

KOSSIVI ADJAMAGBO

**Sur la calculabilité des déterminants de matrices  
d'opérateurs différentiels**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1985, fascicule 4  
« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société », , p. 220-277

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1985\\_\\_4\\_220\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__4_220_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CALCULABILITE DES DETERMINANTS  
DE MATRICES D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

par Kossivi ADJAMAGBO  
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
Centre d'Enseignement et de Recherches en Informatique Appliquée

0 - INTRODUCTION

Conformément au propos des mathématiques fondamentales qui est, non de fonder une certaine "ontologie" des êtres mathématiques, mais de construire le graphe des implications entre les diverses propriétés de ces êtres, l'objet des "mathématiques effectives" dont le "calcul formel" ("computer algebra") n'est qu'un aspect, est d'élucider les relations entre les propriétés de "calculabilité" et les autres.

Plus précisément encore, le problème standard de ces "mathématiques effectives" peut s'énoncer en ces termes : étant donné deux ensembles  $E$  et  $F$  et une application  $f$  de  $E$  dans l'ensemble des parties non vides de  $F$ , sous quelles hypothèses sur  $E$  et  $F$  a-t-on une version "calculable" de l'assertion de l'axiome du choix ? En d'autres termes, sous quelles hypothèses sur  $E$  et  $F$  existe-t-il une application "calculable"  $g$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $g(x)$  appartienne à  $f(x)$  pour tout  $x$  de  $E$ .

Plus particulièrement, si  $g$  est une application de  $E$  dans  $F$  (cas où  $f(x)$  est un singleton pour tout  $x$  de  $E$ ), sous quelles hypothèses sur  $E$  et  $F$   $g$  est-elle "calculable" ?

Plus particulièrement encore, si  $E'$  est une partie de  $E$ , sous quelles hypothèses sur  $E'$  et  $E$  l'appartenance à  $E'$  des éléments de  $E$  est-elle "décidable", c'est-à-dire la fonction  $x \mapsto x \in E'$  de  $E$  dans l'ensemble {vrai, faux} est-elle "calculable" ?

Compte tenu de cette problématique des "mathématiques effectives", le propos du présent travail est de proposer une "théorie

effective" des déterminants sur un domaine de Ore dont les anneaux d'opérateurs différentiels fournissent des modèles.

Les résultats généraux obtenus (partie 2 ci-après) montrent que, en dépit de la nature abstraite (partie 1 ci-après), voire "mystérieuse" des déterminants sur un domaine de Ore (en effet il n'existe pas de "formule" explicite d'un tel déterminant contrairement au cas commutatif), les déterminants de matrices d'opérateurs différentiels dans les cas usuels et les plus pertinents (parties 3 et 4) sont "calculables", non seulement comme quotients d'éléments de leurs monoïdes de définition, mais encore comme éléments de ces monoïdes (théorèmes 3-4 et 4-8).

Cette propriété de "régularité effective" des déterminants de matrices d'opérateurs différentiels permet alors d'établir des résultats<sup>de</sup> "calculabilité" sur les anneaux de telles matrices (corollaire 3-6) et sur les indices (corollaire 4-12) et la "régularité" (corollaire 4-16) des systèmes "généraux" d'équations différentielles ordinaires.

Signalons enfin que les algorithmes présentés dans les démonstrations des résultats ont donné lieu à la réalisation d'un logiciel de "calcul formel des opérateurs différentiels" écrit dans le langage de calcul formel MACSYMA [9] (Figures 2.17.1, 3.5.1, 3.7.1 et 4.10.1).

Puisse le présent travail contribuer à éveiller les mathématiciens traditionnels aux problèmes de calculabilité sous-jacents à leurs investigations !

# 1 - LES DETERMINANTS SUR UN DOMAINE DE ORE

## 1.1 - Notations

Si  $\mathcal{A}$  est un anneau, nous noterons :

$\mathcal{M}_{n \times m}(\mathcal{A})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  ( $n$  lignes) à coefficients dans  $\mathcal{A}$

$\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$  l'anneau  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{A})$ ,

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$  la réunion  $\bigcup_{n > 0} \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ ,

$\mathcal{A}_*$  l'ensemble  $\mathcal{A} \setminus \{0\}$  (pareillement  $\mathbb{N}_*$  désignera  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ),

$\mathcal{A}^*$  le groupe multiplicatif des unités de l'anneau  $\mathcal{A}$

$\mathcal{M}_n^*(\ )$  le groupe  $(\mathcal{M}_n(\mathcal{A}))^*$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un monoïde unifère, nous noterons

$\mathcal{M}^*$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}_\omega$  le monoïde  $\mathcal{M}$  augmenté d'un élément absorbant noté  $\omega$

Si  $\mathcal{K}$  est un corps, nous noterons

$\widehat{\mathcal{K}}$  le groupe abélianisé de  $\mathcal{K}^*$ , c'est-à-dire  $\mathcal{K}^*/[\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^*]$ ,

$\pi_{\mathcal{K}}$  l'application canonique  $\mathcal{K}^* \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}$

$\overline{\mathcal{K}}$  le monoïde  $(\widehat{\mathcal{K}})_0$

Si en plus le cardinal de  $\mathcal{K}$  est différent de 2 et si  $\mathcal{A}$  est un sous-anneau de  $\mathcal{K}$ ,

$\det_{\mathcal{K}} : \mathcal{M}(\mathcal{K}) \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$  désignera le déterminant de Dieudonné sur  $\mathcal{K}$

[7] et,

$\mathcal{M}^0(\mathcal{A})$  l'ensemble des éléments  $A$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  tels que  $\det_{\mathcal{K}}(A) \neq 0$ .

$\mathcal{M}_n^0(\mathcal{A})$  l'ensemble  $\mathcal{M}^0(\mathcal{A}) \cap \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$

## 1.2 - Rappel [4]

Soit  $\mathcal{A}$  un anneau.

On dit que  $\mathcal{A}$  est un anneau de Ore à gauche (resp. droite) si pour tout  $(a, b) \in \mathcal{A}_*^2$ , il existe  $(c, d) \in \mathcal{A}_*^2$  tel que :

$$ca = db \text{ (resp. } ac = bd)$$

D'après l'axiome du choix, cela revient à dire qu'il existe une application  $f = f_1 \times f_2$  de  $\mathcal{A}_*^2$  dans  $\mathcal{A}_*^2$  vérifiant pour tout  $(a,b) \in \mathcal{A}_*^2$  :

$$f_1(a,b)a = f_2(a,b)b \text{ (resp. } af_1(a,b) = bf_2(a,b))$$

D'autre part, si  $\mathcal{A}$  est sans diviseur de zéro, cela revient encore à dire l'intersection de deux idéaux à gauche (resp. à droite) non nuls de  $\mathcal{A}$  n'est jamais l'idéal nul.

Dans ce dernier cas, on dit que  $\mathcal{A}$  est un domaine de Ore à gauche (resp. droite).

Si  $\mathcal{A}$  est un anneau (resp. domaine) de Ore à gauche et à droite, on dit tout simplement qu'il est un anneau (resp. domaine) de Ore.

Si  $\mathcal{A}$  est un domaine de Ore à gauche (resp. droite), il admet alors un sur-anneau, unique à un isomorphisme près, dont tous les éléments sont de la forme  $b^{-1}a$  (resp.  $ab^{-1}$ ) avec  $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_*$ , et qui est appelé le localisé total à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$  ou encore l'anneau total des fractions à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  est un domaine de Ore, son localisé total à gauche et son localisé total à droite sont isomorphes. L'un et l'autre sont alors appelés le localisé total de  $\mathcal{A}$  ou l'anneau total des fractions de  $\mathcal{A}$ .

### 1.3 - Définition

Soient  $\mathcal{D}$  un domaine de Ore à gauche (resp. droite),  $\mathcal{K}$  son localisé total à gauche (resp. droite),  $\mathcal{M}$  un monoïde commutatif unifère,  $\varphi$  un "homomorphisme régulier" de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire un homomorphisme du monoïde multiplicatif  $\mathcal{D}$  dans le monoïde  $\mathcal{M}$  tel que pour tout  $a \in \mathcal{D}_*$ ,  $\varphi(a)$  soit un élément régulier de  $\mathcal{M}$  [6],  $\mathcal{M}_\varphi$  le localisé de  $\mathcal{M}$  par rapport à  $\varphi(\mathcal{D}_*)$  [6]. Notons encore  $\varphi$  le prolongement de cet homomorphisme en un homomorphisme du monoïde  $\mathcal{K}^*$

$\mathcal{K}^*$  dans le monoïde  $\mathcal{M}_\varphi$  et  $\bar{\varphi}$  l'homomorphisme de  $\widehat{\mathcal{K}}$  dans  $\mathcal{M}_\varphi$  tel  $\varphi|_{\mathcal{K}^*} = (\bar{\varphi}|_{\widehat{\mathcal{K}}}) \circ \pi_{\mathcal{K}}$ , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^* & \xrightarrow{\varphi|_{\mathcal{K}^*}} & \mathcal{M}_\varphi \\ \pi_{\mathcal{K}} \downarrow & \searrow \bar{\varphi}|_{\widehat{\mathcal{K}}} & \\ \widehat{\mathcal{K}} & & \end{array}$$

Nous entendrons par "déterminant sur  $\mathcal{D}$  associé à  $\varphi$ " l'application  $\bar{\varphi} \circ \det_{\mathcal{K}} |_{\mathcal{M}(\mathcal{D})}$ , que nous noterons  $\det_\varphi$  :

$$\det_\varphi = \bar{\varphi} \circ \det_{\mathcal{K}} |_{\mathcal{M}(\mathcal{D})}$$

Nous dirons que le déterminant sur  $\mathcal{D}$  associé à  $\varphi$  est "régulier" si  $\det_\varphi(\mathcal{M}(\mathcal{D})) = \varphi(\mathcal{D})$

#### 1.4 - Proposition (Propriétés remarquables des déterminants)

Avec les notations et hypothèses précédentes et en notant multiplicativement la loi de composition du monoïde  $\mathcal{M}$ , il vient :

$\alpha$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$  et pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{D})$ ,

$$\det_\varphi AB = (\det_\varphi A)(\det_\varphi B)$$

$\beta$ ) pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}_*^2$ , pour tout  $(A, B, C, D) \in$

$$\mathcal{M}_m(\mathcal{D}) \times \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathcal{D}) \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathcal{D}),$$

$$\det_\varphi \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det_\varphi \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = (\det_\varphi A)(\det_\varphi B)$$

$\gamma$ ) pour tout  $A \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ , si  $B$  désigne la matrice obtenue à partir de  $A$  en permutant deux de ses lignes ou ceux de ses colonnes,

$$\det_\varphi B = \varphi(-1) \det_\varphi A$$

Preuve. Cela résulte des propriétés du déterminant de Dieudonné  $\det_{\mathcal{K}}$  [5].

## 2 - LES DETERMINANTS SUR UN DOMAINE EFFECTIVEMENT DE ORE

### 2.1 - Définition

Nous dirons qu'une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $E$  est "calculable" s'il existe un "algorithme (fini)" donnant  $f(x)$  pour tout  $x$  de  $E$ .

Si  $A$  est une partie d'un ensemble  $E$ , nous dirons que  $A$  est récursif dans  $E$  si la fonction  $x \mapsto x \in A$  de  $E$  dans l'ensemble vrai, faux est calculable.

Nous dirons qu'un monoïde est "effectif" si sa loi de composition est calculable.

Nous dirons qu'un groupe  $\mathcal{G}$  est "effectif" si le monoïde sous-jacent est effectif et si l'application  $x \mapsto x^{-1}$  de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}$  est calculable.

Nous dirons qu'un monoïde  $\mathcal{M}$  est "effectivement factoriel" s'il est commutatif, effectif, si le groupe  $\mathcal{M}^*$  est effectif et récursif dans  $\mathcal{M}$  et si le monoïde  $\pi(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^*)$  est libre,  $\pi$  désignant l'application canonique de  $\mathcal{M}$  dans le monoïde quotient  $\mathcal{M}/\mathcal{M}^*$ , c'est-à-dire le monoïde des classes d'équivalence de  $\mathcal{M}$  définies par la relation d'équivalence  $\sim$  telle que  $m \sim m'$  si  $m' = um$  pour un  $u$  dans  $\mathcal{M}^*$ . Auquel cas toute partie  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{M}$  telle que  $\pi|_{\mathcal{J}}$  soit injective et que  $\pi(\mathcal{J})$  engendre  $\pi(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^*)$  sera appelée "une base d'éléments irréductibles" de  $\mathcal{M}$ , et nous appellerons alors "fonction de factorisation de  $\mathcal{M}$  associée à  $\mathcal{J}$ " la fonction  $f$  de  $\mathcal{M}$  dans

$$\{(u) \mid u \in \mathcal{M}^*\} \bigcup_{n > 0} \{(u, p_1, \dots, p_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid u \in \mathcal{M}^*, p_i \in \mathcal{J}, \alpha_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p_i \neq p_j \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

telle que pour  $m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^*$  et  $f(m) = (u, p_1, \dots, p_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,

on a  $m = u p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ , si du moins la fonction  $f$  est calculable.

Nous dirons qu'un monoïde  $\mathcal{M}$  est "effectivement régulier" si tous les éléments de  $\mathcal{M}$  sont simplifiables dans  $\mathcal{M}$ , si la fonction

$f : (m,s) \mapsto m \in s\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}^2$  dans  $\{\text{vrai, faux}\}$  est calculable et s'il existe une fonction calculable  $g$  de  $A = \{(m,s) \mid s \in \mathcal{M}, m \in s\mathcal{M}\}$  dans  $\mathcal{M}$  telle que  $m = g(m,s)s$  pour tout  $(m,s)$  dans  $A$ . Auquel cas nous appellerons  $f$  "une fonction de régularité de  $\mathcal{M}$ " et  $g$  "une fonction de régularisation de  $\mathcal{M}$ ".

Nous dirons qu'un anneau  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est "effectif" si le groupe  $(\mathcal{A}, +)$  et le monoïde  $(\mathcal{A}, \cdot)$  sont effectifs; et si le monoïde  $(\mathcal{A}_*, \cdot)$  est effectivement factoriel, nous dirons que l'anneau  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est "effectivement factoriel".

Nous dirons qu'un corps  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  est effectif si les groupes  $(\mathcal{K}, +)$  et  $(\mathcal{K}^*, \cdot)$  sont effectifs.

