PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

KHALEB BIAZ

Quelques propriétés de certaines marches aléatoires en milieu aléatoire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 1
« Probabilités », , p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___1_1_0>

QUELQUES PROPRIETES DE CERTAINES MARCHES ALEATOIRES EN MILIEU ALEATOIRE

INTRODUCTION

L'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire a fait l'objet de plusieurs articles : une bibliographie détaillée sur ce sujet figure dans l'article de Kozlov [0]. Dans cette thèse, nous considérons des marches aléatoires en milieu aléatoire à une dimension, sur $\mathbb{Z}$. Des résultats pour de telles marches ont été établis par Solomon [6]. Nous consacrons une partie de cette thèse à généraliser et à compléter ces résultats.

Une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné se définit de la façon suivante : soit A un entier positif donné et soit G l'ensemble des probabilités sur $\{-A, \ldots, A\}$. On se donne une suite $\alpha = (\alpha(i,.))$, $i \in \mathbb{Z}$, de variables aléatoires, appelée milieu aléatoire, à valeurs dans G, indépendantes et identiquement distribuées de distribution commune μ, avec μ une probabilité, donnée, sur G. Une réalisation du milieu aléatoire α sera appelée milieu. Pour la commodité des notations, on posera, dans le cas $A = 1$, $\alpha(i, 1) = \alpha_i$ et $\alpha(i, -1) = \beta_i$. Soit $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, la position, à l'instant n, d'une particule se déplaçant sur $\mathbb{Z}$. $X(n)$ est appelée marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné par A si, sachant le milieu et $X(n) = i$, alors, $X(n+1)$ sera $X(n) + a$ $(-A \leq a \leq A)$ avec une probabilité $\alpha(i, a)$. Donc, quand le milieu est fixé, $X(n)$ est une chaîne de Markov. C'est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et dont le pas est inférieur ou égal à A. Plus formellement, $X(n)$ est une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné par A si la loi P de ce processus est définie de la façon suivante : sachant le milieu α, on définit une famille de mesures de probabilité $P^{\alpha,j}\{.\}$ par :

$$P^{\alpha,j}\{X(0) = j\} = 1,$$

$$P^{\alpha,j}\{X(n+1) = i_n+a \,/\, X(0) = j,\ X(1) = i_1, \ldots, X(n) = i_n\}$$

$$= P^{\alpha,j}\{X(n+1) = i_n+a \,/\, X(n) = i_n\}$$

$$= \alpha(i_n, a).$$

Donc, par rapport à $P^{\alpha,j}\{.\}$, $X(n)$ est une chaîne de Markov partant de j et telle qu'à chaque instant n, $|X(n+1) - X(n)| \leqslant A$. Pour $j = 0$, on pose $P^{\alpha,0}\{.\} = P^{\alpha}\{..\}$. La mesure P définie par :

$$P\{.\} = E(P^{\alpha}\{.\})$$

où l'espérance est prise par rapport au milieu α, est la loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire associée à μ, partant de 0.

Un exemple typique qui sera considéré à plusieurs reprises est construit de la manière suivante : soient a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$ et $a+b = 1$ et soit $\alpha = (\alpha_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

(1) $$\begin{aligned} \alpha_i &= a \qquad \text{avec probabilité } p > 0 \\ &= b \qquad \text{avec probabilité } q = 1 - p \end{aligned}$$

On considère alors $X(n)$, la marche aléatoire en milieu aléatoire définie par la donnée de α. C'est un processus sur les entiers tels que pour toute suite α fixée ($\alpha_i = a$ ou b), $X(n)$ est la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de loi initiale telle que $X(0) = 0$ et dont les probabilités de transition sont telles que :

$$P^{\alpha}\{X(n+1) = i+1 \,/\, X(n) = i\} = \alpha_i \qquad \text{et}$$

$$P^{\alpha}\{X(n+1) = i-1 \,/\, X(n) = i\} = \beta_i \quad ; \quad \beta_i = 1 - \alpha_i$$

Pour la marche aléatoire en milieu aléatoire ainsi définie, nous avons :

$$P\{X_o=0,\ X_1=1,\ X_2=0,\ X_3=1\} = (a^2p + b^2q)\ (bp + aq)$$

alors que :

$$P\{X_o = 0\}\ P\{X_1 = 1/X_o = 0\}\ P\{X_2 = 0/X_1 = 1\}\ P\{X_3 = 1/X_2 = 0\} = (ap+bq)^2(bp+aq).$$

Ceci montre que par rapport à P, le processus $X(n)$ n'est pas une chaîne de Markov.

On note, enfin, qu'une marche aléatoire en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$ peut être considérée comme une mesure sur l'ensemble de toutes les chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$. Plusieurs théorèmes, dans ce travail, ont été prouvés en montrant que par rapport à cette mesure, presque chaque chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ a une propriété particulière donnée. On dira alors qu'une marche aléatoire en milieu aléatoire possède une propriété $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H}$ est vraie presque sûrement par rapport à P, c'est-à-dire, si pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, la chaîne de Markov dirigée par α a la propriété $\mathcal{H}$.

Solomon, dans son article [6], a démontré, dans le cas $A = 1$, qu'une marche aléatoire en milieu aléatoire est soit récurrente et dans ce cas on a : $-\infty = \liminf X(t) < \limsup X(t) = +\infty$ P-p.s., soit transiente et alors : ou bien $\lim X(t) = +\infty$ P-p.s. ou bien $\lim X(t) = -\infty$ P-p.s. Ce même résultat a été démontré par Key [5] dans le cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné, irréductible. Nous donnons une démonstration de ce théorème dit "loi Zéro-Un" en utilisant une méthode différente. Nous démontrons également qu'une marche aléatoire en milieu aléatoire irréductible et récurrente est nulle-récurrente. Ceci fait l'objet de la partie I.

Dans la partie II, on considère, dans le cas $A=1$, une marche aléatoire en milieu aléatoire transiente telle que $\lim X(t) = +\infty$ P-p.s. Pour une telle marche aléatoire en milieu aléatoire, nous donnons, pour presque chaque réalisation du milieu α, l'expression du moment d'ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$, du temps de passage au point 1 sachant que la chaîne dirigée par α part du point 0. Nous démontrons, dans ce cas, que P-presque sûrement, le moment d'ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$, de ce temps de passage sachant le milieu, est fini.

Enfin, dans une troisième partie, on établit le théorème limite central pour certaines marches aléatoires en milieu aléatoire centré.

I - LOI ZERO - UN

A - EXEMPLE

Considérons la marche aléatoire en milieu aléatoire définie par la relation (1). On va établir pour cet exemple, un critère de récurrence et de transience d'une façon directe (sans se baser sur le lemme de Stone [7] qu'utilise Solomon dans son article [6]). Pour cela, on commence par rappeler le critère de Chung-Harris [2] pour la récurrence d'une chaîne sur une demi-droite.

1-1 CRITERE DE CHUNG-HARRIS

On considère une chaîne de Markov sur les entiers positifs. La distribution initiale est arbitraire et les probabilités de transition, $P_{i,j}$, sont données comme suivant :

$$\text{soient } a_o = 1, \quad 0 < a_j < 1 \quad \text{et} \quad b_j = 1 - a_j \quad ,$$

$$p_{o,1} = 1, \quad p_{j,j+1} = a_j \ , \quad p_{j,j-1} = b_j \ , \quad j \geq 1.$$

La chaîne de Markov, ainsi définie, est récurrente si et seulement si la série de terme général $\dfrac{b_1 \dots b_r}{a_1 \dots a_r}$ est divergente.

Revenons à notre exemple et fixons une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Le processus $X(n)$ est alors une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$. On pose

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \rho_n = \sigma_1 \dots \sigma_n \quad \text{si} \quad n > 0$$
$$= \sigma_n \dots \sigma_{-1} \quad \text{si} \quad n < 0$$

Par symétrie, on déduit du critère Chung-Harris, le lemme suivant.

1-2 LEMME

(i) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1} = \infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} X(n) = + \infty$ p.s.

(ii) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1} < \infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} X(n) = - \infty$ p.s.

(iii) si $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ alors $X(n)$ est récurrente

et on a : $-\infty = \liminf_n X(n) < \limsup_n X(n) = +\infty$ p.s.

1-3 THEOREME : CRITERE DE TRANSIENCE ET DE RECURRENCE

On considère la marche aléatoire en milieu aléatoire définie par (1)

(a) si $p > 1/2$ alors $\lim_{n \to +\infty} X(n) = +\infty$ P - p.s.

(b) si $p < 1/2$ alors $\lim_{n \to +\infty} X(n) = -\infty$ P - p.s.

(c) si $p = 1/2$ alors $-\infty = \liminf_n X(n) < \limsup_n X(n) = +\infty$ P - p.s.

Preuve du théorème 1-3

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ avec $Y_i = (\log \frac{b}{a})^{-1} (\log \frac{\beta_i}{\alpha_i})$, $i \geqslant 1$. S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $E(Y) = 2p-1$. D'où, en utilisant la loi forte des grands nombres, on obtient que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers m, avec $m = 2p - 1$. On en déduit qu'avec probabilité 1 et pour tout n assez grand on a : $S_n \geqslant (m-\varepsilon)n$, ε étant un nombre réel quelconque strictement positif. Maintenant, si $p > 1/2$ alors $m > 0$ et donc on peut choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $m - \varepsilon > 0$. D'autre part, $\rho_n = (\frac{b}{a})^{S_n}$. D'où, avec probabilité 1 et pour tout n assez grand on a $\rho_n \leqslant (\frac{b}{a})^{(m-\varepsilon)n}$ puisque $\frac{b}{a} < 1$. On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ est convergente P-presque sûrement. D'où, P-presque sûrement, ρ_n tend vers zéro quand n est assez grand. Par conséquent, P-presque sûrement ρ_{-n}^{-1} ne tend pas vers zéro puisque ρ_n et ρ_{-n} sont des variables aléatoires identiquement ~~distribuées. On en déduit que~~ P-presque sûrement, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1}$ est divergente. D'où, en utilisant le lemme 1-2, on obtient que : $\lim_{t \to +\infty} X(t) = +\infty$ P-p.s. Ceci achève la démonstration de (a). Pour la preuve de (b), on procède de la même façon. Enfin, dans le cas $p = 1/2$, on a $\alpha = \beta$ en distribution, ce qui implique que les suites ρ_n et ρ_{-n}^{-1} sont égales en distribution. On en déduit que les quantités $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1}$ sont P-presque sûrement de même nature. Or, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ converge P-p.s., alors, d'après le raisonnement ci-dessus, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1}$ serait divergente P-p.s.

