. Si f et g sont deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble X semi-algébrique localement fermé de R^n avec zéros(g) $\subset$ zéros(f), le théorème des zéros réels pour les fonctions semi-algébriques [C] nous dit qu'il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X tel que $f^n = hg$. Ceci permet d'avoir l'inégalité de Lojasiewicz sur tout compact. Notre but est de s'intéresser à la borne inférieure des exposants qui apparaissent dans les inégalités de Lojasiewicz sur un ensemble semi-algébrique X non nécessairement borné. Autrement dit on définit l'exposant de Lojasiewicz $l(f,g)$ sur X par :

$$l(f,g) = \inf\{\Theta \in \mathbb{Q}^+ \ / \ \text{Il existe une fonction semi-algébrique } h \text{ continue sur } X \text{ et } \quad |f(x)|^\Theta \leqslant h(x)|g(x)| \quad \forall x \in X\}.$$

Le résultat essentiel que nous demontrons est que $l(f,g)$ est toujours un nombre rationnel.

Les exposants de Lojasiewicz ont été déjà étudiés dans divers cas. Dans le cas complexe par Lejeune et Teissier [LT] et Ploski [P] , et dans le cas réel sur un compact par Bochnak et Risler [BR] ; [Ri] , où ils ont démontré dans leurs divers cas que la borne inférieure des exposants de Lojasiewicz est un nombre rationnel. Kuo [K] a démontré lui aussi la rationalité de l'exposant de Lojasiewicz dans le cas local pour les fonctions analytiques à deux variables. Notre travail complète et généralise ces résultats.

Dans la première partie, nous commençons par rappeler et démontrer quelques résultats sur les fonctions semi-algébriques, nous renvoyons à [BCR] et [C] pour une étude complète. Nous définissons ensuite l'exposant $l(f,g)$, puis nous démontrons qu'il est un nombre rationnel et qu'on a une inégalité avec cet exposant. Nous utilisons dans les preuves des résultats sur les fonctions et les ensembles semi-algébriques, et surtout la théorie du spectre réel [CR] , [Ro] , et en particulier la compacité de la topologie du spectre réel qui permet de localiser la borne inférieure des exposants de Lojasiewicz, et qui a aussi de nombreuses applications.

Nous nous intéressons ensuite aux inégalités de Lojasiewicz sur des ensembles semi-algébriques de $R^n x R^p$ avec un paramètre t dans R^p et nous étudions l'exposant de Lojasiewicz quand t varie dans R^p. La compacité de la topologie du spectre réel nous permet d'écrire R^p comme une partition finie de semi-algébriques S_i telle que l'exposant de Lojasiewicz est constant quand t varie dans chaque S_i, on utilise aussi dans les preuves des résultats sur les familles de fonctions, et d'ensembles semi-algébriques ([BCR] chap.7).

Dans [BR] , Bochnak et Risler ont démontré la rationalité de $l(f,g)$ dans le cas compact, et que cet exposant peut être calculé sur une courbe semi-algébrique. Dans le cas global, on s'est demandé si l'exposant $l(f,g)$ peut être aussi calculé sur une courbe semi-algébrique sur X qui n'est pas nécessairement borné. Nous donnons une réponse positive, en se ramenant au cas borné, en utilisant la sphère unité, et la projection stéréographique inverse. On remarquera que pour se ramener au cas borné on utilise, d'une manière essentielle, le fait que $l(f,g)$ est un nombre rationnel dans le cas non borné, et qu'on a une inégalité avec cet exposant.

Dans la deuxième partie qui est à dominante algébrique, nous donnons des interprétations algébriques de l'exposant de Lojasiewicz dans le cas de l'anneau de polynômes, et plus généralement dans le cas de l'anneau de coordonnées d'une variété algébrique réelle.

Nous commençons par définir la clôture semi-intégrale d'un anneau introduite et étudiée par Brumfiel [B1] , [B2], qui donne un analogue réel à la clôture intégrale [ZS] qui a permis à Lejeune et Teissier [LT] de donner une interprétation algébrique de l'exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe.

Pour un anneau A ordonné par un cône α, un élément x de $\mathbf{K}$ est dit semi-entier sur A pour le cône α, si on a une relation de dépendance semi-intégrale :

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n} \leqslant_\alpha 0 \quad \text{avec} \quad a_i \in A .$$

Ceci généralise la notion d'élément entier, et il est clair que tout élément x entier sur A est semi-entier sur A.

Nous définissons ensuite la clôture semi-intégrale $\bar{I}$ d'un idéal I dans A. Un élément x de A est semi-entier sur l'idéal I, s'il existe des $a_i \in I^i$ et un entier $n \geqslant 1$ tel que :

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n} \leqslant_\alpha 0 .$$

Nous donnons ensuite des interprétation en termes de valuations α-convexes des éléments semi-entiers sur l'idéal I.

La fonction d'ordre $\overline{\nu}_I$ définie par $\overline{\nu}_I(f) = \lim_{k\to+\infty} \nu_I(f^k)/k$ où $\nu_I(f^k)=\mathrm{Sup}\{\ \nu$ tel que $f^k \in I^\nu\ \}$, introduite par Samuel [Sm] et étudiée ensuite par Nagata [Ng] , a permis à Lejeune et Teissier de retrouver d'une manière algébrique l'exposant de Lojasiewicz. Si f_x et I_x désignent les germes de f et I en x, ils ont démontré que sur un compact K assez petit contenant x, l'exposant de Lojasiewicz est $\beta(f,I) = 1/\overline{\nu}_I(f_x)$, et le fait que $\overline{\nu}_I$ est toujours un nombre rationnel [Ng] , on retrouve encore la rationalité de l'exposant de Lojasiewicz.

Dans le cas réel on définit la fonction d'ordre $\overline{\mu}_I$ par : $\overline{\mu}_I(f) = \lim_{k\to+\infty} \mu_I(f^k)/k$, où $\mu_I(f^k) = \mathrm{Sup}\{\mu \ /$ il existe $p\in\alpha\cap A$ et $f^{2k} + p \in I^{2\mu}\ \}$, où α est un ordre partiel sur K le corps de fractions de A. Cette fonction a les mêmes propriétés que la fonction $\overline{\nu}_I$, et permet de donner dans le cas réel une équivalence avec la clôture semi-intégrale.

Tous ces résultats algébriques nous servirons pour donner des interprétations algébriques de l'exposant de Lojasiewicz. Le résultat essentiel dans la deuxième partie est la proposition II.3.1.3, de laquelle on déduit que :

$$l(f,I) = 1/\overline{\mu}_I(f) = \inf\{\ a/b \ /\ f^a \in \overline{I^b}\ \}.$$

Dans la dernière partie, nous nous intéressons à un problème déjà posé par Bochnak et Risler [BR] , [Ri] : si on pose $\tilde{f}$ et $\tilde{I}$ les extensions de f et I à C^n (où C est la clôture algébrique close de R), et si on pose L(f,I) l'exposant de Lojasiewicz de $\tilde{f}$ par rapport à $\tilde{I}$ dans le cas complexe, à quelles conditions a-t-on l(f,I) = L(f,I) ? Nous donnons des réponses en utilisant les interprétations algébriques de l'exposant de Lojasiewicz dans le cas réel et dans le cas complexe.

Première partie :

EXPOSANTS DE ŁOJASIEWICZ POUR LES FONCTIONS SEMI-ALGEBRIQUES

§1 - Les fonctions semi-algébriques.

Un ensemble semi-algébrique de R^n (où R est un corps reél clos) est un ensemble qui est obtenu par une combinaison booleénne (obtenue par disjonction, conjonction et négation) de conditions de signes sur un nombre fini de polynômes de $R[X_1,...,X_n]$, autrement dit : les ensembles semi-algébriques de R^n forment la plus petite collection de parties de R^n contenant les ensembles de la forme $\{ x \in R^n / P(x) > 0 \}$ où P est un polynôme, et stable par intersection finie, réunion finie et passage au complémentaire.

Une application $f : S \to T$ d'un ensemble semi-algébrique S de R^n vers un ensemble semi-algébrique T de R^m est dite semi-algébrique si son graphe est semi- algébrique dans R^{n+m}.

PROPOSITION I.1.1 (voir [C]).

-Soit f une fonction semi-algébrique sur un ensemble semi-algébrique S de R^n . Il existe une partition de S en un nombre fini de semi-algébriques S_i $i=1,...,m$, et pour chaque i un polynôme $P_i(x,y)$ à n+1 variables tel que, pour tout a de S_i $P_i(a,y)$ n'est pas identiquement nul comme polynôme en y et $P(a,f(a))=0$.

PROPOSITION I.1.2

Soit f une fonction semi-algébrique sur un intervalle $]a,+\infty[$. Il existe $p \in \mathbb{N}$, et $c \in R$, tel que $|f(x)| \leqslant cx^p$, pour x suffisamment grand.

Preuve : Soit P le produit des P_i de la proposition I.1.1 , P est un polynôme à deux variables qui n'est pas identiquement nul, et on a :

$$P(x,y) = Q_0(x)y^m+Q_1(x)y^{m-1}+........+Q_m(x) \quad \text{où } Q_0 \text{ n'est pas identiquement nul.}$$

Si x est suffisamment grand, Q_0 n'est pas nul, et on a :

$$|f(x)|^m \leqslant 1 \;/\; |Q_0(x)| \,(|Q_1(x)|\,|f(x)|^{m-1} +..........+ |Q_m(x)|\,) \quad \text{et donc:}$$

$$|f(x)| \leqslant 1+ \;(|Q_1(x)| +.........+ |Q_m(x)|) \;/\; |Q_0(x)| \,.$$

Si p est le sup des degrés de $Q_1(x),.....,Q_m(x)$,on peut trouver une constante c tel que pour x suffisamment grand on ait : $|f(x)|\leqslant cx^p$. ∎

PROPOSITION I.1.3.

Soit f une fonction semi-algébrique localement bornée sur un fermé semi-algébrique X de R^n. Alors $|f|$ est majorée par un polynôme. Il existe $c\in R$ et $p\in \mathbb{N}$, tel que : $\forall x\in X \quad |f(x)| \leqslant c(1+\|x\|^2)^p \quad \forall x\in X$.

Preuve : On peut supposer que $|f|\geqslant 1$ et $0\in X$.
On pose :

$$v(r) = \mathrm{Sup}\{\, |f(x)| \;/\; x\in K_r \,\} \quad \text{où} \quad K_r= \{\, x\in X \;/\; \|x\|\leqslant r\}.$$

La fonction v est semi-algébrique croissante sur $[0,+\infty[$.

Dans le cas où $R=\mathbb{R}$. La fonction v(r) est finie, car on peut recouvrir K_r

par un nombre fini d'ouverts sur lesquels $|f|$ est majorée par une constante.

<u>Dans le cas où R est reél clos quelconque</u> : On va montrer que $v(r)$ est finie. En effet : Supposons que $v(r) = +\infty$ et soit :

$$A = \{ (x,u) \in X \times R \ / \ \|x\| \leq r \text{ et } u.|f(x)| = 1 \}.$$

On pose, $\pi : X \times R \to R$ e la projection.

On a $0 \in adh(\pi(A))$. Puisque $adh(A)$ est fermé borné, $\pi(adh(A))$ est fermé (proposition 2-5-8 [BCR]) et contient $adh(\pi(A))$, d'où $0 \in \pi(adh(A))$. On trouve ainsi un $x \in X$ tel que $(x,0)$ est dans l'adhérence de A. Ceci est contradictoire avec le fait que $|f|$ est majorée par une constante sur un voisinage de x.

En utilisant la proposition précédente et le fait que v est croissante on peut trouver une constante $c \in R$ et un entier p tel que :

$$|v(r)| \leq c(1+r^2)^p \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Ce qui donne ensuite la majoration de $|f(x)|$ par $c(1+\|x\|^2)^p$ pour tout $x \in X$. ■

<u>PROPOSITION I.1.4</u>.

Soit f une fonction semi-algébrique sur un intervalle $]0,1]$ non identiquement nulle sur un intervalle $]0,\varepsilon[$.

