PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. F. ALLAIN

Caractérisation de mesures stochastiques à valeurs L_o

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 2, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1984___1_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CARACTERISATION DE MESURES STOCHASTIQUES A VALEURS L_o

M.F. ALLAIN
U.E.R Mathématiques & Informatique
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX FRANCE

I. INTRODUCTION

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, T un espace topologique, $\mathcal{G}$ une tribu prévisible sur $T \times \Omega$. Nous désignons par $SM(L_p(P))$ l'espace vectoriel des mesures stochastiques sur $(T \times \Omega, \mathcal{G})$ à valeurs dans $L_p(P)$, par $V_+(L_p(P))$ l'ensemble des éléments de $SM(L_p(P))$ à valeurs dans $L_p^+(P)$, par $V(L_p(P))$ l'ensemble $V_+(L_p(P)) - V_+(L_p(P))$, par $M(L_1(P))$ l'ensemble des éléments de $SM((L_1(P))$ de mesure de Doléans nulle ($V_+(L_p(P))$, $V(L_p(P))$ et $M(L_1(P))$ sont des espaces vectoriels).

On peut trouver dans [3] des conditions suffisantes pour qu'un élément de $SM(L_1(P))$ appartienne à $M(L_1(P)) + V(L_1(P))$.
Partant de l'hypothèse que $SM(L_1(P)) = M(L_1(P)) + V(L_1(P))$, nous prouvons ici (paragraphe 3) que $SM(L_o(P)) = M_{loc}(L_1(P)) + V(L_o(P))$ où $M_{loc}(L_1(P))$

est un sous-espace vectoriel de $SM(L_0(P))$ dont les éléments coïncident "localement" avec des éléments de $M(L_1(P))$ (définition 3.3).

Le paragraphe 4 concerne le cas particulier où T est dénombrable, sous l'hypothèse d'existence d'espérances conditionnelles généralisées, on précise la décomposition des éléments de $SM(L_0(P))$.

2. HYPOTHESES ET NOTATIONS

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et T un espace topologique. (Dans les situations classiques T est un ensemble d'indices, en général $\mathbb{N}^d$ ou $\mathbb{R}_+^d$). $\mathcal{A}$ désigne une famille de parties de T, on suppose que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre et que pour tout A élément de $\mathcal{A}$, il existe une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts et une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A_n \subseteq C_n \subseteq A$ et $\bigcup_n A_n = A$.

On se donne $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant :
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{A}$ $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_A$.

Soit $\mathcal{R} = \{A \times F,\ A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{G}_A\}$; $\mathcal{R}$ est une semi-algèbre de parties de $T \times \Omega$; les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés rectangles prévisibles. On note $\mathcal{R}'$ l'algèbre sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$; $\mathcal{P}$ est appelée tribu prévisible.

Un processus prévisible est une application $\mathcal{P}$-mesurable de $T \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

On désigne par $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles simples, et par $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles bornés. Pour des exemples d'une telle situation voir [1] et [2] .

Pour tout réel p positif ou nul, on pose $L_p(P) = L_p^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{G}, P)$, $L_p(P)$ est muni de la topologie usuelle et pour f élément de $L_p(P)$, on définit $||f||_p$ par

$$||f||_p = \begin{cases} (\int |f|^p \, dP)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p \\ \int |f|^p \, dP & \text{si } 0 < p < 1 \\ E^P(|f| \wedge 1) & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Une mesure stochastique μ sur $(T \times \Omega, \mathcal{P})$ à valeurs dans $L_p(P)$ est une mesure vectorielle vérifiant :

2.1 $\forall A \times F \in \mathcal{R}$ $\mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega)$.

Pour les propriétés des mesures stochastiques, voir [3] et [8].

3. CARACTERISATION DES MESURES STOCHASTIQUES A VALEURS DANS $L_o(P)$

Supposons que $T =]o,a] \subseteq \mathbb{R}_+$ et que $\mathcal{P}_a$ soit la tribu prévisible usuelle. (Si $(\mathcal{G}_t)_{t \in \overline{T}}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{R}_a = \{]s,t] \times F, \quad s,t \in \overline{T}, F \in \mathcal{G}_s\})$.

A tout processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ on peut associer une fonction μ, définie sur $\mathcal{R}'_a$, additive et telle que :

$\forall\ ]s,t] \times F \in \mathcal{R}_a \quad \mu(]s,t] \times F) = 1_F(X_t - X_s).$

Cette fonction μ n'admet pas nécessairement d'extension sur $\mathcal{P}_a$ qui soit une mesure stochastique.

