PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GILBERT ARSAC

L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987-1988, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987-1988___5_A7_0>

"L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique"

Exposé présenté le 1er juin 1988

par

Gilbert ARSAC

Université Claude Bernard, Lyon

(à paraître dans "Recherches en didactiques des mathématiques", 1988)

INTRODUCTION.

La démonstration occupe en mathématiques une place centrale puisqu'elle est la méthode de preuve dont l'emploi systématique caractérise cette discipline parmi les sciences. On comprend dès lors qu'elle joue un rôle important dans le cursus scolaire (où elle apparaît en France dès l'âge de 13 ans). Elle constitue donc un objet d'études a priori privilégié pour le didacticien des mathématiques et ce d'autant plus que son introduction est source de difficultés pour beaucoup d'enfants. Toute recherche sur son enseignement pose le problème de son histoire, tout comme pour n'importe quel concept mathématique, bien que la démonstration ne soit pas à proprement parler un concept, mais plutôt une technique. L'article qui suit est consacré à l'étude, d'un point de vue que nous préciserons plus loin, de l'origine de la démonstration, de sa genèse. Nous n'aborderons pas le problème de son évolution ultérieure, c'est-à-dire de l'histoire de la rigueur en mathématiques. Sur cette question, nous renvoyons à **Lakatos** (1984) et à son abondante bibliographie.

Le problème de la genèse, de l'apparition d'une notion, peut éclairer celui de son enseignement, si l'on songe à utiliser les conditions historiques de cette genèse comme guide pour créer dans la classe les conditions d'une genèse artificielle de cette même notion chez l'élève. Malheureusement, malgré la place, soulignée plus haut, de la démonstration en mathématiques, la littérature sur le sujet est peu abondante à l'exception notable toutefois de **Szabo** (1977), à qui nous ferons du reste fréquemment appel. Il y a à cela sans doute deux raisons, de nature différente.

D'une part, il semble bien que pour les mathématiciens, la démonstration, étant organiquement liée aux mathématiques, apparaisse relativement naturellement dans le cours du développement de celles-ci, sans que cette apparition pose de problème a priori, c'est du moins ainsi que l'on peut interpréter le silence des mathématiciens à ce sujet. D'autre part, l'étude historique du sujet est difficile, comme nous l'expliquons ci-dessous.

En effet, si l'on est à peu près d'accord sur le lieu et l'époque de l'apparition de la démonstration en Grèce, au 5ème siècle avant Jésus-Christ, l'unanimité est loin d'être faite sur les détails de l'histoire. Les documents d'époque sont en effet pratiquement inexistants, et l'histoire des mathématiques de cette période nous est connue surtout par des commentateurs grecs tardifs et les rares extraits de textes originaux qu'ils citent, et par les textes contemporains ou tout juste postérieurs de Platon, textes qui parlent de mathématiques mais qui ne sont pas des textes mathématiques. Ainsi l'histoire apporte difficilement une réponse à la question du comment de l'apparition de la démonstration, et encore plus difficilement à la question du pourquoi. Cependant, l'importance du problème oblige à faire le point, à engager un dialogue entre l'historien et le didacticien, dans lequel ce dernier ne soit pas seulement un client. Nous espérons en effet montrer dans ce qui suit que certains des outils développés pour l'analyse didactique peuvent apporter un point de vue nouveau sur les problèmes historiques, préciser les questions, et même suggérer certaines réponses.

En voici un premier exemple : dans la langue française courante, et même en mathématiques, les mots preuve et démonstration sont considérés comme synonymes. L'étude des débats de validation entre élèves cherchant un même problème a amené Nicolas **Balacheff** (1987), s'appuyant de plus sur l'étude du rôle des contre-exemples, erreurs et réfutations dans le développement historique des mathématiques due à I. **Lakatos** (1984), à distinguer soigneusement les mots validation, preuve et démonstration, en leur attribuant des sens précis qui désignent des types d'argumentation différents employés par un locuteur pour convaincre un interlocuteur de la vérité d'une assertion. Cette distinction est indispensable si l'on cherche à répondre à la question : quand la démonstration est-elle apparue en mathématiques ? Sinon, cette question non problématisée est trop floue et l'historien croit trop facilement voir apparaître des démonstrations dans les mathématiques préhelléniques. On en trouvera des exemples à propos de la mathématique hindoue dans **Van Der Waerden** (1983, p. 26), ou égyptienne dans **Keller** (1986, p. 46)

Nous verrons, au § I, en quoi l'analyse citée de Nicolas **Balacheff** permet d'attribuer réellement aux Grecs l'invention de la démonstration, sans pour autant dénier à leurs prédécesseurs toute forme de preuve au sens que nous aurons précisé. De manière paradoxale, on pourra même dire alors que le 5ème siècle avant Jésus-Christ marque chez les Grecs, en géométrie, le passage de la preuve à la démonstration. Nous esquisserons au § III ce qu'ont pu être les antécédents (prolégomènes) de la démonstration.

Dans la situation précédente, l'analyse didactique nous a donc permis de préciser les questions posées à l'histoire. Venons-en maintenant à un deuxième exemple où l'analyse didactique permet de proposer un critère de choix entre différentes réponses possibles. A. **Szabo** (1977) attribue l'apparition de la démonstration en mathématiques essentiellement à l'influence externe de la société grecque. Cette thèse est d'ailleurs relativement traditionnelle : la transformation de la mathématique en science hypothético-déductive serait l'"application" des règles du débat argumenté qui gouvernaient la vie politique dans la cité grecque. Citons ici J.P. **Vernant** (1979, p. 97) :

> *"Ce n'est certainement pas le fait du hasard si la raison surgit en Grèce comme une conséquence de cette forme si originale d'institutions politiques qu'on appelle la Cité. Avec la Cité, et pour la première fois dans l'histoire de l'homme, le groupe humain considère que ses affaires communes ne peuvent être réglées, les décisions d'intérêt général prises, qu'au terme d'un débat public et contradictoire, ouvert à tous et où les discours argumentés s'opposent les uns aux autres. Si la pensée rationnelle est apparue dans des cités grecques d'Asie Mineure comme Milet, c'est parce que les règles du jeu politique dans le cadre de la cité - débat public, argumenté, librement contradictoire - étaient devenues aussi la règle du jeu intellectuel."*

A. **Szabo** précise cette idée en attribuant à l'école éléate de Parménide et Zénon l'origine de la transformation radicale des mathématiques qui a simultanément précisé les objets de cette science en les définissant axiomatiquement comme idéalités, objets de pensée, et les règles de leur manipulation, en particulier la démonstration qui permet de distinguer les énoncés vrais. Il s'agit, dirons-nous, d'une thèse essentiellement externaliste sur l'origine de la démonstration, en ce sens qu'elle cherche cette origine non pas d'abord dans les nécessités internes du développement des mathématiques, mais dans des influences externes.

Cette explication est contradictoire avec le "principe d'économie de logique" (**Bourdieu**, 1980, p. 144), "qui veut que l'on ne mobilise pas plus de logique qu'il n'en faut pour les besoins de la pratique", principe souvent invoqué en didactique où l'on admet que, si la genèse d'un concept chez l'élève ne peut être entièrement identique à sa genèse historique, un point commun demeure toujours entre les deux situations : le concept n'apparaît historiquement, n'est assimilable par l'élève, que s'il semble indispensable à la solution d'un problème.

On peut se poser la même question à propos de la démonstration : quel type de problème a pu rendre indispensable son introduction en mathématiques ? Or, les historiens nous apprennent que l'apparition de la démonstration est contemporaine de la résolution du problème de l'irrationalité, et précisément, nous verrons au § II que la démonstration est un outil indispensable pour franchir ce pas à la manière dont les mathématiciens grecs l'ont franchi.

En voyant dans le problème de l'irrationalité l'origine exclusive de l'apparition de la démonstration nous adopterions, à l'opposé de Szabo, un point de vue exclusivement "internaliste". Nous verrons au § IV que, en fait, une synthèse entre le point de vue internaliste et le point de vue externaliste est plus vraisemblable. Disons tout de suite là-dessus quelques mots : si la découverte du problème de l'irrationalité provoque bien une contradiction au sein de la mathématique grecque, plus ou moins clairement perçue, le choix exclusivement internaliste supposerait que cette contradiction porte en germe son dépassement par une solution unique. Nous suivrons ici à nouveau Nicolas **Balacheff** et I. **Lakatos** (loc. cit.), en estimant au contraire que la contradiction ne porte pas en elle-même son dépassement et nous rejoindrons **Szabo** (1977), en pensant que le choix de la solution qui a été apportée est lié aux courants de pensée de la société grecque. Nous revenons ainsi à un point de vue en partie externaliste.

Signalons, pour terminer cette introduction, que nous employons dans le cours de ce travail d'autres démarches analogues à celles de la didactique: analyse a priori, en vue de problématiser les questions, notion de jeu de cadre (cf. § II).

I - PREUVES ET DEMONSTRATION.

Ainsi que nous l'avons remarqué dans l'introduction, ces mots sont souvent employés comme synonymes, en particulier par les mathématiciens. Or toute réflexion sur la naissance de la démonstration est en même temps une réflexion sur l'évolution, à un certain moment de l'histoire, de la rigueur dans les mathématiques et, pour éclairer cette évolution, il nous semble indispensable de reprendre ici les distinctions dues à N. **Balacheff** (1987) entre validation, preuve et démonstration ; introduites dans un cadre didactique, elles peuvent éclairer le débat historique et épistémologique.

Bien que l'ensemble de l'article cité ci-dessus soit une référence utile pour la lecture de ce qui suit, nous donnons néanmoins, pour la commodité du lecteur, un aperçu résumé des points sur lesquels nous nous appuyons le plus, en commençant par une citation textuelle des définitions qui nous intéressent :

> *Nous appelons **explication** un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.*

> *Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.*

Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuves que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons ***démonstrations*** *ces preuves.*

Nous réservons le mot ***raisonnement*** *pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.*

Ces distinctions de vocabulaire mettent en relief les dimensions sociales de la démonstration en tant que résultat d'un processus particulier de preuve.

Ainsi que le souligne l'auteur de ces lignes, les processus de preuve mis en œuvre pour valider une affirmation dépendent à la fois du sujet qui les construit et de la situation dans laquelle il se trouve, en particulier du destinataire. Ceci met fortement en relief le caractère social des différents types de preuve. Le problème qui nous intéresse, quant à nous, est l'apparition de la démonstration c'est-à-dire un moment privilégié de l'évolution des types de preuves en mathématiques.

Rappelons que, du point de vue historique, il n'est pas niable que la Grèce ait été le lieu d'apparition de la mathématique comme science hypothético-déductive : le monument, cent fois visité, en est les éléments d'Euclide (début du 3ème siècle avant Jésus-Christ), mais on trouve déjà des démonstrations en bonne et due forme chez **Autolycos** (1979) environ un demi-siècle auparavant et le témoignage de Platon permet de faire remonter au 5ème siècle avant Jésus-Christ la transformation de la mathématique qui se manifeste par l'apparition de la démonstration, mais qui ne s'y réduit pas. En effet, ce qui apparaît chez les Grecs c'est simultanément :

- la définition des objets de la mathématique à l'aide d'axiomes, de définitions , comme objets idéaux , indépendants de l'expérience sensible ;
- les énoncés généraux (théorèmes, propositions, ...) explicitant sous des hypothèses précises les assertions vraies pour les êtres mathématiques ;
- les démonstrations prouvant les assertions précédentes en s'appuyant uniquement sur les axiomes, les définitions et les règles de la logique, en particulier le tiers exclus.