Il existe un nombre rationnel p/q et une fonction φ semi-algébrique continue sur un voisinage $[0,\varepsilon[$ avec $\varphi(0) \neq 0$ tel que $f(x) = x^{p/q}\varphi(x)$ pour x suffisamment petit.

Avant de donner la preuve de cette proposition on va préciser quelques résultats sur les séries de Puiseux qu'on trouve dans [W].

Soit K un corps commutatif, on note K[[x]] l'anneau des séries formelles sur K, une série formelle est de la forme $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$ elle est inversible si est seulement si $a_0\neq 0$.

On note K((x)) le corps des fractions de K[[x]], tout élément de K((x)) est de la forme :

$$f = x^h(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots) \quad \text{avec} \quad h\in\mathbb{Z} \text{ et } a_0\neq 0.$$

Le corps K((x)) est l'ensemble des séries formelles avec un nombre fini d'exposants négatifs, h est appelé l'ordre de f.

Soit $K(x)^*$ la réunion de tous les $K((x^{1/p}))$, p=1,2,....; où $K((x^{1/p}))$ est le corps des séries formelles en $x^{1/p}$. On appelle $K(x)^*$ le corps des séries de Puiseux sur K.

PROPOSITION I-1-5.

Si K est algébriquement clos, alors $K(x)^*$ est algébriquement clos.

Si K est réel clos, alors $K(x)^*$ est réel clos.

Preuve : Voir [W] page 89. ▪

Dans R(X) le corps des fractions rationnelles à une indéterminée on choisit l'ordre qui rend X positif et plus petit que tout nombre réel strictement positif. Cet ordre est noté 0^+. Le corps $k(0^+)$ la clôture reélle de R(X) pour cet ordre est le corps des séries de Puiseux algébriques en X à coefficients dans R. (voir [BCR] Chap.1).

Preuve : (de la proposition I-1-4.).

Dans le cas où $R=\mathbb{R}$:

La fonction f est semi-algébrique sur $]0,1]$. Il existe un polynôme $P(x,y)$ non identiquement nul tel que $P(x,f(x))=0$. La fonction f est développable au voisinage de zéro en une série de Puiseux réelle .

On peut écrire :

$f(x)=cx^{p/q}(1+\psi(x))$ pour x suffisamment petit avec $\psi(x)$ une serie de Puiseux à coefficients tous strictement positifs.

On vérifie facilement que $\eta=p/q$.

Dans le cas où R est réel clos quelconque :

On considère sur $R(X)$ l'ordre 0^+. On peut évaluer la fonction f en 0^+ (voir [BCR] Chap.7).

On a $f(0^+)\in k(0^+)$ est une série de Puiseux algébrique en X.

On peut écrire :

$f(0^+) = aX^{p/q}(1+ \psi(X))$ avec $\psi(X)$ une série de Puiseux algébrique à exposants tous strictement positifs qui est pour l'ordre sur $k(0^+)$ plus petite que tout nombre positif. D'après la proposition 7-4-1 [BCR]. Il existe pour tout $\delta\in R$, $\delta>0$, un intervalle $]0,\varepsilon[$ tel que pour tout $x\in]0,\varepsilon[$ on ait :

$$a(1-\delta)x^{p/q}\leqslant f(x) \leqslant a(1+\delta)x^{p/q}.$$

On pose $\varphi(x)=f(x)/\ x^{p/q}$ si $x\neq 0$ et $\varphi(0)=a\neq 0$. La fonction φ est continue. On a donc la proposition. ∎

COROLLAIRE I-1-6.

Soit f une fonction semi- algébrique sur $]0,1]$ non identiquement nulle sur un intervalle $]0,\varepsilon[$, on pose :

η = inf{ $\theta\in\mathbb{Q}^+$ tel qu'il existe une constante $c>0$ et $|f(x)|\geq cx^\theta$ pour x suffisamment petit}. Alors:

i) $\eta = p/q$ est un nombre rationnel.

ii) Il existe $c>0$ tel que $f(x)\sim cx^{p/q}$ pour x suffisamment petit.

Preuve : D'après la proposition précedente; il existe un nombre rationnel $p/q\in\mathbb{Q}$ et une fonction φ semi-algébrique continue au voisinage de 0, tel que ;

$f(x)=x^{p/q}\varphi(x)$ pour x suffisamment ,et que $\varphi(0)\neq 0$.

On va montrer que $\eta=p/q$.

Si $|f(x)|\geq cx^\theta$, on a $x^{p/q}\varphi(x)\geq cx^\theta$ d'où $p/q\leq\theta$ puisque $\varphi(0)\neq 0$.

Dans l'autre sens : Si $\varphi(0)=a$ on a $|f(x)|\geq a/2\ x^{p/q}$ pour x suffisamment petit. ∎

§ 2 - La rationalité de $l(f,g)$.

Soient f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble semi-algébrique fermé X. Si zéros$(g)\subset$zéros(f) on definit l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à g que l'on note par $l(f,g)$ comme la borne inférieure des nombres rationnels positifs θ tel qu'il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X, et l'on ait $|f(x)|^{\theta}\leqslant h(x)|g(x)|$ pour tout $x\in X$. On va montrer dans ce paragraphe que $l(f,g)$ est un nombre rationnel.

L'existence de $l(f,g)$ est donnée par le théorème de zéros pour les fonctions semi-algébriques.

<u>PROPOSITION I-2-1.</u> (Théorême des zéros reéls).

Soient f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble X semi-algébrique fermé de R^n avec zéros$(g)\subset$zéros(f) . Alors il existe un entier N et une fonction h semi-algébrique continue sur X, tel que :
$f^N = hg$.

<u>Preuve</u> : Voir la proposition 2-6-6 dans [BCR] .■

<u>PROPOSITION I.2.2.</u>

Soient f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble semi-algébrique fermé X avec zéros$(g)\subset$ zéros(f) . On pose :
$\eta = \inf\{\theta\in\mathbb{Q}^+/\ f^{\theta}/g$ prolongée par 0 quand $f(x)=0$ est continue sur $X\}$. Alors η est un nombre rationnel .

Preuve: Posons pour $x \in X$, $u \in R$:

$$K_{x,u} = \{ y \in X \ / \ \|x-y\| \leq 1 \ \text{ et } \ |f(y)| = u \}.$$

Et définissons la fonction $v(x,u)$ par :

$$v(x,u) = \inf\{ \ |g(y)| \ / \ y \in K_{x,u} \ \} \ \text{ si } K_{x,u} \neq \emptyset$$

$$\text{et } \ v(x,u) = 1 \qquad \text{ si } K_{x,u} = \emptyset.$$

La fonction v est semi-algébrique sur $X \times R$. On remarque que pour tout x,si $u \neq 0$ alors $v(x,u) \neq 0$. Pour tout nombre rationnel p/q , on pose

$$C_{p/q} = \{ x_0 \in \text{zéros}(f) \ , \exists c(x_0) > 0 \ / \ v(x_0,u) \sim c u^{p/q} \ \text{ pour u suffisamment petit } \}.$$

D'après le principe d'élimination des quantificateurs pour un corps reél clos, $C_{p/q}$ est un ensemble semi-algébrique de R^n, on note $\widetilde{C}_{p/q}$ le constructible qui lui associé par l'identification tilda voir [CR] .

Soit $\alpha \in \text{Spec}_r(R[X_1,\ldots\ldots,X_n])$ un cône premier . La fonction v peut s'étendre en une fonction semi-algébrique $v_{k(\alpha)} : X_{k(\alpha)} \times k(\alpha) \rightarrow k(\alpha)$ où $X_{k(\alpha)}$ est l'extension de X à $k(\alpha)$.

En prenant $\alpha \in \widetilde{\text{zéros}(f)}$ et en appliquant la proposition I-1-4 sur le corps reél clos $k(\alpha)$, il existe $c(\alpha) > 0$ et $p/q \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$v_{k(\alpha)}(x(\alpha),u) \sim c(\alpha) u^{p/q} \ \text{ pour u suffisamment petit.}$$

On a donc $\alpha \in \widetilde{C}_{p/q}$, ceci montre que les $\widetilde{C}_{p/q}$ forment un recouvrement de

$\widetilde{\text{zéros}(f)}$. D'après la compacité de la topologie du spectre reél [CR], zéros(f) n'est recouvert que par un nombre fini de $C_{p/q}$. D'où le nombre fini des p/q. En prenant le plus grand p/q quand x_0 varie dans zéros(f) on a :

" $\forall x_0 \in$ zéros(f) $\exists c(x_0)>0$ $|v(x_0,u)| \geq c(x_0)u^{p/q}$ et $\exists a_0 \in$ zéros(f) $\exists c(a_0)>0$ $v(a_0,u) \sim c(a_0)u^{p/q}$ pour u suffisamment petit " (*).

On va montrer que $\eta = p/q$.

La formule (*) entraine que sur $L = \{ y \in X \ / \ \|y-x_0\| \leq 1$ et $f(y) \neq 0\}$ on a :

$$c(x_0)|f(y)|^{p/q} \leq |g(y)| \text{ pour } |f(y)| \text{ assez petit. } (**)$$

Pour tout nombre rationnel $\varepsilon>0$ la fonction $f^{\varepsilon+p/q}/g$ prolongée par 0 quand

$f(x)=0$ est continue sur X, d'où $\eta \leq p/q$.

Si f^{θ}/g prolongée par 0 quand $f(x)=0$ est continue sur X alors f^{θ}/g est borné au voisinage de a_0 de la formule (*), donc sur ce voisinage on a $|g| \geq c|f|^{\theta}$. Ceci entraine que $p/q \leq \theta$, d'où $p/q \leq \eta$. ∎

PROPOSITION I-2-3.

Soit X un ensemble semi-algébrique fermé de R^n, f et g deux fonctions semi-algébriques tel que zéros(g) $\subset$ zéros(f) on pose :

$$l(f,g) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \ / \text{ il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X,}$$
$$\text{et } |f(x)|^\theta \leqslant h(x)|g(x)| \quad \forall x \in X\}.$$ Alors :

i) $l(f,g)=p/q$ est un nombre rationnel.

ii) Il existe une fonction semi-algébrique h continue sur $\tilde{X}$ telle que $|f(x)|^{p/q} \leqslant h(x)|g(x)| \ \forall x \in X$.

<u>Preuve</u> : i) On pose:

$p/q = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+$ tel que f^θ/g prolongée par 0 quand $f(x)=0$ est continue sur X$\}$.

On va montrer que $l(f,g)=p/q$.

Si $|f|^\theta \leqslant h|g|$ sur X ,on a pour tout un nombre rationnel ε positif que $f^{\theta+\varepsilon}/g$ prolongée par 0 quand $f(x)=0$ est continue sur X donc $p/q \leqslant \theta+\varepsilon$ pour tout ε, et $p/q \leqslant l(f,g)$.

Pour montrer l'autre inégalité il suffit de montrer ii) pour l'exposant p/q.

On pose :

$$k(x)=f(x)^{p/q}/g(x) \quad \text{si } f(x)\neq 0$$
$$\text{et} \quad k(x)=0 \quad \text{si } f(x)=0.$$

La fonction k est semi-algébrique localement bornée sur X d'après la formule (**) de la preuve de la proposition I-2-1 ; donc k est majorée par un polynôme h d'après la proposition I-1-3. On a pour tout $x \in X$ $|f(x)|^{p/q} \leqslant h(x)|g(x)|$. ■

Si X est un ensemble semi-algébrique, la fonction $x \rightarrow d(x,X)$ est une fonction semi-algébrique ([BCR]). On a les corollaires suivants :

<u>COROLLAIRE 1-2-4.</u>

Soit g une fonction semi-algébrique sur un ensemble semi-algébrique X. On pose $Z=$zéros(g). On pose :

$l(g) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \ /$ il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X telle que : $d(x,Z)^\theta \leqslant h(x)|g(x)| \ \ \forall x \in X \}$.

Alors :

i) $l(g)=p/q$ est un nombre rationnel.

ii) Il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X telle que

$d(x,Z)^{p/q} \leqslant h(x)|g(x)| \ \ \forall x \in X$.