Nous dirons qu'un anneau  $\mathcal{A}$  est "effectivement de Ore" à gauche (resp. droite) s'il est effectif et s'il existe une fonction calculable  $f = f_1 \times f_2$  de  $\mathcal{A}_*^2$  dans  $\mathcal{A}_*^2$  vérifiant pour  $(a,b) \in \mathcal{A}_*^2$  :

$$f_1(a,b)a = f_2(a,b)b \text{ (resp. } af_1(a,b) = bf_2(a,b)\text{)}.$$

Nous appellerons une telle fonction "une fonction de Ore" à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  est effectivement de Ore à gauche et à droite, nous dirons simplement que  $\mathcal{A}$  est effectivement de Ore.

Nous dirons qu'un anneau  $\mathcal{A}$  est "effectivement quasi-euclidien" à gauche (resp. droite) s'il est effectif et s'il existe une fonction calculable  $f = f_1 \times f_2 \times f_3$  de  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}_*$  dans  $\mathcal{A}_* \times \mathcal{A}^2$  et une fonction calculable  $\varphi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{N}_{-\infty}$  telles que :

- $\alpha)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(a) = -\infty$  si et seulement si  $a = 0$
- $\beta)$  pour tout  $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_*$ ,  $f_3(a,b) = f_1(a,b)a - f_2(a,b)b$   
(resp.  $af_1(a,b) - bf_2(a,b)$ )
- $\delta)$  pour tout  $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_*$ ,  $\varphi(f_3(a,b)) < \varphi(b)$



Nous appellerons une telle fonction  $f$  "une fonction d'Euclide" à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$ , et une telle fonction  $\varphi$  "une fonction d'ordre" de  $\mathcal{A}$  associée à  $f$ .

Si un anneau "effectivement quasi-euclidien" à gauche (resp. droite)  $\mathcal{A}$  admet une "fonction d'Euclide à gauche (resp. droite) telle que  $f_1(a,b) = 1$  pour tout  $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_*$ , nous dirons alors que  $\mathcal{A}$  est "effectivement euclidien" à gauche (resp. droite) et nous appellerons un tel  $f$  une "fonction d'Euclide unitaire" à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$ .

Un anneau effectivement euclidien à gauche et à droite sera dit effectivement euclidien.

Si  $\mathcal{A}$  est un anneau,  $n$  un entier positif et  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ , nous dirons que  $A$  est "quasi-élémentaire" si chacun de ses coefficients coïncide avec le coefficient correspondant de la matrice unité de l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ , à l'exception éventuelle d'un seul coefficient diagonal non nul et d'un seul coefficient non diagonal.

Nous noterons alors  $\mathcal{Q}_n(\mathcal{A})$  l'ensemble des matrices quasi-élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})$  l'ensemble des "listes d'au moins deux éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ , c'est-à-dire la réunion  $\bigcup_{m \geq 1} \mathcal{M}_n(\mathcal{A})^m$ , et  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  la réunion  $\bigcup_{n > 0} \mathcal{L}_n(\mathcal{A})$ .

Nous dirons qu'un anneau  $\mathcal{A}$  est "effectivement de Gauss à gauche (resp. droite) s'il est effectif et s'il existe une fonction calculable  $f$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$  et pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ , si  $f(A) = (P_1, \dots, P_r)$ , on ait alors

$\alpha$ )  $P_1 \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$  et est triangulaire supérieure (resp. inférieure)

$\beta$ ) pour  $1 < i \leq r$ ,  $P_i \in \mathcal{Q}_n(\mathcal{A})$

$\gamma$ )  $P_1 = P_r \dots P_2 A$  (resp.  $AP_2 \dots P_r$ )

Nous appellerons une telle fonction "une fonction de Gauss" à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{A}$ .

Avec les notations de 1;3, nous dirons que  $\text{dét}_\varphi$  est "effectif" s'il existe une fonction calculable  $f$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{D})$  dans  $\mathcal{M}_x \varphi(\mathcal{D}_*)$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ , on ait  $\text{dét}_\varphi(A) = f_1(A)(f_2(A))^{-1}$ . Nous appellerons alors une telle fonction "une détermination effective de  $\text{dét}_\varphi$ ".

Nous dirons également que  $\text{dét}_\varphi$  est "effectivement régulier" s'il existe une fonction calculable de  $\mathcal{M}(\mathcal{D})$  dans  $\varphi(\mathcal{D})$  qui coïncide avec  $\text{dét}_\varphi$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ . Nous appellerons alors une telle fonction "la détermination régulière effective de  $\text{dét}_\varphi$ ".

## 2.2 - Théorème fondamental (critère d'effectivité du déterminant)

Soient  $\mathcal{D}$  un domaine de Ore à gauche (resp. droite),  $\mathcal{M}$  un monoïde commutatif,  $\varphi$  un homomorphisme simplifiable de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{D}$  est effectivement de Ore à gauche (resp. droite),  $\mathcal{M}$  effectif et  $\varphi$  calculable, alors  $\text{dét}_\varphi$  est effectif.

Preuve. Elle résulte des deux lemmes suivants :

## 2.3 - Lemme

Avec les hypothèses du théorème 2.2, si  $\mathcal{D}$  est effectivement de Gauss à gauche (resp. droite), alors  $\text{dét}_\varphi$  est effectif.

Preuve. Notons "gauss" une fonction de Gauss à gauche (resp. droite) de  $\mathcal{D}$ . Un algorithme calculant  $\text{dét}_\varphi A$  pour  $A \in \mathcal{M}(A)$  est décrit par la figure 2.3.1 où le signe := désigne l'affectation et {...} un commentaire, et qui met en oeuvre un algorithme que nous appelons "algorithme de triangularisation de Gauss-Ore". C.Q.F.D.

```
dét (A) := {A étant une matrice carrée à coefficients dans un}
           {domaine effectivement de Gauss}
début n := nombre de lignes de A ;
      P := gauss (A) liste de matrices
      r := longueur de P nombre d'éléments de la liste P
      a :=  $1_D$  ;
      b :=  $1_D$  :
      pour i = 1 à n faire a := a.P1(i,i) ;
      pour k = 2 à r faire
      début pour i = 1 à n faire b : b.Pk(i,i)
      fin ; {de la boucle sur k}
      (  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  )
fin
```

**Figure 2.3.1 : Calcul d'une détermination effective d'un déterminant  $dét_\varphi$  par l'algorithme de triangularisation de Gauss-Ore**

## 2.4 - Lemme

Un domaine est effectivement de Ore à gauche (resp. droite) si et seulement s'il est de Gauss à gauche (resp. droite).

*Preuve.* Contentons-nous de la preuve du cas "à gauche", la preuve du cas "à droite" étant la même à des commutations de termes près.

Soient donc  $\mathcal{D}$  un domaine de Gauss à gauche,  $f$  une fonction de Gauss à gauche de  $\mathcal{D}$ ,  $g$  l'application  $(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{D}_*^2$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathcal{D})$ . L'application qui à un couple  $(a,b)$  de  $\mathcal{D}_*^2$  associe la seconde ligne du produit des matrices de la liste  $fog(a,b)$  est alors une fonction de Ore à gauche de  $\mathcal{D}$ .

Si maintenant  $\mathcal{D}$  est un domaine de Ore et "ore" une de ses fonctions de Ore, le calcul d'une fonction de Gauss de  $\mathcal{D}$  est donné par la figure 2.4.1 qui met en oeuvre un algorithme que nous appelons "de Gauss-Ore" C.Q.F.D.

Un critère de régularité effective des déterminants sur un domaine effectivement de Ore est le suivant :

## 2.5 - Théorème (de régularité effective)

Avec les notations et hypothèses de 2.2, si  $\mathcal{D}$  est effectivement euclidien à gauche (resp. droite),  $\mathcal{M}$  effectif et  $\varphi$  calculable, alors  $\text{dét}_\varphi$  est effectivement régulier.

*Preuve.* Si "euclide" est une fonction d'euclide unitaire de  $\mathcal{D}$  à gauche et "ordre" une fonction d'ordre associée, le calcul d'une détermination régulière effective de  $\text{dét}_\varphi$  est donné par la figure 2.5.1 qui met en oeuvre un algorithme que nous appelons "algorithme de triangularisation euclidienne" C.Q.F.D.

```
gauss (A) := { A étant une matrice carrée à coefficients dans un }
              { domaine de Ore à gauche }
début n := nombre de lignes de A ;
      I := matrice unité de l'anneau  $M_n(D)$  ; B := copie de A
      P := (B, I) { initialisation de la variable P dont la valeur }
                { finale sera le résultat } ;
      pour i = 1 à n faire
        début Si tous  $P_1[k, i] = 0$  pour  $i \leq k \leq n$  alors retourner P ;
              {  $P_1[k, i]$  désigne le coefficient de la ligne k et de la }
              { colonne i de  $P_1$  }
               $k_0 := \inf \{ k | i \leq k \leq n, P_1[k, i] \neq 0 \}$  ;
              Si  $k_0 \neq i$  alors
                début Modifier  $P_1$  en ajoutant la ligne  $k_0$  à la ligne i ;
                      Augmenter la liste P en lui adjoignant en queue la
                      matrice élémentaire  $n \times n$  E telle que  $E[i, k_0] = 1$ 
                fin { si  $k_0 \neq i$  }
                Pour k = i + 1 à n faire
                  début Si  $P_1[i, k] = 0$  ALORS RETOURNER P ;
                        u := ore ( $P_1[i, i], P_1[k, i]$ ) ;
                        c :=  $u_1$  ; d :=  $u_2$  ;
                        Modifier  $P_1$  en multipliant sa ligne k par d puis en
                        lui ajoutant la ligne i multipliée par -c ;
                        Augmenter la liste P en lui adjoignant en queue la
                        matrice quasi-élémentaire  $n \times n$  Q telle que  $Q[k, k] = d$  ;
                         $Q[i, k] = -c$  ;
                  fin de faire pour k = i + 1 à n
                fin de faire pour i = 1 à n
      fin.
```

Figure 2.4.1 : Calcul d'une fonction de Gauss d'un domaine effecti-  
vement de Ore à gauche par l'algorithme de Gauss-Ore

```
déterminant (A) := { A étant une matrice carrée à coefficient dans }
                   { un domaine effectivement euclidien à gauche }
début n := nombre de lignes de A ; B := copie de A ; S := 1
  Pour j = 1 à n faire boucle sur la colonne de B
  début si B [i,j] = 0 pour j ≤ i ≤ n alors retourner ;
    i0 = inf { i | j ≤ i ≤ n, B [i,j] ≠ 0 } ;
    faire { boucle de divisions euclidiennes sur la colonne }
      { j de B }
    début l := liste des i ∈ [i0,n] tels que B[i,j] ≠ 0
      Si longueur l = 1 et l1 > j alors
        début Permuter B[j] et B[l1] ; S := -S
        fin { B[j] = ligne j de B }
      Si longueur l = 1 alors retourner ;
      i1 = inf { i ∈ l | ordre(B[i,j]) ≤ ordre(B[k,j]) pour k ∈ l } ;
      Pour i ∈ l \ {i1} faire
        début u := euclide (B[i,j], B[i1,j]) ;
          B[i] := B[i] - u2.B[i1]
        fin
      fin { de la boucle de divisions euclidiennes sur la }
        { colonne j de B }
    fin { de la boucle sur les colonnes de B }
  φ(S) ∏1 ≤ j ≤ n φ(B[j,j])
fin
```

**Figure 2.5.1 : Calcul de la détermination régulière effective d'un déterminant sur un domaine effectivement euclidien à gauche par l'algorithme de triangularisation de Gauss-Euclide**

Un autre critère de régularité effective des déterminants sur un domaine effectivement de Ore à gauche ou à droite est le suivant :

### 2.6 - Théorème (bis de régularité effective)

Avec les notations et hypothèses de 2.2, si  $\mathcal{D}$  est effectivement de Ore à gauche,  $\mathcal{M}$  effectif,  $\varphi$  calculable,  $\det_{\varphi}$  régulier et le monoïde  $\varphi(\mathcal{D}_*)$  effectivement factoriel alors  $\det_{\varphi}$  est effectivement régulier.

Preuve. Elle résulte du théorème 2.2 et du lemme 2.7 C.Q.F.D.

### 2.7 - Lemme

Tout monoïde effectivement factoriel est effectivement régulier.

Preuve. Si  $\mathcal{M}$  est un monoïde effectivement factoriel dont "facteurs" est une fonction de factorisation et "inverse" la fonction  $m \mapsto m^{-1}$  de  $\mathcal{M}^*$  dans  $\mathcal{M}^*$ , le calcul de la fonction de régularité et de la fonction de régularisation de  $\mathcal{M}$  est donné respectivement par les figure 2.7.1 et 2.7.2 qui mettent en oeuvre un algorithme que nous appelons "algorithme de simplification factorielle" C.Q.F.D.

Les exemples fondamentaux de domaines effectivement de Ore ou effectivement euclidiens sont fournis par la définition et les deux théorème suivants :

```
régularité (m,n) := { m et n étant des éléments d'un monoïde effec-  
                      { tivement factoriel }  
début u := facteurs (m)  
  p : (( longueur de u)-1)/2 ;  
  v := facteurs (n) ;  
  q : ((longueur de v)-1)/2 ;  
  Si q = 0 alors retourner vrai ; { cas où n est inversible } ;  
  Si p = 0 alors retourner faux ; { cas où m est inversible }  
                                   { et n non inversible }  
  i := 2 + q ;  
  faire { boucle sur les exposants des facteurs irréductibles }  
        { de n }  
  début Si i > 1 + 2q { longueur de v } alors retourner vrai  
    j := i - n ;  
    k := 2 ;  
    tant que  $u_k \neq v_j$  et  $k \leq p$  faire k := k + 1 ;  
    Si k = 1 + p alors retourner faux ;  
    { cas où le facteur  $v_j$  de n ne divise pas m }  
    i := i + 1  
  fin { de la boucle sur les exposants des facteurs irréductibles }  
      { de n }  
fin
```

**Figure 2.7.1 : Calcul de la fonction de régularité d'un monoïde  
effectivement factoriel par l'algorithme de simpli-  
fication factorielle**



```
régularisation (m,n) := { m et n étant deux éléments d'un monoïde }
                        { effectivement factoriel tel que n di- }
                        { vise m }
début u := facteurs (m) ;
  p := ((longueur de u)-1)/2 ;
  v := facteurs (n) ;
  q := ((longueur de v)-1)/2 ;
  u1 := u1. inverse (v1) ;
  pour i = 2 + q à 1 + 2q faire
    début k := 2 ;
      tant que u2 ≠ vi-n faire k := k + 1 ;
      l := k + m ;
      ul := ul - vi
    fin ;
  u1 · 2 ≤ i ≤ 1 + p (ui puissance ui+p) {m/n}
fin.
```

**Figure 2.7.2 : Calcul de la fonction de régularisation d'un monoïde effectivement factoriel par l'algorithme de simplification factorielle.**

### 2.8 - Définition

Soient  $\mathcal{O}$  un anneau,  $d = (d_1, \dots, d_n)$  dans une liste de dérivations de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}$  commutant entre elles, et  $\mathfrak{E}nd(\mathcal{O})$  l'anneau des endomorphismes du groupe .