D'où, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{-n}^{-1}$ P-p.s. et par conséquent d'après le lemme précédent, on a :

$$- \infty = \liminf_n X(n) < \limsup_n X(n) = + \infty \quad \text{P-p.s.}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

B - RESULTATS SUR LES CHAINES DE MARKOV

Nous allons nous intéresser, à présent, à des chaînes de Markov ordinaires afin de mieux comprendre la difficulté qui se pose pour établir la loi Zéro-Un pour une marche aléatoire en milieu aléatoire.

Soit $Y(n)$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, irréductible et à pas borné par A, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|Y(n+1) - Y(n)| \leqslant A$. On définit alors une suite de variables aléatoires τ_n, $n \in \mathbb{Z}$, par :

$$\begin{aligned} \tau_n &= \inf \{k : Y(k) \text{ soit dans } I_n\} \quad \text{si un tel } k \text{ existe} \\ &= \infty \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

avec $I_n = \{nA, nA + 1, \ldots, (n + 1) A - 1\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

On note par A_n (resp. B_n) la matrice carrée d'ordre A définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant A} \quad (\text{resp. } B_n = (b_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant A})$$

où $a_{i,j}^{(n)}$ (resp. $b_{i,j}^{(n)}$) est la probabilité que partant de $(I_n)_i$, la première sortie de I_n soit en $(I_{n+1})_j$ (resp. $(I_{n-1})_j$) ; $(I_n)_i$ étant la $i^{\text{ème}}$ composante de I_n.

On note par M_n (resp. $\overline{M}_n$) la matrice carrée d'ordre A définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$M_n = (m_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant A} \quad (\text{resp. } \overline{M}_n = (\overline{m}_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant A})$$

où $m_{i,j}^{(n)}$ (resp. $\overline{m}_{i,j}^{(n)}$) est la probabilité que partant de $(I_n)_i$, la chaîne atteint I_{n+1} (resp. I_{n-1}) et y entre par $(I_{n+1})_j$ (resp. $(I_{n-1})_j$).

On remarque que pout tout $n \in \mathbb{Z}$, la matrice $A_n + B_n$ est stochastique puisque la chaîne $Y(n)$ est irréductible. D'autre part, d'après la propriété de Markov, les matrices A_n, B_n et M_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont liées par la relation :

(1) $$M_{n+1} = A_{n+1} + B_{n+1} M_n M_{n+1}$$

1-4 PROPOSITION

(a) On suppose qu'il existe un entier ℓ tel que :

(2) $$P\{\tau_{\ell+1} < \infty / Y_o \in I_\ell\} = 1 \qquad \text{i.e. } M_\ell \text{ est stochastique}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

(3) $$P\{\tau_{n+1} < \infty / Y_o \in I_n\} = 1 \qquad \text{i.e. } M_n \text{ est stochastique}$$

(b) On suppose qu'il existe un entier ℓ' tel que :

(4) $$P\{\tau_{\ell'-1} < \infty / Y_o \in I_{\ell'}\} = 1 \qquad \text{i.e. } \bar{M}_{\ell'} \text{ est stochastique}$$

alors, pour tout n $\mathbb{Z}$, on a :

(5) $$P\{\tau_{n-1} < \infty / Y_o \in I_n\} = 1 \qquad \text{i.e. } \bar{M}_n \text{ est stochastique.}$$

Preuve de la proposition 1-4

Il suffit, pour la démonstration de (a), de prouver que $M_{\ell+1}$ et $M_{\ell-1}$ sont des matrices stochastiques. Un raisonnement par récurrence achèvera la démonstration. Soit W le vecteur, d'ordre A, ayant des coordonnées toutes égales à 1. On définit alors le vecteur $Z^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}$, par :

(6) $$Z^{(n+1)} = M_{n+1} W$$

C'est le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, $1 \leq i \leq A$, est égale à la somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M_{n+1}. Pour $n = \ell$, la relation (1) nous donne :

(7) $$M_{\ell+1} = A_{\ell+1} + B_{\ell+1} M_\ell M_{\ell+1}$$

En multipliant cette relation, à droite, par W, on obtient :

(8) $$Z^{(\ell+1)} = A_{\ell+1} W + B_{\ell+1} M_\ell Z^{(\ell+1)}$$

On se ramène donc à résoudre l'équation matricielle :

(9) $$(B_{\ell+1} M_\ell - I) Z^{(\ell+1)} + A_{\ell+1} W = 0$$

I étant la matrice unité d'ordre A. Or, $(A_{\ell+1} + B_{\ell+1}) W = W$ et $M_\ell W = W$ car $(A_{\ell+1} + B_{\ell+1})$ et M_ℓ sont des matrices stochastiques. On en déduit que W est une solution de l'équation (9). Maintenant, pour qu'il existe une et une solution de l'équation (9), il suffit que le déterminant de $(B_{\ell+1} M_\ell - I)$ soit différent de zéro. Supposons que :

$$\det (B_{\ell+1} M_\ell - I) = 0$$

alors, $\lambda = 1$ serait une valeur propre de la matrice $B_{\ell+1} M_\ell$. D'où, il existe un vecteur de probabilité ψ sur $I_{\ell+1}$ tel que :

$$\psi B_{\ell+1} M_\ell = \psi$$

Ceci implique que la chaîne de transition P donnée et de loi initiale ψ ne peut pas quitter l'ensemble $\{-\infty , \dots , (\ell+2) A - 1\}$. Ce qui est contraire à l'hypothèse de l'irréductibilité de $Y(n)$. On en déduit que la seule solution de l'équation (9) est le vecteur W et par conséquent, la matrice $M_{\ell+1}$ est stochastique. Démontrons de même que la matrice $M_{\ell-1}$ est stochastique. Pour $n = \ell - 1$, la relation (1) s'écrit :

(10) $$M_\ell = A_\ell + B_\ell M_{\ell-1} M_\ell$$

Cette relation peut s'écrire encore :

(11) $$(I - B_\ell M_{\ell-1}) M_\ell - A_\ell = 0$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment et en multipliant la relation (11), à droite, par W, on obtient :

(12) $$W - B_\ell Z^{(\ell-1)} - A_\ell W = 0$$

puisque $M_\ell W = W$. Comme $(A_\ell + B_\ell)$ est une matrice stochastique, la relation (12) se réduit à l'équation matricielle :

(13) $$B_\ell (W - Z^{(\ell-1)}) = 0$$

Pour la résolution de cette équation, on procède de la façon suivante. On remarque, du fait de l'irréductibilité de $Y(n)$, que B_ℓ est une matrice non nulle, c'est-à-dire, il existe au moins un j, $1 \leq j \leq A$, tel que la $j^{\text{ème}}$ colonne de B_ℓ est non nulle. Pour un tel j, la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $(W - Z^{(\ell-1)})$ est égale à zéro puisque les matrices B_ℓ et $(W - Z^{(\ell-1)})$ sont positives.

Deux cas peuvent se présenter. Si pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant A$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de B_ℓ est non nulle alors $M_{\ell-1}$ est une matrice stochastique. Si, au contraire, il existe un j_o tel que la $j_o^{\text{ième}}$ colonne de B_ℓ est nulle alors la $j_o^{\text{ième}}$ coordonnée de $(W - Z^{(\ell-1)})$ est encore égale à zéro, sinon, la chaîne qui part d'un point $(I_{\ell-1})_i$, i étant un entier tel que la $i^{\text{ème}}$ colonne de B_ℓ est non nulle, serait non irréductible. En effet, si, partant de $(I_{\ell-1})_i$, la chaîne atteint le point $(I_{\ell-1})_{j_o}$ avec une probabilité strictement positive, la chaîne n'atteint pas I_ℓ presque sûrement car la somme $\sum_{j=1}^{A} m_{j_o,j}^{(\ell-1)}$ est strictement inférieure à 1. Ceci est contraire au fait que l'entier i est tel que la somme $\sum_{j=1}^{A} m_{i,j}^{(\ell-1)}$ est égale à 1. Par conséquent, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant A$, la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $Z^{(\ell-1)}$ est égale à 1. Ceci achève la démonstration de (a) de la proposition. Pour la preuve de (b), on procède de la même façon.

1-5 COROLLAIRE

Soit $Y(n)$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, irréductible transiente et à pas borné par A.

(a) s'il existe un entier ℓ tel que la matrice M_ℓ est stochastique, alors, quelque soit le point de départ de la chaîne, on a $\lim_n Y(n) = +\infty$ p.s.

(b) s'il existe un entier ℓ' tel que la matrice $\overline{M}_{\ell'}$ est stochastique, alors, quelque soit le point de départ de la chaîne, on a $\lim_n Y(n) = -\infty$ p.s.

Remarque

Soit $Y(n)$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, irréductible, transiente et à pas borné. Il est possible d'avoir :

$$0 < P\{\lim_n Y(n) = +\infty\} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < P\{\lim_n Y(n) = -\infty\} < 1$$

Exemple : Soit $Y(n)$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont les probabilités de transition $p_{i,j}$ sont données par :

$$p_{0,1} = 1/2 , \quad p_{0,-1} = 1/2$$

$$p_{i,i+1} = 2/3 , \quad p_{i,i-1} = 1/3 \qquad \text{si } i \geqslant 1$$

$$p_{i,i+1} = 1/3 , \quad p_{i,i-1} = 2/3 \qquad \text{si } i \leqslant -1$$

Cette chaîne est irréductible, transiente et à pas borné. Les probabilités d'atteinte à droite et à gauche sont strictement inférieures à 1 et nous avons :

$$P\ \{\lim_{n}\ Y(n) = +\infty\} = \frac{1}{2} = P\ \{\lim_{n}\ Y(n) = -\infty\}\ .$$

C-Loi Zéro-Un

Soit $X(n)$ une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné par A et irréductible.

1-6 THEOREME : LOI ZERO-UN

1 - ou bien $X(n)$ est récurrente et on a :

$$-\infty = \liminf_{n} X(n) < \limsup X(n) = +\infty \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

2 - ou bien $X(n)$ est transiente et on a :

soit $\lim_{n \to +\infty} X(n) = +\infty$ p.s. $[P]$

soit $\lim_{n \to +\infty} X(n) = -\infty$ p.s. $[P]$

En outre, si la marche aléatoire en milieu aléatoire est récurrente, alors elle est nulle-récurrente.