<u>COROLLAIRE 1-2-5.</u>

Soient A et B deux sous ensembles semi-algébriques fermés dans X. On pose :

$l(A,B) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ , \exists h$ semi-algébrique continue sur A telle que :

$d(x,A \cap B)^\theta \leqslant h(x)d(x,B) \ \ \forall x \in A \}$. Alors :

i) $l(A,B)=p/q$ est un nombre rationnel.

ii) Il existe une fonction semi-algébrique h continue sur A telle que $d(x,A \cap B)^{p/q} \leqslant h(x)d(x,B) \ \ \forall x \in A$.

§3 - Inégalités de Lojasiewicz avec un paramètre.

Nous étudions dans ce paragraphe les exposants de Lojasiewicz dans $R^n \times R^p$ avec un parametre t de R^p. Nous nous intéresserons à la borne inférieure de ces exposants quand t varie dans R^p.

Soit X un ensemble semi-algébrique de $R^n \times R^p$. On peut considérer X comme une famille de sous ensembles de R^n parametrisée par R^p. La fibre de X au point t de R^p est :

$$X_t = \{ x \in R^n \ / \ (x,t) \in X \}$$

La restriction de la famille X au sous ensemble S de R^p est :

$$X|S = X \cap (R^n \times S).$$

Si $f : X \to Y$ une fonction semi-algébrique de $X \subset R^n \times R^p$ vers $Y \subset R^m \times R^p$ qui commute avec la projection sur R^p, la fibre de f en t est la fonction semi-algébrique $f_t : X_t \to Y_t$ définie par:

$$f_t(x)=y \iff f(x,t)=(y,t).$$

Soit $\alpha \in \widetilde{R^p} = \mathrm{Spec}_R(R[X_1,\dots,X_p])$, on peut aussi définir la fibre de X au point α. Si X est definie par une formule $\Phi(x;t)$ de premier ordre alors :

$$X_\alpha = \{ x \in k(\alpha)^n \ / \ \Phi(x,T(\alpha)) \} \subset k(\alpha)^n .$$

Elle ne dépend que de X et non pas du choix de Φ. La fibre X_α est appelée la fibre de la famille X en α. (proposition 7-4-4 chap. 7).

Si $f : X \rightarrow Y$ une fonction semi-algébrique. On definit la fibre f_α de f au point α de R^p par :

[graphe(f)]$_\alpha \subset k(\alpha)^n \times k(\alpha)^m$ est le graphe de $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$.

Le résultat essentiel dans l'étude des fibres des familles d'ensembles et de fonctions semi-algébriques est le fait qu'une propriéte d'une fibre en $\alpha \in \widetilde{R^p}$, reste valable sur un sous ensemble semi-algébrique $S \subset R^p$ tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ [BCR] (proposition 7-4-4).

Dans [Ra] , [LW] et [T] on trouve des travaux sur les inégalités de Lojasiewicz avec un paramètre.

PROPOSITION I-3-1.

Soient A un fermé semi-algébrique de $R^n \times R^p$, f(x,t) et g(x,t) deux fonctions semi-algébriques continues en x sur A, tels que zéros(g) $\subset$ zéros(f). Alors .

Il existe une partition en semi-algébriques finie $R^p = \cup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|S_i \rightarrow R$, et des nombres rationnels p_i/q_i, tels que :

i) $|f(x,t))|^{p_i/q_i} \leq h_i(x,t)|g(x,t))|$ sur $A|S_i$.

ii) p_i/q_i est l'exposant de Lojasiewicz $l(f_t,g_t)$ pour $t \in S_i$.

__Preuve__ : On pose $f_t(x)=f(x,t)$ et $g_t(x)=g(x,t)$ les fibres en t de f et g.

Les fonctions f_t et g_t sont semi-algébriques sur A_t.

On note $p/q = \eta_t$ l'exposant de Lojasiewicz de f_t par rapport à g_t sur A_t.

Ce p/q vérifie la formule suivante (voir la formule (*) de la preuve de la proposition I-2-1) :

" $\forall\ x_0 \in$ zéros(f_t), $\exists c(x_0)>0\ \ |v_t(x_0,u)| \geq cu^{p/q}$ et $\exists a_0 \in$ zéros(f_t) ; $\exists c(a_0)>0$ $v_t(a_0,u) \sim cu^{p/q}$ pour u suffisamment petit "

où v_t est la fonction v , en remplaçant f par f_t et g par g_t.

On va montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'exposants rationnels p/q qui verifient cette formule quand t varie dans R^p.

On raisonne comme dans la preuve de la proposition I-2-2 on pose pour un nombre rationnel p/q :

$D_{p/q} = \{t \in R^p,\ \forall x_0$ zéros$(f_t)\ \ \exists c>0\ \ |v_t(x_0,u)| \geq c(x_0)u^{p/q}$ et $\exists\ a_0 \in$ zéros(f_t) $\exists c(a_0)>0\ \ v_t(a_0,u) \sim c(a_0)u^{p/q}$ pour u suffisamment petit $\}$.

L'ensemble $D_{p/q}$ est un semi-algébrique de R^p.

Soit $\alpha \in \widetilde{R^p}$. D'aprés la preuve de la proposition 1-2-2 (appliquée à f_α et g_α) il existe un nombre rationnel p/q tel que $\alpha \in \widetilde{D_{p/q}}$. Ceci montre que les $\widetilde{D_{p/q}}$ recouvrent $\widetilde{R^p}$ et donc d'après la compacité de la topologie du spectre réel R^p est reunion d'un nombre fini de $D_{p/q}$. De plus si $\alpha \in \widetilde{D_{p/q}}$, alors l'exposant de Lojasiewicz de f_α par rapport à g_α est p/q et donc il existe une fonction semi-algebrique continue $H : X_\alpha \to k(\alpha)$ telle que :

$$|f_\alpha(x)|^{p/q} \leqslant H(x)|g_\alpha(x)| \quad \text{sur } X_\alpha$$

La fonction H est la fibre en α d'une fonction semi-algébrique continue $h : X|S^\alpha \to R$ ([BCR] prop. 7-4-8) avec $\alpha \in \widetilde{S^\alpha}$, et on peut supposer que $S^\alpha \subset D_{p/q}$ et que sur S^α on a :

$$|f(x,t)|^{p/q} \leqslant h(x,t)|g(x,t)| .$$

Les $\widetilde{S^\alpha}$ recouvrent $\widetilde{R^p}$, et donc par compacité on peut en extraire un recouvrement fini : $R^p = \cup_{i \in I} S_i$, avec I finie. ■

COROLLAIRE I-3-2.

Soit $g(x,t)$ une fonction semi-algébrique continue en x. On pose Z=zéros(g) on a :

Il existe une partition en semi-algébriques finie $R^p = \cup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|S_i \to R$, et des p_i/q_i tels que :

i) $d(x;Z_t)^{p_i/q_i} \leqslant h_i(x,t)|g_t(x)| \quad \forall x \in A_t$.

ii) p_i/q_i est l'exposant de Lojasiewicz de g_t par rapport à $d(x,Z_t)$ pour t variant dans S_i.

COROLLAIRE I-3-3.

Soient A et B deux ensembles semi-algébriques fermés de $R^n \times R^p$. Alors: Il existe une partition en semi-algébriques finie $R^p = \cup S_i$; des fonctions $h_i : A|S_i \to R$, et des p_i/q_i tels que :

i) $d(x, A_t \cap B_t)^{p_i/q_i} \leqslant h_i(x,t) d(x, B_t)$ $\forall\ x \in A_t$ et pour $\forall\ t \in S_i$.

ii) p_i/q_i est l'exposant de Lojasiewicz de $d(x,B_t)$ par rapport à $d(x, A_t \cap B_t)$, pour t variant dans S_i.

§4 - Exposants de Lojasiewicz et courbes semi-algébriques.

Les exposants de Lojasiewicz sur un ensemble semi-analytique fermé borné ont été étudiés par Bochnak et Risler [BR] où ils ont démontré la rationalité de la borne inférieure de ces exposants, et que cette borne est atteinte sur une courbe semi-algébrique.

Dans ce paragraphe on va exposer ces résultats , puis on démontrera dans le cas où X est fermé non borné que l'exposant de Lojasiewicz est atteint sur une courbe semi-algébrique sur X, en se ramenant à la sphère unité S^n de R^{n+1}. On remarquera dans les preuves que pour se ramener au cas fermé borné on utilise d'une manière essentielle le fait que l'exposant de Lojasiewicz est rationnel dans le cas non borné et que l'on a une inégalité pour cet exposant (proposition I-2-2).

<u>PROPOSITION I-4-1.</u>([BR]).

Soit K un ensemble semi-algébrique fermé borné de R^n, f et g deux fonctions semi-algébriques sur K telsque $\emptyset \neq$ zéros(g)$\subset$zéros(f) on pose : $l_K(f,g) = \inf\{ \theta\in\mathbb{Q}^+ \ \exists c\in R \ / \ |f(x)|^\theta \leq c|g(x)| \ \forall x\in K \}$. Alors:

i) $l_K(f,g) = p/q$ est un nombre rationnel.

ii) Il existe $c\in K$ telle que $|f(x)|^{p/q} \leq c|g(x)| \quad \forall x\in K$.

iii) Il existe une courbe semi-algebrique $\tau : [0,1] \to K$ telle que $l_K(f,g)$ est egale à l'exposant de Lojasiewicz calculé sur l'image de τ.

<u>Preuve:</u> On peut supposer $f\geq 0$ et $g\geq 0$ sur K.

posons :

$$K^{*}=\{u\in K\setminus \text{zéros}(f), \text{ telque } f(x)=f(u) \Rightarrow g(x)\geq g(u)\}.$$

L'ensemble K^{*} est semi-algébrique borné .

Soit $a\in f^{-1}(0)$ tel que a soit adhérent à K^{*} (un tel a existe puisque K est fermé borné).

D'après le lemme de sélection de courbes [BCR], [C], il existe une courbe semi- algébrique $\tau : [0,1] \rightarrow K$ telle que $\tau(0)=a$ et $\tau(t)\in K^{*}$ pour $t\in]0,1[$.

On peut écrire d'après la proposition I-1-4 :

$f o\tau(t)=t^{\alpha}\varphi_1(t)$ et $f o\tau(t)=t^{\beta}\varphi_2(t)$ avec $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ non nuls et α, β deux nombres rationnels positifs.

Il suffit de montrer que $l_K(f,g) = \beta/\alpha$ pour prouver la proposition.

On a évidemment $l_K(f,g)\geq \beta/\alpha$, car β/α est l'exposant de Lojasiewicz pour la restriction de f et g à $\tau([0,\varepsilon[)$ pour ε convenable.

Choisissons $r>0$ tel que $f^{-1}(\zeta)\cap\tau([0,\varepsilon[)\neq\varnothing$ pour $\zeta\in[0,r]$, comme K est fermé borné il suffit de se borner aux $x\in K$ tels que $f(x)\in[0,r]$, (rappellons par hypothèse que zéros(g) $\subset$ zéros(f)); mais pour un tel x ,il existe $u\in\tau([0,\varepsilon[)$ tel que $f(x)=f(u)$ et $g(x)\geq g(u)$, d'où l'assertion puisqu'on a choisi ε assez petit pour que β/α soit l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à g sur la courbe $\tau([0,\varepsilon[)$. ∎

PROPOSITION I-4-2.

Soient f et g deux fonctions semi-algébriques sur un ensemble semi-algébrique fermé X avec zéros$(g) \subset$ zéros(f). Il existe une courbe semi-algébrique $\tau :]0,1[\to X$ telle que $l(f,g)$ est égale à l'exposant de Lojasiewicz calculé sur l'image de τ.

Preuve : Posons $p/q = l(f,g)$. Il existe une fonction semi-algébrique h continue sur X telle que $|f(x)|^{p/q} \leq h(x)|g(x)| \quad \forall x \in X$.

La proposition I-1-3 nous permet de trouver un entier N tel que si on pose:

$\delta = 1/(1+\|x\|^2)^N$ on ait $\delta^{q/p}f$ et δhg tendent vers 0 quand $\|x\| \to \infty$.

On note S^n la sphère unité de R^{n+1} et ∞ son pôle nord. La projection stéréographique $\pi : S^n \backslash \{\infty\} \to X$ est une fonction semi-algébrique.