On objectera que les éléments d'Euclide ne satisfont pas complètement à ces trois principes, qu'on y trouve des axiomes implicites, ou des cas d'appel à la figure. Mais pour ce qui nous intéresse, l'essentiel est le "programme" que se fixe Euclide et qui nous semble bien être le précédent. Que ce programme ne soit pas entièrement atteint dans les Eléments, c'est là une remarque classique, mais qui n'est pas notre sujet, il nous suffit que ce programme ait été visé, ce dont témoignent à la fois la rédaction des éléments et l'image donnée par Platon, du point de vue philosophique, de ce qui caractérise l'activité mathématique; nous ne discuterons donc pas ici de la pertinence des définitions du point ou de la droite, ou de l'usage de l'égalité, chez Euclide... (1).

Conformément aux précisions de vocabulaire introduites plus haut, lorsque nous disons que les Grecs sont les introducteurs de la démonstration en mathématiques, nous ne nions pas l'existence dans les mathématiques antérieures, ou ayant suivi une évolution indépendante, de preuves de différents niveaux. En voici quelques exemples :

* En Egypte, la justesse des calculs effectués par les scribes était souvent prouvée par la vérification du résultat (**Keller**, 1986) : c'est une méthode particulièrement bien adaptée aux problèmes du type résolution d'équations, surtout quand les inconnues sont entières ou rationnelles simples, et aux situations sociales visées par les problèmes (vente, rémunération, partage).

* En Inde, les assertions géométriques sont prouvées par l'appel à la figure : l'exactitude du dessin est un argument, qui peut d'ailleurs être assimilé à

une vérification ; en voici un exemple classique et particulièrement frappant : la figure suivante, accompagnée de l'unique commentaire "contemplez", justifie pour Bhascara (12ème siècle après Jésus-Christ) le théorème de Pythagore (M.F. **COSTE**, 1980).

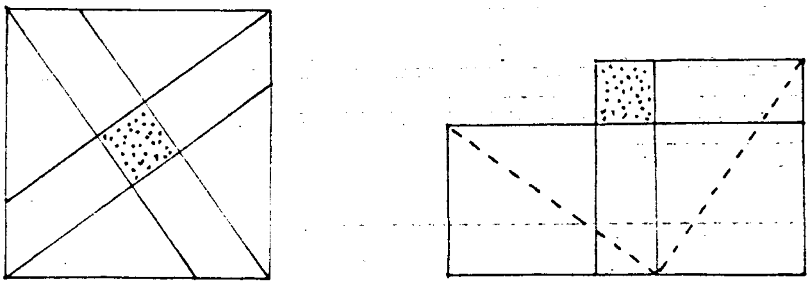

Figure 1

Restons un peu sur ce dernier exemple ; en effet, nous nous intéressons à l'évolution de la rigueur surtout dans le domaine de la géométrie. Tout le problème consiste à comprendre comment on peut être amené à passer de preuves fondées sur l'évidence de la figure à des démonstrations dont la figure n'est plus que le support, ce qui est d'ailleurs le problème posé dans l'enseignement de la géométrie. Avant de voir, dans le § II, comment les problèmes liés à l'irrationalité peuvent être les moteurs de ces changements, indiquons brièvement, de façon à ne pas avoir à y revenir par la suite, comment sont liés les trois aspects de la révolution grecque : idéalité des objets de la mathématique, méthode démonstrative, énoncés généraux.

En fait, à partir du moment où, pour certaines raisons, étudiées au paragraphe suivant, on renonce à l'expérience physique, aux données fournies par les sens, pour définir les objets de la mathématique et valider les assertions à leur sujet, on ne peut les définir que d'une manière axiomatique, c'est-à-dire en précisant les règles de manipulation auxquelles ils sont soumis (nous négligeons pour le moment le fait que, pour les Grecs, contrairement aux modernes, les objets de la mathématique ainsi définis ont une existence "objective" : cf. § 4.2). La seule méthode de validation disponible est alors celle qui consiste à s'appuyer sur ces règles et à opérer par déduction, c'est-à-dire la démonstration. On voit que nous réglons d'une phrase un problème qui sous-entend un énorme débat : d'où proviennent les règles de la déduction, qui permettent de manipuler les objets de pensée, comment se mettre d'accord sur elles ? Que le problème ait été clairement perçu par les Grecs, la lecture de Platon permet de s'en convaincre ; elle ne suffit malheureusement pas pour déterminer la part des nécessités mathématiques et celle des nécessités du débat philosophique ou politique dans la genèse de ces règles de déduction (cf. § IV). Quant aux énoncés généraux, leur apparition provient de la nécessité, dans le cadre abstrait, d'expliciter complètement les hypothèses, alors que dans un cadre qui fait appel à l'expérience, de nombreuses données peuvent être implicites, le langage mathématique rejoignant alors le "langage de la familiarité" de **Bourdieu** (1980, ch.5, p. 153). On pourra relire également **Balacheff** (1987) dans cette perspective, en particulier le dialogue entre Darboux et Houel à propos de la théorie des fonctions, où le problème du caractère implicite de certaines hypothèses est clairement posé. A cette raison "interne" s'ajoute le fait que l'emploi du langage de la familiarité suppose la référence à un implicite partagé par une communauté suffisamment restreinte : dans le cas des mathématiques prédémonstratives il pourra s'agir d'une communauté de prêtres, de scribes, ou d'initiés (cas des Pythagoriciens), l'implicite pouvant alors se marier avec une volonté explicite de secret, phénomène bien connu dans le cas pythagoricien. Le caractère public d'un savoir "laïcisé" impose son explicitation complète : d'une certaine manière, la lecture d'Euclide, comme celle de Bourbaki, "ne nécessite pas de connaissances spéciales". A contrario, le domaine de validité des résultats babyloniens n'est pas précisé (**Kline**, 1972) et on ne trouve pas chez les mathématiciens indiens une distinction systématique entre résultats exacts et résultats approchés (**Boyer**, 1968).

On voit par là que l'apparition de la démonstration est liée à une conception globale nouvelle de la mathématique. Nous avons souligné plus haut les différences de nature entre preuves prédémonstratives et démonstrations, une autre différence à la lumière de ce qui précède, est prévisible et effectivement historiquement vérifiée, elle porte sur la place occupée dans le texte mathématique respectivement par les preuves et les démonstrations : dans la mesure où la méthode démonstrative est reconnue comme l'unique moyen de validation, toutes les assertions doivent être démontrées, et il y a des démonstrations partout ; dans la mesure où l'appel à la figure, à l'évidence du contexte sensible, voire à la hiérarchie sociale, sont des moyens de validation implicites socialement reconnus, l'apparition de preuves, comme celle citée plus haut dans le cas des mathématiques hindoues, ne se fait pas de façon systématique. Les preuves isolées qui apparaissent ainsi, ne sont d'ailleurs, si l'analyse qui précède est exacte, nullement les prémisses de la démonstration, au sens où leur multiplication progressive permettrait, par une évolution continue, d'arriver au stade des mathématiques démonstratives. C'est bien ce que semble montrer l'histoire des mathématiques chinoises, où des preuves apparaissent à certaines périodes chez certains auteurs, mais sans que cette pratique se généralise, ni que des règles logiques constantes soient dégagées (J.C. **Martzloff**, 1988).

II - ANALYSE A PRIORI DES LIENS ENTRE L'IRRATIONALITE ET LA DEMONSTRATION.

Dans le domaine de la didactique, l'analyse a priori désigne l'étude des différents comportements que l'on peut attendre d'élèves placés dans une situation d'enseignement, cela afin de donner du sens aux comportements effectivement observés lors d'une expérimentation. Les données sur lesquelles s'appuie une telle analyse sont fournies d'une part par le contenu mathématique de la situation, d'autre part par la connaissance que le chercheur possède des élèves à qui elle sera proposée : les comportements attendus ne seront pas les mêmes suivant que l'on s'adresse à un élève plus ou moins âgé, poursuivant des études techniques ou classiques. Autrement dit, l'analyse a priori prend aussi en compte l'expérience antérieure du chercheur, sa connaissance du milieu, elle est donc en ce sens en partie a posteriori : son caractère "a priori" indique plus une des positions que le chercheur va prendre par rapport à l'objet de sa recherche qu'une situation temporelle d'antériorité absolue par rapport à toute expérimentation ou pré-expérimentation ; on pourrait aussi parler d'analyse distanciée par rapport aux faits expérimentaux.

Essayant maintenant d'appliquer la même méthodologie à l'étude des réactions grecques face aux problèmes d'irrationalité et d'incommensurabilité, nous rencontrons le même phénomène : au-delà des déductions facilement tirées tout d'abord d'une analyse technique, purement mathématique et épistémologique, des problèmes, nous devrons, pour progresser, prendre déjà en compte la connaissance historique que nous avons de la mathématique grecque : il ne peut y avoir antériorité totale de l'analyse par rapport à toute recherche historique, mais ici aussi nous essaierons d'examiner quels peuvent être les résultats d'une distanciation systématique par rapport aux faits historiques.

2.1. Analyse technique des liens entre irrationalité et démonstration

Venons-en maintenant au problème qui nous préoccupe, en le prenant tout d'abord sous sa forme popularisée : celui de l'«irrationalité de $\sqrt{2}$» ou encore, et il y a là une distinction fondamentale à opérer, celui de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté. Trop souvent, ces deux problèmes sont confondus, mêlés ; c'est le cas quand, par exemple, on les résume par le fait que la diagonale du carré de côté unité est irrationnelle. Or il y a en fait deux problèmes, dans deux cadres différents :

- dans le cadre arithmétique, on constate que le nombre 2 n'admet pas de racine carrée rationnelle ;
- dans le cadre géométrique, on constate que la diagonale du carré d'admet pas de partie aliquote commune avec le côté.

Bien entendu, il y a un rapport entre les deux problèmes, un éclairage de chacun sur l'autre et l'existence de ce rapport, qu'on ne peut percevoir qu'après avoir marqué la différence, est si importante que nous lui consacrons une étude spéciale en utilisant le concept de "jeu de cadres" introduit en didactique des mathématiques par R. **Douady** (1984) (cf. ci-dessous § II, 2.2).

Contentons-nous, dans une première étape, de quelques remarques immédiates : le problème arithmétique est beaucoup plus simple dans son énoncé que le problème géométrique : il exprime une propriété du nombre 2. Au contraire, le problème géométrique n'exprime pas une propriété intrinsèque de la diagonale du carré, laquelle peut bien évidemment rentrer dans un rapport rationnel avec d'autres segments que le côté du carré, il concerne uniquement le couple de segments côté et diagonale. Par exemple, la très simple figure 2 montre à l'évidence des segments dans le rapport 2 en particulier $A'C'/AC$ mais $A'C'/AB$ et AC/AB n'existent pas dans le domaine rationnel. Remarquons que le statut de nos affirmations ("à l'évidence", "rapports n'existant pas") devra être précisé par rapport à la connaissance mathématique grecque : cela résultera de l'étude faite en 2.2.

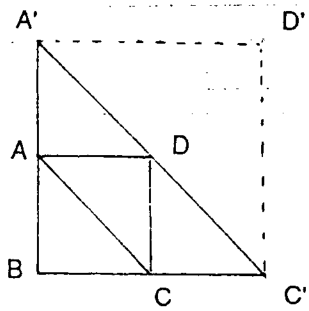

Figure 2

Allons un peu plus loin dans la réflexion dans le domaine géométrique : dans l'histoire comme dans l'enseignement, on l'a vu au § I, le problème est de passer d'un stade où la figure sert d'outil de preuve à celui où la géométrie devient l'art des "raisonnements exacts sur des figures fausses". Or, précisément, il est absolument impossible de constater l'incommensurabilité sur une figure, au contraire, l'expérience immédiate conclut à la commensurabilité : on peut toujours mesurer avec un même instrument le côté et la diagonale du carré (cette remarque est déjà faite par Aristote (traduction **Tricot** 1964, 983a, 15, p. 20). Ainsi l'incommensurabilité ne peut concerner que des êtres mathématiques idéaux, et ne peut faire l'objet que d'une démonstration, au sens précis que nous avons donné à ce terme au § II.