Preuve du théorème 1-6

Lemme 1

a) ou bien $X(n)$ est transiente

b) ou bien $X(n)$ est récurrente et on a :

$$-\infty = \liminf_{n} X(n) < \limsup_{n} X(n) = +\infty \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

Preuve du lemme 1

Pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, la chaîne de Markov gouvernée par α est irréductible et par conséquent elle est soit récurrente, soit transiente. On pose alors :

$\mathfrak{J} = \{\alpha$, la chaîne gouvernée par α est récurrente$\}$ et

$\mathfrak{J}' = \{\alpha$, la chaîne gouvernée par α est transiente$\}$

$\mathfrak{J}$ est invariant par translation. Puisque $\alpha(z,.)$, $z \in \mathbb{Z}$, est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on en déduit que $P(\mathfrak{J}) = 0$ ou 1. Si $P(\mathfrak{J}) = 1$, alors la marche aléatoire en milieu aléatoire est récurrente et on a :

$$- \infty = \lim_n \inf X(n) < \lim_n \sup X(n) = + \infty \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

Si $P(\mathfrak{J}) = 0$, alors $P(\mathfrak{J}') = 1$ puisque $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ forment une partition de l'ensemble de toutes les réalisations du milieu aléatoire. On en déduit que la marche aléatoire en milieu aléatoire est transiente. Ceci achève la démonstration du lemme 1.

On suppose que $X(n)$ est une marche aléatoire en milieu aléatoire transiente. Pour chaque réalisation du milieu aléatoire α , on note par M_n^α (resp. $\overline{M}_n^\alpha$) la matrice carrée d'ordre A définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$M_n^\alpha = (m_i^j\,(n, \alpha))_{1 \leq i,j \leq A} \quad (\text{resp. } \overline{M}_n^\alpha = (\overline{m}_i^j\,(n, \alpha))_{1 \leq i,j \leq A}$$

où $m_i^j\,(n, \alpha)$ (resp. $\overline{m}_i^j\,(n, \alpha)$) est la probabilité que partant de $(I_n)_i$, la chaîne atteint I_{n+1} (resp. I_{n-1}) et y entre par $(I_{n+1})_j$ (resp. $(I_{n-1})_j$). On pose alors $\xi_n = \{\alpha\ ;\ M_n^\alpha$ est stochastique$\}$, $n \in \mathbb{Z}$. M_n^α ne dépend que des $\alpha(k,.)$ tels que $k < (n+1)A$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ξ_n est dans la tribu engendrée par $\{\alpha(k,.),\ k < (n+1)A\}$, soit $\sigma\ \{\alpha\ (k,.),\ k < (n+1)A\}$. Soit ℓ un entier fixé. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\xi_n = \xi_\ell$ d'après la proposition 1-4. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ξ_ℓ est dans la tribu $\sigma\ \{\alpha\ (k,.),\ k < (n+1)A\}$. On en déduit que ξ_ℓ est dans la tribu asymptotique $\xi = \bigcap_n \sigma\{\alpha(k,.)\ k < (n+1)A\}$. La loi Zéro-Un de Kolmogorov implique alors que $P(\xi_\ell) = 0$ ou 1 puisque $\alpha(k,.)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. Donc, $P(\xi_n) = 0$ ou 1 pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De même, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\xi'_n = \{\alpha,\ \overline{M}_n^\alpha$ est stochastique$\}$, alors, on démontre que $P(\xi'_n) = 0$ ou 1. On remarque que si $P(\xi_n) = 1$ alors $P(\xi'_n) = 0$, car la marche aléatoire en milieu aléatoire est supposée transiente. D'où les trois combinaisons possibles :

Si $P(\xi_n) = 1$, alors,

$$M_n^\alpha \text{ est stochastique } P\text{ - p.s. pout tout } n \in \mathbb{Z}$$

D'où, d'après le corollaire 1-5, on a :

$$P^\alpha \{\lim_n X(n) = + \infty\} = 1 \quad P\text{ - p.s.}$$

Si $P(\xi'_n) = 1$, alors,

$$\overline{M}_n^\alpha \text{ est stochastique } P\text{ - p.s. pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

D'où, d'après le corollaire 1-5, on a :

$$P^\alpha \{\lim_n X(n) = - \infty\} = 1 \quad P\text{ - p.s.}$$

Il reste à prouver que le cas $P(\xi_n) = P(\xi'_n) = 0$ est impossible. Ceci nous conduit à procéder d'une façon différente afin de surmonter cette difficulté.

Pour tout milieu α et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\ell(n, \alpha) = P^{\alpha,n} \{\lim_k \sup X(k) = + \infty\} \quad \text{et}$$

$$\overline{\ell}(n, \alpha) = P^{\alpha,n} \{\lim_k \inf X(k) = - \infty\}$$

$\ell(n, \alpha)$ et $\overline{\ell}(n, \alpha)$ peuvent s'écrire :

$$\ell(n, \alpha) = P^{\alpha,n} \{\lim_k X(k) = + \infty\} \quad \text{et}$$

$$\overline{\ell}(n, \alpha) = P^{\alpha,n} \{\lim_k X(k) = - \infty\}$$

car la marche aléatoire en milieu aléatoire est supposée transiente. On pose alors :

$$\Lambda = \{\alpha \ ; \text{ il existe un } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \ell(n, \alpha) > 0\}$$

$$\text{et} \quad \overline{\Lambda} = \{\alpha \ ; \text{ il existe un } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \overline{\ell}(n, \alpha) > 0\}$$

<u>Lemme 2</u>

1°) Soit,

(14) $\ell(n, \alpha) \equiv 1$ p.s. $[P]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ou

(15) $\ell(n, \alpha) \equiv 0$ p.s. $[P]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

2°) Soit,

(16) $\bar{\ell}(n, \alpha) \equiv 1$ p.s. [P] pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ou

(17) $\bar{\ell}(n, \alpha) \equiv 0$ p.s. [P] pout tout $n \in \mathbb{Z}$

Preuve du lemme 2

Soit α un milieu fixé. $\ell(., \alpha)$ est une fonction harmonique et par conséquent, $\ell(X_n, \alpha)$ converge P^α-presque sûrement vers la fonction indicatrice de l'ensemble $\{\lim_k X(k) = +\infty\}$. Or, si $\alpha \in \Lambda$, alors, par l'irréductibilité de la chaîne dirigée par α , on a $\ell(n, \alpha) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc, pour tout $\alpha \in \Lambda, \ell(X_n, \alpha)$ converge vers 1 P^α-presque sûrement. On en déduit que pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe une suite d'entiers $n_k(\alpha)$ telle que

(18) $$\lim_{k\to\infty} \ell(n_k(\alpha), \alpha) = 1 \quad P^\alpha\text{-p.s.}$$

avec $|n_{k+1}(\alpha) - n_k(\alpha)| \leq A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Maintenant, pour tout $\alpha \in \Lambda$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$L(n, \alpha) = \ell((I_n)_1, \alpha) \vee \ell((I_n)_2, \alpha) \vee \ldots \vee \ell((I_n)_A, \alpha)$$

avec $I_n = \{nA, nA+1, \ldots, (n+1)A - 1\}$. D'après la relation (18) , on a :

(19) $$\lim_{n\to\infty} L(n, \alpha) = 1 \qquad P^\alpha\text{-p.s.}$$

pour tout $\alpha \in \Lambda$. Or, si on désigne par θ l'application définie, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, par $\theta\alpha(z, .) = \alpha(z + 1, .)$, alors, on a $\ell(n, \theta\alpha) = \ell(n + 1, \alpha)$. Ceci implique que Λ est invariant par translation. On en déduit que $P(\Lambda) = 1$ ou 0. Si $P(\Lambda) = 1$, alors, d'après la relation (19), on a :

(20) $$\lim_{n\to\infty} E\,(L(n, \alpha)) = 1$$

E étant l'espérance calculée par rapport à P. Or,

$$L(n, \theta^A \alpha) = L(n + 1, \alpha)$$

Par conséquent,

(21) $$E(L(n, \theta^A \alpha)) = E\,(L(n+1, \alpha)).$$

D'autre part, nous avons

(22) $$E(L(n, \theta^A \alpha)) = E(L(n, \alpha))$$

..

par invariance de la loi du milieu sous θ . Les relations (21) et (22) impliquent alors que $E(L(n, \alpha))$ est une constante. Cette constante est égale à 1, d'après la relation (20). D'où, P-presque sûrement, $L(n, \alpha) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc, P-presque sûrement, $\ell(., \alpha)$ est une fonction harmonique qui atteint son maximum en un point. Par conséquent, P-presque sûrement, $\ell(n, \alpha) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $P(A) = 0$. Alors, P-presque sûrement, on a $\ell(n, \alpha) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci achève la démonstration du 1°) du lemme 2. Pour la preuve du 2°), on procèdera d'une façon analogue.

<u>Corollaire</u> : Soit $X(n)$ une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas borné par A, transiente et irréductible. Alors,

$$\text{ou bien } \lim_n X(n) = +\infty \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

$$\text{ou bien } \lim_n X(n) = -\infty \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

<u>Preuve du corollaire</u>

Si les relations (14) et (17) se réalisent, alors, on a $\lim_n X(n) = +\infty$ P-presque sûrement.

Si les relations (15) et (16) se réalisent, alors, on a $\lim_n X(n) = -\infty$ P-presque sûrement.

Les relations (14) et (16) ne peuvent pas se réaliser simultanément car la marche aléatoire en milieu aléatoire est supposée transiente. De même, les relations (15) et (17) ne peuvent pas se réaliser simultanément car la marche aléatoire en milieu aléatoire est supposée irréductible.

Pour achever la démonstration du théorème 1-6, il nous reste à prouver que si la marche aléatoire en milieu aléatoire est récurrente, alors elle est nulle-récurrente.

<u>Lemme 3</u>

Soit $\alpha(z, .)$, $z \in \mathbb{Z}$, une suite de variables aléatoires i.i.d. définissant une marche aléatoire en milieu aléatoire récurrente et irréductible. Alors, cette marche aléatoire en milieu aléatoire est nulle-récurrente.

<u>Preuve du lemme 3</u>

Soit $\mathcal{H} = \{\alpha$; la chaîne gouvernée par α est nulle-récurrente$\}$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est invariant par translation. Puisque la suite $\alpha(z, .)$, $z \in \mathbb{Z}$, est une suite de variables aléatoires i.i.d., on en déduit que $P(\mathcal{H}) = 0$ ou 1. Si $P(\mathcal{H}) = 0$, alors la marche aléatoire en milieu aléatoire serait récurrente positive. Ceci est impossible. En effet, supposons que pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, la chaîne de Markov gouvernée par α est récurrente positive. Soit alors $\pi(.,\alpha)$ la probabilité invariante associée à une telle chaîne. Elle vérifie :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi(i, \alpha) = 1 \qquad \text{et} \qquad \pi(i, \alpha) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Soit α' , le milieu défini pour tout $i \in \mathbb{Z}$ par $\alpha'(i, .) = \alpha(i-1,.)$. Alors, d'après l'unicité de la mesure invariante, on a :

$$\pi(i, \alpha) = \pi(i-1, \alpha') \qquad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$\int \pi(i, \alpha)\, dP(\alpha) = \int \pi(i, \alpha')\, dP(\alpha') = \int \pi(i+1, \alpha)\, dP(\alpha)$$

On en déduit que $\int \pi(i, \alpha)\, dP(\alpha)$ est une constante indépendante de i. Cette constante est non nulle car $\pi(i, \alpha) > 0$. Par conséquent, on a :

$$1 = \int \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi(i,\alpha)\, dP(\alpha) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int \pi(i,\alpha)\, dP(\alpha) = \infty$$

Ceci est impossible. Donc, $P(\mathcal{J}) = 1$. La démonstration du théorème 1-6 est terminée.