On définit les fonctions F et G sur $\pi^{-1}(X) \cup \{\infty\}$ par :

$$F(y) = (\delta^{q/p} f)(\pi(y)) \ ;$$

$$G(y) = (\delta hg)(\pi(y)) \text{ pour tout } y \in \pi^{-1}(X)$$

et $\quad F(\infty) = G(\infty) = 0.$

Les fonctions F et G sont semi-algébriques continues sur $\pi^{-1}(X) \cup \{\infty\}$.

On pose :

$$p'/q' = \inf\{ \theta \in \mathbb{Q}^+ ,\ \exists c \geq 0 \ |F(y)|^\theta \leq c|G(y)| \ \forall y \in \pi^{-1}(X) \cup \{\infty\} \ \}.$$

Ce p'/q' est aussi l'exposant de Lojasiewicz de F par rapport à G calculé sur une courbe semi-algébrique γ sur la sphère S^n. Nous allons montrer que $p/q=p'/q'$, ce qui achevera la preuve car p/q sera l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à g calculé sur $\pi(\gamma)$ qui est une courbe semi-algébrique sur X .

Multiplions l'inégalité $|f(x)|^{p/q} \leqslant h(x)|g(x)|$ par δ on obtient:

$$|\delta^{q/p} f(x)|^{p/q} \leqslant |\delta h g(x)| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On a pour tout $x\in X$ il existe $y\in\pi^{-1}(X)\setminus\{\infty\}$, tel que $\pi(y)=x$. L'inégalité s'écrit:

$$|\delta^{q/p} f(\pi(y))| \leqslant |\delta h g(y)| \text{ soit } |F(y)|^{p/q} \leqslant |G(y)| \text{ pour tout } y\in\pi^{-1}(X)\setminus\{\infty\}.$$

Cette inégalité reste vraie quand $y=\infty$, puisque $F(\infty)=G(\infty)=0$. Ceci montre que $p'/q'\leqslant p/q$.

L'autre inégalité :

Si $|F(y)|^{p'/q'} \leqslant c|G(y)|$ pour tout $y\in\pi^{-1}(X)\cup\{\infty\}$ on a :

$$|\delta f^{q/p}(\pi(y))|^{p'/q'} \leqslant c|\delta h g(y)|.$$

On pose $x = \pi(y)\in X$ on a :

$$\forall x\in X \quad |\delta^{q/p} f(x)|^{p'/q'} < c|\delta h g(x)| \quad \text{soit :}$$

Pour tout $x\in X \quad |f(x)|^{p'/q'} \leqslant c\delta^{(1-qp'/pq')} h(x)|g(x)|$.

D'où $p'/q'\geqslant p/q$ et on a l'égalité. ∎

COROLLAIRE I-4-3.

Soient $f(x,t)$ et $g(x,t)$ deux fonctions semi-algébriques continues en x sur X de $R^n \times R^p$ avec zéros(g) $\subset$ zéros(f). Il existe une partition en semi-algébriques finie de la projection de X sur R^p telle que, l'exposant de Lojasiewicz $l_{S_i}(f;g)$ sur $X|S_i$ est égal à l'exposant de Lojasiewicz calculé sur une famille de courbes semi-algébriques $\Gamma :]0,1[\times S_i \to X|S_i$ (Γ commutant à la projection sur S_i).

Preuve : On note $l(f_\alpha,g_\alpha)$ l'exposant de Lojasiewicz de f_α par rapport à g_α sur X_α.

D'après la proposition précédente, il existe une courbe semi-algébrique $\gamma:]0,1[_{k(\alpha)} \to X_\alpha$ sur laquelle l'exposant est atteint, γ est la fibre en α d'une famille de courbes $\Gamma:]0,1[\times S^\alpha \to X|S^\alpha$ où Γ est semi-algebrique continue, avec $\alpha \in \widetilde{S^\alpha}$. Quitte à restreindre S^α , on peut supposer que l'exposant $l(f_t,g_t)$ reste constant et égal à $l(f_\alpha,g_\alpha)$ pour $t \in S^\alpha$, et que cet exposant est atteint sur la courbe Γ_t.

Les $\widetilde{S^\alpha}$ recouvrent le tilda de la projection de X sur R^p, donc par compacité un nombre fini de ces S^α recouvre la projection de X sur R^p. ∎

Deuxième partie :

INTERPRETATIONS ALGEBRIQUES DE L'EXPOSANT DE LOJASIEWICZ

§1 - Clôture semi-intégrale d'un anneau et d'un idéal.

DEFINITION II-1-1.

Un corps ordonné $(K,\leqslant)$ est un corps K muni d'un ordre total $\leqslant$ qui vérifie :

i) $x\leqslant y \Rightarrow x+z\leqslant y+z$.

ii) $0\leqslant x$, $0\leqslant y \Rightarrow 0\leqslant xy$.

DEFINITION II-1-2.

Un cône d'un corps K est une partie α de K telle que :

i) $x\in\alpha$, $y\in\alpha \Rightarrow x+y\in\alpha$.

ii) $x\in\alpha$, $y\in\alpha \Rightarrow xy\in\alpha$.

iii) $x\in K\Rightarrow x^2\in\alpha$.

le cône α est dit propre si de plus :

iv) $-1\notin\alpha$.

PROPOSITION ET DEFINITION II-1-3.

Soit $(K,\leqslant)$ un corps ordonné. On appelle cône positif de $(K,\leqslant)$, la partie $\alpha = \{x\in K \ / \ x\geqslant 0\}$. C'est un cône propre qui vérifie :

v) $\alpha \cup -\alpha = K$ (où $-\alpha=\{x\in K \ / \ -x\in\alpha\}$).

Réciproquement si α est un cône propre d'un corps K qui vérifie v), K est ordonneé par $x\leqslant y \Leftrightarrow y-x\in\alpha$.

On note $\sum K^2$ l'ensemble des sommes carrés d'éléments de K. c'est un cône de K contenu dans tous les cônes de K.

Si α est un cône on écrit $0\leqslant_\alpha x$ au lieu de $x\in\alpha$.

LEMME II-1-4.

Soit α un cône propre de K.

i) Si $-a \notin \alpha$ alors $\alpha[a] = \{x+ay \ / \ x,y \in \alpha\}$ est un cône propre de K.

ii) α est contenu dans un cône positif d'ordre sur K.

Preuve : i) Montrons que $-1 \notin \alpha[a]$: si $-1=x+ay$ avec $x,y \in \alpha$, alors soit $y=0$ et $-1 \in \alpha$, soit $-a=(1/y)^2y(1+x) \in \alpha$. Les deux cas sont exclus.

ii) D'après le lemme de Zorn il existe un cône propre maximal Q contenant α, il suffit de voir que $Q \cup -Q = K$. Soit $a \notin Q$, d'après i), $Q[-a]$ est un cône propre et donc, par maximalité de Q, $Q=Q[-a]$. Ceci entraîne que $-a \in Q$. ∎

PROPOSITION II-1-5.

Soit K un corps contenant $\mathbb{Q}$, α un cône de K. Alors α est l'intersection des cônes positifs d'ordres sur K qui contiennent α.

Preuve: Le cône α est contenu dans cette intersection. Dans l'autre sens, si $a \notin \alpha$, α est propre car si $-1 \in \alpha$, $a = 1/4\,((1+a)^2-(1-a)^2) \in \alpha$. Donc d'après le lemme précédent (i), $\alpha[-a]$ est propre ; et le (ii) nous donne un cône positif d'ordre contenant $\alpha[-a]$, qui donc contient α et ne contient pas a ∎

DEFINITION II-1-6.

On dit qu'un sous groupe additif B de K est α-convexe si :

$x,y \in \alpha \quad x+y \in B \Rightarrow x \in B$ et $y \in B$ (Autrement dit : $x,y \in K^* \quad 0 \leq_\alpha x \leq_\alpha y$, $y \in B \Rightarrow x \in B$).

On va rappeler quelques notions sur les anneaux de valuations, qu'on peut trouver plus en détail dans [La], [ZS].

DEFINITION II-1-7.

Soit K un corps commutatif.

i) Un anneau de valuation de K est un sous anneau B de K tel que $\forall x \in K$, $x \neq 0 \Rightarrow x \in B$ ou $1/x \in B$.

ii) Une valuation de K est une application $v : K^* \to \Gamma$ où Γ est un groupe commutatif totalement ordonné noté additivement tels que:

$v(xy) = v(x)+v(y)$ et $v(x+y) \geqslant \inf(v(x),v(y))$ si $x+y \neq 0$.

Un anneau de valuation B d'un corps K est un anneau local. On note m_B son idéal maximal, $U_B = B - m_B$ le groupe multiplicatif de ses éléments inversibles et $k_B = B/m_B$ son corps résiduel.

L'application canonique : $v_B : K^* \to \Gamma_B = K^*/U_B$ où Γ_B est ordonné par : $v_B(x) \leqslant v_B(y) \Leftrightarrow yx^{-1} \in B$ est une valuation.

Inversement : si $v : K^* \to \Gamma$ est une valuation de K, on a :

$B = \{x \in K$, $x=0$ ou $v(x) \geqslant 0\}$ est un anneau de valuation de K et

$m_B = \{x \in K$, $x=0$ ou $v(x)>0\}$;

$U_B = \{x \in K$, $x \neq 0$ et $v(x)=0\}$;

$K \setminus B = \{x \in K$, $v(x)<0\}$.

On note A_v l'anneau de valuation associé à la valuation v.

PROPOSITION II-1-8.

Soit α un cône propre de K , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A_v est un anneau de valuation α-convexe.

ii) $\forall x,y \in K^*$ $0 \leqslant_\alpha x \leqslant_\alpha y \Rightarrow v(x) \geqslant v(y)$ dans Γ.

iii) L'idéal maximal m_v est $\alpha \cap A$-convexe.

iv) $\forall x \in m_v$ $1+x \,_\alpha\!>0$.

Preuve : On va montrer que i⇒ii⇒iii⇒iv⇒i (on omet l'indice α dans les inégalités).

i)⇒ii) $x,y \in K^*$ $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy^{-1} \leqslant 1$, $1 \in A_V \Rightarrow xy^{-1} \in A_v$ ce qui signifie que $v(x) \geqslant v(y)$.

ii)⇒iii). $0 \leqslant x \leqslant y$, $y \in m_v \Rightarrow v(x) \geqslant v(y) > 0 \Rightarrow v(x)>0$ et donc $x \in m_v$.

iii)⇒iv). S'il existe $x \in m_v$ tel que $1+x \leqslant 0$ ceci implique que $0 \leqslant 1 \leqslant -x$, comme m_v est α-convexe on a $1 \in m_v$ contradiction.

iv)⇒i). Si A_v n'est pas α-convexe on peut trouver $x \in A_v$ et $y \notin A_v$ tels que $0 \leqslant y \leqslant x$, d'où $y^{-1} \in m_v$ et $xy^{-1} \geqslant 1$ contradiction. ■

PROPOSITION II-1-9.

Soient β un cône positif de K , A un sous anneau de K $A_\beta = \{x \in K \ / \ \exists a \in A \ \ -a \leqslant_\beta x \leqslant_\beta a \}$ est un anneau de valuation β-convexe contenant A. A_β est appelé l'enveloppe β-convexe de A dans K.

Preuve : Le cône positif β est un ordre total.

Si $x \notin B$ on a $-1 \leqslant 1/x \leqslant 1$ et donc $1/x \in B$. D'où A_β est un anneau de valuation.

L'anneau A_β est β-convexe en effet :

Si $x;y\in K^*$ et $0\leqslant x\leqslant y$ on a $0\leqslant xy^{-1}\leqslant 1$ et donc $xy^{-1}\in A_\beta$.

Ce qui donne $v(xy^{-1})\geqslant 0$ soit $v(x)\geqslant v(y)$. ∎

Dans la suite on suppose que le corps K contient $\mathbb{Q}$, α est un cône propre de K et A un sous anneau de K.

DEFINITION II-1-10.

On dit qu'un élément $x\in K$ est semi-entier sur A (pour le cône α) s'il existe $n\geqslant 0$; $a_1,\ldots\ldots,a_{2n}\in A$ tels que :

$$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}\leqslant_\alpha 0 .$$

Les éléments semi-entiers sur un anneau sont caractérisés par la proposition suivante, qui est l'analogue réel aux resultats sur la clôture intégrale d'un anneau [Z S].