Dans le cadre arithmétique la situation, quoique plus simple, a l'intérêt d'imposer une preuve par l'absurde : l'analyse a priori précédente ne permet pas ici de prévoir quel degré d'abstraction, d'axiomatisation du concept de nombre est nécessaire, c'est pourquoi j'ai employé le mot "preuve", mais le problème posé, qui est un problème d'existence, ne peut recevoir de réponse négative que grâce à un raisonnement par l'absurde. Une même conclusion ne saurait être tirée dans le cadre géométrique car, ainsi que nous le verrons plus loin (§ III), il faut d'abord comprendre la nature du problème et bâtir le concept d'incommensurabilité. Suivant la nature de ce concept, le passage par l'absurde pourra être obligatoire ou non.

A ce stade de l'analyse, nous pouvons donc déjà tirer quelques conclusions :

– La reconnaissance du phénomène de l'incommensurabilité dans le domaine géométrique implique l'existence de démonstrations : si le théorème de Pythagore, par exemple, peut être montré (cf. § I), l'incommensurabilité ne peut être que démontrée.
– Les preuves d'irrationalité dans le domaine arithmétique impliquent l'usage du raisonnement par l'absurde.

Remarquons que, jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que très peu de données historiques, ce qui fait que nous ne pouvons pas donner de réponses aux questions suivantes qui surgissent naturellement après les conclusions ci-dessus :

* Comment, dans le domaine géométrique, les mathématiciens grecs ont-ils pu tomber sur le problème de l'incommensurabilité ? Comment a-t-il pu se présenter pour eux ?

* Le raisonnement par l'absurde, dont nous avons vu la nécessité au moins dans le cadre arithmétique, était-il disponible au 5ème siècle avant J.-C., comme méthode de validation d'une assertion, en dehors du cadre mathématique, et pouvait-il alors s'appliquer sans problème aux mathématiques ? Ou, au contraire, le raisonnement par l'absurde est-il apparu naturellement en mathématiques ?

Nous allons consacrer le reste de ce paragraphe à la réponse à la première question touchant la géométrie. La deuxième question sera abordée au § IV dans le cadre de l'étude de l'interaction entre la pensée grecque en général et les mathématiques.

2.2. Analyse a priori en fonction du cadre historique.

Pour aller plus loin, nous devons maintenant utiliser les données historiques en décrivant ce qu'était l'état des mathématiques grecques avant la découverte de l'irrationalité.

Auparavant, deux remarques s'imposent :

- la connaissance historique que nous avons des idées de la période concernée n'est pas toujours suffisante ;

- le temps de l'histoire n'est pas le temps didactique, il n'y a pas ici d'autorité supérieure pour presser le pas de la communauté mathématique, imposer son rythme comme le fait le maître dans sa classe. Personne ne sait par avance ce que sera le résultat de la recherche, ni ne peut garantir qu'elle aboutisse, et l'échelle est incomparable : le traitement du problème de l'irrationalité et de l'incommensurabilité dans les mathématiques grecques s'étend certainement sur tout le 5ème siècle avant J.-C. Ce n'est donc que dans une perspective a posteriori, comprimant la durée historique, que l'on peut parler de rupture.

Venons-en maintenant à notre sujet. Historiquement, la mathématique grecque prédémonstrative (c'est-à-dire aux environs du début du 5ème siècle avant J.-C.) semble pouvoir se résumer à la mathématique pythagoricienne. Décrire l'état de la mathématique revient donc dans ce cas à décrire la pensée pythagoricienne sur cette science. Mais cette question doit tout de suite être problématisée : son simple énoncé comporte un anachronisme, car il sous-entend que la mathématique existe déjà comme discipline individualisée dans le champ de la connaissance. Cette dernière idée est d'autant plus tentante pour un esprit moderne que chacun connaît l'importance du nombre entier dans la pensée pythagoricienne. De là à l'identifier comme une pensée pour qui tout est mathématique, il n'y a qu'un pas, mais déjà on pressent que, si tout est mathématique, c'est aussi que le domaine propre des mathématiques n'est pas délimité, et que l'emploi inévitable du mot "mathématique" amène avec lui une ambiguïté fondamentale : en fait il y a une pensée pythagoricienne (cf. p. 12), mais celle-ci ne sépare pas méthodologiquement les divers domaines que sont pour nous la philosophie, les mathématiques et la physique.

Entrons maintenant dans plus de détails :

2.2.1. *La pensée pythagoricienne.*

Malgré les précautions préliminaires, de redoutables difficultés nous attendent encore :

* Tout d'abord, nous ne possédons pratiquement pas de documents sur le pythagorisme primitif : celui-ci ne nous est connu que par ce qu'en dit Aristote, ou par reconstitution à partir de ce qu'en disent ses adversaires, à commencer par Zénon d'Elée dont nous reparlerons plus loin. (Il ne faut pas confondre cette doctrine primitive avec le pythagorisme tardif, souvent mêlé de platonisme, plus connu).

* Ensuite, le caractère même de la doctrine la rend difficile à saisir pour nous: il ne faut sans doute pas se l'imaginer comme une pensée rationnelle fondée sur quelques principes clairs, non contradictoires. Citons ici, **Vernant** (1982, p. 111) qui, après avoir marqué le rôle joué dans les origines grecques par des personnages du type "shamanes" ou des "yogis" ajoute "*... ce qu'on a pu appeler le shamanisme grec ... apparaît encore pleinement dans le pythagorisme*

ancien". Ainsi, la saisie de la forme de pensée pythagoricienne archaïque est sans doute au moins autant du domaine de l'ethnologue, de l'historien des psychologies, que de celui du philosophe ou du mathématicien. Pour Aristote déjà, il s'agit d'une pensée difficile à comprendre, presque exotique, le lien est rompu.

Ceci posé, le plus simple est sans doute d'indiquer ici quelques caractéristiques de cette pensée, suffisantes pour comprendre ce qui va suivre, mais qui seraient insuffisantes pour une compréhension globale du pythagorisme ancien. Nous avons en effet écarté tout ce qui a trait au contenu philosophique du pythagorisme, qui joue pourtant un grand rôle dans le débat avec Zénon sur lequel nous reviendrons plus loin, et nous nous sommes limités aux aspects qui concernent directement les mathématiques.

Première caractéristique (C_1). Tout est nombre (entier).

Deuxième caractéristique (C_2). La doctrine ne fait pas de différence entre le domaine géométrique et le domaine physique : il y a un syncrétisme physico-mathématique, doublé d'ailleurs de l'absence de distinction entre le réel et le perçu.

Dans le domaine de la géométrie, de telles conceptions amenaient à considérer un segment comme constitué de points se suivant consécutivement comme les boules d'un boulier, sur le modèle des nombres entiers. Pour des raisons essentiellement philosophiques, il est probable que ces points étaient considérés comme "séparés" entre eux par une substance interstitielle. Il est peu probable que C_1 ait amené à associer à chaque segment un nombre entier, par contre, dire que tout est nombre, ou plus précisément "logos" (c'est-à-dire rapport d'entiers) aboutissait sans doute à attribuer à tout *couple* de segments un rapport d'entiers, en accord d'ailleurs avec les connaissances pythagoriciennes en musique.

Simultanément à cette conception, la géométrie amenait à admettre la divisibilité infinie du segment, ou plus précisément, la dichotomie infinie, car on savait sans doute à l'époque que le milieu d'un segment peut se construire à l'aide de la règle et du compas.

Naturellement, nous savons maintenant que ces deux conceptions sont contradictoires, mais leur simultanéité était rendue possible chez les Pythagoriciens par l'ambiguïté de la notion de point, à la fois constituant ultime de la matière (comme l'atome chez les atomistes) et point géométrique (confusion typique de C_2). Soulignons au passage l'anachronisme qui consiste à présenter les Pythagoriciens primitifs comme "atomistes", anachronisme qui est lié à l'affirmation implicite d'une autonomie de la physique dans la pensée pythagoricienne (sur les rapports entre l'atomisme de Démocrite et les conceptions des Pythagoriciens, cf. **Tannery**, 1987).

Bien entendu, ces principes étaient reliés à l'expérience concrète des pythagoriciens, ils rendaient compte de leurs découvertes dans le domaine musical comme de la pratique physico-mathématique : tant que l'on ne s'occupe que de grandeurs concrètes, il est toujours possible de trouver entre deux d'entre elles, par une mesure, un rapport rationnel. La recherche de ces rapports est l'un des objets de toutes les mathématiques anciennes (égyptienne, babylonienne) et le fait que certains rapports, comme celui de la longueur du cercle à son diamètre, soient plus difficiles à trouver que d'autres, ne peut certainement pas conduire à soupçonner qu'ils n'existent pas (cf. § IV). D'ailleurs, l'idée que deux grandeurs, et plus précisément deux longueurs, ont toujours une partie aliquote commune est sans doute une étape inévitable dans le développement de la pensée mathématique aussi bien au plan historique qu'au plan individuel. La découverte de l'irrationalité s'appuie en fait "contre", au sens de **Bachelard** (1983, chap. 1, I, p. 14), cette théorie préliminaire et le fait que cet obstacle ait été franchi précisément à partir de la pensée pythagoricienne n'est sans doute pas le fait du hasard (cf. § IV, 4.4).

Nous pouvons préciser maintenant la situation de la mathématique au sein de cette pensée : l'arithmétique, en un sens très primitif de classement des nombres entiers, y occupe une place privilégiée d'où elle domine ce qu'on pourrait appeler une physico-géométrie qui comprend la musique comme domaine particulièrement étudié.

Cette pensée va se trouver affrontée à peu près simultanément à un double défi, mathématique avec l'incommensurabilité, philosophique avec la pensée éléate. La relation entre ces deux défis, que nous aborderons au § IV, est l'un des problèmes les plus fascinants, mais aussi les plus difficiles, que soulève l'origine de la démonstration.

2.2.2. Contextes possibles d'apparition du problème.

Nous pouvons maintenant reprendre l'analyse a priori, compte tenu de ce qui a été dit sur la pensée pythagoricienne, en examinant les contextes possibles d'apparition des problèmes d'irrationalité et d'incommensurabilité. Nous sommes ici largement redevables de M. **Caveing** (1977) à qui nous empruntons la liste suivante :

* L'étude de la musique : elle peut amener au problème du partage de l'octave en deux, c'est-à-dire à la recherche d'un nombre dont le carré soit égal à deux.
* Le problème de la diagonale du carré (cf. le début de ce paragraphe), que nous devons analyser plus en détail. Si le carré constitue l'un des polygones réguliers les plus simples, ce qui justifie déjà son étude, l'intérêt plus spécifique de sa diagonale apparaît en outre dans le problème de la duplication du carré résolu graphiquement dans le dialogue de Platon "le Ménon" (cf. Platon, tr. **Chambry**,1967) par la figure 3 ci-dessous qui montre que c'est le carré ayant un côté de même longueur que la diagonale d'un carré donné qui a une aire double de celui-ci.

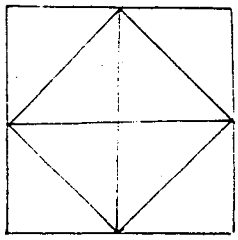

Figure 3

Or le problème de la duplication du carré n'est pas seulement anecdotique : c'est en effet l'analogue plus simple du problème de la duplication du cube, l'un des "problèmes classiques" de la géométrie grecque auxquels A. **Seidelberg** (1978) attribue une origine religieuse aux côtés de la quadrature du cercle.