II - MOMENTS DU TEMPS DE PASSAGE-UNITE

A - CALCUL DES MOMENTS DU TEMPS DE PASSAGE-UNITE POUR UNE CHAINE DE MARKOV

Soit α_i, $i \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et soit $Y(n)$, $n \in \mathbb{N}$, une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de loi initiale telle que $Y(0) = 0$ et dont les probabilités de transition sont telles que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1) \qquad \begin{aligned} P\,\{Y(n+1) = i+1 \,/\, Y(n) = i\} &= \alpha_i \quad \text{et} \\ P\,\{Y(n+1) = i-1 \,/\, Y(n) = i\} &= \beta_i \quad ; \quad \beta_i = 1 - \alpha_i \end{aligned}$$

On suppose que la chaîne ainsi définie est ou bien transiente telle que $\lim\limits_n Y(n) = +\infty$ p.s. ou bien récurrente : c'est le cas où les α_i, $i \in \mathbb{Z}$, vérifient :

$$(2) \qquad \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{\alpha_n \ldots \alpha_0}{\beta_n \ldots \beta_0} = \infty$$

Pour calculer le moment d'ordre ℓ, $\ell \geq 1$, du temps de passage au point 1, nous allons utiliser la méthode de CHUNG [2]. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soient k, i et j des éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $k < i < j$. On désigne par ${}_kp_{i,j}^{(n)}$ la probabilité d'aller de i à j en n étapes sans passer par k.

On pose alors ${}_kp_{i,j}^{*} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} {}_kp_{i,j}^{(n)}$ et ${}_km_{i,j}^{(\ell)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ell}\, {}_kp_{i,j}^{(n)}$, $\ell \geq 1$.

Nous avons :

$$(3) \qquad {}_kp_{i,j}^{(n)} = \alpha_i \, {}_kp_{i+1,j}^{(n-1)} + \beta_i \, {}_kp_{i-1,j}^{(n-1)} \quad , \quad n \geq 2$$

$$(4) \quad \text{et} \quad {}_kp_{i,j}^{*} = p_{i,j} + \alpha_i \, {}_kp_{i+1,j}^{*} + \beta_i \, {}_kp_{i-1,j}^{*}$$

$p_{i,j}$ étant la probabilité d'aller de i à j en une étape.

D'après la relation (3), ${}_km_{i,j}^{(\ell)}$ s'écrit :

$$(5) \qquad {}_km_{i,j}^{(\ell)} = p_{i,j} + \alpha_i \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ell}\, {}_kp_{i+1,j}^{(n-1)} + \beta_i \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ell}\, {}_kp_{i-1,j}^{(n-1)}$$

D'où, en faisant le changement de variable $n' = n-1$ et en utilisant la définition de ${}_km_{i,j}^{(\ell)}$ et la relation (4), on obtient :

(6) $${}_k m^{(\ell)}_{i,j} = \alpha_i \, {}_k m^{(\ell)}_{i+1,j} + \beta_i \, {}_k m^{(\ell)}_{i-1,j} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C^m_\ell \left(\alpha_i \, {}_k m^{(m)}_{i+1,j} + \beta_i \, {}_k m^{(m)}_{i-1,j}\right) + {}_k p^*_{i,j}$$

Fixons k et j. Pour tout entier r tel que $k < r < j$, ${}_k m^{(\ell)}_{r,j}$, d'après la relation (6), satisfait au système :

$$\begin{cases} u_r = \alpha_r \, u_{r+1} + \beta_r \, u_{r-1} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C^m_\ell \left(\alpha_r \, {}_k m^{(m)}_{r+1,j} + \beta_r \, {}_k m^{(m)}_{r-1,j}\right) + {}_k f^*_{r,j} \; ; \; k < r < j \\ u_k = 0 = u_j \end{cases}$$

${}_k f^*_{r,j}$ étant la probabilité que partant de r, la chaîne atteigne j sans passer par k. Ce système se résoud par récurrence. Pour tout r, $k < r < j$, on a :

$$u_r - u_{r-1} = - Q^{(j)}_r \, u_{j-1} + Q^{(j)}_r \sum_{s=r}^{j-1} \frac{{}_k f^*_{s,j}}{Q^{(j)}_s \, \beta_s} + Q^{(j)}_r \sum_{m=1}^{\ell-1} C^m_\ell \sum_{s=r+1}^{j-1} \frac{{}_k m^{(m)}_{s,j}}{Q^{(j)}_s} + Q^{(j)}_r \sum_{m=1}^{\ell-1} C^m_\ell \sum_{s=r}^{j-1} \frac{{}_k m^{(m)}_{s-1,j}}{Q^{(j)}_s}$$

avec

$$Q^{(j)}_r = \frac{\alpha_r \cdots \alpha_{j-1}}{\beta_r \cdots \beta_{j-1}} \qquad \text{si } r \leqslant j-1$$

$$= 1 \qquad \text{si } r \geqslant j$$

On en déduit l'expression explicite de u_i, $k < i < j$, c'est-à-dire de ${}_k m^{(\ell)}_{i,j}$, en remarquant que $u_i = \sum_{r=k+1}^{i} (u_r - u_{r-1})$. Maintenant, le moment d'ordre ℓ, $m^{(\ell)}_{i,j}$, du temps de passage au point j sachant que la chaîne part du point i est tel que :

(7) $$m^{(\ell)}_{i,j} = \lim_{k \to -\infty} {}_k m^{(\ell)}_{i,j}$$

or, la condition (2) nous permet de suivre la même démarche que CHUNG [2, p. 70] pour le calcul de cette limite. On aboutit à : pour tout $\ell \geqslant 1$ et pour tout i et j tels que $i < j$,

$$(8) \quad m_{i,j}^{(\ell)} = \sum_{r=i+1}^{j} Q_r^{(j)} \sum_{s=-\infty}^{r-1} \frac{1}{Q_s^{(j)}\,\beta_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_\ell^m \sum_{s=-\infty}^{j-1} \frac{m_{s,j}^{(m)}}{Q_s^{(j)}} +$$

$$\sum_{m=1}^{\ell-1} C_\ell^m \sum_{r=i+1}^{j-1} Q_r^{(j)} \sum_{s=-\infty}^{r} \frac{m_{s,j}^{(m)}}{Q_s^{(j)}} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_\ell^m \sum_{r=i+1}^{j} Q_r^{(j)} \sum_{s=-\infty}^{r-1} \frac{m_{s-1,j}^{(m)}}{Q_s^{(j)}}$$

D'où, si on prend $i = 0$ et $j = 1$, on obtient :

$$(9) \quad m_{0,1}^{(\ell)} = \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{1}{Q_s\,\beta_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_\ell^m \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{m_{s,1}^{(m)}}{Q_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_\ell^m \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{m_{s-1,1}^{(m)}}{Q_s}$$

avec

$$Q_s = \frac{\alpha_s \ldots \alpha_0}{\beta_s \ldots \beta_0} \quad \text{si} \quad s \leqslant 0$$
$$= 1 \quad \text{si} \quad s > 0$$

On remarque que sous la condition (2), le moment d'ordre ℓ, $m_{0,1}^{(\ell)}$, du temps de passage au point 1 sachant que la chaîne part du point 0 peut être fini ou infini.

<u>Exemples</u>

a) Soit α_n, $n \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels définie par :

$$\alpha_n = 2/3 \quad \text{si} \quad n \geqslant 0$$
$$= 1/2 \quad \text{si} \quad n \leqslant -1$$

Ces α_n, $n \in \mathbb{Z}$ vérifient la condition (2). D'après la formule (9), le moment d'ordre 1, $m_{0,1}$, du temps de passage au point 1 sachant que la chaîne part du point 0 s'écrit :

$$m_{0,1} = \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{\beta_s \ \ldots \ \beta_0}{\alpha_s \ \ldots \ \alpha_0} \cdot \frac{1}{\beta_s}$$

On en déduit que $m_{0,1}$ est infini. Cependant, la chaîne $Y(n)$ définie par la suite α_n, $n \in \mathbb{Z}$, est transiente telle que $\lim_n Y(n) = +\infty$ p.s. puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1 \ \ldots \ \beta_n}{\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n}$ est convergente.

b) Soit α_n, $n \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels définie par :

$$\alpha_n = 1/2 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$= 2/3 \quad \text{si} \quad n \leqslant -1$$

Ces α_n, $n \in \mathbb{Z}$, vérifient la condition (2). La moyenne $m_{0,1}$ du temps de passage au point 1 est finie. Cependant, la chaîne $Y(n)$ définie par la suite α_n, $n \in \mathbb{Z}$, est récurrente car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1 \cdots \beta_n}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ est divergente.

B - MOMENTS DU TEMPS DE PASSAGE-UNITE POUR UNE MARCHE ALEATOIRE EN MILIEU ALEATOIRE

Soit $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, une marche aléatoire en milieu aléatoire définie par $\alpha(i,1) = \alpha_i$ et $\alpha(i,-1) = \beta_i = 1 - \alpha_i$ avec α_i, $i \in \mathbb{Z}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $0 < \alpha_i < 1$. On suppose que $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, est telle que $\lim_n X(n) = +\infty$ P-presque sûrement : c'est le cas où $E(\log \beta/\alpha) < 0$.

Soit T_1 la variable aléatoire définie par :

$$T_1 = \inf \{n : X(n) = 1\} \quad \text{si un tel } n \text{ existe}$$
$$= \infty \quad \text{sinon}$$

T_1 est le temps d'atteinte du point 1. On note par $E^{\alpha,j}(.)$ l'espérance calculée par rapport à $P^{\alpha,j}(.)$. Dans le cas $j = 0$, on pose $E^{\alpha}(.) = E^{\alpha,0}(.)$.