Nous appellerons "anneau des opérateurs d-différentiels sur " et nous noterons  $\mathcal{O}[d]$  ou  $\mathcal{O}[d_1, \dots, d_n]$  la sous-anneau de  $\mathfrak{E}nd(\mathcal{O})$  engendrée par  $\mathcal{O}$  et les dérivations  $d_1, \dots, d_n$ . Les éléments de  $\mathcal{O}[d]$ , appelés "opérateurs d-différentiels sur  $\mathcal{O}$ ", sont donc de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha d^\alpha, \text{ avec } m \in \mathbb{N}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, a_\alpha \in \mathcal{O}, d^\alpha = d_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ d_n^{\alpha_n}$$

De même nous appellerons "anneau des opérateurs d-différentiels formels sur  $\mathcal{O}$ " et nous noterons  $\mathcal{O}[y;d]$  ou  $\mathcal{O}[y_1, \dots, y_n; d_1, \dots, d_n]$ , le groupe des polynômes à n indéterminées notées  $y_1, \dots, y_n$ , avec  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , muni de la loi distributive par rapport à la loi de ce groupe de sorte que, pour tout  $(a, b) \in \mathcal{O}^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^n)^2$ , on ait :

$$(ay^\alpha)(by^\beta) = \sum_{\lambda \leq \alpha} \binom{\alpha}{\lambda} a d^\lambda (b)y^{\alpha-\beta-\lambda}, \text{ avec}$$

$$y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n} \text{ pour } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n,$$

$$\binom{\alpha}{\lambda} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\lambda_i} = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\lambda_i! (\alpha_i - \lambda_i)!} \text{ pour } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

c'est-à-dire  $\lambda_i \leq \alpha_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

### 2.9 - Remarque

Gardons les notations de la définition précédente.

Les plongements canoniques de  $\mathcal{O}$  dans les anneaux  $\mathfrak{E}nd(\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{O}[d]$  et  $\mathcal{O}[y;d]$  définissent des structures canoniques de  $\mathcal{O}$ -algèbre à gauche sur ces anneaux.

L'application  $\varphi_d: \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha y^\alpha \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha d^\alpha$  est un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{O}[y;d]$  dans  $\mathcal{O}[d]$  qui est injectif si et seulement si les dérivations  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont transcendantes dans la  $\mathcal{O}$ -algèbre à gauche  $\mathfrak{E}nd(\mathcal{O})$ , c'est-à-dire si la famille  $\{d_i^p \mid 1 \leq i \leq n, p \in \mathbb{N}_*\}$  est libre dans le  $\mathcal{O}$ -module à gauche  $\mathfrak{E}nd(\mathcal{O})$ .

Une condition suffisante pour qu'il soit ainsi et qu'il existe dans  $\mathcal{O}$  des éléments  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que  $d_j(x_i) = \delta_{ij}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ ,  $\delta$  étant le symbole de Kronecker.

Les résultats que nous énoncerons ci-dessous sur l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  seront donc valables pour l'anneau  $\mathcal{O}[d]$  sous cette dernière condition ou sous une autre condition assurant l'injectivité de  $\varphi_d$ ;

Indépendamment d'une telle condition,  $\varphi_d$  permet de considérer les  $d$ -polynômes sur  $\mathcal{O}$  comme des "opérateurs différentiels sur  $\mathcal{O}$ ".

Le résultat essentiel que nous établirons sur l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  est le suivant :

### 2.10 - Théorème

Avec les notations de 2.8, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine effectivement de Ore à gauche (resp. droite).
- (ii)  $\mathcal{O}$  est un domaine effectivement de Ore à gauche (resp. droite) et les dérivations  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont calculables.

### 2.11 - Théorème

Gardons les notations de 2.8 et supposons  $n = 1$ .

Si  $\mathcal{O}$  est un corps effectif et si  $d_1$  est calculable, alors  $\mathcal{O}[y;d]$  est un anneau effectivement euclidien.

Ces théorèmes résultent des trois lemmes suivants.

2.12 - Lemme

Avec les notations de 2.8, si l'anneau  $\mathcal{O}$  est effectif, si  $n = 1$  et si  $d_1$  est calculable, alors l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  est effectif.

PREUVE. Il suffit de prouver que la fonction "produit" :  $(a,b) \mapsto a.b$  qui désigne le produit de deux opérateurs  $d$ -différentiels formels sur  $\mathcal{O}$  est calculable.

En effet la fonction "produit" peut être calculée par l'algorithme récursif de la figure 2.12.1 ou  $ab$  (sans le point entre  $a$  et  $b$ ) désigne le produit commutatif des polynômes  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{O}[y_1]$   
C.Q.F.D.

produit  $(a,b) := \{a \text{ et } b \text{ étant des éléments de } \mathcal{O}[y_1, d_1]\}$

début si  $a = 0$  ou  $b = 0$  alors retourner ;

$m :=$  degré de  $a$  en  $y_1$  ;

$n :=$  degré de  $b$  en  $y_1$  ;

$a_1 :=$  coefficient de  $y_1^m$  dans  $a$  ;

$b_1 :=$  coefficient de  $y_1^m$  dans  $b$  ;

$a_2 := a - a_1 y_1^m$  ;

$b_2 := b - b_1 y_1^n$  ;

$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} a_1 d_1^k (b_1) y_1^{m+n-k} + \text{produit}(a_1 y_1^m, b_2) + \text{produit}(a_2, b)$

{ la terminaison du programme est assurée par le fait que }

{ degré de  $b_2$  en  $y_1$  degré de  $b$  en  $y_1$  et }

{ degré de  $a_2$  en  $y_1$  degré de  $a$  en  $y_1$  }

fin

Figure 2.12.1 : Calcul du produit de deux opérateurs différentiels formels

**2.13 - Lemme (Algorithme de EUCLIDE-ORE-1)**

Avec les notations de 2.8, si  $\mathcal{O}$  est un domaine effectivement de Ore à gauche (resp. droite) et si  $n = 1$ ,  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine effectivement quasi-euclidien à gauche (resp. droite) dont une fonction d'Euclide admet comme fonction d'ordre associée le degré en  $y_1$  des polynômes de  $\mathcal{O}[y_1]$ .

Preuve. Soient  $a = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k y_1^k$  et  $b = \sum_{0 \leq k \leq n} b_k y_1^k$  deux éléments de  $\mathcal{O}[y;d]$  tels que  $a_m \neq 0$  et  $b_n \neq 0$ .  $a.b$  est alors de la forme  $a_m.b_n y^{m+n} + \sum_{0 \leq k \leq m+n} c_k y^k$  avec les  $c_k \in \mathcal{O}$  pour  $0 \leq k \leq m+n$ .  $\mathcal{O}$  étant sans diviseur de 0,  $a_m.b_n \neq 0$ , par suite  $a.b \neq 0$ . On en conclut que  $\mathcal{O}[y;d]$  est bien un domaine.

Dans le cas "à gauche", une fonction d'Euclide "euclide" dont une fonction d'ordre associée "ordre" est le degré par rapport à  $y_1$ , peut être calculée par l'algorithme récursif de la figure 2.13.1 que nous appelons "algorithme de Euclide-Ore-1", dans lequel "ore" désigne une fonction de Ore à gauche de  $\mathcal{O}$  et "." le produit de deux éléments de  $\mathcal{O}[y;d]$ . C.Q.F.D.

**2.14 - Lemme**

Tout domaine effectivement quasi-euclidien à gauche (resp. droite) est effectivement de Ore à gauche (resp. droite).

Preuve. Soient  $\mathcal{D}$  un tel anneau, "euclide" une fonction d'euclide de  $\mathcal{D}$  et "ordre" une fonction d'ordre associée. Le calcul d'une fonction de Ore "ore" de  $\mathcal{D}$  est donné par la figure 2.14.1 qui met en oeuvre un algorithme récursif que nous appelons "algorithme de Euclide-Ore-2". C.Q.F.D.

La preuve du théorème 2.11 découlant de manière immédiate des lemmes 2.12 et 2.13, contentons-nous de prouver le théorème 2.10.

```
euclide (a,b) := { a et b étant deux éléments de  $\mathcal{O}[y_1; d_1]$  }
début m := ordre (b) ;
  n := ordre (a) - m ;
  si n < 0 alors (1,0,a)
  sinon
    début c1 := coefficient dominant de a en y1 ;
      c2 := coefficient dominant de b en y1 ;
      p := ore (c1, c2) ;
      r := p1.a - (p2y1n).b ;
      Si r = 0 ou ordre (r) < ordre (b) alors (p1, p2y1n, r)
      Sinon
        début q := euclide (r,b) :
          { la terminaison du programme est assurée par }
          { l'inégalité ordre (r) < ordre (a) }
          (q1.p1, (q1.p2)y1n + q1, q3)
          { en effet p1.a = (p2y1n).b = r et q1.r = q2.b + q3 }
          { par suite q1.p1.a = ((q1.p2)y1n + q1).b + q3 }
          { enfin étant intègre, q1.p1 ≠ 0 }
        fin { si r ≠ 0 et ordre (r) ≥ ordre (b) }
    fin { si n ≥ 0 }
fin
```

Figure 2.13.1 : Calcul de la fonction d'Euclide d'un anneau d'opérateurs différentiels formels à une indéterminée par l'algorithme d'Euclide-Ore-1

```
ore (a,b) := { a et b étant des éléments d'un domaine  $\mathcal{D}$  effective- }  
            { ment quasi-euclidien à gauche }  
début p := euclide (a,b) ;  
    Si  $p_3 = 0$  alors  $(p_1, p_2)$  { résultat }  
    { en effet  $p_2 \neq 0$  car  $p_1 \cdot a \neq 0$ ,  $\mathcal{D}$  étant un domaine }  
    Sinon  
    début q := ore (b,  $p_3$ ) ;  
        { la terminaison du programme tient à l'inégalité : }  
        { ordre ( $p_3$ ) < ordre (b) }  
         $(q_2 \cdot q_1, q_2 \cdot p_2 + q_1)$  { résultat }  
        { en effet  $p_1 \cdot a = p_2 \cdot b + p_3$  et  $q_1 \cdot b = q_2 \cdot q_3$  }  
        { par suite  $q_2 \cdot p_1 \cdot a = (q_2 \cdot p_2 + q_1) \cdot b$  }  
        { enfin étant un domaine,  $q_2 \cdot p_1 \neq 0$  et par suite }  
        {  $q_2 \cdot p_2 + q_1 \neq 0$  }  
        { sinon on aurait  $q_2 \cdot p_1 \cdot a = 0$  }  
    fin { si  $p_3 \neq 0$  }  
fin
```

Figure 2.14.1 : Calcul d'une fonction de Ore "ore" d'un domaine  
effectivement quasi-euclidien à gauche par  
l'algorithme de Euclide-Ore-2

### 2.15 - Preuve du théorème 2.10

Raisonnons par récurrence sur  $n$ .

a) Supposons  $n = 1$ .

Si les conditions (ii) du théorème sont vérifiées, l'application des trois lemmes précédents prouve immédiatement que  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine effectivement de Ore.

Supposons maintenant cette dernière propriété (i) vérifiée.

La formule  $[d_1, a] = d_1 \cdot a - a \cdot d_1 = d_1(a)$ , valable pour tout  $a$  de  $\mathcal{O}$ , prouve alors que  $d_1$  est calculable.

Soient "ore" une fonction de Ore de  $\mathcal{O}[y;d]$ ,  $\varphi$  l'application qui à un élément non nul de  $\mathcal{O}[y;d]$  lui associe son coefficient dominant par rapport à  $y_1$ .

Pour  $(a,b) \in \mathcal{O}_*^2$  et  $(c,d) = \text{ore}(a,b) \in (\mathcal{O}[y;d] \setminus \{0\})^2$ , on a :

$$\varphi(c) \cdot a = \varphi(c \cdot a) = \varphi(d \cdot b) = \varphi(d) \cdot b$$

$\varphi$  étant calculable, on en conclut que  $\text{ore} \circ (\varphi \times \varphi)$  est une fonction de Ore de  $\mathcal{O}$ , ce qui établit les conditions (ii).

b) Supposons maintenant  $n > 1$  et posons

$$\bar{d} = (d_2, \dots, d_n)$$

$$\bar{y} = (y_2, \dots, y_n)$$

$$y' = (y_1)$$

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\bar{y}]_{\bar{d}}$$

$$d_1' \left( \sum_{\alpha \in \Lambda} a_{\alpha} \bar{y}^{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} d_1(a_{\alpha}) \bar{y}^{\alpha} \text{ pour } \sum_{\alpha} a_{\alpha} \bar{y}^{\alpha} \in \mathcal{O}'$$

$$\bar{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ pour } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$\Lambda_k = \{ \alpha \in \Lambda \mid |\alpha| = k \} \text{ pour } k \in \mathbb{N} \text{ et } \Lambda \subset \mathbb{N}^n$$

$\varphi \left( \sum_{\alpha \in \Lambda} a_{\alpha} y^{\alpha} \right) = \sum_{k \geq 0, \Lambda_k \neq \emptyset} \left( \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_{\alpha} \bar{y}^{\bar{\alpha}} \right) y_1^k$  si  $\Lambda$  est une partie finie non vide de  $\mathbb{N}^n$  et si  $a_{\alpha} \in \mathcal{O}$  pour  $\alpha \in \Lambda$

Il est évident que  $\varphi$  est un isomorphisme de l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  sur l'anneau  $\mathcal{O}'[y';d']$  et que  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont calculables.