* Le problème de la diagonale du pentagone. Ici aussi, le seul fait que le pentagone soit l'un des polygones réguliers les plus "simples", après le carré et avant l'hexagone, qui lui ne pose pas de problème, n'est qu'un premier argument. Beaucoup plus convaincant est le fait que le pentagramme (pentagone étoilé) était l'emblème des Pythagoriciens, donc se trouvait sur le devant de la scène, et que, dans son cas, l'apparition d'un phénomène d'incommensurabilité était facile à mettre en évidence et pouvait même apparaître naturellement à travers une méthode sans doute courante chez les Grecs, le procédé d'anthyphérèse. Il nous reste à expliquer ce procédé, qui permet de faire apparaître le phénomène de l'incommensurabilité en restant dans le cadre géométrique, sans lien avec le cadre numérique, ce qui, d'une certaine manière fait à la fois sa force et sa faiblesse. L'étude historique (cf. **Von Fritz**, 1945 ; **Caveing**, 1982) amène à penser que c'est à travers la méthode de l'anthyphérèse que le problème de l'incommensurabilité s'est présenté aux mathématiciens grecs ; en effet, nous savons par Aristote que l'anthyphérèse, qu'il appelle, lui, antanérèse, intervenait dans une définition "pré-euclidienne" de l'égalité des rapports, définition qui témoigne d'un stade de la pensée où la difficulté de l'incommensurabilité était reconnue, mais non complètement résolue (cf. § III).

L'anthyphérèse est une méthode de recherche, de construction même, de la partie aliquote commune la plus grande possible entre deux grandeurs (leur *PGCD* dans le cas de deux entiers) que l'on pourrait nommer "méthode des soustractions successives", par analogie avec la "méthode des divisions successives", c'est-à-dire l'algorithme d'Euclide, qui n'en est que le perfectionnement pour les nombres entiers. Dans le cas qui nous intéresse, soit deux segments AB et CD, et supposons $AB > CD$.

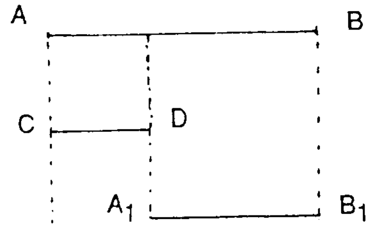

Figure 4

La méthode consiste à retrancher CD de AB, ce qui donne A_1B_1, puis, si $CD < A_1B_1$, à retrancher à nouveau CD de A_1B_1, ce qui donne A_2B_2 ... etc. Lorsqu'on arrive à un segment $A_kB_k < CD$, on échange les rôles. Alors :

- si les deux segments initiaux sont commensurables, on arrive en un nombre fini d'étapes à un segment nul. Les deux segments égaux de l'étape précédente sont la partie aliquote commune cherchée ;

- sinon, le processus se poursuit à l'infini, et la longueur des segments successifs tend vers zéro (2).

- Le procédé de l'anthyphérèse est exposé chez Euclide pour les nombres et pour les grandeurs en général mais, ainsi que nous l'avons indiqué, il est antérieur. On le trouve, pour les nombres, en Chine (cf. **Van Der Waerden**, 1983).

Ce procédé permet donc d'attacher à un couple de grandeurs une suite de soustractions qui, en termes modernes, détermine le développement en fraction continue du rapport des deux grandeurs considérées. Sous l'hypothèse, pythagoricienne, que deux grandeurs ont toujours un rapport rationnel, ce procédé fournit un moyen de déterminer ce rapport en un nombre fini d'opérations et même si, pour diverses raisons (nombres d'étapes), le calcul ne peut être mené jusqu'au bout, il peut fournir un critère d'égalité de deux rapports par l'identité de leurs anthyphérèses (c'est-à-dire des suites de soustractions qui les caractérisent respectivement).

Ainsi, nous entrevoyons une réponse possible au problème que nous nous sommes posé : le mathématicien grec aura rencontré le problème de l'incommensurabilité dès qu'il aura rencontré une anthyphérèse infinie. Reste à voir pourquoi et comment peut se produire cette rencontre dans les cas que nous avons énumérés. Il nous faut tenir compte pour cela des outils mathématiques disponibles et du fait que, a priori, le mathématicien s'attend à une anthyphérèse finie. Le caractère infini doit donc d'une certaine manière *s'imposer de lui-même.*

2.2.3. *Les cas du pentagone et du carré.*

L'historien K. **Von Fritz** (1945) a été le premier à attirer l'attention sur le fait que, dans le cas du pentagone, le caractère indéfini de l'anthyphérèse apparaît effectivement relativement spontanément quand on l'applique au côté et à la diagonale : avec les notations de la figure 5, l'anthyphérèse appliquée au couple (*AD*, *AE*) conduit à le remplacer par le couple (*B'E'*, *B'A'*) en passant par un seul intermédiaire (*B'E*, *EA'*) et les connaissances mathématiques attribuées à l'époque sont suffisantes pour parcourir les deux étapes. Ainsi on est ramené au même problème pour le pentagone régulier *A'B'C'D'E'*, donc le processus est indéfini, sauf à supposer un minimum absolu parmi les longueurs, ce qui est exclu par la connaissance du milieu.

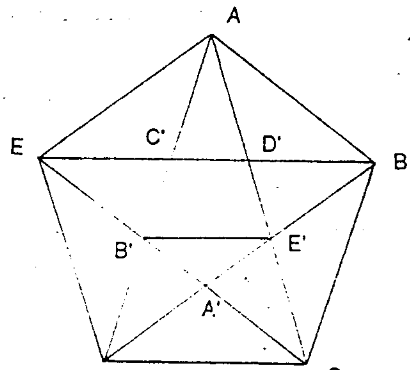

Figure 5

Cependant la reconnaissance du caractère infini du processus suppose que l'on admette que tous les pentagones réguliers ont les mêmes propriétés, c'est-à-dire que l'on admette les propriétés des figures semblables, tout au moins dans le cas des polygones réguliers. C'est ce que l'on fait du reste dans l'enseignement de la géométrie lorsqu'on parle des propriétés de "la figure" en admettant de façon implicite des propriétés des figures semblables, lesquelles sont particulièrement évidentes dans le cas des polygones réguliers.

Ainsi la réflexion sur le cas du pentagone amène à considérer que les deux segments *AD* et *AE* n'ont pas de commune mesure, au moyen d'une démarche de pensée qui montre et utilise plus ou moins en même temps le fait que le rapport *AD*/*AE* est égal à *A'D'*/*A'E'* donc se reproduit indéfiniment avec des termes de plus en plus petits. Toute réflexion sur les propriétés de la similitude cherchant à augmenter la rigueur de la preuve des propriétés utilisées ne peut qu'être fondée sur l'hypothèse de la rationalité universelle des rapports de segments donc conduire à un cercle vicieux ou à la redoutable tâche de définir une nouvelle notion de rapports pour les segments (cf. § III où l'on montre comment la première voie choisie pour cette dernière tâche était probablement elle aussi non entièrement rigoureuse).

En ce qui concerne le carré, le caractère infini de l'anthyphérèse appliquée à la diagonale et au côté est moins évident, mais on peut le mettre en évidence avec les moyens mathématiques de l'époque avec les mêmes problèmes de raisonnements circulaires (**Caveing**, 1982b, ch. 2 & 5).

Il y a pourtant de bonnes raisons de penser que le lieu de la découverte de l'irrationalité a été le carré plutôt que le pentagone : on ne possède du reste aucun témoignage direct d'une étude primitive du type de celle conjecturée pour un certain nombre de raisons historiques par Von Fritz. Nous nous efforçons ci-dessous (2.2.4) d'apporter d'autres arguments en faveur du carré plus reliés à notre problématique mais auparavant nous préférons dégager déjà la conclusion suivante : Dans le cadre d'une géométrie qui fait encore sans doute largement appel à la figure, le phénomène de l'irrationalité peut être rencontré à l'occasion de l'emploi d'une technique relativement simple ; il se manifeste alors, non pas comme une découverte éblouissante, mais plutôt comme un nœud de contradictions, puisque la démarche mathématique amène à "prouver" la non-existence de certains rapports de segments, contrairement aux idées reçues et à la doctrice pythagoricienne, et que cette démarche de "preuve" elle-même s'appuie sur l'hypothèse de l'existence universelle des rapports rationnels qu'elle mène à infirmer ... (3). On voit ici que l'ensemble de ces contradictions constitue une énigme dont le dépassement n'est pas a priori évident. Nous avons du reste heureusement des traces de diverses tentatives de dépassement de la contradiction, antérieures à la solution d'Eudoxe exposée par Euclide au chapitre X des éléments (**Heath**, 1956) et qui, malgré la pauvreté des documents historiques, témoignent du jeu complexe des conjectures et des réfutations dans l'évolution des mathématiques (cf. § III).

2.2.4. *Les jeux de cadres.*

Revenons maintenant, pour terminer ce paragraphe, à la comparaison entre la situation du pentagone et celle du carré. Nous allons voir qu'ici, à la lumière du concept de "jeu de cadres", la deuxième est certainement plus favorable que la première au progrès mathématique, ce qui semble d'ailleurs l'opinion la plus communément retenue, en dehors de l'article cité de Von Fritz.

En didactique, on parle de jeu de cadres, pour souligner que la plupart des concepts mathématiques peuvent intervenir dans divers domaines, par exemple dans le cadre géométrique et dans le cadre arithmétique, ou algébrique, etc. (cf. R.. **Douady**, 1986). Il en résulte des correspondances entre objets et relations dans différents cadres, par exemple entre le problème de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et celui de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré.

Pour introduire et faire fonctionner de nouvelles connaissances chez l'élève, le didacticien privilégie les situations dans lesquelles le changement de cadre donne lieu à une correspondance imparfaite créatrice de déséquilibres qu'il s'agit de compenser (R. **Douady**, loc. cit.). Or tel est le cas du carré et de sa diagonale: il peut être abordé dans un cadre purement géométrique, à partir de l'anthyphérèse, mais il lui correspond, par le théorème de Pythagore, un problème purement arithmétique, car le rapport de la diagonale au côté doit avoir pour carré 2.

Dans le cadre arithmétique, la recherche de la racine carrée de 2, qui peut être motivée par des considérations relatives à la musique (3ème cadre), peut être difficile, mener à des approximations, sans suggérer l'idée que cette racine carrée n'existe pas. Le cadre géométrique fournit d'abord un objet qui a pour mesure cette racine carrée mais ensuite, l'application de l'anthyphérèse, qui pourrait mener à la valeur du rapport, mène à douter de son existence, introduit à un carrefour de contradictions. Un retour au cadre arithmétique peut amener à l'hypothèse de la non-existence de la racine carrée, à la lumière de l'expérience géométrique. Or nous avons déjà signalé que, dans le cadre arithmétique, la démonstration de non-existence ne nécessite que deux outils fort simples : le raisonnement par l'absurde et la classification des nombres en pairs et impairs. L'un au moins de ces outils était familier aux Pythagoriciens : la classification pair-impair. Quant au raisonnement par l'absurde, nous y reviendrons au § IV. En supposant prouvée l'irrationalité dans le cadre arithmétique, on a sinon une explication, tout au moins un résultat qui rend moins invraisemblables les difficultés rencontrées avec la diagonale du carré. Cependant, le cadre géométrique laisse le problème ouvert jusqu'à la solution apportée par la théorie des rapports d'Eudoxe exposée dans Euclide, ch. X.