2.1 PROPOSITION

Soit ℓ un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit i un élément de $\mathbb{Z}$ tel que $i < 1$. P-presque sûrement, le moment d'ordre ℓ, $E^{\alpha,i}(T_1^{\ell})$, du temps de passage au point 1, sachant que la chaîne dirigée par α part du point i, s'écrit :

$$(10) \quad E^{\alpha,i}(T_1^{\ell}) = \sum_{r=i+1}^{1} Q_r \sum_{s=-\infty}^{r-1} \frac{1}{Q_s \beta_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_{\ell}^{m} \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{E^{\alpha,s}(T_1^{m})}{Q_s}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\ell-1} C_{\ell}^{m} \sum_{r=i+1}^{0} Q_r \sum_{s=-\infty}^{r} \frac{E^{\alpha,s}(T_1^{m})}{Q_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_{\ell}^{m} \sum_{r=i+1}^{1} Q_r \sum_{s=-\infty}^{r-1} \frac{E^{\alpha,s-1}(T_1^{m})}{Q_s}$$

En particulier, P-presque sûrement, le moment d'ordre ℓ, $E^{\alpha}(T_1^{\ell})$, du temps de passage au point 1, sachant que la chaîne dirigée par α part du point 0, s'écrit :

$$(11) \quad E^{\alpha}(T_1^{\ell}) = \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{1}{Q_s \beta_s} + \sum_{m=1}^{\ell-1} C_{\ell}^{m} \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{E^{\alpha,s}(T_1^{m})}{Q_s}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\ell-1} C_{\ell}^{m} \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{E^{\alpha,s-1}(T_1^{m})}{Q_s}$$

Preuve de la proposition 2.1

Puisque $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, est une marche aléatoire en milieu aléatoire telle que $\lim_n X(n) = +\infty$ P - p.s., alors, P-presque sûrement la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1 \ldots \beta_n}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \quad \text{est convergente.}$$

On en déduit que P-presque sûrement, la série $\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{\alpha_n \ldots \alpha_0}{\beta_n \ldots \beta_0}$ est divergente puisque les α_i, $i \in \mathbb{Z}$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La relation (2) est donc vérifiée pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire. Nous pouvons alors utiliser les relations (8) et (9). Ceci achève la démonstration de la proposition.

2.2 PROPOSITION

On suppose que $E(\log^+ \beta/\alpha) < \infty$. Alors, pour tout entier ℓ, $\ell \geq 1$, le moment d'ordre ℓ, $E^\alpha(T_1^{\ell})$, du temps de passage est fini P-presque sûrement.

Exemple

Reprenons l'exemple défini, dans l'introduction, par la relation (1). Pour cet exemple, nous avons vu que la condition $\lim_n X(n) = +\infty$ P-p.s. est équivalente à $p > 1/2$. Plaçons-nous dans ce cas. On vérifie alors que :

a) $E^\alpha (T_1) < \infty$ p.s. [P]

b) $E^\alpha (T_1^2) < \infty$ p.s. [P]

En effet, posons, pour tout $n \geq 0$, $S_n = Z_0 + \ldots + Z_n$ avec

$Z_i = (\log \frac{b}{a})^{-1} \quad (\log \frac{\alpha_{-i}}{\beta_{-i}})$, $i \geq 0$. S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $E(Z_i) = -(2p - 1)$. D'où, en utilisant la loi forte des grands nombres, on obtient qu'avec probabilité 1, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a : $-S_n \leq (m+\varepsilon)n$ et $-S_n \geq (m-\varepsilon)n$ avec $m = 2p - 1$ et ε un nombre strictement positif qu'on choisit tel que $m-\varepsilon > 0$; ceci est possible puisque $m > 0$. D'autre part, pour tout $n \geq 0$, Q_{-n} s'écrit :

$$Q_{-n} \equiv \frac{\alpha_{-n} \ldots \alpha_0}{\beta_{-n} \ldots \beta_0} = (\frac{a}{b})^{-S_n}$$

D'où, avec probabilité 1, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$Q_{-n} < (\frac{a}{b})^{(m+\varepsilon)n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q_{-n}} = (\frac{b}{a})^{-S_n} \leq (\frac{b}{a})^{(m-\varepsilon)n}$$

puisque $b/a < 1$. Maintenant, d'après la relation (11), $E^\alpha (T_1)$ s'écrit :

(12) $$E^{\alpha}(T_1) = \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{\beta_s \cdots \beta_0}{\alpha_s \cdots \alpha_0} \cdot \frac{1}{\beta_s} \quad \text{p.s.} \quad [P]$$

$E^{\alpha}(T_1)$ peut s'écrire encore sous la forme :

(13) $$E^{\alpha}(T_1) = (1 + \frac{\beta_0}{\alpha_0}) + \sum_{s=-\infty}^{0} (1 + \frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{s-1}}) \frac{\beta_s \cdots \beta_0}{\alpha_s \cdots \alpha_0} \quad \text{p.s.}$$

puisque pour tout s, $\alpha_s + \beta_s = 1$. $E^{\alpha}(T_1)$ est donc fini P-presque sûrement car $\frac{\beta_s \cdots \beta_0}{\alpha_s \cdots \alpha_0}$ est P-presque sûrement inférieur ou égal au terme général d'une série géométrique convergente.

De même, d'après les relations (10) et (11), $E^{\alpha}(T_1^{\,2})$ s'écrit presque sûrement :

$$E^{\alpha}(T_1^{\,2}) = \sum_{s=-\infty}^{0} \frac{1}{Q_s\,\beta_s} + 2\sum_{s=-\infty}^{0} \frac{E^{\alpha,s}(T_1)}{Q_s} + 2\sum_{s=-\infty}^{0} \frac{E^{\alpha,s-1}(T_1)}{Q_s}$$

avec

$$E^{\alpha,s}(T_1) = \sum_{r=s+1}^{1} Q_r \sum_{t=-\infty}^{r-1} \frac{1}{Q_t\,\beta_t} \quad \text{p.s.}$$

D'où, pour que $E^{\alpha}(T_1^{\,2})$ soit fini presque sûrement, il suffit que la quantité :

$$A(\alpha) = \sum_{s=-\infty}^{-n_o} \frac{1}{Q_s} \sum_{r=s+1}^{-n_o} Q_r \sum_{t=-\infty}^{r-1} \frac{1}{Q_t}$$

soit finie presque sûrement. Pour cela, on commence par faire le changement de variables suivant : on pose $s' = -s$, $r' = -r$ et $t' = -t$. $A(\alpha)$ s'écrit alors :

$$A(\alpha) = \sum_{s'=n_o}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s'}} \sum_{r'=n_o}^{s'-1} Q_{-r'} \sum_{t'=r'+1}^{\infty} \frac{1}{Q_{-t'}}$$

Puisque $s' \geqslant n_o$, $r' \geqslant n_o$ et $t' \geqslant n_o$, alors on a :

$$A(\alpha) \leqslant \sum_{s'=n_o}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-\varepsilon)s'} \sum_{r'=n_o}^{s'-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{(m+\varepsilon)r'} \sum_{t'=r'+1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-\varepsilon)t'} \quad \text{p.s.}$$

or,

$$\sum_{r'=n_o}^{s'-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{(m+\varepsilon)r'} \sum_{t'=r'+1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-\varepsilon)t'} = \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-\varepsilon)} \left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{m-\varepsilon}\right)^{-1} \sum_{r'=n_o}^{s'-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{-2\varepsilon r'}$$

et

$$\sum_{r'=n_o}^{s'-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{-2\varepsilon r'} = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-2\varepsilon}\right)^{-1} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-2\varepsilon n_o} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-2\varepsilon s'}\right)$$

On remarque que la quantité $(1 - (b/a)^{-2\varepsilon})$ est négative car $b < a$. Donc,

(14) $$A(\alpha) \leqslant B_2 \sum_{s'=n_o}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-\varepsilon)s'} - C_2 \sum_{s'=n_o}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{(m-3\varepsilon)s'} \quad \text{p.s.}$$

B_2 et C_2 étant des constantes négatives. D'où, en choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $m - 3\varepsilon > 0$, on conclut, d'après la relation (14), que $A(\alpha)$ est finie presque sûrement puisque $b < a$.

Preuve de la proposition 2.2

La condition que :

$$P\{\lim_{n \to \infty} X(n) = +\infty\} = 1$$

est équivalente à $E(\log \beta/\alpha) < 0$. Pour la preuve de la proposition, nous distinguons, donc, deux cas :

Supposons que : $-\infty < E(\log \beta/\alpha) < 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = Y_{-n} + \ldots + Y_o$ avec $Y_{-i} = \log \frac{\alpha_{-i}}{\beta_{-i}}$, $i \geqslant 0$. S_n est une somme de variables aléatoires i.i.d. telle que $E(Y) = p$, p étant un nombre réel tel que $0 < p < \infty$. D'où, en utilisant la loi forte des grands nombres, on obtient qu'avec probabilité 1, il existe un n_o tel que pour tout $n \geqslant n_o$, on a :

$$Q_{-n} \leqslant e^{n(p+\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q_{-n}} \leqslant e^{-n(p-\varepsilon)} \quad ,$$

ε étant un nombre réel strictement positif tel que $p-\varepsilon > 0$. Un raisonnement analogue à celui qu'on a utilisé dans l'exemple précédent nous permet de conclure alors que $E^{\alpha}(T_1)$ et $E^{\alpha}(T_1{}^2)$ sont finis presque sûrement. Maintenant, pour tout $\ell \geqslant 3$, l'expression de $E^{\alpha}(T_1{}^{\ell})$, donnée par la relation (10), dépend des moments d'ordre $m < \ell$, $E^{\alpha,s}(T_1{}^m)$, du temps de passage au point 1 sachant que la chaîne dirigée par α part d'un point $s \in \mathbb{Z}^-$. Or, pour tout m, $m < \ell$, $E^{\alpha,s}(T_1{}^m)$ dépend aussi des $E^{\alpha,t}(T_1{}^n)$ avec $n < m$ et $t \in \mathbb{Z}^-$. D'où, en procédant à un changement de variables comme dans l'exemple précédent, on s'aperçoit que $E^{\alpha}(T_1^{\ell})$ s'écrit comme une combinaison linéaire finie de variables aléatoires de la forme :