PROPOSITION II-1-11.

Les ensembles de K suivants coïncident :

i) $A_1=\{x\in K\ /\ \exists n\geqslant 1\quad \exists a\in A\quad -a\leqslant_\alpha x\leqslant_\alpha a\}$.

ii) $A_2=\{x\in K\ /\ \exists a\in A$ tel que $x^2\leqslant_\alpha a^2\}$.

iii) $A_3=\{x\in K\ /\ \exists a_i\in A\ \ x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}\leqslant_\alpha 0\}$.

iv) $A_4=\cap A_v$ (où A_v est α-convexe).

On note $\overline{A}=A_1=A_2=A_3=A_4$, $\overline{A}$ est appelé la clôture semi-intégrale de A dans K pour le cône α.

__Preuve__ : $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ est clair.

~~$A_3 \subset A_4$~~: Soient $x \in A_3$ et $x \neq 0$ on a :

$$0 \leqslant_\alpha x^{2n} \leqslant_\alpha -a_1 x^{2n-1} - \ldots\ldots - a_{2n} \qquad a_i \in A.$$

Pour toute valuation v α-convexe (avec $A_v \supset A$) on a :

$$v(x^{2n}) \geqslant \inf_{k/a_k \neq 0}(v(-a_k)+(2n-k)v(x)) .$$

On suppose que l'inf est atteint pour $k=k_0$ on a :

$$2nv(x) \geqslant 2nv(x)-k_0 v(x) \text{ soit } v(x) \geqslant 0 .$$

Donc $x \in A_v$ pour toute anneau de valuation α-convexe contenant A, d'où $x \in A_4$.

~~$A_2 \subset A_1$~~. Le cône propre α est l'intersection de tous les cônes positifs β contenants α.
Pour tout ordre β ; on a $x^2 \leqslant_\beta a^2 \Rightarrow -(1+a^2) \leqslant_\beta x \leqslant_\beta (1+a^2)$. D'où l'implication pour α.

~~$A_4 \subset A_2$~~. Soit $x \notin A_2$ on a $a^2 - x^2 \notin \alpha$ pour tout $a \in A$.
On pose $C=\alpha[x^2-a^2]$ .Ce cône est propre, car sinon , il existerait des éléments $a_1,\ldots,a_k$ tels que le cône $\alpha[x^2-(1+a_1^2+\ldots+a_k^2)^2]$ ne soit pas propre , et d'aprés la proposition II-1-4 on aurait $(1+a_1^2+\ldots+a_k^2)^2-x^2 \in \alpha$ ce qui est

contradictoire avec l'hypothèse.

D'après II-1-4 le cône C est l'intersection de tous les cônes positifs β qui le contiennent. On notant A_β l'envellope de A dans K pour l'ordre β qui est un anneau de valuation α-convexe, on a $x \notin A_\beta$, d'où $x \notin A_4$. ∎

Soient K un corps , v une valuation de K et Γ le groupe des ordres de v. On dit que v est discrète de rang 1 s'il existe un isomorphisme du groupe Γ sur $\mathbb{Z}$, A_v n'a d'autres idéaux premiers que 0 et $\mathbf{m}_v$.

Soit k est un corps contenu dans K . On suppose que K est une extension de type fini de k . On appelle diviseur premier du corps K/k une valuation de K de dimention r-1 sur k, où r est le degré de trancendance de K/k. C'est une valuation discrète de rang 1. Le corps résiduel k_v est un corps de fonctions de degré r-1 sur K.

On a le résultat suivant qu'on trouve dans [An], [B2] .

PROPOSITION II-1-12.

Soit $A = R[x_1,\ldots,x_n]$ une algèbre de type fini sur un corps réel clos R, de corps de fractions K. Soit $\alpha = \sum k^2 [P_1,\ldots,P_r]$. Pour tout idéal P premier $\alpha \cap A$-convexe il existe un diviseur premier réel A_v qui admet P comme centre en A (c.a.d $\mathbf{m}_v \cap A = P$).

La proposition précédente nous permet de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION II-1-13.

Soit $A = R[x_1,\dots,x_n]$ une R algébre de type fini de corps de fractions K ; $\alpha = \sum K^2 [P_1,\dots,P_r]$ et $\bar{A}$ la clôture semi-intégrale de A dans K pour le cône α on a :

$\bar{A}=\cap A_v$ (A_v est diviseur premier réel de K contenant A).

Preuve : Soit $y \notin \bar{A}=\cap A_v$ l'intersection est prise sur tous les anneaux de valuations α-convexes A_v.

Supposons que $y \notin A_v$. Alors $1/y \in m_v$ et considérons $A'=A[1/y]$, c'est une algèbre de type fini sur R, avec $A' \subset A_v$ et $1/y \in m' = m_v \cap A$. En appliquant la proposition précédente on trouve un diviseur premier α-convexe $A_{v'} \supset A$ de centre $m_{v'} \cap A = m'$. D'où $1/y \in m' \subset m_{v'}$ et $y \notin A_{v'}$. ▪

On va maintenant définir la clôture semi-intégrale d'un idéal I de A.

DEFINITION II-1-14.

On dit qu'un élement $x \in A$ est semi-entier sur l'idéal I pour le cône α , s'il existe $n \geq 1$ et des $a_i \in I^i$ tels que : $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\dots+a_{2n} \leq_\alpha 0$.

L'ensemble des éléments x semi-entiers sur l'idéal I est un idéal appelé la clôture semi-intégrale de I dans A pour le cône α et noté $\bar{I}$. On dit que I est semi-intégralement clos si $I=\bar{I}$.

Dans la suite on caractérisera les éléments semi-entiers de A sur l'idéal I pour le cône α, en utilisant les anneaux de valuations α-convexes de K contenant A. Ce qui donne un analogue réel aux résultats sur la clôture intégrale d'un idéal [Ng] et [ZS].

On démontre tout d'abord trois lemmes.

LEMME I-1-15.

Soit $g_1,\dots,g_s$ des éléments non nuls de A ; et v une valuation α-convexe.

On a : $v(g_1^2+\dots+g_s^2)=2\inf v(g_i)$.

Preuve: On a $v(g_1^2+\dots+g_s^2) \geq \inf(v(g_i^2)) = 2\inf v(g_i)$.

Dans l'autre sens : On suppose que $v(g_1) = \inf v(g_i)$ on a :

$0 \leq g_1^2 \leq g_1^2+\dots+g_s^2$ implique que $2v(g_1) \geq v(g_1^2+\dots+g_s^2)$.

D'où l'égalité. ■

LEMME II-1-16.

Soient $x \in A$ non nul, et v une valuation α-convexe avec $A \subset A_v$ on a :

Si $x \in I^k$ alors il existe $g \in I$ et $v(x) \geq kv(g)$.

Preuve : Si $x \in I^k$, on a $x=\sum b_i h_i$ avec h_i un produit de k elements de I et $b \in A$. En notant g l'elément de I qui a la plus petite valuation parmi les éléments de I qui apparaissent dans x on a $v(x) \geq kv(g)$. ■

LEMME II-1-17.

Soient β un cône positif de K, et A_β l'enveloppe β-convexe de A dans K pour l'ordre β. I un idéal de A, on a :

$$IA_\beta \cap A = \{ x \in A \text{ tel que : il existe } g \in I \text{ et } a \in A \text{ et } x^2 \leq_\beta g^2 \}.$$

Preuve: Soit $x \in IA_\beta \cap A$. Il existe des $a_i \in A_\beta$ et des $g_i \in I$, tel que si on note v la valuation associée à A_β:

$$v(x) \geq \inf(v(g_i)).$$

En supposant que $v(g_1)=\inf(v(g_i))$ on a $x/g_1 \in A_\beta$. Il existe $a \in A$ tel que:

$$x^2/g_1{}^2 \leq_\beta a^2 \text{ et donc } x^2 \leq g^2 \text{ en posant } g=ag_1.$$

Dans l'autre sens , si on note v la valuation associé à A_β, on a $v(x^2) \geq v(g^2)$ d'où $v(x) \geq v(g)$, et $x \in IA_\beta \cap A$. ■

PROPOSITION II-1-18.

Les sous ensembles de A suivants coïncident:

$B_1 = \{x \in A \ / \exists n \geq 1 \ , \exists a_i \in I^i \text{ et } \ x^{2n}+a_1x^{2n-1}+......+a_{2n} \leq_\alpha 0 \ \}$.

$B_2 = \cap \ IA_v \cap A$ (où A_v est α-convexe contenant A).

$B_3 = I\bar{A} \cap A$ (où A est la clôture semi-intégrale de A dans K pour l'ordre α)

$B_4 = \{ \ x \in A \ / \ $ Il existe des $g_i \in I$ tel que $x^2 \leq g_1{}^2+....+g_s{}^2 \ \}$.

On note $\bar{I}=B_1=B_2=B_3=B_4$ qu'on appelle la clôture semi-intégrale de I dans A pour le cône α.

Preuve :

$B_1 \subset B_2$: Soit $x \in B_1$ non nul, pour toute valuation v α-convexe on a:

$$v(x^{2n}) \geq v(-a_1x^{2n-1} - .... - a_{2n} \ ) \text{ soit :}$$

$$2nv(x) \geq \inf_k (v(a_k)+(2n-k)v(x)) \ .$$

En supposant que l'inf est atteint pour $k=k_0$, on a :

$$2nv(x) \geqslant v(a_{k_0})+(2n-k_0)v(x).$$

Ceci est implique qu'il existe $g\in I$ tel que $k_0v(x) \geqslant v(a_{k_0}) \geqslant k_0v(g)$, soient $x/g\in A_v$ et $x\in IA_v$.

$\underline{B_2\subset B_3}$: D'aprés le corollaire 5 ([B1]), les anneaux de valuations α-convexes contenant A correspondent bijectivement aux localisations de $\bar{A}$ par les ideaux premiers $P\subset\bar{A}$, d'où:

$$\cap IA_v=\cap_{P \text{ ideal premier de } \bar{A}} IA_P .$$

En utilisant le fait que $\bar{A}=\bar{A}_{S(1)}$ avec $S(1)=\{ 1+q \ / \ q\in\alpha \}$ (prop.19 [B1]) et que $\bar{A}$ est semi-intégralement clos , on a :

$$\cap IA_P=I\bar{A} .$$

$\underline{B_3\subset B_4}$: Soit $x\in I\bar{A}$ on a $x=a_1g_1+....a_sg_s$ avec $a_i\in\bar{A}$. On a :

$v(x) \geqslant \inf v(g_i)$ et d'après le lemme II-1-15 on a :

$v(x^2) \geqslant v(g_1{}^2+....+g_s{}^2)$ pour toute valation α-convexe v.

D'où $x^2/ g_1{}^2+....+g_s{}^2 \in \bar{A}$.

Il existe $h\in A$ tel que $x^2\leqslant h(g_1{}^2+....+g_s{}^2)$.

Quitte à remplacer g_i par $(1+h^2)g_i$, on a l'inégalité.

$\underline{B_4\subset B_1}$ est claire. ■

PROPRIETES II-1-19.

i) I et J deux idéaux de A, si $I \subset J$ alors $\overline{I} \subset \overline{J}$.

ii) $\overline{I} = \overline{\overline{I}}$.

iii) $I \subset \overline{I} \subset Rad_\alpha(I)$ où $Rad_\alpha(I)$ est le α-radical de I.

iv) I et J deux idéaux on a $\overline{I}\overline{J} \subset \overline{IJ}$ et $\overline{I^n} = \overline{I}^n$.

Preuve : i) et ii) sont claires.

iii) $f \in \overline{I}$, il existe des $a_i \in I^i$ tels que:

$$f^{2n} \leq_\alpha -a_1 f^{2n-1} - \dots - a_{2n}.$$

Le terme à droite appartient à I, donc $p \in \alpha$ tel que $f^{2n} + p \in I$. D'où $f \in Rad_\alpha(I)$.

iv) Il suffit de remarquer que $(I\bar{A} \cap A)(J\bar{A} \cap A) \subset (IJ\bar{A} \cap A)$.