A ce qui précède, soulignant la possibilité et l'intérêt du changement de cadre dans le cas du carré, il faut ajouter les deux arguments suivants : premièrement, nous verrons au § III que les mathématiciens grecs ont certainement pensé d'abord que si deux segments pouvaient ne pas être commensurables, les carrés construits sur ces segments l'étaient peut-être toujours, ce qui ne peut être suggéré par l'exemple du pentagone mais l'est évidemment par celui du carré ; deuxièmement, le problème de la diagonale du carré est de plus relié à deux problèmes classiques : celui de la duplication du carré, et celui des triplets pythagoriciens. Nous avons abordé plus haut, dans ce même paragraphe, la duplication du carré ; quant au calcul des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des triplets (a, b, c) de nombres entiers côtés d'un triangle rectangle, il serait, d'après **Van Der Waerden** (1983), l'un des plus anciens problèmes mathématiques. Le lien avec le problème de la diagonale est ici moins évident. Il consiste à remarquer que, parmi les triplets pythagoriciens calculés par les formules connues à l'époque (cf. par exemple Platon, cité par **Van Der Waerden**, p. 8), aucun ne correspond au triangle rectangle isocèle, c'est-à-dire au demi-carré.

Au regard de toutes ces possibilités, le problème du pentagone apparaît relativement pauvre. Bien sûr, le rapport de la diagonale au côté n'est autre que le célèbre nombre d'or, mais celui-ci est loin d'apparaître naturellement dans un cadre arithmétique simple qui pourrait permettre de poser et résoudre facilement le problème de son existence : le lecteur se souviendra en effet que le mathématicien grec ne dispose pas de la notation algébrique, donc de la possibilité de raisonner sur l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ qui conduirait elle, en termes modernes, par de simples considérations de parité et d'imparité, à l'irrationalité du nombre d'or.

Il ne reste, en faveur du problème du pentagone, que le fait que le pentagramme était l'emblème des Pythagoriciens et la simplicité de l'anthyphérèse. Cependant, l'impossibilité du changement de cadre simple qui permet une découverte de l'inexistence de la racine carrée de 2 sur le terrain stable de l'arithmétique, conduit à voir dans le cas du pentagramme le lieu où a pu se manifester le tissu de contradictions relatif à l'irrationalité plutôt que celui où le dépassement de ces contradictions a pu être aperçu (cf. Caveing, 1977, p. 1269).

2.2.5. *Conclusion sur les rapports entre l'irrationalité et la démonstration.*

1°) Les problèmes relatifs au pentagone et au carré fournissent des situations où l'existence d'un phénomène nouveau, mettant en cause les idées reçues dans le pythagorisme, pouvait être reconnue en utilisant les outils de pensée disponibles, en restant dans la connaissance ancienne, pourrait-on dire en langage didactique.

2°) La solution définitive du problème telle qu'elle figure dans Euclide exige la définition des objets de la géométrie comme objets de pensée, idéalités, dont les règles de manipulation sont précisées par des axiomes et dont les propriétés ne sauraient donc être établies que par des démonstrations, au sens du § 1.

3°) Toutefois, le premier pas vers la résolution du problème de l'irrationalité fut sans doute, dans le cadre arithmétique, la preuve de non-existence de la racine carrée de 2. Cette preuve qui n'utilise que le raisonnement par l'absurde et les propriétés de parité et d'imparité ne nécessite pas forcément une démarche aussi nette d'axiomatisation et de démonstration.

4°) Le problème du rapport entre la diagonale et le côté du carré a certainement été le lieu privilégié des découvertes sur l'irrationalité et l'incommensurabilité.

III - PREHISTOIRE DE L'IRRATIONALITE : DE LA PERCEPTION D'UN PROBLEME A SA SOLUTION.

Le problème qui nous intéresse est celui des origines de la démonstration ou, plus largement, de la transformation globale des mathématiques en science hypothético-déductive (cf. § I). Nous avons vu que les problèmes d'irrationalité et d'incommensurabilité y jouent un rôle central puisqu'ils constituent une situation descriptible en termes de mathématiques pythagoricienne mais insoluble dans leur cadre.

Comme nous l'avons déjà dit, il est tout à fait invraisemblable que la seule perception du problème ait conduit immédiatement à sa solution. De nombreux tâtonnements ont dû précéder, vers le 5ème siècle avant Jésus-Christ, l'élaboration de la solution définitive. Dans la mesure où ces tâtonnements représentent des étapes sur le chemin de la rigueur, ils nous intéressent aussi. Le guide intellectuel de notre quête sera ici I. **Lakatos** (1984) car le concept d'irrationalité entre tout à fait dans la catégorie de ce qu'il nomme "proof generated concept", concept né de la preuve ("concept éprouvette" dans la traduction citée). En effet, comme nous l'avons vu, on ne peut soupçonner le phénomène d'incommensurabilité dans le domaine géométrique sans l'avoir déjà rencontré, et en quelque sorte prouvé ; ce n'est même qu'au terme de toute la construction de la théorie des rapports et de la mathématique démonstrative, construction provoquée par le problème, que le concept peut trouver sa place et qu'est surmontée définitivement la contradiction initialement rencontrée. Entre temps, conformément à la description du jeu des conjectures et des réfutations, la mathématique aura continué à évoluer, soit en laissant momentanément de côté ce cas embarassant, soit en contournant l'obstacle, soit en élaborant des solutions partielles, soit en se fourvoyant dans des impasses. Si l'on accepte la datation de **Knorr** (1975), cette phase aurait duré un siècle, de – 430 (reconnaissance du phénomène d'incommensurabilité) à – 330 (axiomatisation d'Eudoxe).

Naturellement les Grecs, n'ayant pas lu Lakatos, ne nous ont pas laissé une description de cette phase, mais fort heureusement, différents indices historiques, que nous allons énumérer ci-dessous, permettent de se faire une idée de certaines de ces étapes.

Le premier indice est un texte de Platon dans "La République" (trad. **Diès** 1977 livre VIII, 546c). Ce texte célèbre, relatif au "nombre nuptial", nous intéresse dans la mesure où il utilise la longueur de la diagonale d'un carré, dans le passage suivant : "*... cent carrés des diagonales rationnelles de cinq, chacun diminué de un, ou cent carrés des diagonales irrationnelles, diminués de deux ...*". L'interprétation du texte ne soulève pas de divergence entre les traducteurs : le carré de côté 5 a une diagonale de longeur $\sqrt{50}$, irrationnelle, dont la valeur approchée à une unité près est 7 (car $7^2 = 49$) et la phrase citée exprime que $100(7^2 - 1) = 100(50 - 2)$.

Au prix de certains anachronismes, nous pouvons brièvement dire que la "diagonale irrationnelle" désigne $\sqrt{50}$, alors que la "diagonale rationnelle" désigne 7.

Mais ce qui est intéressant et échappe au lecteur de la traduction, c'est le mot grec employé par Platon et traduit par irrationnel : ce n'est pas le mot qu'emploiera plus tard Euclide et qui signifie "incommensurable en longueur". Platon emploie un mot qui signifie étymologiquement "inénonçable". De même le mot traduit dans ce texte par rationnel signifie "énonçable" (cf. **Szabo**, 1977, ou **Caveing**, 1977, p. 1205, qui traduit par exprimable). Il est très tentant de voir là la trace d'un stade des mathématiques où l'on avait découvert l'impossibilité d'attribuer à la diagonale du carré de côté 5 une mesure rationnelle mais sans avoir encore défini le concept d'incommensurabilité. Remarquons de plus que le texte évite la difficulté en raisonnant sur le carré de la diagonale qui lui, est rationnel. Ceci nous amène au deuxième indice.

Ce deuxième indice est mis en relief par **Caveing** (1977, p. 1270 et 1982, p. 183). Il remarque que plusieurs traces demeurent d'une époque où l'on a tenté de contourner l'écueil de l'incommensurabilité en géométrie en raisonnant sur les aires des carrés construits sur les segments : les œuvres d'Hippocrate de Chio, auteur de la célèbre quadrature des lunules, dont nous possédons heureusement un extrait, témoignent de cette étape (**Caveing**, 1977 p. 692). La possibilité même de cette étape implique un stade de rigueur qui n'est pas encore celui de la démonstration, car de telles mathématiques utilisent simultanément les propriétés des grandeurs semblables, donc les rapports de longueurs, sans pouvoir les définir correctement. Il s'agit certainement d'une période où la difficulté de l'incommensurabilité est reconnue mais non élucidée. Une trace en subsiste probablement chez Euclide (ch. X, définitions) lorsque étant donné un segment unité, il partitionne, par une définition, les autres segments en segments rationnels et irrationnels, mais pas à la manière contemporaine, puisqu'il met dans la première classe non seulement les segments commensurables avec l'unité, mais aussi ceux pour lesquels l'aire du carré construit sur eux est rationnelle (4). Ceci vient à l'appui de l'existence de la phase mathématique qu'illustrerait Hippocrate de Chio, et suggère aussi l'idée que le premier espoir de dépassement du problème de l'incommensurabilité a pu être l'hypothèse que deux segments sont toujours au moins commensurables par l'intermédiaire des carrés construits sur eux, ce qui sauvait en partie les idées pythagoriciennes, et était naturellement suggéré par l'exemple du carré et de sa diagonale.

Un troisième indice est rapporté par Aristote (Topiques, trad. **Tricot** 1950, 158 B 30, p. 332) quand il cite comme définition de l'égalité de deux rapports l'identité de leurs anthyphérèses. Naturellement, ce troisième indice vient à l'appui d'une découverte de l'incommensurabilité géométrique par le moyen de l'anthyphérèse et confirme l'usage pratique que l'on faisait de ce procédé. Cependant, en l'absence de la définition eudoxienne des rapports de grandeurs, il témoigne d'un stade des mathématiques où la manipulation des rapports était certainement entachée de raisonnements circulaires, comme on l'a expliqué sur l'exemple du pentagone, par suite de l'inévitable utilisation des proportions et de la similitude (pour une reconstitution de cette étape, cf. **Fowler**, 1979 et 1980 et **Knorr**, 1975, VIII et IX).

Ces trois traces du tâtonnement qui a précédé la solution d'Eudoxe n'épuisent d'ailleurs pas le champ des solutions possibles. Elles représentent toutes trois cependant des issues relativement internes aux mathématiques, encore que la deuxième soit marquée par les présupposés panarithmétiques des Pythagoriciens. D'après ce que nous avons dit plus haut sur le caractère indifférencié de la pensée pythagoricienne, d'autres issues, plus externes, c'est-à-dire dans ce que nous considérons maintenant comme le domaine de la philosophie, étaient envisageables. On pouvait par exemple considérer que les difficultés rencontrées tenaient à l'impossibilité pour la pensée de rendre compte sans contradiction de la réalité. Cette position n'était pas du tout inconcevable pour la pensée grecque : c'est celle de certains sophistes (Gorgias, Protagoras), c'est celle de l'école éléate de Parménide et de Zénon et c'est dans une certaine mesure celle de Platon (cf. ci-dessous § IV). Le partage entre ces différentes pensées se situe d'abord au niveau de la possibilité d'échapper au caractère contradictoire de la connaissance du réel (doxa) par la considération d'objets de pensée non contradictoires, cette dernière position, refusée par les sophistes, est celle de Platon et des Eléates, bien qu'ils diffèrent ensuite dans leur conception de ce monde des idées : les objets mathématiques sont sauvés dans la pensée de Platon, alors que leur existence non contradictoire était certainement niée dans la pensée éléate, mais ils sont de purs objets de pensée et Platon dénonce sévèrement l'illusion qui consiste à les prendre pour des objets réels (cf. **Thuillier**, 1985). La position opposée apparaît chez certains sophistes : le statut d'objet de pensée est refusée aux êtres géométriques qui héritent donc des propriétés contradictoires du réel et , d'après Aristote, Protagoras "réfute les géomètres" (cf. G. **Romeyer-Dherbey**, 1985) dans leurs illusions. De même, la tentative de quadrature du cercle par Antiphon révèle un rapport à la géométrie dénoncé par Aristote comme non scientifique (G. **Romeyer-Dherbey**, loc. cit.) et tout différent de celui qu'on trouve chez Euclide.