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_1}} \sum_{r_1=-1}^{s_1-1} Q_{-r_1} \sum_{s_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_2}} \sum_{r_2=-1}^{s_2-1} Q_{-r_2} \cdots \sum_{r_{h-1}=-1}^{s_{h-1}-1} Q_{-r_{h-1}} \sum_{s_h=r_{h-1}+1}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_h}}$$

avec $h : 1 \leqslant h \leqslant \ell$. Donc, pour démontrer que pour tout ℓ, $E^{\alpha}(T_1^{\ell})$ est fini presque sûrement, il suffit de prouver que pour tout h, $h \geqslant 1$, la variable I_h^{α} définie par :

$$I_h^{\alpha} = \sum_{s_1=n_o}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_1}} \sum_{r_1=n_o}^{s_1-1} Q_{-r_1} \sum_{s_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_2}} \cdots \sum_{r_{h-1}=n_o}^{s_{h-1}-1} Q_{-r_{h-1}} \sum_{s_h=r_{h-1}+1}^{\infty} \frac{1}{Q_{-s_h}}$$

est finie presque sûrement. Pour cela, on va commencer par démontrer que pour tout $h \geqslant 1$, il existe une constante K_h positive telle que :

$$I_h^{\alpha} \leqslant K_h \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-(2h-1)\varepsilon)s_1} \quad \text{p.s.} \tag{15}$$

En effet, puisque $s_1 \geqslant n_o$, $s_2 \geqslant n_o$, ..., $s_h \geqslant n_o$, $r_1 \geqslant n_o$, ..., $r_{h-1} \geqslant n_o$, alors, I_h^{α} est inférieure ou égale à :

$$\sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)s_1} \sum_{r_1=n_o}^{s_1-1} e^{(p+\varepsilon)r_1} \cdots \sum_{r_{h-1}=n_o}^{s_{h-1}-1} e^{(p+\varepsilon)r_{h-1}} \sum_{s_h=r_{h-1}+1}^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)s_h}$$

P-presque sûrement. D'où, pour $h=1$, on a :

$$I_1^{\alpha} \leqslant K_1 \sum_{s_1=n_o}^{\infty} = e^{-(p-\varepsilon)s_1} \quad \text{p.s.}$$

avec $K_1=1$. Supposons qu'il existe une constante K_{h-1} positive telle que :

$$I_{h-1}^{\alpha} \leqslant K_{h-1} \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-(2h-3)\varepsilon)s_1} \quad \text{p.s.}$$

L'hypothèse de récurrence implique alors que I_h^{α} est inférieure ou égale à :

$$K_{h-1} \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)s_1} \sum_{r_1=n_o}^{s_1-1} e^{(p+\varepsilon)r_1} \sum_{s_2=r_1+1}^{\infty} e^{-(p-(2h-3)\varepsilon)s_2}$$

P-presque sûrement. D'où, par un calcul analogue à celui utilisé dans l'exemple précédent, on a :

$$I_h^{\alpha} \leqslant K_{h-1} \; B_h \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)s_1} - K_{h-1} \; C_h \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-(2h-1)\varepsilon)s_1} \quad \text{p.s.}$$

avec B_h et C_h des constantes négatives. Donc, en posant $K_h = -K_{h-1} \; C_h$, on obtient :

$$I_h^{\alpha} \leqslant K_h \sum_{s_1=n_o}^{\infty} e^{-(p-(2h-1)\varepsilon)s_1} \quad \text{p.s.}$$

D'où, pour tout h, $h \geqslant 1$, la relation (15) est vérifiée. Par conséquent, pour tout h, $h \geqslant 1$, I_h^{α} est finie P-presque sûrement.

Supposons, maintenant, que la suite des variables aléatoires α_n, $n \in \mathbb{Z}$, est telle que $E(\log \beta/\alpha) = -\infty$. On considère alors la suite α'_n, $n \in \mathbb{Z}$, de variables aléatoires définies pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $\alpha'_n = \alpha_n \wedge (1-\delta)$; δ étant un nombre réel donné strictement positif. On pose $\beta'_n = 1 - \alpha'_n$, $n \in \mathbb{Z}$. La suite α'_n, $n \in \mathbb{Z}$, est une suite de variables aléatoires i.i.d. Pour un δ assez petit, on a : $-\infty < E(\log \beta'/\alpha') < 0$. D'où, pour tout ℓ, $\ell \geqslant 1$, on a : $E^{\alpha'}(T_1^{\ell}) < \infty$ presque sûrement. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha'_n \leqslant \alpha_n$. On en déduit que pour tout ℓ, $\ell \geqslant 1$, on a : $E^{\alpha}(T_1^{\ell}) < \infty$ presque sûrement puisque la chaîne dirigée par une suite α fixée et partant du point 0 atteint plus rapidement le point 1 que la chaîne dirigée par α'. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Remarque

Par rapport à P, le moment d'ordre ℓ, $\ell \geqslant 1$, du temps de passage au point 1 peut être fini ou infini.

Exemple

Reprenons l'exemple défini, dans l'introduction, par la relation (1) et plaçons-nous dans le cas où $p > 1/2$, c'est-à-dire, dans le cas où la marche aléatoire en milieu aléatoire "fuit" vers $+\infty$ quand n est assez grand.

Sachant α, $E^{\alpha}(T_1)$ s'écrit [6] :

$$E^{\alpha}(T_1) = \left(1 + \frac{\beta_o}{\alpha_o}\right) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\right) \frac{\beta_j \cdots \beta_o}{\alpha_j \cdots \alpha_o}$$

or, $E(T_1) = E\left[E^{\alpha}(T_1)\right]$. D'où,

$$E(T_1) = (1 + E(\beta/\alpha))\ (1 + \sum_{j=-\infty}^{0} E(\beta/\alpha)^{1-j})$$

puisque les α_i, $i \in \mathbb{Z}$, sont des variables aléatoires i.i.d. Donc, $E(T_1)$ est finie si et seulement si la série

$$\sum_{j=-\infty}^{0} E(\beta/\alpha)^{1-j}$$

est finie. Mais, $E(\beta/\alpha) = p\,\frac{b}{a} + (1-p)\,\frac{a}{b}$. D'où, $E(\beta/\alpha) < 1$ si et seulement si $p > a$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} E(T_1) &< \infty \quad \text{si } p > a \\ &= \infty \quad \text{si } p \leqslant a. \end{aligned}$$

III - THEOREME LIMITE CENTRAL POUR CERTAINES MARCHES ALEATOIRES EN MILIEU ALEATOIRE CENTRE

A - THEOREME LIMITE CENTRAL POUR UNE CHAINE DE MARKOV "CENTREE"

Soit p_i, $i \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et soit μ_k, $k \in \mathbb{Z}$, une distribution des masses de probabilité sur $\mathbb{Z}$ telle que :

i) $\mu_o = 0$

ii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k\, \mu_k = 0$

iii) $\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2\, \mu_k$ existe avec $\sigma^2 > 0$.

Soit $Y(n)$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de loi initiale telle que $Y(o) = 0$ et de probabilités de transition telles que pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$(1) \quad P\{Y(n+1) = i + k \,/\, Y(n) = i\} = (1 - p_i)\, \mu_k, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$P\{Y(n+1) = i \,/\, Y(n) = i\} = p_i$$

On définit une suite de variables aléatoires σ_n, $n \in \mathbb{N}$, telle que : $\sigma_o = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\sigma_n = \inf\{k > \sigma_{n-1} : Y(k) \neq Y(\sigma_{n-1})\} \quad \text{si un tel } k \text{ existe}$$

$$= \infty \quad \text{sinon}$$

σ_n, $n \in \mathbb{N}$, est le temps du $n^{\text{ième}}$ saut de la chaîne. On considère, alors, la suite S_k, $k \geq 0$, définie par $S_k = Y(\sigma_k)$. S_k peut s'écrire comme une somme de k variables aléatoires Z_j, $1 \leq j \leq k$, i.i.d. telles que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $P(Z_j = m) = \mu_m$. C'est donc une marche aléatoire de loi μ. On désigne, alors, par $\widetilde{\mathcal{F}}_k$, $k \geq 0$, la tribu engendrée par $S_1, \ldots, S_k, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

Pour une telle chaîne, le théorème limite central peut être faux si la suite p_i, $i \in \mathbb{Z}$, ne vérifie pas certaines conditions.

<u>Exemple</u> : On se donne μ_k, $k \in \mathbb{Z}$, une distribution des masses de probabilité sur $\mathbb{Z}$, définie par :

$$\mu_{-1} = \mu_{+1} = 1/2$$

Cette distribution vérifie les conditions i), ii) et iii). Cependant, si on suppose que la suite p_i, $i \in \mathbb{Z}$, est telle que :

(2) $$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (1 - p_i) < \infty$$

alors, le théorème limite central est faux. En effet, supposons que $n^{-1/2}\, Y(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $a^2 > 0$. On démontre, alors, que pour tout k fixé, on a :

(3) $$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P\{Y(j-1) = k\} = 0$$

or, comme $Y(n)$ est une martingale telle que $Y(o) = 0$, $E(Y^2(n))$ peut s'écrire :

(4) $$E(Y^2(n)) = \sum_{j=1}^{n} E\ \left[E((Y(j) - Y(j-1))^2 / Y(j-1))\right] .$$

On en déduit que :

(5) $$\frac{1}{n}\ E(Y^2(n)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P\ \{Y(j-1)=k\}\right) (1-p_k)$$

Les relations (2) et (3) impliquent alors que :

(6) $$\lim_n \frac{1}{n}\ E(Y^2(n)) = 0.$$

D'autre part, d'après la définition de la convergence en loi, on a :

(7) $$\liminf \frac{1}{n}\ E(Y^2(n)) \geqslant a^2$$

Ceci est en contradiction avec la relation (6). Donc, sous la condition (2), le théorème limite central est faux.

<u>Théorème</u> : Théorème limite central

On suppose que la suite p_i, $i \in \mathbb{Z}$, est telle que :

(a) $$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-p_i}\ P(S_j=i) = \ell \ ; \ 0 < \ell < \infty .$$

(b) la suite :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1-p_i)^2}\ P(S_j=i), \qquad n \in \mathbb{N}^* ,$$

est bornée.

Alors, $\sigma^{-1}\, n^{-1/2}\, Y(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance ℓ^{-1} ; σ étant l'écart-type de la distribution μ.

<u>Lemme 1</u>

Sous les conditions (a) et (b), $n^{-1}\,\sigma_n$ converge en moyenne quadratique vers ℓ.