Lorsque $I = (g_1, \dots, g_s)$ est un idéal de type fini on a la proposition suivante :

PROPOSITION II-1-20.

Soit $I = (g_1, \dots, g_s)$, on a :

i) $\overline{I^k} = \overline{(g_1^k, \dots, g_s^k)}$.

ii) $\overline{(g_1^2, \dots, g_s^2)} = \overline{(g_1^2 + \dots + g_s^2)}$.

iii) $\overline{I^{2k}} = \overline{(g_1^{2k} + \dots + g_s^{2k})}$.

iv) Si $f^k \in \overline{I^k}$ alors $f \in \overline{I}$.

Preuve :

i) Il suffit de montrer que $\overline{I^k} \subset \overline{(g_1^k, \dots, g_s^k)}$.

Soit v une valuation α-convexe avec $A \subset A_v$. On suppose que $v(g_1)=\inf v(g_i)$. Si $x \notin (g_1^k, \ldots, g_s^k)A_v$ alors $v(x)<v(g_1^k)$.

Si $x \in I^k A_v$ alors $x = \sum b_r g^r$ avec $g^r = g_1^{r_1} \ldots g_s^{r_s}$ et $|r| = r_1 + \ldots + r_s = k$; et donc :

$$v(x) \geq k \inf(v(g_i)) = v(g_1^k). \quad \text{Contradiction.}$$

ii) Si $x \notin (\overline{g_1^2 + \ldots + g_s^2})$ il existe v une valuation α-convexe tel que $v(x) < v(g_1^2 + \ldots + g_s^2)$.

Si $x \in \overline{(g_1^2, \ldots, g_s^2)}$ pour toute valuation v on a :

$v(x) \geq v(g_1^2 + \ldots + g_s^2)$. Contradiction.

iii) est une conséquence de i) et ii).

iv) Si $f \notin \overline{I}$ on a $v(x)<v(g_1)$ (En supposant que $v(g_1)=\inf v(g_i)$). Si $f^k \in \overline{I^k}$ on a pour toute valuation v α-convexe $v(f^k) \geq k \inf(v(g_i))$; d'où $v(x) \geq v(g_1)$. Contradiction. ▪

<u>COROLLAIRE II-1-21.</u>

Soit $I = (g_1, \ldots, g_s)$ un idéal de A avec les g_i non nuls, on a :

$$\overline{I^k} = \{ f \in A \text{ , Il existe } h \in A \text{, tel que } f^2 \leq_\alpha h(g_1^{2k} + \ldots + g_s^{2k}) \}$$

<u>Preuve</u> : C'est un corollaire de iii) de la proposition précédente. ▪

§2. Clôture semi-intégrale et fonction $\overline{\mu_I}$.

Soient K un corps muni d'un cône α , A un sous anneau de K et I un idéal de A . On définit la fonction μ_I par :

pour tout $f\in A$ $\quad \mu_I(f) = \mathrm{Sup}\{ \mu \ / \ \exists p\in\alpha\cap A \text{ et } f^2+p \in I^{2\mu} \}$.

On définit la fonction $\overline{\mu_I}$ par : $\quad \overline{\mu_I}(f)=\lim_{k\to\infty} \mu_I(f^k)/k$.

PROPOSITION II-2-1.

Soit I un idéal de A . Alors $f\in A$ alors $\overline{\mu_I}(f)$ existe (éventuellement infinie).

Preuve:

On va montrer que la limite supérieure et la limite inférieure coïncident .

On pose $u_k=\mu_I(f^k)/k$, $\hat{u}=\lim\sup(u_k)$ et $\underline{u}=\lim\inf(u_k)$.

Si $\underline{u}=\infty$ ou $\hat{u}=0$ c'est clair.

Nous supposons que $\underline{u}$ est finie et que $\hat{u}>0$, par définition :

1) $\forall\varepsilon>0$, $\forall i\in\mathbb{N}$ $\exists j\geqslant i$ $\quad u_j\leqslant \underline{u}+\varepsilon$.

2) $\forall\varepsilon>0$, $\forall i\in\mathbb{N}$ $\exists j\geqslant i$ $\quad u_j\geqslant\hat{u}-\varepsilon$ (si $\hat{u}<\infty$).

3) $\forall N\in\mathbb{N}$, $\forall i\in\mathbb{N}$ $\exists j\geqslant i$ $\quad u_j\geqslant N$ $\quad$ (si $\hat{u}=\infty$).

Fixons $\varepsilon>0$ (et si $\hat{u}=\infty$ un N) et choisissons un indice i assez grand pour que $1/i < \varepsilon/(\hat{u}-\varepsilon)$ (resp. ε/N), d'après 2) (resp. 3)) il existe $j\geqslant i$ tel que $u_j>\hat{u}-\varepsilon$ (resp. N) ; et d'après 1) il existe $k>ji$ tel que $u_k<\underline{u}+\varepsilon$.

Divisons k par j : $k=jl+q$ où $q<j$ et $l\geqslant i$. On a alors :

$\underline{u}+\varepsilon>\mu_I(f^{jl+q})/jl+q \geqslant l.\mu_I(f^j)/lj+q = \mu_I(f^j)/j\ (1+q/lj) \geqslant (\hat{u}-\varepsilon)(1-1/i) \geqslant \hat{u}-2\varepsilon$

(resp. $N(1-1/i)\geqslant N-\varepsilon$).

Nous avons ainsi montré que pour tout $\varepsilon>0$, $\underline{u}+\varepsilon\geqslant\hat{u}-2\varepsilon$, (resp. pour tout $\varepsilon>0$ et tout N, $\underline{u}+\varepsilon\geqslant N-\varepsilon$) et donc $\underline{u}=\hat{u}$. ∎

PROPRIETES II-2-2.

i) Si f et $g \in A$ alors $\overline{\nu}_I(fg) \geq \overline{\nu}_I(f)+\overline{\nu}_I(g)$.

ii) Soit $a\geq 1$ un nombre entier on a $\overline{\nu}_I(f^a)=a\overline{\nu}_I(f)$.

iii) $f\in A$ $\overline{\nu}_I(f)\geq\nu_I(f)$.

iv) Soit $b\geq 1$ un nombre entier on a $\overline{\nu}_{I^b}(f)=\overline{\nu}_I(f)/b$.

Preuve : i) et iii). Il suffit de remarquer que $\nu_I(fg) \geq \nu_I(f)+\nu_I(g)$.

ii) est une conséquence directe de la définition.

iv) $b\nu_{I^b}(f^k)=\mathrm{Sup}\{ b\nu \ / \ \exists p\in\alpha\cap A \ \ f^{2k}+p \in I^{2b\nu} \} \leq \nu_I(f^k)$ et donc

$\nu_{I^b}(f) \leq \nu_I(f)/b$.

L'autre inégalité : Divisons $\nu_I(f^k)$ par b on a : $\nu_I(f^k)=bq+r$ avec $0\leq r<b$. Il existe $p\in\alpha\cap A$ telle que $f^{2k}+p\in I^{2(bq+r)}\subset I^{2bq} = (I^b)^{2q}$. Ce qui donne que $\nu_{I^b}(f^k)\geq q = (\nu_I(f^k)-r)/b \Rightarrow \nu_{I^b}(f^k)\geq(\nu_I(f^k)-b)/b$ soit $\nu_{I^b}(f) \geq\nu_I(f)/b$. ■

On va maintenant établir un lien entre la fonction $\overline{\nu}_I$ et la clôture semi-intégrale des puissances de l'idéal I.

PROPOSITION II-2-3.

Soient $f\in A$ non nul, I un idéal de A de type fini, a et b deux entiers positifs. On a :

i) $f^a\in\overline{I^b} \Rightarrow \overline{\nu}_I(f) \geq b/a$.

ii) $\overline{\nu}_I(f) > b/a \Rightarrow f^a\in\overline{I^b}$.

Preuve : i) Si $f^a\in\overline{I^b}$, il existe des $g_i \in I$ telsque :

$f^{2a}\leq_\alpha(g_1{}^2+\ldots+g_s{}^2)^b$ donc il existe $p\in\alpha\cap A$ tel que $f^{2a}+p=h(g_1{}^{2b}+\ldots+g_s{}^{2b})$.

Ce qui implique que $\mu_I(f^a) \geq b$.

On a $a\overline{\mu}_I(f) = \overline{\mu}_I(f^a) \geq \mu_I(f^a) \geq b$ et donc $\overline{\mu}_I(f) \geq b/a$.

ii) $\overline{\mu}_I(f) > b/a$ est équivalente à $\overline{\mu}_I(f^a) > b$, il existe $k \geq 1$ et $p \in \alpha \cap A$ tels que $f^{2ak} + p \in I^{2bk}$, d'où $f^a \in \overline{I^b}$. ■

COROLLAIRE II-2-4 .

Mêmes hypothèses sur f et I on a :

$$1/\overline{\mu}_I(f) = \inf \{ a/b \text{ tel que } f^a \in \overline{I^b} \}$$

Preuve Conséquence immédiate de la proposition précédente. ■

COROLLAIRE II-2-5

Soient I et J deux idéaux de A de type fini , $f \in A$ non nul. On a :

$$\overline{I} = \overline{J} \Rightarrow \overline{\mu}_I(f) = \overline{\mu}_J(f) .$$

Preuve: Si $\overline{I} = \overline{J}$, pour tout $k \geq 1$, $\overline{I^k} = \overline{\overline{I}^k} = \overline{\overline{J}^k} = \overline{J^k}$. Puis on applique le corollaire II-2-4. ■

Dans le cas où $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ une algèbre de type fini sur le corps reél clos R on peut montrer l'équivalence dans la proposition II-2-4.

PROPOSITION II-2-6.

Soit $f \in A$ non nul , $I=(g_1,\dots,g_s)$ un idéal de A avec $g_i \neq 0$ on a :

$$\overline{\nu}_I(f) \geq b/a \Leftrightarrow f^a \in \overline{I^b}.$$

Preuve :

Il suffit de montrer que $\overline{\nu}_I(f)=b/a \Rightarrow f^a \in \overline{I^b}$.

D'après II- 2-2 on peut se ramener au cas a=b=1.

Si $\overline{\nu}_I(f)=1$, pour tout $n>1$ il existe $k \geq 1$ tel que $1-1/n \leq \nu_I(f^k)/k$ soit $n\nu_I(f^k) \geq k(n-1)$.

On a $\nu_I(f^{nk}) \geq n\nu_I(f^k) \geq k(n-1)$.

Il existe $p \in \alpha \cap A$ tel que :

$$f^{2nk}+p \in I^{2k(n-1)} \qquad \text{donc :}$$

$$f^{2n} \in \overline{I^{2(n-1)}}=(g_1^{2(n-1)}+\dots\dots+g_s^{2(n-1)})\overline{A} \cap A.$$

La clôture semi-intégrale A est l'intersection de tous les diviseurs premiers réels A_v contenant A (II-1-13) . Pour la valuation v de A_v, on a:

$$v(f^{2n}) \geq v(g_1^{2(n-1)}+\dots\dots+g_s^{2(n-1)}) \quad \text{(inégalité dans } \mathbb{Z}\text{). Soit :}$$

$$nv(f^2) \geq (n-1)v(g_1^2+\dots+g_s^2).$$

En faisant tendre n vers l'infini on a :

$$v(f^2) \geqslant v(g_1{}^2+\dots+g_s{}^2) \quad \text{donc :}$$

$f^2/\ g_1{}^2+\dots+g_s{}^2 \in A_v$ pour tout diviseur premier A_v contenant A, ceci montre que $f \in \overline{I}$. ∎

§3 - Interprétations algébriques de l'exposant de Lojasiewicz.

3-1 Cas d'un anneau de polynômes.

On pose $A = R[X_1,....,X_n]$ l'anneau des polynômes à n indeterminées, $K = R(X_1,...,X_n)$ son corps de fractions muni du cône $\alpha = \sum K^2 [P_1,....,P_r]$ qui est le cône des sommes des carrés dans K engendré par les polynômes $P_1,....,P_r$ (voir [B2]) .

On pose $W = \overline{\{P_1 > 0,....,P_r > 0\}}$ qui est un ensemble semi-algébrique fermé de R^n. Si $\alpha = \sum K^2$, alors $W = R^n$.