Cependant, le théorème de Dellacherie-Mokobodzki ([5]) concernant la caractérisation des semi-martingales permet d'affirmer qu'un processus X continu à droite est une semi-martingale si et seulement si la fonction associée admet pour chaque $a \in \mathbb{R}_+^*$ une extension sur $\mathcal{P}_a$ qui soit une mesure stochastique à valeurs dans $L_o(P)$. (c.a.d. un élément de $SM(L_o(P))$.

Revenons au cas général, on sait déjà que si P et Q sont deux probabilités équivalentes sur $(\Omega, \mathcal{F})$, alors $SM(L_o(P)) = SM(L_o(Q))$ ([2]).
D'autre part, en utilisant un théorème de factorisation pour les mesures vectorielles ([4]) et ([10]), on peut prouver pour les éléments de $SM(L_o(P))$ des propriétés analogues à celles des semi-martingales.

Ces propriétés permettent d'introduire une notion généralisant la notion de martingale locale [5] ; on en déduit une caractérisation des mesures stochastiques à valeurs dans $L_o(P)$ quand $SM(L_1(P)) = M(L_1(P)) + V(L_1(P))$.

3.1 <u>Théorème de factorisation</u>

Soit $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable.
Soit μ une mesure vectorielle sur $(X, \mathcal{X})$ à valeurs dans $L_o(P)$.
Il existe alors une fonction positive g appartenant à $L_o(P)$ et une mesure vectorielle ν sur $(X, \mathcal{X})$ à valeurs dans $L_2(P)$ telles que :

$\forall\ D \in \mathcal{P} \quad \mu(D) = g\, \nu(D).$

Remarque :

Soit μ élément de $V_+(L_o(P))$, $\mu(T \times \Omega)$ appartient à $L_o(P)$ il est facile de vérifier que $\frac{1}{1+\mu(T \times \Omega)}\mu$ appartient à $V_+(L_1(P))$.

3.2 Proposition

Soit μ définie sur $\mathcal{L}'$, à valeurs dans $L_o(P)$, additive et vérifiant 2.1.

Dans ce qui suit, nous dirons que μ appartient à $SM(L_1(\cdot))$ si μ admet une extension sur $\mathcal{P}$ qui appartient à $SM(L_1(\cdot))$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

3.2.1 μ appartient à $SM(L_o(P))$.

3.2.2 Il existe une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{G})$ équivalente à P, de densité bornée telle que μ appartienne à $SM(L_1(Q))$.

3.2.3 Il existe une partition dénombrable de Ω par des éléments de $\mathcal{G}$ telle que : pour tout élément H de cette partition $1_H\mu$ appartient à $SM(L_1(P))$.

3.2.4 Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{G})$ et il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs de somme égale à 1 tels que : $Q = \sum_n a_n P_n$, est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{G})$ équivalente à P et, pour chaque n, μ appartient à $SM(L_1(P_n))$.

Démonstration :

3.2.1 $\Longrightarrow$ 3.2.2

Soient g et ν donnés par le théorème 3.1 et soit Q probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ telle que $dQ = c(1+g)^{-1}\, dP$ (c constante de normalisation).
On a alors : $[E^Q(|\mu(D)|)]^2 \leq c^2 E^P((\nu(D))^2) \quad \forall D \in \mathcal{R}'$ d'où on déduit 3.2.2.

3.2.2 $\Longrightarrow$ 3.2.3

Soit $f = dQ/dP$, $f > 0$ (Q étant équivalente à P).
Soit alors $H_n = \{\omega : \frac{1}{n} > f \geq \frac{1}{n+1}\}$, on a : $\forall D \in \mathcal{R}'$

$$E^P(1_{H_n} |\mu(D)|) \leq (n+1)\, E^P(1_{H_n} f|\mu(D)|) \leq n+1 \;\; E^Q(|\mu(D)|)$$

d'où 3.2.3.

3.2.3 $\Longrightarrow$ 3.2.4

Soit $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω vérifiant 3.2.3.
On peut supposer que $P(H_n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit alors $P_n : a_n\, dP_n = 1_{H_n}\, dP$ ($a_n = P(H_n)$) . On a :
$E^{P_n}(|\mu(D)|) = (1/a_n)\, E^P(1_{H_n} |\mu(D)|) \quad \forall D \in \mathcal{R}'$ d'où 3.2.4.

3.2.4 $\Longrightarrow$ 3.2.1

(Propositions 3.8 et 3.9 de [2]).