<u>Preuve du lemme 1</u>

Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $s \geqslant 1$, on a :

$$P\,\{\sigma_n - \sigma_{n-1} = s \,/\, \mathcal{F}_{n-1}\} = p_{S_{n-1}}^{s-1}\,(1 - p_{S_{n-1}}) ,$$

d'où

$$E\,(\sigma_n - \sigma_{n-1} \,/\, \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{1 - p_{S_{n-1}}}$$

C'est l'espérance d'une variable aléatoire de loi géométrique. On en déduit que :

$$E\,(\sigma_n) = E(\sigma_{n-1}) + E\,(\frac{1}{1 - p_{S_{n-1}}})$$

D'où, par récurrence, on a :

$$E(\sigma_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - p_i}\; P(S_j = i).$$

On en déduit, d'après la condition (a), que :

$$\lim_n \frac{1}{n}\, E(\sigma_n) = \ell. \tag{8}$$

D'autre part,

$$E((\sigma_n - \sigma_{n-1})^2 \,/\, \mathcal{F}_{n-1}) = (1 + p_{S_{n-1}})\,(1 - p_{S_{n-1}})^{-2} \;;$$

c'est le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire de loi géométrique. Or,

$$E(\sigma_n^2 \,/\, \mathcal{F}_{n-1}) = E((\sigma_n - \sigma_{n-1})^2 \,/\, \mathcal{F}_{n-1}) + 2\sigma_{n-1}\, E(\sigma_n - \sigma_{n-1} \,/\, \mathcal{F}_{n-1}) + \sigma_{n-1}^2$$

D'où la relation :

$$E(\sigma_n^2) - E(\sigma_{n-1}^2) = E((1 + p_{S_{n-1}})\,(1 - p_{S_{n-1}})^{-2}) + 2E(\sigma_{n-1})\, E(\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

On en déduit, par récurrence, que :

(9) $$E(\sigma_n^2) = \sum_{j=0}^{n-1} E((1+p_{S_j})(1-p_{S_j})^{-2}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} E(\frac{1}{1-p_{S_j}}) \sum_{k=0}^{j-1} E(\frac{1}{1-p_{S_k}})$$

Or, si on remarque que $1+p_{S_j} = -(1-p_{S_j})+2$, alors, on a :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E((1+p_{S_j})(1-p_{S_j})^{-2}) = -\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E(\frac{1}{1-p_{S_j}}) + \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E(\frac{1}{(1-p_{S_j})^2})$$

D'où, d'après les conditions (a) et (b), on a :

(10) $$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E((1+p_{S_j})(1-p_{S_j})^{-2}) = 0.$$

D'autre part,

$$\frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} E(\frac{1}{1-p_{S_j}}) \sum_{k=0}^{j-1} E(\frac{1}{1-p_{S_k}}) = (\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} E(\frac{1}{1-p_{S_j}}))^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E^2(\frac{1}{1-p_{S_j}})$$

D'où, d'après les conditions (a) et (b), on a :

(11) $$\lim_n \frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} E(\frac{1}{1-p_{S_j}}) \sum_{k=0}^{j-1} E(\frac{1}{1-p_{S_k}}) = \ell^2$$

car

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E^2(\frac{1}{1-p_{S_j}}) \leqslant \lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E(\frac{1}{(1-p_{S_j})^2})$$

ce qui implique que :

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} E^2(\frac{1}{1-p_{S_j}}) = 0$$

puisque le membre à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, d'après la condition (b).

Les relations (9), (10) et (11) impliquent alors que :

(12) $$\lim_n \frac{1}{n^2} E(\sigma_n^2) = \ell^2.$$

On en déduit, d'après les relations (8) et (12), que :

$$\lim_n \frac{1}{n^2} E((\sigma_n - n\ell)^2) = 0.$$

Pour la commodité des notations, on pose $L = \ell^{-1}$ et, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $B(n, \delta)$ l'ensemble des entiers positifs k tels que $|\frac{k}{n} - L| > \delta$.

Lemme 2

Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{n} P\left(\bigcup_{B(n,\delta)} \{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\}\right) = 0 \tag{13}$$

Preuve du lemme 2

σ_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de variables aléatoires strictement croissante. D'où, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\bigcup_{B(n,\delta)} \{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\} \subset (n \geqslant \sigma_{[(L+\delta)n]+1}) \cup (n < \sigma_{[(L-\delta)n]+1})$$

[ ] désigne la partie entière. Par conséquent, pour que la relation (13) soit vraie, il suffit que :

$$\lim_{n} P\{n \geqslant \sigma_{[(L+\delta)n]+1}\} = 0 \quad \text{et} \tag{14}$$

$$\lim_{n} P\{n < \sigma_{[(L-\delta)n]+1}\} = 0 \tag{15}$$

Or,

$$(n \geqslant \sigma_{[(L+\delta)n]+1}) \subseteq \left(\frac{1}{L+\delta} \geqslant \frac{1}{[(L+\delta)n]+1} \sigma_{[(L+\delta)n]+1}\right)$$

D'où, en posant $(L^{-1} - \varepsilon) = (L + \delta)^{-1}$, avec ε un nombre réel strictement positif, on a :

$$P\{n \geqslant \sigma_{[(L+\delta)n]+1}\} \leqslant P\left\{- \varepsilon \geqslant \frac{\sigma_{k(n)}}{k(n)} - \frac{1}{L}\right\}$$

avec $k(n) = [(L+\delta)n] + 1$. Or, quand n tend vers l'infini, $k(n)$ tend aussi vers l'infini et par conséquent, le membre à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand n tend vers l'infini, d'après le lemme 1 puisque la convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité. On en déduit la relation (14). Pour la relation (15), on procède de la même façon. Ceci achève la démonstration du lemme 2.

Preuve du théorème

Sachant $\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}$, $Y(n)$ suit la loi de la variable S_k. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P\left\{\frac{Y(n)}{\sigma\sqrt{n}} < t \;/\; \sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\right\} = F_k(t\,\sigma\sqrt{n})$$

F_k étant la fonction de répartition de S_k et σ l'écart type de μ. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(16) \qquad P\left\{\frac{Y(n)}{\sigma\sqrt{n}} < t\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t\,\sigma\sqrt{n})\; P\,\{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\}$$

Soient δ et ε deux nombres réels strictement positifs avec $\delta < L$. Alors, d'une part, nous avons :

$$\sum_{B(n,\delta)} F_k(t\,\sigma\sqrt{n})\; P\,\{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\} \leqslant \sum_{B(n,\delta)} P\,\{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\}$$

car la fonction de répartition F_k est toujours inférieure à 1. On en déduit, d'après le lemme précédent, qu'à partir d'un certain rang,

$$(17) \qquad \sum_{B(n,\delta)} F_k(t\,\sigma\sqrt{n})\; P\,\{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\} \leqslant \varepsilon$$

D'autre part, puisque S_k est la somme de k variables aléatoires Z_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, i.i.d. telles que $E(Z_j) = 0$ et $E(Z_j^{\,2}) = \sigma^2$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_k(x\,\sigma\sqrt{k})$ converge, quand k tend vers l'infini, vers $\Phi(x)$ où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition en x d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Cette convergence est uniforme en x car F_k est une suite de fonctions croissantes. D'où, pour tout n assez grand et pour tout k, $k \geqslant (L-\delta)n$, on a :

$$\Phi\left(t\sqrt{\frac{n}{k}}\right) - \varepsilon \leqslant F_k(t\,\sigma\sqrt{n}) \leqslant \Phi\left(t\sqrt{\frac{n}{k}}\right) + \varepsilon$$

Donc, si $t > 0$, alors, pour tout n assez grand, la somme :

$$\sum_{k=(L-\delta)n}^{(L+\delta)n} F_k(t\,\sigma\sqrt{n})\; P\,\{\sigma_k \leqslant n < \sigma_{k+1}\}$$

est comprise entre $\left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{L+\delta}}\right) - \varepsilon\right)(1-\varepsilon)$ et $\left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{L-\delta}}\right) + \varepsilon\right)$

car ϕ est une fonction croissante. Par contre, si $t < 0$, alors, pour tout n assez grand, cette somme est comprise entre $(\phi(\frac{t}{\sqrt{L-\delta}})-\varepsilon)(1-\varepsilon)$ et $(\phi(\frac{t}{\sqrt{L+\delta}})+\varepsilon)$.

Maintenant, puisque ε et δ sont arbitrairement petits, ces inégalités entraînent :

$$\lim_n \{P \frac{Y(x)}{\sigma\sqrt{n}} < t\} = \phi(\frac{t}{\sqrt{L}})$$

Ceci achève la démonstration du théorème car $\phi(\frac{t}{\sqrt{L}})$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée de variance L.

B - THEOREME LIMITE CENTRAL POUR UNE MARCHE ALEATOIRE EN MILIEU ALEATOIRE

Soit μ_k, $k \in \mathbb{Z}$, une distribution des masses de probabilité sur $\mathbb{Z}$ vérifiant :

i) $\mu_o = 0$

ii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,\mu_k = 0$

iii) $\sigma^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \mu_k$ existe avec $\sigma^2 > 0$.

On considère $X(n)$ une marche aléatoire en milieu aléatoire à pas quelconque (A peut-être infini) définie, selon les notations de l'introduction, par une suite de variables aléatoires $\alpha(i,.)$, $i \in \mathbb{Z}$, telle que :

$$\alpha(i,k) = (1 - p_i)\ \mu_k \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\text{et} \qquad \alpha(i,0) = p_i$$

où p_i, $i \in \mathbb{Z}$, est une suite de variables aléatoires i.i.d. et à valeurs dans $]0, 1[$. A chaque réalisation du milieu α, il existe une suite $p_i(\alpha)$, $i \in \mathbb{Z}$, de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant :

$$\alpha(i,k) = (1 - p_i(\alpha))\ \mu_k \qquad \text{si } k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\text{et} \qquad \alpha(i,0) = p_i(\alpha)$$

Sachant le milieu α, $X(n)$ est donc une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ telle que :

$$P^{\alpha}\{X(n+1) = i + k \,/\, X(n) = i\} = (1 - p_i(\alpha))\, \mu_k, \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

et $\quad P^{\alpha}\{X(n+1) = i \,/\, X(n) = i\} = p_i(\alpha)$

Pour une telle marche aléatoire en milieu aléatoire, nous allons établir le théorème limite central suivant.

Théorème : théorème limite central

On suppose qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que la variable $\frac{1}{1 - p_o}$ est dans $L^{2+\varepsilon}(P)$. Alors, $\sigma^{-1}\, n^{-1/2}\, X(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne nulle et de variance $(E(\frac{1}{1-p_o}))^{-1}$; σ étant l'écart-type de la distribution μ.

Preuve du théorème

Lemme : Soit R_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$, une suite de variables aléatoires i.i.d. de distribution commune λ, P-intégrables et positives et soit Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, i.i.d. de distribution commune μ (on suppose la suite R_ℓ et la suite Z_n indépendantes). On suppose qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que R_o est dans $L^{1+\varepsilon}(P)$.