Concluons ce bref panorama qui appuie, dans ce cas particulier, l'affirmation suivant laquelle le dépassement d'une contradiction n'est pas contenu dans les termes où elle s'exprime. L'étude pourrait être approfondie en cherchant à affiner l'analyse des divers comportements adoptés pour dépasser la contradiction sur le modèle de **Lakatos** (1984) : ce n'est pas l'objet principal de ce travail. Un point est cependant à souligner: la solution classique d'Eudoxe n'était pas la seule envisageable, et son succès ne réglait pas tous les problèmes : celui du rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre restait, et resta longtemps encore, dans une large mesure, ouvert.

IV - INTERNALISME ET EXTERNALISME : LINFLUENCE DE LA SOCIETE GRECQUE.

Les philosophes ont toujours été frappés par l'apparition simultanée (à notre échelle, i.e., sur un ou deux siècles) en Grèce, au 6ème et 5ème siècles avant Jésus-Christ, de la démocratie (tout au moins pour la minorité des citoyens), de la philosophie, de la "géométrie" (cf. par exemple, J. **Patocka**, 1981, p. 65-77). Pour eux, il ne fait pas de doute que l'apparition de la démonstration en mathématiques n'est que l'«application» dans cette science du débat public sur l'agora qui caractérise l'organisation politique de la cité grecque par rapport aux régimes qui l'ont précédée et à ceux qui l'entourent. Pendant longtemps, l'origine de cette démocratie grecque a semblé si mystérieuse qu'on a parlé de "miracle grec". Le miracle grec, matérialisé par la naissance de la démocratie, de la philosophie, de la géométrie , consistait dans la découverte par l'humanité de la "raison" , conçue implicitement comme une structure de pensée universelle, indépendante des civilisations, que les Grecs auraient été les premiers à découvrir.

Depuis, le progrès de la science historique, en particulier le déchiffrement de l'écriture de la civilisation mycénienne qui a précédé celle de la Grèce classique, a permis de comprendre le "miracle grec" et d'expliquer comment les transformations sociales ont permis de passer de la pensée mythique à une pensée rationnelle, encore partiellement marquée par ses origines et que, maintenant, nous considérons comme la rationalité grecque, et non comme l'incarnation d'une mythique raison universelle ; nous sommes encore largement héritiers de cette rationalité mais nous savons maintenant qu'elle est liée à une civilisation et à une histoire : pour nous, la raison n'est plus une valeur trônant dans le ciel des idées et découverte par les Grecs, mais une construction, datée historiquement, due à une civilisation aux prises avec certains problèmes (développement du commerce, ... etc.). Pour tout ceci on pourra consulter J.P. **Vernant** (1962 ou 1982, en particulier : Raison d'hier et d'aujourd'hui) que nous avons déjà cité dans l'introduction : pour les historiens de la pensée, l'origine de la rationalité est politique , elle est issue du débat contradictoire sur le gouvernement de la cité : " *l'esprit de la polis est un esprit d'unité dans la discorde, dans la lutte* " (J. **Patocka**, 1981). Il est alors tentant de conclure à une relation de dépendance simple des mathématiques par rapport à la société. Mais cette conclusion a le défaut de traiter les mathématiques de manière beaucoup trop globale, sans tenir compte de leur contenu propre à l'époque considérée : on se contente de constater une simultanéité entre la naissance historique du système démocratique grec et l'individualisation de la mathématique comme science hypothético-déductive.

Si, au contraire, on examine, comme nous l'avons fait au § II, le contenu mathématique contemporain de la transformation de cette science, alors on ne peut qu'être frappé, nous l'avons vu, par une autre coïncidence, entre la transformation des mathématiques et le problème de l'irrationalité, dont nous avons mis en évidence les liens a priori.

Ainsi, l'examen du contenu mathématique rend moins évidente la conclusion "externaliste" et met à jour non plus une simple, mais une triple coïncidence.

Naturellement, les Grecs ne nous ont pas laissé une analyse épistémologique des influences réciproques entre les mathématiques et la société, il est donc difficile de décider entre les deux thèses, d'autant plus qu'elles sont selon toute vraisemblance toutes deux exactes, ce qui apparaîtra peut-être plus clairement sous forme d'énoncés négatifs :

– sans le problème de l'irrationalité, la transformation des mathématiques ne se serait pas produite, même dans la société grecque;
– dans un autre contexte de société, même affrontées au même problème, les mathématiques ne se seraient pas transformées de la même manière.

Afin de préciser cette double affirmation sous une forme plus positive, nous allons examiner de plus près ce que l'on peut dire de l'interaction entre le développement des mathématiques et celui de la société grecque, en commençant par exposer les thèses à ce sujet de Szabo et Caveing, puis en regardant de plus près, par comparaison avec d'autres civilisations, l'apparition du raisonnement par l'absurde. Nous terminerons, avant de conclure, par un retour sur le rôle du pythagorisme dans l'émergence du problème de l'irrationalité.

4.1. La thèse de A. Szabo (1977).

Elle précise et complète la thèse des philosophes en ce sens que considérant que la démonstration en mathématiques provient du débat philosophique, elle précise de quels philosophes et de quel type de débat il s'agit. De plus, elle reconnaît dans le problème de l'incommensurabilité l'origine, interne aux mathématiques, du recours à la philosophie. Ceci conduit à proposer le schéma suivant :

– Dans une première étape, on aurait constaté les propriétés contradictoires, vis-à-vis de la très ancienne théorie du pair et de l'impair, du nombre rationnel censé mesurer la diagonale du carré. De cette étape, témoigneraient sans doute les anciennes appellations d'"énonçable" et "inénonçable" (cf. § III ci-dessus). Cette étape aboutit à la constatation d'un obstacle au sein des mathématiques.

– Dans une deuxième étape, marquée par le rejet de l'expérience sensible et de l'intuition, au profit d'une démarche concevant les objets mathématiques comme purement idéaux, maniés au moyen de règles de raisonnement rigoureuses, d'abord uniquement par l'absurde, on aurait pu définir l'incommensurabilité et la démontrer (c'est tout un) dans le cas envisagé. L'obstacle interne était ainsi surmonté à l'aide d'un apport externe, mais au prix d'une refonte totale du caractère même des mathématiques. D'où venait cet apport externe, c'est ce que nous allons préciser maintenant en examinant ce qui était disponible dans la pensée éléate. En effet, pour Szabo donc, il est inimaginable que le refus de l'empirisme et l'usage de la démonstration par l'absurde soient apparus spontanément chez les Grecs. Mais, à cet argument de raison, s'ajoute le fait historique que ces attitudes sont caractéristiques de la philosophie éléate dont les représentants sont Parménide et Zénon d'Elée. C'est ce que nous précisons ci-dessous, en utilisant en général des sources différentes de celles de Szabo.

Pour les Eléates, le monde sensible, celui des apparences et des phénomènes, ne peut pas être l'objet d'une connaissance véritable, non contradictoire. La vérité est inaccessible par l'observation, elle n'est accessible qu'à la pensée pure: *pour les Eléates, ... toutes les fois que les témoignages de nos sens se trouveront en contradiction avec nos nécessités de raisonnement, ce seront ces dernières qui prendront le pas* (**Zafiropulo**, 1950, ch. 2, p. 69) : nous renvoyons plus généralement le lecteur à cette référence, ou à **Caveing** (1982), pour une information plus détaillée sur l'école éléate.

Ainsi d'après les Eléates, les objets de la sensation ne cessent de transformer et de passer en leur contraire, ils sont par essence contradictoires. Au contraire, les objets de la pensée pure sont les seuls non-contradictoires, on pourra donc en ce qui les concerne prouver une assertion en montrant que sa négation implique contradiction (raisonnement indirect). Ainsi, le raisonnement indirect apparaît comme l'outil adapté à la manipulation de ces objets, ce qu'il ne serait pas pour des objets sensibles. Il y a là-dessus accord entre les Eléates et Platon dont Szabo fait l'héritier de la pensée des Eléates : Platon met en scène dans "le Parménide" (trad. **Chambry**,1967 p. 224), Parménide, Zénon et Socrate, et met dans la bouche de Parménide la louange suivante à Socrate : *"Je dois dire que j'ai été charmé par une remarque que tu as faite, quand tu lui as dit que tu ne voulais pas laisser l'enquête s'égarer dans les objets visibles et s'y appliquer, mais la porter sur ceux qu'on saisit surtout par la pensée et que l'on peut considérer comme des formes."* Et Socrate répond: *"J'estime en effet, qu'il n'est pas du tout difficile de démontrer* *de cette manière que les êtres sont à la fois semblables et dissemblables et susceptibles de tous les contraires." " Et tu as raison,* dit Parménide ; *mais il y a autre chose à faire encore. Il ne suffit pas de supposer qu'un objet existe et d'examiner les conséquences de cette supposition, il faut encore supposer que ce même objet n'existe pas, si tu veux pousser à fond ta gymnastique ..."*

Remarquons combien le programme décrit dans ce texte, et qui prélude à l'étude du problème de l'un et de l'être, s'applique exactement au problème de l'incommensurabilité : si les segments qui entrent en jeu dans la figure du carré et de sa diagonale, ou dans celle du pentagone, appartiennent au monde visible, il n'est pas étonnant qu'ils soient "susceptibles de tous les contraires". En revanche, le passage des objets de la géométrie dans le monde des formes leur permettra d'être des objets de connaissance vraie, dont l'existence est précisément assurée par la non-contradiction de leurs propriétés. C'est la rupture avec la réalité qui permet à la géométrie de prendre place parmi la connaissance véritable, au rebours peut-être de ce que soutiendrait un esprit contemporain ! (Cette affirmation est centrale pour Platon, cf. là-dessus **Thuillier**, 1985).

Revenons au raisonnement indirect : on en trouve un premier exemple, primitif, dans le "poème" de Parménide (cf. **Zafiropulo**, loc. cit., ch. 2, p. 136) où il est utilisé dans le cadre de la théorie de l'être: *"Quant à la décision sur ce point, elle tient en ceci: il est ou il n'est pas ..."* mais il est systématiquement employé par Zénon, en qui Aristote voit le fondateur de la dialectique. Que faut-il entendre par là ? Aristote le précise lui-même, en donnant de la dialectique une définition détaillée dont nous extrayons ce qui suit : la dialectique est un entraînement au raisonnement, c'est une déduction qui prend pour point de départ des idées admises et en tire des conséquences contradictoires afin de les réfuter. Depuis Platon, la dialectique était connue aussi comme moyen d'élever l'esprit des choses sensibles aux choses intelligibles (cf. **Caveing**, 1982, ch. III, § 3). Enfin, notons, et nous y reviendrons encore par la suite, qu'Aristote indique que les Pythagoriciens ignoraient la dialectique (**Aristote**,trad. Tricot,1964, A6, p. 63).

A l'appui de sa thèse de l'importation de l'abstraction, du raisonnement par l'absurde, en mathématiques à partir de la pensée éléate, **Szabo** (1977) apporte en outre un certain nombre d'arguments, essentiellement d'ordre philologique, dont on trouvera un résumé dans **Arsac** (1984). Cependant, il ne nous semble pas possible de décider si l'influence éléate s'est exercée directement ou si elle est passée essentiellement par l'intermédiaire de Platon qui avait pour disciples les mathématiciens Théétète et Eudoxe, précisément ceux qui, d'après les historiens des mathématiques grecs, ont définitivement mis au point la solution du problème de l'irrationalité (**Knorr**, 1975, ch. II, III). Nous retiendrons donc simplement l'hypothèse d'une origine éléate, c'est-à-dire externe, du raisonnement par l'absurde et nous ajouterons en 4.3 et 4.4 quelques arguments supplémentaires en faveur de cette thèse sans suivre Szabo dans ses conclusions beaucoup plus extrêmes qui vont jusqu'à faire des mathématiques une simple partie de la dialectique et des Eléates des mathématiciens (cette opinion de **Szabo** (1977) semble hasardeuse: cf. la critique de **Caveing** (1979)).