On en déduit que  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine effectivement de Ore si et seulement si  $\mathcal{O}'[y';d']$  l'est, donc si et seulement si  $\mathcal{O}'$  l'est et la dérivation  $d'_j$  calculable, d'après a), c'est-à-dire encore si  $\mathcal{O}'$  l'est et la dérivation  $d_j$  calculable, d'après la définition de  $d'_j$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, ces dernières conditions signifient que  $\mathcal{O}$  est un domaine effectivement de Ore et les dérivations  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  calculables.

C.Q.F.D.

### 2.16 - Corollaire

Avec les notations de 2.8, si  $\mathcal{O}$  est effectif, commutatif et sans diviseur de 0 et si les dérivations  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont calculables, alors  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine effectivement de Ore (c'est-à-dire à gauche et à droite).

### 2.17 - Exemple

Conformément aux notations de 2.8, prenons pour  $\mathcal{O}$  l'anneau  $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$  des polynômes à indéterminées  $x_1, x_2$  et  $x_3$  et à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , et pour  $d_i$  la dérivation par rapport à  $x_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Posons :

$$a = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

La mise en oeuvre informatique des lemmes 2.12, 2.13, et 2.14 permet de trouver, après simplification par un élément de  $\mathcal{O}$  (voir Figure 2.17.1) des éléments  $c$  et  $d$  de  $\mathcal{O}[y;d]$  tels que

$$c.a = d.b, \text{ avec } c = b + 2 \text{ et } d = a$$

En effet, il est aisé de vérifier que

$$[a,b] = a.b - b.a = 2a.$$

(c13) a;

(d13) 
$$y_3^2 + y_2^2 + y_1^2$$

(c14) b;

(d14) 
$$x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1$$

(c15) ore(a,b);

(d15) 
$$\begin{aligned} & [x_1^{14} x_2^6 x_3 y_3 + 3 x_1^{16} x_2^4 x_3 y_3 + 3 x_1^{18} x_2^2 x_3 y_3 + x_1^{20} x_3 y_3 \\ & + x_1^{14} x_2^7 y_2 + 3 x_1^{16} x_2^5 y_2 + 3 x_1^{18} x_2^3 y_2 + x_1^{20} x_2 y_2 + x_1^{15} x_2^6 y_1 \\ & + 3 x_1^{17} x_2^4 y_1 + 3 x_1^{19} x_2^2 y_1 + x_1^{21} y_1 + 2 x_1^{14} x_2^6 + 6 x_1^{16} x_2^4 \\ & + 6 x_1^{18} x_2^2 + 2 x_1^{20}, x_1^{14} x_2^6 y_3 + 3 x_1^{16} x_2^4 y_3 + 3 x_1^{18} x_2^2 y_3 \\ & + x_1^{20} y_3 + x_1^{14} x_2^6 y_2 + 3 x_1^{16} x_2^4 y_2 + 3 x_1^{18} x_2^2 y_2 + x_1^{20} y_2 \\ & + x_1^{14} x_2^6 y_1 + 3 x_1^{16} x_2^4 y_1 + 3 x_1^{18} x_2^2 y_1 + x_1^{20} y_1 ] \end{aligned}$$

(c16) factor(d15);

(d16) 
$$[x_1^{14} (x_2^2 + x_1^2)^2 (x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + 2),$$
  

$$x_1^{14} (x_2^2 + x_1^2)^2 (y_3^2 + y_2^2 + y_1^2)]$$

(c17) c:part(d16,1,3);

(d17) 
$$x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + 2$$

(c18) d:part(d16,2,3);

(d18) 
$$y_3^2 + y_2^2 + y_1^2$$

(c19) produit\_differentiel(c,a)-produit\_differentiel(d,b);

(d19) 
$$0$$

Figure 2.17.1 : Calcul d'un multiple commun de deux opérateurs différentiels formels à l'aide du système de calcul formel Macsyma

### 3 - LE DETERMINANT PRINCIPAL SUR UN ANNEAU D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

#### 3.1 - Notations et hypothèses

Pour toute la suite (jusqu'à la fin de 4), nous gardons les notations et les corollaires de la définition 2.8. Nous supposons en outre, comme dans le corollaire 2.16, que  $\mathcal{O}$  est commutatif, effectif, sans diviseur de 0, et que les dérivations  $d_i$  sont calculables pour  $1 \leq i \leq n$ .

Notons  $\mathcal{H}$  le monoïde multiplicatif des polynômes homogènes ou nuls de  $\mathcal{O}[y]$  et  $\sigma$  l'application de  $\mathcal{O}[y]$  dans  $\mathcal{H}$  qui à un polynôme de  $\mathcal{O}[y]$  associe sa partie principale.

Conformément à la définition 1.3, la notation  $\mathcal{H}_\sigma$  désigne alors le monoïde multiplicatif des quotients d'un élément de  $\mathcal{H}$  par un de ses éléments non nuls.

#### 3.2 - Remarques

D'après la définition du produit de l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$ ,  $\sigma$  est un homomorphisme du monoïde multiplicatif  $\mathcal{O}[y;d]$  dans le monoïde  $\mathcal{H}$ , et d'après l'intégrité de l'anneau  $\mathcal{O}[y]$ , cet homomorphisme est régulier.

D'autre part, en vertu du corollaire 2.16, l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  est un domaine de Ore.

D'où la définition suivante :

#### 3.3 - Définition

Nous appellerons "déterminant principal sur  $\mathcal{O}[y;d]$ " l'application  $\det_\sigma$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{O}[y;d])$  dans  $\mathcal{H}_\sigma$ .

### 3.4 - Théorème

Le déterminant principal sur  $\mathcal{O}[y;d]$  est effectif.

De plus, il est effectivement régulier si l'anneau  $\mathcal{O}[y]$  est effectivement factoriel.

*Preuve.* La première assertion résulte du théorème 2.2 et du corollaire 2.16, tandis que la seconde résulte du théorème de régularité [1], 3 et du théorème de régularité effective 2.6.

C.Q.F.D.

### 3.4 - Remarques

Une détermination effective de  $\det_{\sigma}$  peut être calculée par des algorithmes autres que celui de la preuve du théorème fondamental 2.2 et ne faisant appel ni à une fonction de Gauss de  $\mathcal{O}[y;d]$ , ni à une fonction de Ore de  $\mathcal{O}[y;d]$ .

Le plus simple de ces algorithmes; que nous appelons "algorithme de Dieudonné", qui est présenté par la figure 3.4.1, est un schéma récursif déduit de la formule du développement, suivant une ligne, du déterminant de Dieudonné d'une matrice à coefficients dans un corps [5], 4.5.

Un troisième algorithme, déduit de la preuve de [1], 3 et présenté par la figure 3.4.2, a l'avantage d'être non récursif, mais il suppose les fonctions combinaison-linéaire, maxi et système-de-poids définies comme suit :

Si  $A$  est une matrice à  $p$  lignes et à  $q$  colonnes à coefficients dans un domaine de Ore à gauche  $\mathcal{D}$  dont les lignes  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  sont liées dans le  $\mathcal{D}$ -modules à gauche  $\mathcal{D}^q$ , combinaison-linéaire  $(A)$  est un élément non nul  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de  $\mathcal{D}^p$  tel que  $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i A_i = 0$ .

Si  $M = (m_{ij})$  est une matrice carrée à  $p$  lignes à coefficients

dans  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $\max_i(M) = \max\left\{\sum_{1 \leq i \leq p} m_{i\varphi(i)} \mid \varphi = \text{permutation de } \{1, \dots, p\}\right\}$ , et si  $\max(M) > -\infty$ , système-de-poids (M) est un élément  $(s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p)$  de  $\mathbb{Z}^{2p}$  tel que  $\sum_{1 \leq i \leq p} s_i + t_i = \max_i(M)$  et  $m_{ij} \leq s_i + t_j$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq p$ .

L'algorithme de calcul de combinaison-linéaire présenté par la figure 3.4.3 est une généralisation de l'algorithme de Gauss-Ore de la figure 2.4.1, inspirée de l'algorithme classique de l'échelonnement.

Maxi peut être calculé aisément en remarquant que pour  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})$   $\max_i(M)$  est le degré en  $t$  du déterminant commutatif de la matrice  $p \times p$  dont le coefficient  $(i, j)$  est  $t^{M_{ij}} X_{ij}$ , où  $t$  et  $X_{ij}$  sont des indéterminées pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq p$  et  $t^{-\infty} = 0$ .

Système-de-poids peut être calculé suivant un algorithme déduit de la preuve d'un théorème de Hufford [8],3 que nous appelons "algorithme de Hufford" et qui est présenté par la figure 3.4.4.

### 3.5 - Exemple

Reprenons les notations de l'exemple 2.17 et considérons les éléments  $A, B$  et  $C$  de  $\mathcal{M}_2(\mathcal{O}[y;d])$  définis par :

$\text{dét}(A) := \{ A \text{ étant une matrice carrée à coefficients dans } \mathcal{O}[y;d] \}$   
**début**  $n :=$  nombre de lignes de  $A$  ;  
 Si  $r = 1$  alors retourner  $(\sigma(A_{11}), 1)$  ; {résultat}  
**pour**  $i = 1$  à  $r$  faire  
**début**  $a_i := \text{dét}(A^{i1})$  ;  $m_i := |A_{i1}| + |a_{i1}| - |a_{i2}|$  **fin** ;  
 {  $A^{i1}$  = sous matrice de  $A$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et  
 { la colonne 1 }  
 {  $|x| =$  degré total de  $x \in \mathcal{O}[y]$  }  
 $\max := \max \{ m_i \mid 1 \leq i \leq n \}$  ; {noté  $|A|_1$ }  
 $l :=$  liste des occurrences de  $\max$  dans la liste  $m$   
 Si  $\max = -\infty$  alors retourner  $(0, 1)$  ; {résultat}  
 $x := \sum_{i \in l} (-1)^{i+1} \sigma(A_{i1}) a_{i1} \prod_{k \in l, k \neq i} a_{k2}$   
 Si  $x \neq 0$  alors retourner  $(x, \prod_{k \in l} a_{k2})$  ; {résultat}  
 { dans ce dernier cas correspond à  $\text{deg}(A) = |A|_1 - |\text{dét } A| = 0,$   
 { avec  $|ab^{-1}| = |a| - |b|$  pour  $a \in \mathcal{O}[y]$  et  $b \in \mathcal{O}[y]_*$  }  
 $B := A$  ;  
 $p :=$  longueur de  $l$  ;  
 $j := l_1$   
**pour**  $i \in l$  et  $i \neq j$  faire **pour**  $k = 1$  à  $n$  faire  
 $B_{ik} := A_{j1} \cdot B_{ik} - A_{i1} \cdot B_{jk}$   
 { on a alors  $0 \leq \text{deg}(B) < \text{deg}(A)$  }  
 $a := \text{dét}(B)$  ;  
 $b := (\sigma(B_{j1}))^{p-1}$  ;  
 $(a_1, a_2 b)$  {résultat}  
**fin** .

**Figure 3.4.1 : Calcul d'une détermination effective du déterminant principal par l'algorithme dit de Dieudonné**

```

dét(A) := { A étant une matrice carrée à coefficients dans  $\mathcal{O}_y[d]$  }
début r := nombre de lignes de A ;
  B := A ;
  c := 1 ; { initialisation du "dénominateur" de dét (A) }
  faire
    début { de la boucle principale }
      pour i = 1 à r faire pour j = 1 à r faire  $M_{ij} = |B_{ij}|$  ;
      max := maxi(M) { que nous notons |A| } ;
      { sortie de la boucle principale si max =  $-\infty$  }
      Si max =  $-\infty$  alors retourner (0,1) ; { résultat }
      S := système-de-poids (M) ;
      pour i = 1 à r faire pour j = 1 à r faire
         $H_{ij} := S_i M_{ij} = S_i + S_{j+n}$  alors  $(A_{ij})$  sinon 0 ;
      d := déterminant commutatif de H ;
      { sortie de la boucle principale si  $d \neq 0$ , c-a-d si }
      {  $|B| - |\text{dét}(B)| = 0$  }
      Si  $d \neq 0$  alors retourner (d,c) ; { résultat }
       $\lambda :=$  combinaison linéaire (H) ;
      i := min { j |  $\lambda_j \neq 0$  } ; l := (i) ;
      pour j = i+1 à r faire pour  $k \in l$  faire pour m=1 à r faire
        Si  $H_{jm} \neq 0 \neq H_{km}$  alors début l := lv(j) ; retourner l fin
      pour j = 1 à r faire  $B_{ij} := \sum_{k \in l} \lambda_k \cdot A_{kj}$  ; c :=  $c \sigma(\lambda_i)$ 
      {  $|B| - |\text{dét}(B)|$  a alors décru tout en restant positif }
      { ou nul }
    fin { de la boucle principale }
  fin

```

**Figure 3.4.2 : Calcul d'une détermination effective du déterminant à l'aide d'un système de poids de Leroy-Volevich**

```
combinaison-linéaire (A) := { A matrice à coefficients dans un }
                           { domaine effectivement de Ore  $\mathcal{D}$  }
début m := nombre de lignes de A ; { ces lignes sont supposées liées
                                     { dans  $\mathcal{D}^r$  }

r := nombre de colonnes de A ;
B := A ; P := matrice identité d'ordre m ; i := 1 ;
{initialisation}
faire
début { de la boucle sur i }
    { recherche du premier coefficient  $\neq 0$  de la ligne i de B }
    test := vrai ; j := 0 ;
    Tant que test et j < r faire début j := j+1 ;
    test := (Bij = 0) fin ;
    { sortie de la boucle sur i si la ligne i de B est nulle }
    Si test alors retourner la ligne i de P ; { résultat }
    { sinon annulation des coefficients k  $\neq i$  de la colonne
      { j de B }
    pour k = 1 à m faire
        Si Bkj  $\neq 0$  et k  $\neq i$  alors faire
            début a := ore (Bkj, Bij) ; { fonction de ore de  $\mathcal{D}$  }
                pour l = 1 à r faire
                    début Bkl := a1·Bkl - a2·Bil ;
                        Pkl := a1·Pkl - a2·Pil
                    fin
                fin
            fin { de faire si Bkj  $\neq 0$  et k  $\neq i$  } ;
            i := i + 1
        fin { de la boucle sur i }
    fin
fin
```

**Figure 3.4.3** : Calcul d'une fonction combinaison-linéaire suivant l'algorithme de l'échelonnement





$$A_{11} = x_1^2/2$$

$$A_{12} = -x_1 y_1/2 + 1$$

$$A_{21} = -x_1 y_1 - 3$$

$$A_{22} = y_1^2$$

$$B_{11} = 1$$

$$B_{12} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$B_{21} = y_1 + y_2 + y_3$$

$$B_{22} = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$C_{11} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$C_{12} = x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 + x_3 y_3^3 + x_2 y_1^2 y_2 + x_3 y_1^2 y_3 + x_1 y_1 y_2^2 + x_3 y_2^2 y_3 \\ + x_1 y_1 y_3^2 + x_2 y_2 y_3^2$$

$$C_{21} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$C_{22} = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 x_3 y_1 y_3 + 2x_2 x_3 y_2 y_3 \\ + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

La mise en oeuvre informatique du théorème 3.4, notamment des algorithmes des figures 2.3.1 et 2.7.2 donne, comme on peut le constater sur la figure 3.5.1. :

$$\text{dét}_\sigma(A) = 1$$

$$\text{dét}_\sigma(B) = -3$$

$$\text{dét}_\sigma(C) = 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

En effet, on peut vérifier que  $\alpha \cdot A_{11} = \beta \cdot A_{12}$  avec  $\alpha = -(x_1^3 y_1 + x_1^2)/2$  et  $\beta = x_1^4/4$ . Par suite :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}$$

Donc  $\text{dét}_\sigma(A') = \beta \text{dét}_\sigma(A) = A_{11}^2 = \beta$ . D'où le résultat  $\text{dét}_\sigma(A) = 1$

D'autre part, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & B_{12} \\ 0 & [B_{12}, B_{21}] \end{pmatrix}, [B_{12}, B_{21}] = -3$$

D'où le résultat  $\text{dét}_\sigma(B) = -3$



Par ailleurs, on peut vérifier que  $C_{12} = C_{21} \cdot C_{11}$  et  $C_{22} = C_{21} \cdot C_{11}$ .