Si S_n, $n \in \mathbb{N}$, est la marche aléatoire définie par :

$$S_o = 0 \quad \text{et} \quad S_n = Z_1 + \ldots + Z_n\,, \quad (n \geq 1)$$

alors,

$$(18) \qquad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} R_\ell\, P(S_j = \ell) = E(R_o) \text{ p.s. } [P]$$

Preuve du lemme

On commence par remarquer que si la suite

$$(19) \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} R_\ell\, P(S_j = \ell)$$

converge presque sûrement vers une limite, alors cette limite est une constante et égale à $E(R_o)$. En effet, soit Z la limite de cette suite. Z est une variable aléatoire qui ne dépend que des R_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell=-m}^{m} R_\ell\, P(S_j = \ell) = 0$$

puisque pour tout ℓ fixé, $P(S_j = \ell)$ tend vers zéro quand j tend vers l'infini. On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|\ell|>m} R_\ell \, P(S_j = \ell) = Z \qquad \text{p.s.}$$

Par conséquent, Z ne dépend que des R_ℓ, $|\ell| > m$ et ceci pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, Z ne dépend que de "la queue" de la suite R_ℓ. La loi Zéro-Un de Kolmogorov implique alors que Z est une constante car R_ℓ est une suite de variables aléatoires i.i.d. Cette constante ne peut être que $E(R_o)$. Démontrons, maintenant, que l'expression (19) converge presque sûrement. Soit $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$. On munit cet espace de la mesure de probabilité P définie par $P = \mu^{\mathbb{N}} \otimes \lambda^{\mathbb{Z}}$. On réalise alors une suite (Z_n, R_ℓ) possédant les propriétés demandées de la façon suivante : R_ℓ est l'application de Ω sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $z = (z_1, z_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $r = (\ldots, r_{-1}, r_o, r_1, \ldots) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$, $R_\ell(z, r) = r_\ell$; Z_k est l'application de Ω sur $\mathbb{Z}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$, $Z_k(z, r) = z_k$. Soit T l'application de Ω sur lui-même telle que pour tout $z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$, $T(z, r) = (\theta z, \tau^{z_1} r)$; θ étant le Shift sur z et τ le Shift sur r. P est une probabilité invariante par T. Ceci implique, d'après le théorème de Birkhoff, que la moyenne :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R_o \circ T^j$$

converge presque partout et dans $L^1(P)$ vers une limite R puisque R_o est dans $L^1(P)$ par hypothèse.

Maintenant, soit $\mathcal{R}$ la tribu engendrée par R_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$. Pour que l'espé~~rance conditionnelle de la variable~~ $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R_o \circ T^j$, sachant $\mathcal{R}$, converge presque sûrement vers $E(R/\mathcal{R})$, il suffit, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour l'espérance conditionnelle, que la variable définie par :

$$\sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |R_o| \circ T^j\right)$$

soit dans $L^1(P)$. Or, par hypothèse, R_o est dans $L^{1+\varepsilon}(P)$ avec $\varepsilon > 0$. Par conséquent, en se référant à Dunford-Schwartz [3, p. 678] ,

$$\sup_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R_o \circ T^j$$

est dans $L^{1+\varepsilon}(P)$ et donc, dans $L^1(P)$. D'où,

(20) $$\lim_n E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R_o \circ T^j / \mathcal{R}\right) = E\,(R/\mathcal{R}) \quad \text{p.s.}$$

D'autre part, pour tout j, $j \geq 1$, on a :

$$T^j(z, r) = (\theta^j z, \ \tau r^{z_1 + \ldots + z_j})$$

Par suite,

$$R_o \circ T^j\,(z, r) = r_{z_1 + \ldots + z_j}$$

On en déduit que :

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R_o \circ T^j / \mathcal{R}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R_{S_j} / \mathcal{R}\right)$$

or,

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R_{S_j} / \mathcal{R}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} R_\ell\, P(S_j = \ell)$$

D'où,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} R_\ell\, P(S_j = \ell) = E\,(R/\mathcal{R}) \quad \text{p.s.}$$

On en déduit, d'après le raisonnement fait au début de la démonstration de ce lemme, que $E(R/\mathcal{R}) = E(R_o)$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Revenons à la preuve du théorème. En prenant $R_n = \dfrac{1}{1 - p_n}$ (resp. $R_n = \dfrac{1}{(1-p_n)^2}$), on obtient, d'après le lemme précédent, que pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, on a :

(21) $$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-p_\ell(\alpha)}\, P^\alpha(S_j = \ell) = E\left(\frac{1}{1-p_o}\right)$$

(20) (resp. $$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1-p_\ell(\alpha))^2}\, P^\alpha(S_j = \ell) = E\left(\frac{1}{(1-p_o)^2}\right))$$

On en déduit, d'après le théorème limite central pour une chaîne de Markov établi au paragraphe A, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_n P^\alpha\,\{\sigma^{-1} n^{-1/2} X(n) < t\} = \phi\left(t\sqrt{E\left(\frac{1}{1-p_o}\right)}\right) \quad \text{P-p.s. en } \alpha$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_n P\{\sigma^{-1} n^{-1/2} X(n) < t\} = \phi\left(t \sqrt{E\left(\frac{1}{1-p_o}\right)}\right)$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

C - DISCUSSION

En se référant à l'article de Heyde [4], on peut penser que le théorème limite central, énoncé au paragraphe précédent, reste vrai sous la seule condition que $\frac{1}{1-p_o}$ est dans $L^1(P)$. D'ailleurs, la démonstration donnée pour ce théorème n'est pas la seule. On pourrait donner une deuxième démonstration en se basant sur le travail de Bingham [1] concernant les méthodes de sommabilité de variables aléatoires indépendantes.

Théorème

On suppose, en plus des conditions i), ii) et iii) données au début du paragraphe B, que :

iv) la distribution μ a un moment d'ordre 3 fini

v) la distribution μ est apériodique.

Alors, pour que $\sigma^{-1} n^{-1/2} X(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée de variance

$$\left(E\left(\frac{1}{1-p_o}\right)\right)^{-1} ,$$

il suffit que la variable $\frac{1}{1-p_o}$ soit dans $L^4(P)$.

Preuve du théorème

Lemme : Soit R_ℓ , $\ell \in \mathbb{Z}$, une suite de variables aléatoires i.i.d. et soit Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires i.i.d. de distribution commune μ vérifiant les conditions i)-v). On suppose que R_o a une variance finie. Alors,

$$\lim_n \sum_{j \in \mathbb{Z}} R_j \, P(S_n = j) = E(R_o) \quad \text{p.s.}$$

S_n, $n \in \mathbb{N}$, désigne la marche aléatoire définie par :

$$S_o = 0, \quad S_n = Z_1 + \ldots + Z_n \quad (n \geq 1).$$

Pour la preuve de ce lemme, on se référera à l'article de Bingham [1]. La démonstration du théorème se fait alors, en se basant sur ce lemme, d'une façon analogue à celle du théorème précédent.

On remarque que ce lemme nous donne la convergence presque sûre de la suite

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}.} R_j \, P(S_n = j), \ n \in \mathbb{N}.$$

Or, pour la démonstration du théorème, il suffit que la moyenne de Cesaro de cette suite converge presque sûrement. On peut donc espérer que sous des conditions plus larges, c'est-à-dire, sans supposer que le moment d'ordre 3 de la distribution μ existe, le théorème limite central reste vrai.

Remarque

Dans le cas particulier où la distribution μ_k des masses de probabilité sur $\mathbb{Z}$ est donnée par :

$$\mu_{-1} = \mu_{+1} = \frac{1}{2} \ ,$$

Heyde a démontré le résultat suivant [4] : si p_i, $i \in \mathbb{Z}$, est une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et si $Y(n)$ est la chaîne de Markov dont les probabilités de transitions vérifient la relation (1) du paragraphe A, alors, sous l'hypothèse :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_j} = \ell \qquad , \ 0 < \ell < \infty \qquad \text{et}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_{-j}} = \ell \ ,$$

$n^{-1/2}\, Y(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance ℓ^{-1}. On remarque que pour établir ce résultat, Heyde s'est basé essentiellement sur le travail de Stone concernant l'étude des processus de "naissance et mort" dans $\mathbb{R}$ [8].

Maintenant, si p_i, $i \in \mathbb{Z}$, est une suite de variables aléatoires i.i.d. et à valeurs dans $]0, 1[$ et si $X(n)$ est la marche aléatoire en milieu aléatoire définie, selon les notations de l'introduction, par :

$$\alpha(i, +1) = \alpha(i, -1) = \frac{1}{2}\ (1 - p_i)$$

$$\text{et} \qquad \alpha(i, 0) = p_i$$

alors, pour que $n^{-1/2}\ X(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance $(E(\frac{1}{1-p_o}))^{-1}$, il suffit que $E(\frac{1}{1-p_o})$ existe.

En effet, p_i, $i \in \mathbb{Z}$, étant une suite de variables aléatoires i.i.d., alors, d'après la loi forte des grands nombres, nous avons :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_j} = E\,(\frac{1}{1-p_o})\ \text{p.s.}$$

et
$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_{-j}} = E\,(\frac{1}{1-p_o})\ \text{p.s.}$$

Par conséquent, pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, nous avons :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_j(\alpha)} = E(\frac{1}{1-p_o})$$

et
$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-p_{-j}(\alpha)} = E(\frac{1}{1-p_o}).$$

On en déduit que pour presque chaque réalisation du milieu aléatoire α, $n^{-1/2}\ X(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance $(E(\frac{1}{1-p_o}))^{-1}$, d'après le résultat de Heyde.

REFERENCES

(0) KOZLOV S.M. : The method of averaging and walks in inhomogeneous environments. *Russian Math. Surveys 40 : 2, (1985).*

(1) BINGHAM N.H., MAEJIMA M. : Summability methods and almost sure convergence. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 68, 383-392 (1985).*

(2) CHUNG K.L. : Markov chains with stationary transition probabilities. *Springer-Verlag, Berlin, 1960.*

(3) DUNFORD W., SCHWARTZ J.T. : Linear operators. *Vol. 1, Interscience, New-York, 1958.*

(4) HEYDE C.C., WESTCOTT M., WILLIAMS E.R. : The asymptotic behavior of a random walk on a dual-medium lattice . *J. Stat. Phys. 28, 375-380 (1982).*

(5) KEY E. : Recurrence and transience criteria and a limit law for generalized random walk in a random environment. *Cornell University (1983).*

(6) SOLOMON F. : Random walks in a random environment. *Ann. Probability 3, 1-35 (1975).*

(7) STONE C.J. : The growth of a random walk. *Ann. Math. Statist. 40, 2203-2206 (1969).*

(8) STONE C.J. : Limit theorems for random walks, birth and death processes, and diffusion processes. *Illinois J. Math-7 : 638 (1963).*