Soit $f \in A$ non nul, $I=(g_1,....,g_s)$ un idéal de A avec les $g_i \neq 0$. On définit l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport I sur W par :

$$l_W(f,g) = \inf\{\theta \in \mathbb{Q}^+ \text{ , } \exists \text{ h une fonction semi-algébrique sur W telle que : } |f(x)|^\theta \leqslant h(x)(\operatorname{Sup}_i |g_i(x)|) \ \forall x \in W\}.$$

REMARQUES II-3-1-1.

i) $l_W(f,I)$ est indépendant du choix des générateurs pour l'idéal I.

ii) Si zéros$(I) \cap W = \varnothing$, on a $l(f,g)=0$.

iii) Le théorème des zéros réel montre que l'exposant de Lojasiewicz est fini dans le cas où zéros$(I) \cap W \subset$ zéros$(f) \cap W$ ([Sa] p. 60). Comme $\operatorname{Sup}_i |g_i|$ est une fonction semi-algébrique , cet exposant est un nombre rationnel d'après I-1-3.

On aura besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION II-3-1-2.

Soit R un corps réel clos.

Un polynôme P de $R[X_1,....,X_n]$ est positif ou nul en tout point de W si et seulement si P appartient à α.

Preuve: Voir [B2] page 76. ■

Autrement dit on a l'équivalence : $\forall x \in W \quad P(x) \geq 0 \iff 0 \leq_\alpha P$.

PROPOSITION II-3-1-3.

Avec les mêmes notations que ci-dessus; soit a/b un nombre rationnel, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une fonction semi-algébrique h sur W telle que $|f(x)|^{a/b} \leq h(x) \operatorname{Sup}|g_i(x)| \quad \forall x \in W$.

ii) $f^a \in \overline{I^b}$ (où $\overline{I^b}$ est la clôture semi-intégrale dans A de I^b).

iii) $\overline{\nu}_I(f) \geq b/a$.

iv) Il existe $p \in \alpha \cap A$ telle que $f^{2a} + p \in I^{2b}$.

Preuve : ii) $\iff$ iii) voir le corollaire II-2-6.

Montrons que i) $\iff$ iv) . Soit a/b tel qu'il existe une fonction semi-algébrique continue h sur W telle que :

$$|f(x)|^{a/b} \leq h(x) \operatorname{Sup}|g_i(x)| \quad \forall x \in W.$$

La fonction h^2 est semi-algébrique sur un fermé, elle peut être majorée par un polynôme H (voir I-1-4) , l'inégalité ci-dessus implique :

$$f^{2a}(x) \leqslant H(x)(g_1{}^{2b}+......+g_s{}^{2b})(x) \qquad \forall x \in W.$$

D'aprés II-3-1-2 on a $f^{2a}-H(g_1{}^{2b}+......+g_s{}^{2b}) \leqslant_\alpha 0$, et donc il existe $p \in \alpha$ tel que $f^{2a}+p \in I^{2b}$.

L'autre implication est claire.

iv)$\Leftrightarrow$ii) Si $f^a \in \overline{I^b}$ alors $f^{2a} \in \overline{I^{2b}}$, d'aprés II-1-21, il existe $p \in \alpha$ tel que $f^{2a}+p \in I^{2b}$. ∎

<u>COROLLAIRE II-3-1-4.</u>

Soit $l_W(f,I)$ l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à I sur W on a : $l_W(f,I) = 1/\bar{\nu}_I(f) = \inf\{ a/b \text{ tel que } f^a \in \overline{I^b} \}$.

<u>Preuve</u> : C'est un corollaire de la proposition précédente et du corollaire II-2-4. ∎

<u>2- Cas d'un anneau de coordonnées.</u>

Soit $V \subset R^n$ un ensemble algébrique, $\mathbf{I}(V)$ l'anneau des polynômes de $R[X_1,....,X_n]$ s'annulant en V , on note $R[V] = R[X_1,....,X_n]/\mathbf{I}(V)$ son anneau de coordonnées, R[V] est un anneau réel. On dit que V est irréductible si et seulement si R[V] est intègre. On pose K=R(V) le corps de fractions de R[V] et on le muni du cône $\alpha = \sum K^2[P_1,....,P_r]$, où $P_1,....,P_r \in R[V]$.

On pose $W = \overline{\{P_1>0,\dots,P_r>0\} \cap Reg(V)}$ qui est un ensemble semi-algebrique fermé de V. Si $\alpha=\sum K^2$, W est l'ensemble des points centraux de V.

Sur la varieté V on définit l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à un idéal $I=(g_1,\dots,g_s)$ de R[V] avec $g_i\neq 0$ sur W par :

$l_W(f,I) = \inf\{\theta\in\mathbb{Q}^+$, il existe une fonction semi-algébrique h continue sur W telle que $|f(x)|^\theta \leqslant h(x)\,(\mathrm{Sup}_i|g_i(x)|)\ \ \forall x\in W\}$.

On peut faire les mêmes remarques que dans II-3-1-1.

REMARQUES II-2-2-1.

i) $l_W(f,I)$ est indépendant du choix du générateurs pour l'idéal I.

ii) Si zéros(I)$\cap$W $=\varnothing$, $l(f,I)=0$.

iii) Le théorème des zéros réel montre que l'exposant de Lojasiewicz est fini dans le cas où et zéros(I)$\cap$W$\subset$zéros(f)$\cap$W ([Sa] p. 60). Comme $\mathrm{Sup}_i|g_i|$ est une fonction semi-algébrique , cet exposant est un nombre rationnel d'après I-1-3.

PROPOSITION II-3-2-2.

Soit V une variété algébrique réelle irréductible définie sur un corps réel clos R, α un cône de R(V) . Avec les notations précedentes, un polynôme P de R[V] est positif ou nul sur W si et seulement si P appartient à α.

Autrement dit on a l'équivalence :

$$\forall x\in W \qquad P(x)\geqslant 0 \iff P\geqslant_\alpha 0.$$

On donne maintenant un analogue à la proposition II-3-1-3.

PROPOSITION II-3-2-3.

Avec les mêmes notations que ci dessus, a/b un nombre rationnel, les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une fonction semi-algébrique h sur W telle que:

$$|f(x)|^{a/b} \leqslant h(x)\ \mathrm{Sup}_i |g_i(x)| \quad \forall x \in W.$$

ii) $f^a \in \overline{I^b}$ (où $\overline{I^b}$ est la clôture semi-intégrale de I^b dans R[V]).

iii) $\overline{\nu}_I(f) \geqslant b/a$.

iv) Il existe $p \in \alpha \cap A$ tel que $f^{2a}+p \in I^{2b}$.

Preuve : Peuve analogue à celle de la proposition II-3-1-3, en utilisant le théorème des zéros centraux et en majorant h^2 par un polynôme puisqu'elle est semi-algébrique et continue sur le fermé W. ■

COROLLAIRE II-3-2-4.

$l_W(f,I)$ étant l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à I sur W on a :

$$l_W(f,I) = 1/\overline{\nu}_I(f) = \inf\{ a/b \text{ tel que } f^a \in \overline{I^b} \}.$$

COROLLAIRE II-2-2-5.

Soient I, J deux ideaux de R[V] . Avec les notations et les hypothèses précedentes on a :

$$\overline{I}=\overline{J} \Leftrightarrow l_W(f,I)=l_W(f,J). \quad \forall f \in A .$$

Preuve : C'est un corollaire de ce qui précède et de II-2-5. ■

§4. Idéaux réellement réels.

Dans ce paragraphe on pose $A=R[X_1,....,X_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées, $K=R(X_1,....,X_n)$ son corps de fractions et $\alpha=\sum K^2$ les sommes des carrés dans K.

Le corps R étant réel clos, on pose $C=R[i]=R[X]/(X^2+1)$. Le corps C est algébriquement clos.

Soient $f\in A$ non nul et $I=(g_1,....,g_s)$ un idéal de A avec $g_i\neq 0$.
Les polynômes f et g_i peuvent s'étendre en des polynômes de $C[X_1,....,X_n]$. On note $\tilde{f}$ et $\tilde{g}_i$ leurs extentions, et $\tilde{I}$ l'idéal engendré par les $\tilde{g}_i$ dans $C[X_1,....,X_n]$.
On définit l'exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe de f par rapport à l'idéal I par :

$$L(f,I) = \inf\{\theta\in\mathbb{Q}^+, \text{ Il existe un polynôme à coefficients réels } h \text{ ; tel que } |\tilde{f}(z)|^\theta \leqslant h(|z|)\mathrm{Sup}_i|\tilde{g}_i(z)| \quad \forall z\in C^n\}.$$

$L(f,I)$ est un nombre rationnel (on se ramène au cas réel en passant de C^n à R^{2n}).

On dit que l'idéal I est réellement réel si pour tout $f\in A$ $l(f,I)=L(f,I)$, où $l(f,I)$ est l'exposant de Lojasiewicz dans le cas réel défini au paragraphe précédent.
Cette terminologie est utilisée par Bochnak et Risler [BR], [Ri].
On remarque qu'on a toujours $l(f,I)\leqslant L(f,I)$. Donc dire que I est réellement réel revient à dire que $l(f,I)$ est aussi un exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe.

PROPOSITION II-4-1.

I est réellement réel $\Rightarrow \sqrt{I}$ est réel.

PREUVE : Si $\sqrt{I}$ n'est pas réel, il existe f telle que zéros(I)$\subset$zéros(f) et $f \notin \sqrt{I}$. On a l(f,I) est fini, donc L(f,I) est fini, zéros($\tilde{I}$)$\subset$zéros($\tilde{f}$), d'après le théorème de Hilbert, il existe n tel que $\tilde{f}^n \in \tilde{I}$ soit $f^n \in I$ et $f \in \sqrt{I}$. Contradiction. ■

Dans [LT], Lejeune et Teissier ont étudié les exposants de Lojasiewicz dans le cas complexe localement, c'est-à-dire sur des inégalités avec une constante au voisinage d'un point. La proposition suivante permet de montrer que si on a une inégalité de Lojasiewicz locale en tout point, alors on peut avoir une inégalité globale sur C^n.

PROPOSITION II-4-2.

Avec les mêmes notations que ci dessus, on a équivalence :

i) Pour tout point $z_0 \in C^n$, il existe un voisinage U de z_0 et une constante c tel que $|\tilde{f}(z)| \leqslant c \operatorname{Sup}|\tilde{g}_i(z)| \quad \forall z \in U$.

ii) Il existe un polynôme à coefficients réels h tel que:

$$|\tilde{f}(z)| \leqslant h(|z|) \operatorname{Sup}|\tilde{g}_i(z)| \quad \forall z \in C^n.$$

Preuve : ii) $\Rightarrow$ i) est claire.

i) $\Rightarrow$ ii) On pose $z=x+iy$ avec x et y $\in R^n$. On a $\tilde{f}(z)$ et $\tilde{g}(z)$ sont des polynômes en x et y, et $\operatorname{Sup}_i|\tilde{g}_i(z)|$ est alors une fonction semi-algébrique sur R^{2n}. On pose :

$\varphi(x,y) = |\tilde{f}(z)| / \mathrm{Sup}\, |\tilde{g}_i(z)|$ sur $\{(x,y)\in R^{2n}$ tel que $\mathrm{Sup}|\tilde{g}_i(z)|\neq 0\}$ et

$\varphi(x,y) = 1$ sur $\{(x,y)\in R^{2n}$ tel que $\mathrm{Sup}|\tilde{g}_i(z)|=0\}$.

La fonction φ est semi-algébrique sur R^{2n} et localement majorée par une constante. D'après la proposition I-1-3 il existe un entier N et une constante c tel que :

$$|\varphi(x,y) \leqslant c(1+|x|^2+|y|^2)^N.$$

On a donc $|\tilde{f}(z)| \leqslant c(1+|z|^2)^N \mathrm{Sup}|\tilde{g}_i(z)|$ pour tout $z\in C^n$. ■

Supposons maintenant que A est un anneau noetherien, et I un idéal de A. On définit la fonction $\overline{\nu}_I$ par :

$$\overline{\nu}_I(f) = \lim_{k\to\infty} \nu_I(f^k)/k \quad \text{où} \quad \nu_I(f^k) = \mathrm{Sup}\{\ \nu \ \text{ tel que } \ f^k\in I^\nu\ \}.$$

Cette fonction est introduite par Samuel [Sm], puis étudiée par Nagata [Ng] et Lejeune et Teissier [LT] où ils ont démontré que cette limite existe, et qu'elle est toujours un nombre rationnel. Cette fonction $\overline{\nu}$ est une fonction d'ordre et a les même propriétés que la fonction $\overline{\mu}$.