Par suite :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & -[C_{11}, C_{21}] \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & C_{21} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or  $[C_{11}, C_{21}] = 2C_{11}$ . D'où le résultat  $\det_{\sigma}(C) = 2C_{21}C_{11}$ .

### 3.6 - Corollaire

Supposons le déterminant principal sur  $\mathcal{O}[y;d]$  effectivement régulier et soit  $n$  un entier positif.

Le groupe  $\mathcal{M}_n^*(\mathcal{O}[y;d])$  des unités de l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathcal{O}[y;d])$  est récursif dans  $\mathcal{M}_n(\mathcal{O}[y;d])$  si et seulement si le groupe  $\mathcal{O}^*$  des unités de l'anneau  $\mathcal{O}$  est récursif dans  $\mathcal{O}$ .

De plus, le groupe  $\mathcal{M}_n^*(\mathcal{O}[y;d])$  est effectif si et seulement si le groupe  $\mathcal{O}^*$  l'est.

**Preuve.** La première affirmation résulte du théorème des unités [2], 9, puisque les unités de l'anneau  $\mathcal{O}[y;d]$  sont ceux de  $\mathcal{O}$ .

D'autre part il est évident que le groupe  $\mathcal{O}^*$  est effectif si le groupe  $\mathcal{M}_n^*(\mathcal{O}[y;d])$  l'est puisque l'application qui à un élément  $a$  de  $\mathcal{O}^*$  associe la matrice diagonale  $n \times n$  dont le premier coefficient diagonal est  $a$  <sup>et les autres 1</sup> est un isomorphisme calculable  $\varphi$  du groupe  $\mathcal{O}^*$  sur le sous-groupe  $\varphi(\mathcal{O}^*)$  de  $\mathcal{M}_n^*(\mathcal{O}[y;d])$  et que  $\varphi^{-1}$  est calculable.

Enfin si le groupe  $\mathcal{O}^*$  est effectif, la fonction "inverse" qui à un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_n^*(\mathcal{O}[y;d])$  associe son inverse  $A^{-1}$  peut être calculée, comme l'indique la figure 3.6.1, par un algorithme déduit de la preuve de [2], 9 que nous appelons "algorithme de Cramer" et qui repose sur les "formules de Cramer généralisées" données par Dieudonné dans [7], 8.

**C.Q.F.D.**

```
inverse (A) := { A étant une matrice carrée à coefficients dans }
                {  $\mathcal{O}[y;d]$  }
début d := déterminant principal de A ; { supposé appartenir à  $\mathcal{O}^*$  }
r := nombre de lignes de A ;
B := matrice identité d'ordre r ; { initialisation du résultat }
pour i = 1 à r faire { boucle de calcul des lignes de  $A^{-1}$  }
début x := liste de r zéros ; { initialisation de la ligne i }
                                { de  $A^{-1}$  }
    y := liste de r zéros ;
     $y_i := 1$  ;
    faire { calcul de proche en proche de la ligne i de  $A^{-1}$  }
    début pour i = 1 à r faire
        début C := matrice déduite de A par substitution
                    de y à sa ligne i ;
             $z_i = (\text{déterminant principal de C})/d$ 
        fin ;
        x := x + z ;
        y := y - z.A ;
        Si y = 0 alors retourner (x)
    fin ; { de calcul de proche en proche de la ligne i de  $A^{-1}$  }
     $B_i := x$ 
fin ; { de la boucle de calcul des lignes de  $A^{-1}$  }
B { résultat }

fin.
```

Figure 3.6.1 : Calcul de la fonction inverse par l'algorithme de Cramer

### 3.7 - Exemple

Reprenons les notations de 3.5 et notons  $\bar{\mathcal{O}}$  le corps des fractions de l'anneau  $\mathcal{O}$ ,  $\bar{d}_i$  le prolongement de la dérivation  $d_i$  à  $\bar{\mathcal{O}}$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ , et  $\bar{d}$  la liste  $(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3)$ .

D'après 3.5 et le théorème des unités [2], 9, A et B appartiennent à  $\mathcal{M}_2^*(\mathcal{O}[y;d])$ , et la mise en oeuvre informatique de l'algorithme de la figure 3.6.1 donne, comme on peut le constater sur la figure 3.7.1. :

$$A_{11}^{-1} = y_1^2$$

$$A_{12}^{-1} = x_1 y_1 / 2$$

$$A_{21}^{-1} = x_1 y_1 + 1$$

$$A_{22}^{-1} = x_1^2 / 2$$

$$B_{11}^{-1} = 1 - (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) / 3$$

$$B_{12}^{-1} = (x_1 + x_2 + x_3) / 3$$

$$B_{21}^{-1} = (y_1 + y_2 + y_3) / 3$$

$$B_{22}^{-1} = -1/3$$

En effet, d'après les calculs de 3.5, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta^{-1} & \beta^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $A \in \mathcal{M}_2^*(\bar{\mathcal{O}}[y;\bar{d}])$  et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & A_{12} \\ 0 & A_{11}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 & x_1 y_1 / 2 \\ x_1 y_1 + 1 & x_1^2 / 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{O}[y;d])$$

ce qui permet d'affirmer que  $A \in \mathcal{M}_2^*(\mathcal{O}[y;d])$ .

D'autre part, toujours d'après les calculs de 3.5,  $B \in \mathcal{M}_2^*(\mathcal{O}[y;d])$  et on a :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & +B_{12}/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - B_{12}B_{21}/3 & B_{12}/3 \\ B_{21}/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(c39) a;

(d39) 
$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 \\ \frac{x_1}{2} & 1 - \frac{x_1 y_1}{2} \\ 2 & 2 \\ -x_1 y_1 - 3 & y_1^2 \end{bmatrix}$$

(c40) b;

(d40) matrix([1, x3 + x2 + x1], [y3 + y2 + y1, x3 y3 + x2 y3 + x1 y3 + x3 y2 + x2 y2 + x1 y2 + x3 y1 + x2 y1 + x1 y1])

(c41) matrix\_element\_mult;

(d41) produit\_differentiel

(c42) a\_1:inverse(a);

(d42) 
$$\begin{bmatrix} y_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & \frac{x_1 y_1}{2} \\ x_1 y_1 + 1 & \frac{x_1}{2} \end{bmatrix}$$

(c43) b\_1:inverse(b);

(d43) Col 1 = 
$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{(x_3 + x_2 + x_1) y_3 + (x_3 + x_2 + x_1) y_2 + (x_3 + x_2 + x_1) y_1}{3} \\ \frac{y_3 + y_2 + y_1}{3} \end{bmatrix}$$

Col 2 = 
$$\begin{bmatrix} \frac{x_3 + x_2 + x_1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(c44) a.a\_1;

(d44) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c45) b.b\_1;

(d45) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 3.7.1 : Calcul de l'inverse de matrices d'operateurs differentiels formels à l'aide du système de calcul formel Macsyma

#### 4 - LE DETERMINANT DE NEWTON SUR UN ANNEAU D'OPERATEURS

##### DIFFERENTIELS

##### 4.1 - Notations et hypothèses

Dans tout ce qui suit, le nombre  $n$  de dérivations  $d_i$  ou d'indéterminée  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , vaut 1 et  $K$  désignera un corps commutatif.

Nous noterons  $K[x_1]$  (resp.  $K[[x_1]]$ ) l'anneau des polynômes (resp. séries formelles) à une indéterminée  $x_1$  et à coefficients dans  $K$ ,  $K(x_1)$  (resp.  $K((x_1))$ ) le corps de fractions de  $K[x_1]$  (resp.  $K[[x_1]]$ ), et si  $a$  est un élément de  $K(x_1)$  (resp.  $K((x_1))$ ), nous désignerons par  $\text{dég}(a)$  (resp.  $\text{val}(a)$ ) le degré (resp. la valuation) en  $x_1$  de  $a$ .

Si  $\mathcal{O} = K((x_1))$  (resp.  $K(x_1)$ ),  $a = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i y_1^i \in \mathcal{O}[y_1]$  et si  $t \in ]0, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, 0[$ ), nous poserons  $\text{val}(a, t) = \inf \{ \text{val}(a_i) - (t+1)i \mid 1 \leq i \leq m \}$

(resp.  $\text{dég}(a, t) = \sup \{ \text{dég}(a_i) - (t+1)i \mid 1 \leq i \leq m \}$ ), et nous noterons  $\mathcal{U}_1(a)$  (resp.  $\mathcal{U}_2(a)$ ) la liste des couples  $(i, \text{val}(a_i) - i)$  (resp.  $(i, \text{dég}(a_i) - i)$ ) ordonnés suivant les valeurs croissantes des entiers  $i$  de  $[0, m]$  pour lesquels il existe un réel  $t_i$  positif (resp. négatif) tel que  $i = \sup \{ k \in [0, m] \mid \text{val}(a_k) - (t_i+1)k = \text{val}(a, t_i) \}$  (resp.  $\text{dég}(a_k) - (t_i+1)k = \text{dég}(a, t_i)$ ), si  $a$  est non nul, et la liste vide sinon.

$\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ) désignera l'ensemble  $\{ \mathcal{U}_1(a) \mid a \in K((x_1))[y_1] \}$  (resp.  $\mathcal{U}_2(a) \mid a \in K(x_1)[y_1] \}$ ) muni de la loi  $*$  telle que  $\mathcal{U}_1(a) * \mathcal{U}_1(b) = \mathcal{U}_1(a \cdot b)$  pour  $(a, b) \in K((x_1))_{\frac{d}{dx_1}}^2[y_1; d]$  (resp.  $\mathcal{U}_2(a) * \mathcal{U}_2(b) = \mathcal{U}_2(a; b)$

pour  $(a, b) \in K(x_1)_{\frac{d}{dx_1}}^2[y_1; d]$ ), et  $\mathcal{N}_1^0$  (resp.  $\mathcal{N}_2^0$ ) le sous-monoïde  $\mathcal{N}_1 \setminus \{\emptyset\}$  (resp.  $\mathcal{N}_2 \setminus \{\emptyset\}$ ) de  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ).

Nous noterons en outre  $\mathbb{C}\{x_1\}$  (resp.  $\mathbb{C}\{\{x_1\}\}$ ) l'anneau des séries



entières convergentes (reps. dans  $\mathbb{C}$ ) à indéterminée  $x_1$  et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , et pour tout réel  $s$ ,  $\varphi_s$  l'application  $\sum_{k \geq 0} a_k x_1^k \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k x_1^k / (k!)^{s-1}$  de  $\mathbb{C}[[x_1]]$  dans  $\mathbb{C}[[x_1]]$ ,  $\mathbb{C}\{x_1\}_s$  (resp.  $\mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s$ ) l'anneau  $\varphi_s^{-1}(\mathbb{C}\{x_1\})$  resp.  $\varphi_s^{-1}(\mathbb{C}\{\{x_1\}\})$  et nous poserons  $\mathbb{C}\{x_1\}_{+\infty} = \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_{+\infty} = \mathbb{C}[[x_1]]$  et  $\mathbb{C}\{x_1\}_{-\infty} = \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_{-\infty} = \mathbb{C}[x_1]$

Si  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq p$ , est une matrice d'endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{V}$ , la notation  $A$  désignera encore l'application  $(v_i)_{1 \leq i \leq p} \mapsto (\sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij}(v_j))_{1 \leq i \leq p}$  de  $\mathcal{V}^p$  dans  $\mathcal{V}^p$ .

Si l'application  $A : \mathcal{V}^p \rightarrow \mathcal{V}^p$  admet alors un indice, c'est-à-dire si  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } A < +\infty$  et  $\dim_{\mathbb{C}} \text{coker } A < +\infty$ , nous noterons  $\chi_{\mathbb{C}}(A: \mathcal{V}^p \rightarrow \mathcal{V}^p)$  l'indice de  $A$ , c'est-à-dire le nombre  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } A - \dim_{\mathbb{C}} \text{coker } A$ .

#### 4.2 - Remarque

Pour  $E \subset \mathbb{R}^2$  notons  $\mathcal{B}(E)$  l'enveloppe convexe de  $E$ , et pour  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  posons  $Q^+(i, j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq i, y \geq j\}$  et  $Q^-(i, j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq i, y \leq j\}$ .