4.2. La thèse de M. Caveing (1977).

Les travaux de Caveing n'ont pas pour objet, contrairement à l'ouvrage de Szabo, l'apparition de la démonstration, en mathématiques, mais l'origine du statut des objets mathématiques, de leur "idéalité" *"... réunissant les quatre caractères de l'objectivité, de la non-appartenance au sensible, de la perfection et de l'intelligibilité ..."* (**Caveing**, 1977, p. 1612). Cependant, ainsi que nous l'avons indiqué au § I, cette définition des objets de la mathématique, qui la constitue en même temps comme science autonome, est nécessairement contemporaine de l'apparition de la démonstration, ce qui nous a mené à citer et utiliser souvent l'ouvrage de Caveing.

Résumé brièvement, le point de vue de ce dernier sur l'interaction entre mathématiques et philosophie est plutôt opposé à celui de Szabo, qu'il critique d'ailleurs (**Caveing**, 1979). Pour lui, le problème de l'incommensurabilité, à qui il attribue également un rôle crucial, est à la source de la création des idéalités mathématiques qui auraient ensuite servi de modèle aux philosophes, essentiellement Platon et Aristote. Ainsi, le courant est renversé, et ici, ce sont les mathématiques qui informent la philosophie. Quant à l'interprétation de la pensée de Zénon, elle est longuement développée en **Caveing** (1982) : l'argumentation de Zénon serait essentiellement dirigée contre le syncrétisme physico-géométrique de la pensée pythagoricienne : des arguments comme l'«Achille» ou la «flèche», les plus connus, non pas les seuls, auraient pour but de montrer par l'absurde, c'est-à-dire par la dialectique telle que nous l'avons définie plus haut, que les idées pythagoriciennes ne permettent pas de penser le mouvement et le continu géométrique de manière non-contradictoire.

Même restreinte à ce qui précède, l'influence des Eléates et de Zénon en particulier resterait non-négligeable, puisqu'en somme, Zénon aurait, indépendamment peut-être du problème de l'irrationalité, mais certainement simultanément, remis en cause les principes du Pythagorisme et plus particulièrement la conception des objets de la géométrie. Ajoutons que la technique de la dialectique, qui commence toujours par expliciter le plus complètement possible les présupposés de l'adversaire, amenait à énoncer complètement, et ainsi à préciser, les fondements du Pythagorisme, dont nous avons indiqué, au § II, le caractère initial probablement flou et largement implicite.

Nous retiendrons de Caveing l'idée que la transformation des mathématiques est d'abord due au problème interne de l'irrationalité, ceci d'abord en raison des arguments que nous avons développés à la fin de l'introduction contre la position excessivement internaliste de Szabo, mais aussi parce que la reconstitution de l'apparition dans le cadre des mathématiques du problème de l'irrationalité nous semble la plus vraisemblable. Nous montrons en outre ci-dessous en 4.4, comme pour le raisonnement par l'absurde en 4.3, qu'il existe de bonnes raisons pour que le problème de l'irrationalité soit apparu dans le cadre grec et non pas ailleurs.

4.3. L'origine du raisonnement par l'absurde : comparaison avec d'autres civilisations.

Nous l'avons vu, ce type de raisonnement apparaît dès la très ancienne preuve de l'inexistence de $\sqrt{2}$, et **Szabo** (1977) remarque qu'Euclide en fait un emploi privilégié, tandis que Platon en fait la démarche typique du mathématicien.

Pour renforcer notre hypothèse sur l'origine externe de ce mode de pensée, il nous semble intéressant de sortir du cadre grec, en remarquant que le raisonnement par l'absurde n'est pas utilisé dans les mathématiques chinoises

(J. **Dhombres**, communication orale) et indiennes jusqu'au 14ème siècle environ. Dans le cas de l'Inde, on peut préciser que ce fait est en relation avec l'absence du principe du tiers exclu, et que ce phénomène est lié au développement d'une théorie particulière de la logique, adaptée à la linguistique (**Singh**, 1984). Dans le cas de la pensée chinoise, on peut relever de même qu'elle ignore et même nie le principe du tiers exclu (**Liou Kia Hway**, 1961) Pour notre propos, il nous suffira de retenir que des mathématiques élaborées ont pu se développer pendant des siècles dans certaines civilisations sans que la logique de ce développement faisse apparaître le principe du tiers exclu et le raisonnement par l'absurde. Ceci plaide fortement pour une origine du moins en partie externe de l'apparition du raisonnement par l'absurde dans les mathématiques grecques. Dans ce cas, la paternité éléate n'est guère douteuse : nous avons vu en 4.1 et 4.2 le rôle de Zénon et de Parménide.

On voit par ailleurs dans le poème de Parménide (loc. cit.) comment le caractère non contradictoire d'un objet de pensée assure son existence, ce qui est totalement en dehors de la perspective indienne (cf. **Singh**, loc. cit.) chinoise.

4.4. Le rôle du Pythagorisme dans l'apparition du problème de l'irrationalité

Revenons maintenant au cadre grec, pour examiner à nouveau les circonstances de l'émergence du problème de l'irrationalité et de l'incommensurabilité (cf. 2.2). Ici, les idées des Pythagoriciens, même non clairement exprimées en un corps de doctrine, ont joué un rôle fondamental. Nous avons dit en effet que l'hypothèse de l'universalité des rapports rationnels entre longueurs était certainement sous-jacente aux mathématiques babyloniennes et égyptiennes. Mais en énonçant cette phrase, nous risquons déjà l'anachronisme. En effet, il s'agit dans ces mathématiques d'une hypothèse entièrement implicite, plutôt d'une évidence, non décontextualisée de l'expérience concrète qui permet, par divers procédés, de trouver des approximations, par des méthodes liées aux formes particulières d'écriture des nombres propres à chaque civilisation, des différents rapports nécessaires à la résolution des problèmes rencontrés. Dans ces méthodes, le nombre entier ne peut se distinguer des fractions ou des développements sexagésimaux, que par sa manipulation plus facile et, par suite des méthodes employées, les approximations de certains rapports rationnels peuvent se révéler aussi délicates que celles de rapports irrationnels. Dans un tel contexte, la question de l'irrationalité n'a aucune raison d'être posée. Au contraire l'hypothèse "panarithmétique" du Pythagorisme, même si elle était plus mystique que mathématique, focalisait l'attention sur les rapports d'entiers "exacts", et avait l'immense mérite d'être "falsifiable" pour employer le langage maintenant classique de Popper. Autrement dit, même si c'est à son corps défendant, le Pythagorisme a fourni le cadre où pouvait surgir le problème de l'irrationalité, en postulant a priori un rapport simple entre l'arithmétique des nombres entiers et l'Univers, en particulier la géométrie. Peut-être d'ailleurs a-t-il joué le même rôle en ce qui concerne le continu où sa conception a été réfutée par Zénon. Ainsi, la pensée pythagoricienne peut être considérée comme un premier pas, ou comme favorisant les premiers pas, vers une conception plus théorique des mathématiques.

Précisons cependant, une fois de plus, le caractère archaïque de cette pensée en reproduisant ici la "table des opposés" pythagoricienne (**Aristote**,trad. **Tricot**,1964, A5, p. 45-46):

limité et illimité
impair et pair
un et multiple
droit et gauche
mâle et femelle
en repos et en mouvement
rectiligne et courbe
lumière et obscurité
bon et mauvais
carré et oblong.

L'existence même de cette table rapproche la pensée pythagoricienne d'autres pensées primitives : même l'opposition pair-impair n'est pas originale et peut apparaître dans des cultures n'ayant pas développé de pensée mathématique (L. **Scubla**, 1982) ; ainsi, même l'outil fondamental de l'arithmétique pythagoricienne, c'est-à-dire la division des nombres en pair et impair, peut avoir une origine non mathématique. On pourrait être tenté de croire que l'attention particulière portée aux nombres entiers a pu focaliser l'attention des Pythagoriciens sur un couple de la table des opposés pour lequel le tiers exclu est évident : voici par exemple ce qu'écrit à ce sujet un mathématicien commentant une démonstration par l'absurde d'Euclide : *"la hardiesse toute particulière de ce procédé tient dans la conclusion que ce nombre doit être pair parce qu'il ne peut pas être impair. C'est ainsi que la fréquentation des nombres a fait naître la pensée et l'idée de la non-contradiction de la pensée au sein des concepts."* (Cité d'après **Szabo**, 1977, p. 237). Cette conclusion internaliste ne tient cependant pas car pour les Pythagoriciens, l'unité participait à la fois du pair et de l'impair et d'ailleurs la définition de ces notions était sans doute fort différente de la définition mathématique actuelle. D'une manière générale, de telles tables sont plutôt associées à des pensées qui voient dans la réalité le mélange des opposés plutôt que leur séparation (5).

4.5. Conclusions.

Nous résumons ci-dessous les conclusions que nous avons pu tirer à divers endroits de ce texte : elles reposent, soit sur l'accord des historiens quand il nous semble exister (ce qui exclut que nous utilisions des conclusions subordonnées à un débat qui visiblement n'est pas tranché comme par exemple une interprétation particulière du texte du Théétète de Platon : cf. là-dessus **Caveing** (1977) et (1979), **Knorr** (1975), **Szabo** (1977)) soit sur des arguments que nous avons exposés dans ce paragraphe ou dans l'introduction, et qui reposent comme on l'a vu, soit sur l'analyse didactique soit sur des arguments historiques.

1°) L'apparition dans les mathématiques grecques du problème de l'irrationalité et de l'incommensurabilité est dû aux conceptions pythagoriciennes, en particulier au "panarithmétisme". Dans la mesure où les mathématiques ne sont pas alors nettement indivisualisées dans le champ de la pensée, il est difficile de parler d'origine interne ou externe à ce sujet.

2°) Ce problème est à l'origine du développement d'un nœud de contradictions dans ce qui va s'individualiser de plus en plus comme un domaine bien délimité de la pensée : les mathématiques, et plus particulièrement la géométrie. On peut parler ici de problème interne aux mathématiques.

3°) La solution définitive du problème fait largement appel aux modes de pensée disponibles dans la société contemporaine, en particulier l'éléatisme. Bien entendu, il y a sans doute eu influence réciproque (pour plus de détails sur ce dernier point, en particulier le problème de la pensée de la pluralité et l'éléatisme, on pourra consulter par exemple **Arsac**, 1984). Comme on l'a vu au § II, il y a un lien entre l'établissement de cette solution définitive et la conception des mathématiques comme science hypothético-déductive qui aboutira, sous forme achevée, aux éléments d'Euclide, et qui fait de la démonstration un usage systématique.

V- QUELQUES CONCLUSIONS DIDACTIQUES.

Au risque de répéter certaines remarques incluses dans le texte, nous résumons ici les conclusions qui nous semblent pouvoir être tirées de l'étude précédente, et les questions qui restent ouvertes, à notre avis, sur le plan de la didactique.

5.1 L'histoire semble bien montrer qu'il y a eu des "preuves" avant la démonstration, c'est-à-dire que l'histoire de la rigueur, dont on sait qu'elle ne s'arrête pas aux Grecs (cf. **Lakatos**, 1984 ; **IREM**, 1982), ne commence pas non plus avec eux. Il semble raisonnable de faire l'hypothèse que l'apprentissage de la démonstration par les enfants doit être précédé de la pratique de preuves dans des situations de classe où la nécessité de validation d'une assertion apparaît naturellement, c'est-à-dire comme une question qui se pose aux enfants, non comme une exigence du maître. Sur ce point, nous renvoyons aux conclusions de **Balacheff**, 1987 (deux problèmes didactiques, statut scolaire de la preuve), que l'étude que nous avons menée ne fait que confirmer. Ajoutons simplement que les "preuves" prédémonstratives qui peuvent apparaître, disons avant la classe de quatrième (enfants de treize ans) dans l'enseignement français, pourront avoir le caractère isolé que nous avons souligné, qui est d'ailleurs sans doute favorable à la mise en place de situations de classe conduisant à leur apparition, alors que l'apparition de la démonstration marque un changement du statut global de la mathématique pour l'élève (cf. **Balacheff** : l'élève devient un théoricien, alors qu'il était un praticien). Il reste donc un seuil à franchir, celui que les Grecs ont mis un siècle à dépasser.