Un élément f de A est dit entier sur l'idéal I, s'il existe un entier n et pour tout i=1,2....,n un élément $a_i\in I^i$ tel que :

$$f^n+a_1 f^{n-1}+......+a_n=0.$$

L'ensemble des éléments entiers sur l'idéal I est un idéal de A appelé la clôture intégrale de I dans A et noté $\hat{I}$.

Avec la fonction $\overline{\nu}_I$ et la clôture intégrale on donne un analogue à la proposition II-2-6.

<u>PROPOSITION II-4-3</u>.

Soient A un anneau noethérien intègre, $f \in A$ et $I=(g_1,\ldots,g_s)$ un idéal de A avec $g \neq 0$.Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f \in \hat{I}$

ii) $\overline{\nu}_I(f) \geq 1$

<u>Preuve</u> : Voir [Ng] page 168 et [LT] .■

On peut maintenant donner une interprétation algébrique à l'exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe L(f,I).

<u>PROPOSITION II-4-4.</u>

Soient $A = R[X_1,\ldots,X_n]$, $f \in A$ et $I = (g_1,\ldots,g_s)$ un idéal de A. On a équivalence :

i) $f \in \hat{I}$

ii) $\overline{\nu}_I(f) \geq 1$.

iii) Il existe un polynôme à coefficents réels h tel que :

$$|\tilde{f}(z)| \leq h(|z|) \operatorname{Sup}_i|\tilde{g}_i(z)| \qquad \forall\ z \in C^n.$$

Preuve : i) $\Leftrightarrow$ ii) Voir la proposition précédente.

i) $\Rightarrow$ iii) . Soit $f \in \hat{I}$. Il existe un entier p tel que pour tout n=1,2.... on ait $f^{p+n} \in I^n$ (Voir [Ng] page 168). On a p+n/n est un exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe et donc $L(f,I) \leq 1$.

Comme 1 est aussi un exposant de Lojasiewicz on a l'inégalité de iii).

iii) $\Rightarrow$ i) On pose $\tilde{f}_{z_0}$ et $\tilde{g}_{iz_0}$ les germes de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}_i$ au point $z_0 \in C^n$.

Pour tout voisinage compact U contenant z_0 , il existe une constante c telle que :

$$|\tilde{f}(z)| \leq c \, \mathrm{Sup}|\tilde{g}_i(z)| \quad \text{sur U.}$$

D'après la proposition 7-2 [LT] page 55, on a $\tilde{f}_{z_0}$ est entier sur $\tilde{I}_{z_0}$ le germe de $\tilde{I}$ au point z_0. Comme $\widehat{(\tilde{I}_{z_0})} = (\hat{\tilde{I}})_{z_0}$ pour tout $z_0 \in C^n$ et d'après le théorème du passage du local au globale [Bo] chap.2 on a $\tilde{f}$ est entier sur l'idéal $\tilde{I}$, et donc f est entier sur I. ■

COROLLAIRE II-4-5.

L(f,I) étant l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à I au cas complexe. On a :

$$L(f,I) = 1/\bar{\nu}_I(f) = \inf\{\, a/b \text{ tel que } f^a \in \widehat{I^b} \,\}.$$

Preuve : L'exposant L(f,I) est un nombre rationnel. On pose L(f,I)=a/b.

D'après la proposition précédente on a $1/\bar{\nu}_I(f) \leq a/b$. Pour avoir l'autre inégalité il suffit de remarquer que $1/\bar{\nu}_I(f)$ est aussi un exposant de Lojasiewicz.

L'autre égalité est une conséquence de la proposition II-4-4. ■

COROLLAIRE II-4-6.

Soit $I = (g_1,\dots,g_s)$ un idéal de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) I est réellement réel.

ii) $\overline{\nu}_I(f)=\overline{\nu}_I(f)$ pour tout $f\in A$.

iii) $\overline{I^n} = \widehat{I^n}$ pour tout entier n.

Preuve: i) $\Leftrightarrow$ ii) Il suffit d'utiliser que $l(f,I)=1/\overline{\nu}_I(f)$ et que $L(f,I)=1/\overline{\nu}_I(f)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Soit $f\in\overline{I^n}$ on a $\overline{\nu}_I(f)\geq n$, d'où $\overline{\nu}_I(f)\geq n$. On a donc $f\in\widehat{I^n}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) On pose $\overline{\nu}_I(f)=b/a$. Ceci est équivalent à $f^a\in\overline{I^b}$, et donc $f^a\in\widehat{I^b}$. D'où $\overline{\nu}_I(f)\geq b/a$. On a donc l'égalité. ■

Cas où l'idéal I=(g) est principal.

PROPOSITION II-4-7.

Soit A un anneau intégralement clos. Alors tout idéal principal est intégralement clos.

Preuve:

Soit $f\in\hat{I}=\widehat{(g)}$, il existe des $a_i\in I^i$ tel que $f^n+a_1f^{n-1}+\dots+a_n=0$. Il existe des $b_i\in A$ tel que $a_i=b_ig_i$, on a alors :

$$f^n+b_1gf^{n-1}+\dots+b_ng^n=0 .$$

En divisant par g^n on trouve que f/g est entier sur A. Comme A est intégralement clos, on a $f/g\in A$, d'où $f\in I$. ■

On rappelle que $R[X_1,\dots,X_n]$ et $C[X_1,\dots,X_n]$ sont intégralement clos. On a la proposition suivante qui est un corollaire de II-4-5.

PROPOSITION II-4-8.

$f \in A$ non nul, $I=(g)$ un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe un polynôme h à coefficients réels tel que

$|\tilde{f}(z)| \leq h(|z|)|\tilde{g}(z)| \quad \forall z \in C^n$.

ii) $f \in I$.

Lorsque l'idéal $I=(g)$ est principal, il n'est pas nécessairement semi-intégralement clos, mais on a le lemme suivant :

LEMME II-4-9.

$I=(g)$ un idéal principal de A, on a l'équivalence :

$$I=\overline{I} \iff \forall n \geq 1 \quad I^n=\overline{I^n}.$$

Preuve : Par récurrence : (Il suffit de montrer que $\overline{I^n} \subset I^n$).

Si $f \in \overline{I^n}$, on a $f^2 \leq hg^{2n}$ avec $h \in A$.

Comme $f \in \overline{I^{n-1}}=I^{n-1}$, $f=kg^{n-1}$ on a $k^2 \leq hg^2$ ceci implique que $k \in I=(g)$ car $I=\overline{I}$; $k=k'g$ avec $g \in A$. On a alors $f= k'g^n$ d'où $f \in I^n$. ■

PROPOSITION II-4-10.

Soit $I=(g)$ un idéal principal de A, on a l'équivalence suivante :

I est réellement réel $\iff$ I est semi-intégralement clos.

Preuve : Si $I = \overline{I}$ on pose $l(f,I)=p/q$, on a $f^p \in \overline{I^q}$ soit $f^p \in I^q$, d'où $l(f,I)=L(f,I)$. Supposons que I est réellement réel et soit $f \in \overline{I}$ on a $l(f,I) \leq 1$ et donc $L(f,I) \leq 1$. D'après la proposition II-4-8, on a $f \in I$, d'où $\overline{I}=I$. ■

Lorsque I n'est pas principal on n'a pas un analogue à la proposition II-4-10; mais si on pose $J = (g_1{}^2+......+g_s{}^2)$ on a la proposition suivante :

PROPOSITION II-4-11.

J est semi-intégralement clos $\Rightarrow$ I est réellement réel.

Preuve: Si on pose $p/q=l(f,I)$ on a $f^p \in \overline{I^q}$, soit $f^{2p} \in \overline{I^{2q}}=\overline{J^q}=J^q$. on a donc $f^{2p} \in J^q \subset I^{2q}$. D' où p/q est un exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe. ■

REFERENCES

[A] Alonson Garcia, M.E.; "Ordenes y clausura semientera" Thèse Universite complutense de Madrid (1984).

[An] Andradas , C.; "Real Places in Fonctions Fields" Comm. in Algebra. Vol 13, n°5 (1985).

[B1] Brumfiel, G.W. ; "Real Valuation Ring and ideals" Lecture notes in math. 959 (1981) .

[B2] Brumfiel, G.W.; "Partially ordered Rings and Semi-algebraic Geometry" London Math. Soc. Lect. Notes Series 37.

[BCR] Bochna .k , J.; Coste, M.; Roy, M.-F.; "La géométrie algébrique réelle" à paraître chez Springer Verlag.

[BR] Bochna k, J. ; Risler, J.-J ; "Sur les exposants de Lojasiewicz" Comment. Mat. Helvetici 50 (1975).

[Bo] Bourbaki , N.; "Algébre commutative" Chap. 2. Herman.

[C] Coste, M. ; "Ensembles semi-algébriques" Lecture notes in math. 959 (1981).

[CR] Coste, M. ; Roy, M.-F.; "La topologie du spectre réel" Contemporary Mathematics Vol 8 (1980).

[H] Hironaka, H. ; " Introduction to real-analytic sets and real analytics maps " Cours à l'Instituto Math. L . Tonelli de l'Universite de Pise (1973).

[K] Kuo, T.C. ; "Computation of Lojasiewicz's exponent of f(x,y)" Comment. Math. Helv. 49/2 (1974).

[La] Láng, S. ; "Algebra" Addition-Wesley (1965).

[Li] Lichtin, B.; " Estimation of Lojasiewicz Exponents and Newton Polygons " Inventiones math. 64 . 417-429 (1981).

[Lo] Lojasiewicz, S. ; "Ensembles semi-analytiques" multigraphié I.H.E.S. (1965).

[LW] Lojasiewicz, S; Wachta, K; " Séparation régulière avec un paramètre pour les sous analytiques " Bulletin de l'academie Polonaise des Sciences. Vol 30 , N° 7-8 ,(1982)

[LT] Lejeune, M. ; Teissier, B. ; "Dépendance intégrale sur les idéaux et équisingularité" Séminaire Ecole Polytechnique (1974). Pub. Inst. Fourier.

[Nn] Narashimhan, R.; "Analysis on Real and Complex Manifolds" Advances Studies in Pure Mathematics. North. Holland (1968).

[Ng] Nagata, M. ; "Note on paper of Samuel " Mem. coll. of Siences Univ. of Kyoto. t.30 (1956-57).

[P] Ploski, A.; " Sur les exposants d'une application analytique I et II " Bulletin of Polish Academy of Sciences Mathematics. Vol 32 , N° 11-12 (1984) et N° 3-4 (1985).

[Ra] Raby, G. ; "Théorème des zéros sous analytiques et inégalités de Lojasiewicz" Lecture notes in math. 1028 p.253.

[Ri] Risler, J.-J.; "Les exposants de Lojasiewicz dans le cas analytique réel" Appendice dans [LT].

[Ro] Roy, M.-F. ; "Spectre réel d'un anneau et topos étale réel" Thèse Université Paris Nord (1980).

[Sa] Saliba, C. ; " Pour une classification des différentes formes de théorème des zéros et de théorème des éléments positifs" Thèse de 3°cycle . Université de Rennes I (1983).

[Sm] Samuel, P.; " Some asymptotic properties of powers of ideals ". Ann. of Math. Vol. 56 (1952) pp.11-21.

[St] Stengle, G. ; "A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in Semialgebraic Geometry" Math. Ann. 207, 87-97 (1974).

[T] Tougeron, J.-C.; "An extension of Witney's spectral theorem " I.H.E.S. Publ. Math. N°40 , 139-148.

[W] Walker, R. ; "Algebraic curves" Dover (1962).

[ZS] Zariski, S. ; Samuel, P. ; "Commutative Algebra" Vol. 2 Springer Verlag.