Si  $a = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i y_1^i \in K((x_1))[y_1] \setminus \{0\}$ , le convexe  $\pi_1(a) = \mathcal{B}(\cup_{0 \leq i \leq m} Q^+(i, \text{val}(a_i) - i))$  de  $\mathbb{R}^2$  est appelé le "polygone de Nexton de première espèce de  $a$ " et  $\mathcal{U}_1(a)$  est la liste des sommets de  $\pi_1(a)$ , c'est-à-dire des extrémités des intersections avec  $\pi_1(a)$  de ses droites d'appui de pente positive.

Si  $a = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i y_1^i \in K(x_1)[y_1] \setminus \{0\}$ , le convexe  $\pi_2(a) = \mathcal{B}(\cup_{0 \leq i \leq m} Q^-(i, \text{deg}(a_i) - i))$  est appelée le "polygone de Newton de seconde espèce de  $a$ " et  $\mathcal{U}_2(a)$  est la liste des sommets de  $\pi_2(a)$ , c'est-à-dire des extrémités des intersections avec  $\pi_2(a)$  de ses droites d'appui de pente négative.

L'application  $\pi_1(a) \rightarrow \mathcal{U}_1(a)$  (resp.  $\pi_2(a) \rightarrow \mathcal{U}_2(a)$ ) étant une isomorphisme du monoïde des polygones de Newton de première (resp.

seconde) espèce d'éléments non nuls de  $K((x_1))[y_1]$  (resp.  $K(x_1)[y_1]$ ), muni de la somme point sur point des parties non vides de  $R^2$ , sur le monoïde  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ), on peut appeler  $\nu_1(a)$  (resp.  $\nu_2(a)$ ) "le polygone formel de Newton de première (resp. seconde) espèce de  $a$ " pour  $a \in K((x_1))[y_1] \setminus \{0\}$  (resp.  $K(x_1)[y_1] \setminus \{0\}$ ).

Ce qui justifie la définition suivante :

#### 4.3 - Définition

Soient  $\mathcal{D} = K((x_1))[y_1; d]_{\frac{dx_1}{dx_1}}$  (resp.  $K(x_1)[y_1; d]_{\frac{dx_1}{dx_1}}$ ),  
 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ) et  $\nu = \nu_1$  (resp.  $\nu_2$ ).

Nous appellerons  $\mathcal{N}$  "le monoïde des polygones formels de Newton de première (resp. seconde) espèce", et l'application  $\nu : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}$  "le polygone formel de Newton de première (resp. seconde) espèce sur  $\mathcal{D}$ ".

La structure des monoïdes  $\mathcal{N}_1^{\circ}$  et  $\mathcal{N}_2^{\circ}$  est donnée par le résultat suivant :

#### 4.4 - Théorème de structure (des monoïdes des polygones formels de Newton non vides)

Le monoïde  $\mathcal{N}_1^{\circ}$  (resp.  $\mathcal{N}_2^{\circ}$ ) des polygones formels de Newton non vides de première (resp. seconde) espèce est un monoïde effectivement factoriel dont les éléments inversibles sont ses éléments de la forme  $((0, j))$  où  $j$  est un entier et dont une base  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) d'éléments irréductibles est constituée de  $(1, 0)$  et des listes  $((0, 0), (p, q))$  (resp.  $((0, 0), (p, -q))$ ) où  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs premiers entre eux.

Preuve. La commutativité du monoïde  $\mathcal{N}_1^{\circ}$  (resp.  $\mathcal{N}_2^{\circ}$ ) tient à ce que  $\text{val}(d_1(a)) \geq \text{val}(a) - 1$  (resp.  $\text{dég}(d_1(a)) \leq \text{dég}(a) - 1$ ) pour tout  $a$  de  $K((x_1))$  (resp.  $K(x_1)$ ).

Le calcul de la loi "produit-de-newton-1" de  $\mathcal{N}_1^p$  est donné par la figure 4.4.1. Celui de la loi "produit-de-newton-2" de  $\mathcal{N}_2^p$  s'en déduit en y remplaçant la condition " $p \leq q$ ", portant sur les pentes caractéristiques courantes respectives  $p$  et  $q$  des polygones de Newton  $P$  et  $Q$ , par la condition " $p = q$ ".

L'effectivité et la récursivité dans  $\mathcal{N}_1^{\circ}$  (resp.  $\mathcal{N}_2^{\circ}$ ) de  $\mathcal{N}_1^*$  (resp.  $\mathcal{N}_2^*$ ) sont évidentes puisque l'inverse de  $((0, j))$  est  $((0, -j))$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ .

Le fait que les éléments irréductibles proposés constituent une base  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) d'éléments irréductibles de  $\mathcal{N}_1^{\circ}$  (resp.  $\mathcal{N}_2^{\circ}$ ) et la calculabilité de la fonction de factorisation associée "Facteurs" sont établis par la figure 4.4.2.

C.Q.F.D.

```

produit-de-newton-1 (a,b) := { a et b étant des éléments de  $\mathcal{A}_1^*$  }
début Si a ou b est la liste vide alors retourner la liste vide ;
    t := b1 ;
    Pour i = 1 à longueur de a faire li := ai + t ; { initialisa-
                                                    { tion du ré-
                                                    { sultat }

    i := 1 ; k := 1 ;
    Faire { boucle sur les pentes caractéristiques du polygone }
        { de Newton P de sommets b }
    début Si i = longueur de b alors retourner l ;
        s := bi+1 ;
        p := (s2 - r2) / (s1 - r1) ; { pente caractéristique cou-
                                        { rante de P }
        m := longueur de l ; égal := faux ; t := lk
        faire { boucle sur les pentes caractéristiques de }
            { polygone de Newton Q de sommets a }
        début Si k = m alors retourner ;
            u := lk+1 ;
            q := (u2 - t2) / (u1 - t1) ; { pente caractéristique }
                                                { courante de Q }

            égal := p = q ;
            Si p q alors retourner ;
            k := k + 1 ; t := u
        fin { de la boucle sur les pentes caractéristiques de Q }
        t := (s1 - r1, s2 - r2) ;
        Si égal alors pour j = k + 1 à n faire lj := lj + t ;
        Sinon pour j = 0 à m - k faire lm+1-j := lm-j + t ;
        k := k + 1 ; i := i + 1 ; r := s
    fin { de la boucle sur les pentes caractéristiques de P }
fin

```

**Figure 4.4.1 : Calcul de la loi du monoïde des polygones formels de Newton de première espèce**

```
Facteurs (a) := {a étant un élément de  $\mathcal{A}_1^0$  ou de  $\mathcal{A}_2^0$  }
début m := longueur de a ; u := a1 ;
  l := ((0,u2)) ; {initialisation du résultat }
  Si u1 = 0 alors retourner l ; {cas où a est un élément
                                {inversible de  $\mathcal{A}_1^0$  }
  p := ((1,0)) ; {initialisation de la liste p des facteurs }
                {irréductibles de a }
  q := (u1) ; {initialisation de la liste des exposants des }
              {facteurs irréductibles de a }
  Si m > 1 alors pour i = 1 à m - 1 faire
  début {de la boucle sur les pentes caractéristiques du }
        {polygone de Newton de sommets a }
    v := ai+1 ;
    s := v2 - u2 ; t := v1 - u1 ;
    {s/t = pente caractéristique courante de P }
    r := pgcd de |s| et de t ;
    q := q v(r) ;
    p := p v((s/r,t/r)) ;
    u := v
  fin {de la boucle sur les pentes caractéristiques de P }
  l := l v p v q
fin
```

**Figure 4.4.2 : Calcul d'une fonction de factorisation du monoïde des polygones formels de Newton non vides de première ou de seconde espèce**

#### 4.5 - Exemple

Gardons les notations de 4.1 et posons :

$$K = \mathbb{Q}$$

$$a = x_1^{12}(1+x_1^2)y_1^6 + x_1^{11}(1+x_1^4)y_1^5 + x_1^7(1+x_1^3)y_1^4 + x_1^6(1+x_1^3)y_1^3 + x_1^3(1+x_1^5)y_1^2 + x_1^5(1+x_1^8)y_1 + 1 + x^6$$

Le polygone formel de Newton de première espèce de  $a$  est la liste :

$$\nu_1(a) = ((0,0), (2,1), (4,3), (6,6))$$

La factorisation de cette liste comme produit d'éléments de la base  $\mathcal{B}_1$  d'éléments irréductibles du monoïde  $\mathcal{N}_1^\circ$  s'écrit :

$$\nu_1(a) = ((0,0), (2,1)) * ((0,0), (1,1))^2 * ((0,0), (2,3))$$

Le polygone de Newton de première espèce  $\pi_1(a)$  de  $a$  dont  $\nu_1(a)$  est la liste des sommets est le convexe représenté sur la figure 4.5.1.

Le polygone formel de Newton de seconde espèce de  $a$  est la liste

$$\nu_2(a) = ((1,12), (5,10), (6,8))$$

La factorisation de cette liste comme produit d'éléments de la base  $\mathcal{B}_2$  d'éléments irréductibles du monoïde  $\mathcal{N}_2^\circ$  s'écrit :

$$\nu_2(a) = ((0,1))^{12} * ((1,0)) * ((0,0), (2,-1))^2 * ((0,0), (1,-2))$$

Le polygone de Newton de seconde espèce  $\pi_2(a)$  de  $a$  dont  $\nu_2(a)$  est la liste des sommets est le convexe représenté sur la figure 4.5.2.

#### 4.6 - Remarque

D'après le théorème précédent, tout élément de  $\mathcal{N}_1^\circ$  (resp.  $\mathcal{N}_2^\circ$ ) est régulier dans  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ). D'après la définition de la loi de  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ) (cf. 4.1),  $\nu_1$  (resp.  $\nu_2$ ) est donc un homomorphisme régulier de  $K((x_1))[y_1; d]_{\frac{d}{dx_1}}$  (resp.  $K(x_1)[y_1; d]_{\frac{d}{dx_1}}$ ) dans  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ).

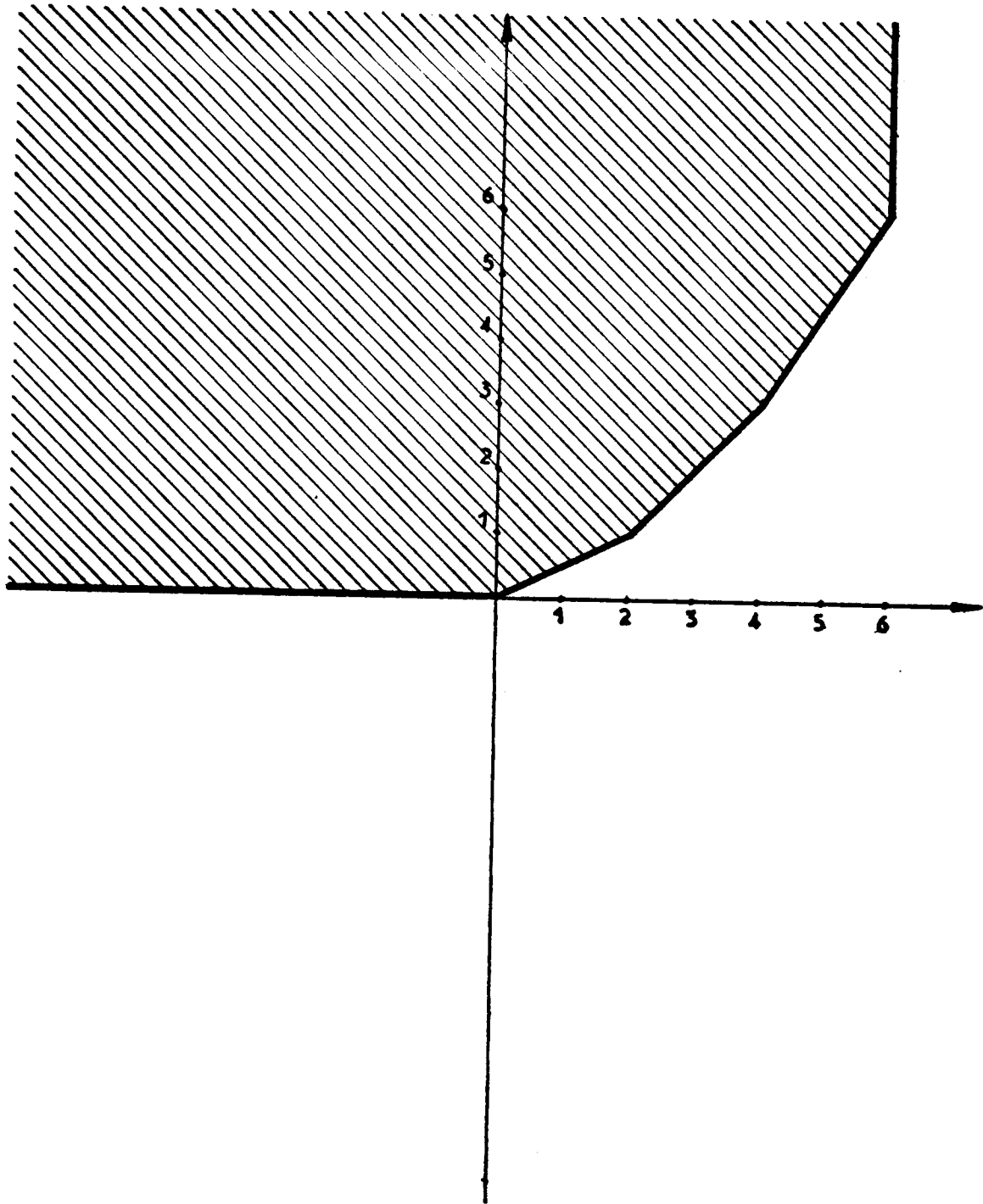


Figure 4.5.1 : Polygone de Newton de première espèce de  
l'opérateur différentiel formel a définie  
en 4.5