5.2 Une question importante est la suivante, au point de vue didactique : le passage au stade démonstration peut-il être motivé par les nécessités internes aux mathématiques, c'est-à-dire la démonstration peut-elle apparaître d'abord comme un outil indispensable dans certaines situations, ou faut-il se résigner à un très fort appel aux informations apportées par le maître et même à des exigences introduites par le biais du contrat didactique ? La question analogue au point de vue historique est celle de l'origine interne ou externe aux mathématiques du passage au stade démonstratif. Il ne nous a pas semblé qu'on puisse lui apporter une réponse définitive (cf. § IV) bien que nous penchions pour la conclusion mixte que nous avons énoncée. Cependant, nous avons montré que ce passage à la démonstration avait eu lieu à l'occasion de la rencontre d'un problème, manifestant une contradiction dans les mathématiques, et pour lequel la démonstration apparaissait comme un outil indispensable pour la solution finalement reconnue comme acceptable. Ce problème possédait d'ailleurs toutes les carctéristiques d'une situation-problème au sens didactique : se posant entièrement dans le cadre des connaissances existantes (l'«ancien» au sens de **Chevallard**, 1985, p. 65), il ne pouvait être résolu qu'en sortant de ce cadre (le «nouveau», op. cit.), et fort probablement, sa résolution avait été facilitée par des changements de cadre appropriés. Ainsi apparaît l'affirmation minimale suivante : la démonstration, si l'on veut recréer les conditions de sa genèse historique, doit apparaître comme un outil indispensable à la résolution d'un problème. On ne peut cependant faire de cette condition nécessaire une condition suffisante et affirmer que la seule situation et le contenu du problème peuvent conduire nécessairement à la démonstration, en s'appuyant sur les données historiques. Celles-ci n'excluent nullement un apport externe qui, dans la genèse didactique, peut provenir, comme nous l'indiquons plus haut, d'une information apportée par le maître en abandonnant en partie la dévolution du problème ou, peut-être, bien que cette voie semble actuellement peu explorée, d'une approche interdisciplinaire de la rigueur.

5.3 La reproduction de la genèse historique de la démonstration, à partir du problème de l'irrationalité, n'est pas possible au niveau d'enseignement concerné. En effet, d'un point de vue strictement technique, la mise en évidence de l'incommensurabilité en géométrie est trop difficile, celle de l'irrationalité en arithmétique quoique plus simple, est encore complexe, mais surtout, du point de vue du sens, on ne voit pas ce qui pourrait motiver chez les élèves la recherche systématique de rapports d'entiers , alors que la manipulation des nombres décimaux se révèle pour eux dans tous les cas une technique efficace. En somme, nos élèves sont plus Babyloniens que Pythagoriciens !

5.4 En géométrie, l'apparition de la démonstration est liée historiquement à celle de la conception abstraite des objets de la géométrie, disons pour faire bref et un peu abusivement, à leur définition axiomatique. Vouloir introduire dans l'enseignement la démonstration à propos de la géométrie, en arguant du caractère concret de cette dernière, c'est soutenir un paradoxe dont il faut être conscient : c'est précisément le caractère concret des êtres géométriques qui rend inutile la démonstration : la "preuve par la figure" suffit. Cette difficulté est tournée en général par la présentation aux élèves de cas de figure où la vérification graphique est techniquement difficile. Le problème rencontré dans ce cas n'appelle pas cependant comme seul remède le recours à la démonstration : une figure plus soignée, un changement d'échelle peuvent apparaître éventuellement comme des remèdes appropriés. Plus généralement, de telles situations, qui remettent en cause l'appel à la figure, à propos de figures particulières, appellent plutôt des remèdes particuliers, c'est-à-dire des preuves dont le niveau soit adapté à chaque cas. Elles ne sont donc pas de même nature que la rencontre du phénomène de l'incommensurabilité car, même si celle-ci se fait à propos d'une figure particulière, la réflexion montre alors que la contradiction rencontrée se propage à l'ensemble de la géométrie.

Si l'on veut produire les mêmes effets que la genèse historique, il faudra donc, comme première étape vers la démonstration en géométrie, arriver à une mise en doute de l'appel à la figure comme moyen de preuve, qui présente un caractère général et ne se limite pas à l'incertitude sur quelques figures particulières . On peut penser d'ailleurs que d'autres terrains , comme l'arithmétique, soient plus favorables à l'émergence de la démonstration comme outil de preuve, sans qu'il soit besoin de recourir au problème de l'irrationalité.

5.5 La réflexion que nous avons menée sur le raisonnement par l'absurde, en particulier la comparaison avec les mathématiques chinoises et indiennes, semble bien indiquer une origine culturelle. Ceci conduit à penser que ce raisonnement et, plus profondément, le principe du tiers exclu, n'est "naturel" ni en mathématiques ni ailleurs, et que son introduction fait partie des tâches de l'enseignant de mathématiques, voire d'un travail interdisciplinaire. Là aussi, l'arithmétique, avec la classification des nombres en pairs et impairs, peut représenter un point de départ possible.

NOTES

(1) Sur la nature des éléments d'Euclide, et leur caractère de rigueur, on pourra consulter le texte de Proclus, traduit dans **Kayas** (1978), et qui fournit là-dessus l'opinion d'un platonicien.

(2) D'après **Von Fritz** (1945), l'anthyphérèse était aussi un procédé pratique de calcul du rapport de deux longueurs. Utilisé concrètement (par report de longueurs) le procédé est évidemment toujours fini.

(3) On trouvera dans **Knorr** (1975), au chapitre 2, une reconstitution possible de la forme primitive de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, fondée sur l'étude de la figure 3 relative à la duplication du carré, et ne faisant pas appel à l'anthyphérèse. Mais cette démonstration suppose que l'on ait conjecturé au préalable l'irrationalité de $\sqrt{2}$. L'anthyphérèse a l'avantage de fournir une logique de découverte d'une contradiction, d'où peut émerger ensuite la conjecture.

(4) On pourra se reporter à ce sujet au commentaire de **Heath** (1956) sur ces définitions.

(5) La critique de **Caveing** (1979) contre **Szabo** (1977), et plus précisément contre l'hypothèse d'une origine éléate du raisonnement par l'absurde, ne semble donc pas recevable : elle s'appuie en effet sur l'existence de la table des opposés pour en déduire la connaissance par les Pythagoriciens du raisonnement par l'absurde.

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE (1) - La Métaphysique, tr. Tricot, Vrin (1964) Paris.

ARISTOTE (2) - Organon 5 Les Topiques, tr. Tricot, Vrin (1950) Paris.

ARSAC G. (1984) - Thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans les mathématiques, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG, Université Grenoble 1.

AUTOLYCOS DE PITANE. - La sphère en mouvement, levers et couchers héliaques, Testimonia, Les Belles Lettres, (1979), Paris.

BACHELARD G. - La formation de l'esprit scientifique, 12ème édition, Vrin, (1983), Paris.

BALACHEFF N. (1977) - Processus de preuve et situations de validation Educational Studies in Mathematics, vol 18, n°2, Mai 1977, p. 147-176.

BOURDIEU P. (1980) - Le sens pratique, coll. le sens commun, Ed. de Minuit, Paris.

BOYER C. B. (1968) - A history of mathematics, Wiley, New York.

CHEVALLARD Y.(1985) - La transposition didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CAVEING M. (1977) - La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, thèse, Université Paris 10, Atelier national de reproduction des thèses, Université Lille 3, (1982).

CAVEING M. (1979) - A propos des débuts des mathématiques grecques. Réflexions sur l'ouvrage de A. Szabo. Revue d'histoire des sciences, XXXII/2 p. 163-168.

CAVEING M. (1982) - Zenon d'Elée, Vrin , Paris.

DOUADY R. (1986) - Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématiques, vol 7.2, p. 5-31.

FOWLER D.H. (1979) - Ratio in early Greek mathematics, Bull. of the AMS (New series) 1, p. 807-846.

FOWLER D.H. (1980) - Book 2 of Euclid Elements and a pre-eudoxian theory of ratio, Archiv for History of exact sciences, vol 22, number 1/2, p.5-36.

HEATH T. L. (1908) - Euclid's Elements, Dover, 1956, New York.

IREM (Groupe Epistémologie et Histoire des) (1982) - La rigueur et le calcul, CEDIC-Nathan, Paris.

KAYAS (1978) G. J. - Euclide : les Elements, Editions du CNRS, Paris.

KELLER O.(1986) - Essai sur le calcul et l'algèbre en Egypte antique, IREM de Lyon, doc. n°57, (IREM, 43, bvd du 11 nov. 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX).

KLINE (1972) - Mathematical Thought from ancient to modern times, Oxford University Press, New York.

KNORR (1975) W. R. - The evolution of the euclidean elements, Reidel, Dordrecht.

LAKATOS I. (1976) - Preuves et Réfutations, Actualités scientifiques et industrielles n°1412, Hermann (1984) Paris.

LIOU KIA HWAY (1961) - L'esprit synthétique de la Chine, Presses Universitaires de France, Paris.

MARTZLOFF (1988) J. C. - Histoire des mathématiques chinoises, Masson, Paris.

PATOCKA I. (1981) - Essais hérétiques sur la philosophie de l'histoire, Verdier, Paris.

PLATON - Le Ménon, traduction E. Chambry, Flammarion (1967).

PLATON - La République, traduction A. Diès, Denoël-Gonthier (1977), Paris.

PLATON - Le Théétète, Parménide, traduction E. Chambry, Flammarion (1967) Paris.

ROMEYER-DHERBEY G. (1985) - Les sophistes, Que Sais-je ? PUF, Paris.

SZABO A. (1977) - Les débuts des mathématiques grecques, Vrin, Paris.

SEIDELBERG A. (1978) - The Origin of mathematics, Archiv for History of exact sciences, vol. 18, nb 4, p. 301-342.

SCUBLA L. (1982) - "Contribution à la théorie du sacrifice" in René Girard et le problème du mal, textes rassemblés par M. Deguy et J.P. Dupuy, Grasset, Paris.

SINGH N. (1984) - Foundations of logic in ancient India : linguistic and mathematics in Science and technology in Indian culture, Nistads (Hillside Road, New Delhi, 110012).

TANNERY (1887) - La géométrie grecque Gauthiers-Villars, Paris. Réédition J. Gabay, Sceaux, 1988.

THUILLIER P. (1985) - Sociologie de la connaissance : Platon et la géométrie, La Recherche, vol. 16, n°166, Mai 1985, p. 664-667.

VAN DER WAERDEN B.L. (1983) - Geometry and algebra in ancient civilizations, Springer, Berlin.

VERNANT J.P. (1962) - Les origines de la pensée grecque, PUF, Paris.

VERNANT J.P. (1979) - Religion, Histoire,Raison, Maspero, Paris.

VERNANT J.P. (1981) - Mythe et pensée chez les Grecs, tome 1, Maspero, Paris.

VERNANT J.P. (1982) - Mythe et pensée chez les Grecs, tome 2, Maspero, Paris.

VON FRITZ K. (1945) - The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, Annals of Math., 2ème série, 46, p. 242-264.

ZAFIROPOULO J. (1950) - L'Ecole éléate, Belles Lettres, Paris.