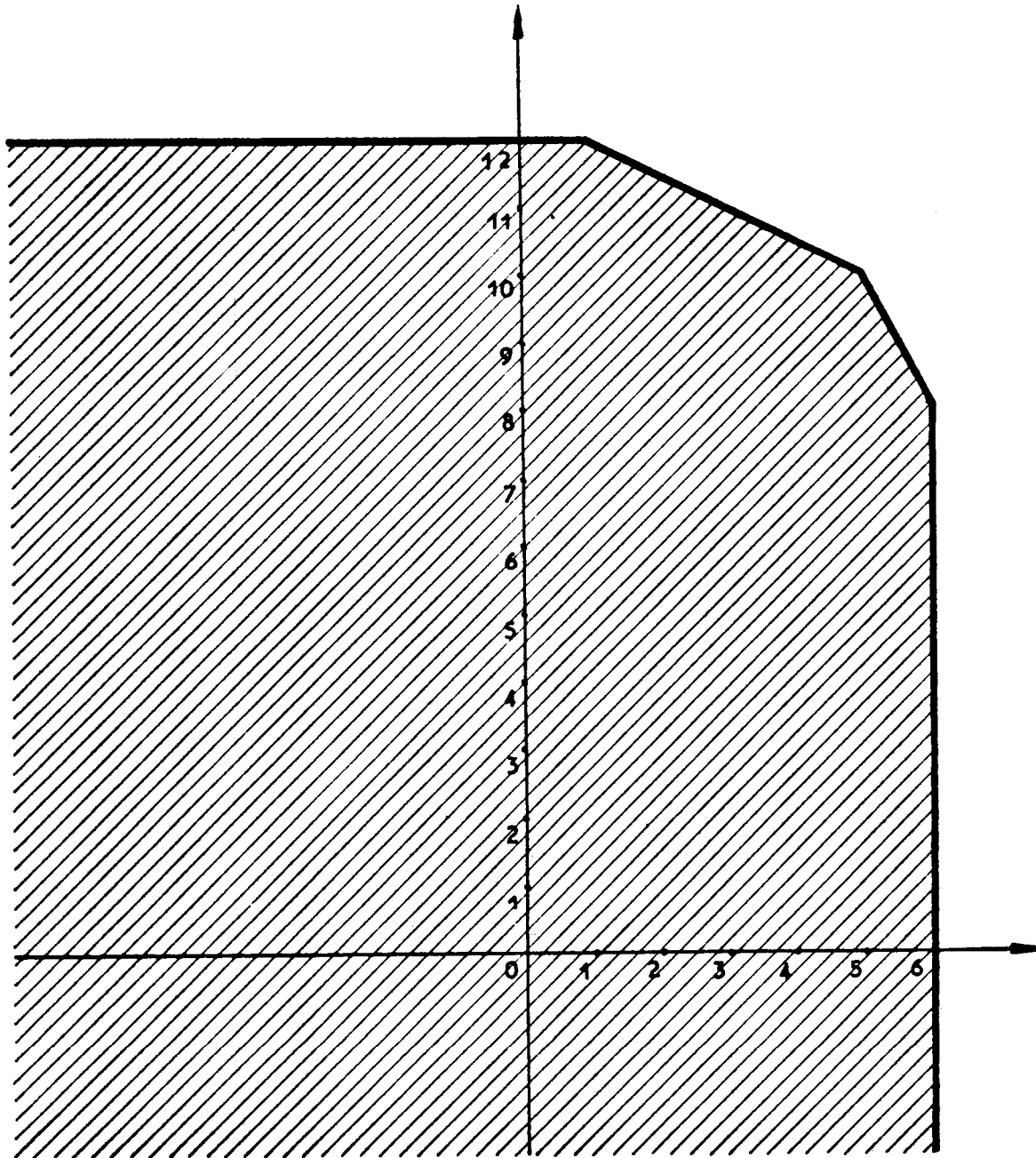


Figure 4.5.2 : Polygone de Newton de deuxième espèce de l'opérateur différentiel formel a définie en 4.5



#### 4.7 - Définition

Avec les notations de 4.3, nous appellerons "déterminant formel de Newton de première (resp. seconde) espèce sur  $\mathcal{D}$ " l'application  $\text{dét}_\nu$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{D})$  dans  $\mathcal{N}_\nu$ .

#### 4.8 - Théorème

Avec les notations précédentes, le déterminant  $\text{dét}_\nu$  est effectivement régulier.

Preuve. Elle résulte des théorèmes 4.4, 2.11 et 2.5.

#### 4.9 - Remarque

Sachant que  $\text{dét}_\nu$  est régulier, sa détermination régulière effective peut être calculée, non pas par l'algorithme de triangulation de Gauss-Euclide de la figure 2.5.1, mais par l'algorithme de simplification factorielle de la figure 2.72 comme le suggère le théorème 2.6.

D'autre part, si  $\mathring{\mathcal{D}} = K[[x_1]](y_1; d)_{\frac{d}{dx_1}}$  (resp.  $K[x_1](y_1; d)_{\frac{d}{dx_1}}$ ),  $\mathring{\mathcal{D}} = \nu_1 | \mathring{\mathcal{D}}$  (resp.  $\mathcal{D}_2$ ) et  $\mathring{\mathcal{N}} = \mathring{\mathcal{D}}(\mathring{\mathcal{D}})$ , on peut voir que le déterminant  $\text{dét}_\nu$  sur  $\mathring{\mathcal{D}}$  associé à  $\mathring{\mathcal{D}}$  est régulier, c'est-à-dire que  $\text{dét}_\nu$  est une application de  $\mathring{\mathcal{D}}$  sur  $\mathring{\mathcal{N}}$ .

#### 4.10 - Exemple

Reprenons les notations de l'exemple précédent et considérons la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(Q[x_1][y_1; d]_{\frac{d}{dx_1}})$  telle que

```

(c55) m;
(d55)/R/ matrix([(x114 + x112) y16 + (x115 + x111) y15 + (x110 + x17) y14
+ (x19 + x16) y13 + (x18 + x13) y12 + (x113 + x15) y1 + x16 + 1,
x12 y12 + x12 y1 + x12 ], [(x115 + x113) y17 + (x116 + 13 x114 + 12 x112) y16
+ (14 x115 + 11 x111 + x18) y15 + (10 x110 + 7 x17) y14
+ (9 x19 + 5 x16 + x14) y13 + (x114 + 7 x18 + x16 + 2 x13) y12
+ (12 x113 + x17 + 4 x15 + x1) y1 + 5 x16 - 1,
x13 y13 + 2 x12 y12 + (x13 + x12) y1 + x12 + 1])
(c56) det_newton_1(m);
(d56) [[0, 0], [2, 1], [5, 4], [7, 7]]
(c57) det_newton_2(m);
(d57) [[2, 13], [6, 11], [7, 9]]

```

Figure 4.10.1 : Calcul des determinants formels de newton de matrices d'operateurs differentiels formels à l'aide du système de calcul formel Macsyma.

$$A_{11} = a$$

$$A_{12} = x_1^2 y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2$$

$$A_{21} = (x_1^{15} + x_1^{13})y_1^7 + (x_1^{16} + 13x_1^{14} + 12x_1^{12})y_1^6 + (14x_1^{15} + 11x_1^{11} + x_1^8)y_1^5 \\ + (10x_1^{10} + 7x_1^7)y_1^4 + (9x_1^9 + 5x_1^4)y_1^3 + (x_1^{14} + 7x_1^8 + x_1^6 + 2x_1^3)y_1^2 \\ + (13x_1^{13} + x_1^7 + 4x_1^5 + 4x_1^5 + x_1)y_1 + 5x_1^6 - 1$$

$$A_{22} = x_1^3 y_1^3 + 2x_1^2 y_1^2 + (x_1^3 + x_1^2)y_1 + x_1^2 + 1$$

La mise en oeuvre informatique de l'algorithme de simplification factorielle donne, comme on peut le constater sur la figure 4.10.1 :

$$\text{dét}_{\mathcal{D}_1}(A) = ((0,0), (2,1), (5,4), (7,7))$$

$$\text{dét}_{\mathcal{D}_2}(A) : ((2,13), (6,11), (7,9))$$

En effet, posons :

$$b = x_1^2 y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2 \quad (\text{l'opérateur de Bessel d'indice 0})$$

$$c = x_1 y_1 - 1$$

$$e = x_1^2 y_1 + 1 \quad (\text{l'opérateur d'Euler})$$

On peut vérifier que :

$$A_{21} = c.a = c.A_{11} \text{ et } A_{22} = c.b + e = c.A_{12} + A_{22}$$

Par suite A peut s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \mathcal{D}_1(A) = \mathcal{D}_1(a) * \mathcal{D}_1(e) \text{ et } \mathcal{D}_2(A) = \mathcal{D}_2(a) * \mathcal{D}_2(e)$$

$$\text{Or } \mathcal{D}_1(e) = ((0,0), (1,1)) \text{ et } \mathcal{D}_2(A) = ((1,1)) = ((0,1)) * ((1,0)).$$

$$\text{D'autre part, } \mathcal{D}_1(a) = ((0,0), (2,1)) * ((0,0), (1,1))^2 * ((0,0), (2,3))$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2(a) = ((0,1))^2 * ((1,0)) * ((0,0), (2,-1))^2 * ((0,0), (1,-2))$$

d'après 4.5

D'où la conclusion : ;

$$\mathcal{D}_1(A) = ((0,0), (2,1)) * ((0,0), (1,1))^3 * ((0,0), (2,3)) =$$

$$((0,0), (2,1), (5,4), (7,7))$$

$$\mathcal{D}_2(A) = ((0,1))^3 * ((1,0))^2 * ((0,0), (2,-1))^2 * ((0,0), (1,-2)) =$$

$$((2,13), (6,11), (7,9))$$

#### 4.11 - Rappel [10]

Si  $a \in \mathbb{C}\{x_1\}[y_1; d] \setminus \{0\}$ , l'application  $a : \mathbb{C}\{x_1\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s$  (resp.  $a : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s \xrightarrow{d/dx_1} \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s$ ) admet un indice pour  $s \in [1, +\infty[$  (resp.  $s \in ]1, +\infty[$ ), et l'application  $s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(a : \mathbb{C}\{x_1\} \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\})$  (resp.  $s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(a : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s)$ ) est une fonction en escalier croissante, continue à droite sur  $[1, +\infty[$  et à gauche en  $+\infty$  (resp. continue à gauche sur  $]1, +\infty[$ ) et dont la liste des valeurs et des points de discontinuité sont "calculables", puisque ces valeurs et ces points de discontinuité "correspondent" respectivement aux ordonnées des sommets et aux pentes caractéristiques du polygone de Newton de première espèce de  $a$ .

De même, si  $a \in \mathbb{C}[x_1][y_1; d] \setminus \{0\}$ , l'application  $a : \mathbb{C}\{x_1\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s$  (resp.  $a : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s \xrightarrow{d/dx_1} \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s$ ) admet un indice pour  $s \in [-\infty, 1[$  (resp.  $s \in ]-\infty, 1[$ ), et l'application  $s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(a : \mathbb{C}\{x_1\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s)$  (resp.  $s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(a : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s)$ ) est une fonction en escalier croissante, continue à droite sur  $[-\infty, 1[$  (resp. à gauche sur  $]-\infty, 1[$ ) et à droite en  $-\infty$  et dont la liste des valeurs et des points de discontinuité sont "calculables", puisque ces valeurs et ces points de discontinuité "correspondent" respectivement aux ordonnées des sommets et aux pentes caractéristiques du polygone de Newton de seconde espèce de  $a$ .

Le théorème de régularité effective 4.8 et le théorème d'indice Gevrey entier [3], 3.3 permettent de généraliser ces résultats en ces termes :

#### 4.12 - Corollaire 1

Soient  $m$  un entier positif,  $\mathcal{D}_1 = \mathbb{C}\{x_1\}[y_1; d]_{d/dx_1}$  et  $\mathcal{D}_{-\infty} = \mathbb{C}[x_1][y_1; d]_{d/dx_1}$ .

(i) Pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$ , l'application

$A : \mathbb{C}\{x_1\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s^m$  (resp.  $A : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s$ ) admet un

indice pour  $s \in [1, +\infty[$  (resp.  $]1, +\infty[$ ) et l'application

$\chi_A^+ : s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(A : \mathbb{C}\{x_1\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s^m)$

(resp.  $\chi_A^+ : s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(A : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m)$ )

est une fonction en escalier croissante, continue à droite sur

$[1, +\infty[$  et à gauche en  $+\infty$  (resp. à gauche sur  $]1, +\infty[$ ).

$\chi_A^+$  et  $\bar{\chi}_A^+$  admettent les mêmes points et discontinuité et coïncident en dehors de ces points.

De plus, il existe des fonctions calculables  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  dans  $\bigcup_{k>0} \mathbb{Z}^k$  et  $\{\emptyset\} \cup (\bigcup_{k>0} \mathbb{Q}^k)$  telles que, pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$ ,  $f(A)$  soit la liste des valeurs des fonctions en escalier  $\chi_A^+$  et  $\bar{\chi}_A^+$  et  $g(A)$  la liste des points de discontinuité de  $\chi_A^+$  et  $\bar{\chi}_A^+$ , les éléments de ces listes étant ordonné de manière croissante.

(ii) De même, pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ , l'application

$A : \mathbb{C}\{x_1\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s^m$  (resp.  $A : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m$ ) admet un

indice pour  $s \in [1, +\infty[$  (resp.  $]1, +\infty[$ ) et l'application

$\bar{\chi}_A^- : s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(A : \mathbb{C}\{x_1\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s^m)$

(resp.  $\bar{\chi}_A^- : s \mapsto \chi_{\mathbb{C}}(A : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m \rightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m)$ )

est une fonction en escalier croissante, continue à droite sur

$[-\infty, 1[$  (resp. à gauche sur  $] -\infty, 1[$ ) et à droite en  $-\infty$ .

$\chi_A^-$  et  $\bar{\chi}_A^-$  admettent les mêmes points de discontinuité et coïncident en dehors de ces points.

De plus, il existe des fonctions calculables  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$  dans  $\bigcup_{k>0} \mathbb{Z}^k$  et  $\{\emptyset\} \cup (\bigcup_{k>0} \mathbb{Q}^k)$  telles que, pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ,  $f(A)$  soit la liste des valeurs des fonctions en escalier  $\chi_A^-$  et  $\bar{\chi}_A^-$  et  $g(A)$  la liste des points de discontinuité de  $\chi_A^-$  et  $\bar{\chi}_A^-$ , les éléments de ces listes étant ordonnés de manière croissante.

**Preuve.** L'existence de l'indice pour les applications

$A : \mathbb{C}\{x_1\}_s^m \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1\}_s^m$  et  $A : \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m \longrightarrow \mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m$  dans i) et ii) est une des assertions du théorème d'indice gevrey entier [3], 3.3.

La nature "en escalier" et les propriétés de monotonie et de croissance des fonctions  $\chi_A$  et  $\bar{\chi}_A$  dans (i) resp; (ii) résulte du fait que pour tout  $A \in \mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ), il existe des matrices quasi-élémentaires  $Q_1, \dots, Q_r$  dans  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) et dont l'élément diagonal différent de A appartient à  $\mathbb{C}\{x_1\}$  (resp.  $\mathbb{C}[x_1]$ ), telles que  $Q_1 \dots Q_r A$  soit triangulaire supérieure. L'existence de telles matrices quasi-élémentaires est elle-même une conséquence de la "triangularisation euclidienne" des matrices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{F}[y_1; d]_{\frac{d}{\alpha_1}})$  où  $\mathbb{F}$  est le corps des fractions de  $\mathbb{C}\{x_1\}$  (resp.  $\mathbb{C}[x_1]$ ).

Cet argument de "triangularisation" par des matrices quasi-élémentaires prouvent plus précisément

qu'il existe  $a \in \mathcal{D}_1$  (resp.  $\mathcal{D}_{-\infty}$ ) tel que  $\det_{\nu_1}(A) = \nu_1(a)$  (resp.  $\det_{\nu_2}(A) = \nu_2(a)$ ),  $\chi_A = \chi_a$  et  $\bar{\chi}_A = \bar{\chi}_a$ .

La calculabilité des fonctions  $f$  et  $g$  résulte alors du théorème 4.8. C.Q.F.D.

#### 4.13 - Exemple

En reprenant l'exemple de 4.10, le calcul de  $\det_{\nu_1}(A)$  prouve que la liste des valeurs et des points de discontinuité de  $\chi_A^+$  et  $\bar{\chi}_A^+$  sont respectivement  $(-7, -4, -1, 0)$  et  $(5/3, 2, 3)$ .

La figure 4.13.1. donne les graphes de  $\chi_A^+$  et de  $\bar{\chi}_A^+$ .

De même, le calcul de  $\det_{\nu_2}(A)$  prouve que la liste des valeurs et des points de discontinuité de  $\chi_A^-$  et  $\bar{\chi}_A^-$  sont respectivement

(-13, -11, -9) et (-1, 1/2).

La figure 4.13.2 donne les graphes de  $\chi_A^-$  et de  $\bar{\chi}_A^-$ .

#### 4.14 - Corollaire 2

Avec les notations de 4.12, il existe une fonction calculable  $g$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathbb{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathbb{D}_{-\infty})$ ) dans  $\{\emptyset\} \cup (\bigcup_{k>0} (]1, +\infty[ \cap \mathbb{Q})^k)$  (resp.  $\{\emptyset\} \cup (\bigcup_{k>0} \mathbb{Q}^k)$ ) telle que pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathbb{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathbb{D}_{-\infty})$ ) et pour tout  $f$  de  $\mathbb{C}[[x_1]]^m$  tel que  $A.f$  appartienne à  $\mathbb{C}\{x_1\}^m$  (resp.  $\mathbb{C}[x_1]^m$ ), alors soit  $f$  appartient à  $\mathbb{C}\{x_1\}^m$  (resp.  $\mathbb{C}[x_1]^m$ ), soit il existe  $s$  dans la liste  $g(A)$  (resp.  $g(A)$  augmentée de 1) tel que  $f$  appartienne à  $\mathbb{C}\{x_1\}_s^m$  sans appartenir à  $\mathbb{C}\{\{x_1\}\}_s^m$ .

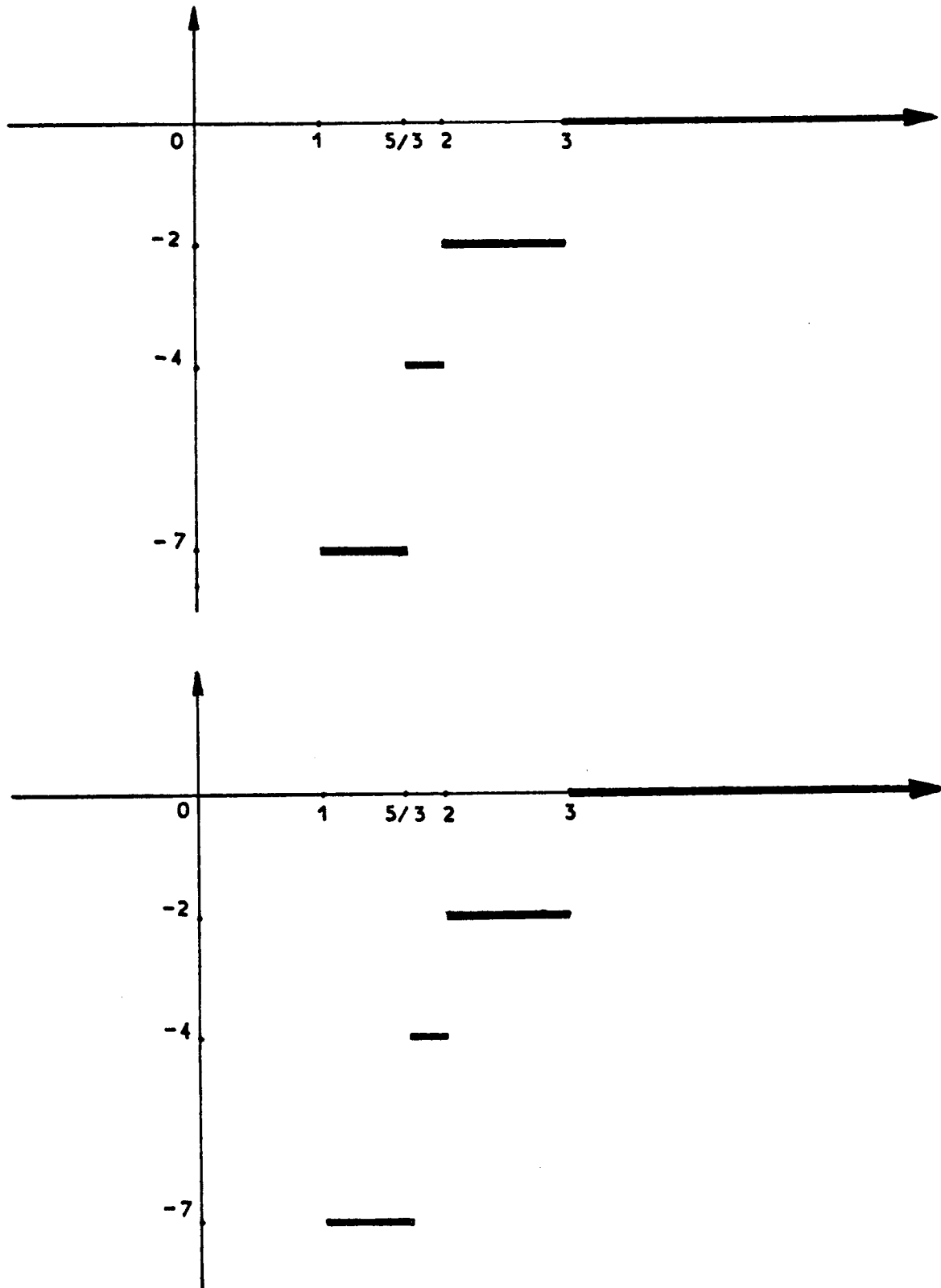


Figure 4.13.1 : Graphes des fonctions  $\chi_A^+$  et  $\bar{\chi}_A^+$  pour la matrice  
A d'opérateurs différentiels formels définie en  
4.10



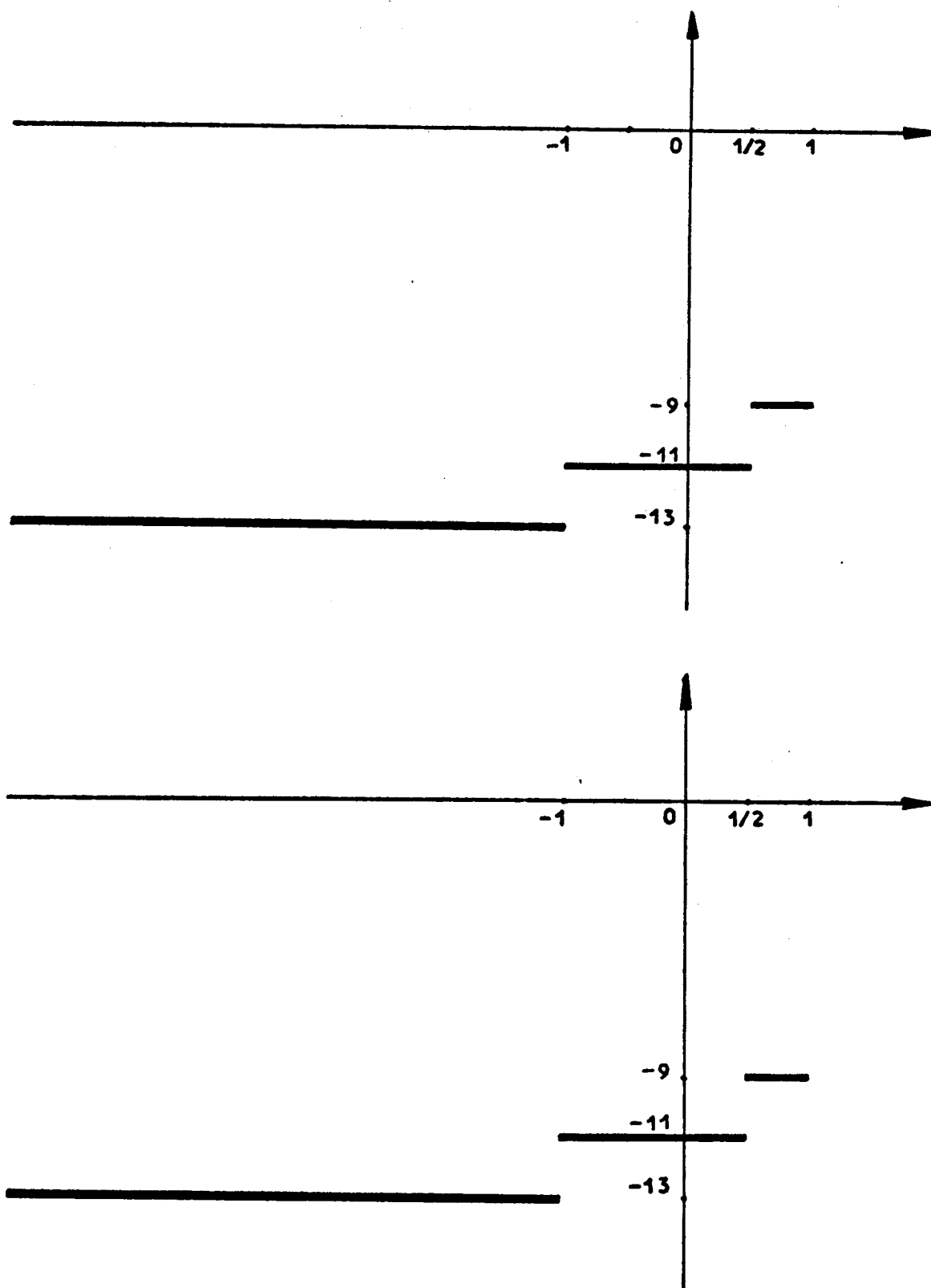


Figure 4.13.2 : Graphes des fonctions  $\chi_A^-$  et  $\bar{\chi}_A^-$  pour la matrice  
A d'opérateurs différentiels formels définie  
en 4.10

**Preuve.** Elle résulte du théorème de croissance [3],3.9 et de la calculabilité de la fonction  $g$  en corollaire 1 précédent.

**C.Q.F.D.**

#### 4.15 - Définition

Avec les notations de 4.12, nous dirons qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) est régulier (resp. fortement régulier) si tout élément  $f$  de  $C[[x_1]]^m$  tel que  $A.F$  appartienne à  $C\{x_1\}^m$  (resp.  $C[x_1]^m$ ) appartient à  $C\{x_1\}^m$  (resp.  $C[x_1]^m$ ).

Nous noterons  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) l'ensemble des éléments réguliers (reps. fortement réguliers) de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  ( $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ).

#### 4.16 - Corollaire 3

Avec les notations de 4.12,  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) est récursif dans  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ).

**Preuve.** Elle résulte du théorème 4.8 et du fait que  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) est l'ensemble des éléments  $A$  de  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^0(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) tels que la liste  $\text{dét } \nu_1(A)$  ne contienne qu'un élément (tels que les liste  $\text{dét } \nu_1(A)$  et  $\text{dét } \nu_2(A)$  soient égales et ne contiennent chacun qu'un élément). Cette caractérisation de  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_1)$  (resp.  $\mathcal{M}_m^{00}(\mathcal{D}_{-\infty})$ ) résulte du théorème de finitude [3],2.6 (resp. du théorème de régularité [3],3.8.).

**C.Q.F.D.**

- [1] - K. ADJAMAGBO, Déterminants sur des anneaux filtrés,  
C.R. Acad. Sc. Paris, t.293, série I, 1981, p. 147-149.
- [2] - K. ADJAMAGBO, Réseaux sur des anneaux filtrés,  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294, série I, 1982, p. 681.
- [3] - K. ADJAMAGBO, Théorèmes d'indice pour les systèmes généraux  
d'équations différentielles linéaires, dans Equations aux  
dérivées partielles hyperboliques et holomorphes,  
J. Vaillant ed., Hermann, Coll. Travaux en cours, Paris,  
1984, p. 134-165.
- [4] - K. ADJAMAGBO, Les déterminants sur un domaine de Ore,  
à paraître.
- [5] - E. ARTIN, Algèbre géométrique, Hermann, Paris, 1962.
- [6] - N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 1, Hermann, Paris, 1970.
- [7] - J. DIEUDONNE, Les déterminants sur un corps non commutatif,  
Bull. Soc. Math. Fr., 1943, p. 27-45.
- [8] - G. HUFFORD, On the characteristic matrix of a matrix of  
differential operators, J. Diff. Eq., 1, 1965, p. 27-38.
- [9] - MACSYMA REFERENCE MANUEL, The matlab group laboratory for  
computer science, M.I.T, version 10, vol. 1 and 2, 1983.
- [10] - J-P. RAMIS, Théorème d'indices Gevrey pour les équations  
différentielles ordinaires, Publication de l'IRMA  
Strasbourg, 118/P-69.