3.3 Définition

Nous désignons par $M_{loc}(L_1(P))$ l'ensemble des fonctions additives, définies sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_o(P)$, vérifiant 2.1 et :

3.3.1 Il existe une partition dénombrable : $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de Ω par des éléments de $\mathcal{H}$ et il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $M(L_1(P))$:

$$1_{H_n} \mu(A \times \Omega) = 1_{H_n} \mu_n(A \times \Omega) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Une partition dénombrable de Ω, par des éléments de $\mathcal{H}$, pour laquelle il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $M(L_1(P))$ vérifiant 3.3.1 sera appelée partition localisante.

Il est évident que $M_{1oc}(L_1(P))$ contient $M(L_1(P))$. De plus, la proposition 3.2 implique que pour tout élément μ de $SM(L_o(P))$, il existe une partition de Ω par des éléments de $\mathcal{H}$ telle que $1_{H_n}\mu$ appartienne à $SM(L_1(P))$, en outre, si μ appartient à $V(L_o(P))$ alors $1_{H_n}\mu$ appartient à $V(L_1(P))$.

Enfin, si $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale locale, il est facile de vérifier que la fonction μ associée à M et définie sur $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ par $\mu(]s,t] \times F) = 1_F(M_t - M_s)$ (voir début de ce paragraphe) appartient à $M_{1oc}(L_1(P))$ quand M est localement de carré intégrable.

3.4 <u>Proposition</u>

Soit μ un élément de $M_{1oc}(L_1(P))$ alors μ admet une extension sur $\mathcal{P}$ qui appartient à $SM(L_o(P))$.

Démonstration :

Si μ_n appartient à $M(L_1(P))$ alors, $1_{H_n} \mu_n$ appartient à $SM(L_1(P))$. 3.3.1 implique alors que μ vérifie 3.2.3 et par conséquent 3.2.1.

3.5 Proposition

Soit μ un élément de $M_{loc}(L_1(P))$ alors :

3.5.1 Si $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition localisante de μ et si $\{H'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition mesurable de Ω telle que : $\forall k \ \exists n : H'_k \subseteq H_n$ alors $\{H'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition localisante de μ .

3.5.2 Si $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{H'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux partitions localisantes de μ alors la partition : $\{H_n \cap H'_m\}_{n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N}}$ est une partition localisante de μ .

Démonstration :

3.5.1. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $M(L_1(P))$ associée à $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, alors :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1_{H_n} \mu = 1_{H_n} \mu_n$

$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n : 1_{H'_k}\mu = 1_{H'_k} 1_{H_n} \mu = 1_{H'_k} 1_{H_n} \mu_n = 1_{H'_k} \mu_n$

en conséquence $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite localisante de μ .

3.5.2 La partition $\{(H_n \cap H_m)_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}\}$ vérifie :

$\forall (k,m) \quad H_k \cap H'_m \subseteq H_k$. 3.5.1 implique que c'est une partition localisant

Notons que

$$\forall\ (k,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad 1_{H_k}\, 1_{H'_m}\, \mu = 1_{H_k}\, 1_{H'_m}\, \mu'_m = 1_{H'_m}\, 1_{H_k}\, \mu_k$$

$$= 1_{H_k}\, 1_{H'_m}\left(\frac{1}{2}(\mu'_m + \mu_k)\right)$$

où $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les suites d'éléments de $M(L_1(P))$ correspondant à $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{H'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement.

3.6. <u>Proposition</u>

$M_{loc}(L_1(P))$ est un espace vectoriel.

<u>Démonstration</u> :

Il est évident que $M_{loc}(P))$ est stable pour la multiplication par les scalaires.

Soient μ et ν deux éléments de $M_{loc}(L_1(P))$, soient $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{H'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ les partitions localisantes correspondantes. La partition $\{H_n \cap H'_m\}_{n \in \mathbb{N},\, m \in N}$ est d'après 3.5.1 une partition localisante pour μ et ν . Il est facile de vérifier que c'est également une partition localisante pour $\mu + \nu$.

3.7 <u>Théorème</u>

On suppose que $SM(L_1(P)) = M(L_1(P)) + V(L_1(P))$

Alors $SM(L_o(P)) = M_{loc}(L_1(P)) + V(L_o(P))$.

Démonstration :

La proposition 3.4 implique que $M_{loc}(L_1(P)) \subseteq SM(L_o(P))$. Il suffit de prouver que :

$$\forall \mu \in SM(L_o(P)) \quad \exists \mu_1 \in M_{loc}(L_1(P)) \quad \text{et} \quad \exists \mu_2 \in V(L_o(P)) :$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Soit donc μ élément de $SM(L_o(P))$, alors μ vérifie 3.2.3. Soit $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la partition de Ω. $1_{H_n}\mu$ appartient à $SM(L_1(P))$ alors :

$$\exists \mu_1^n \in M(L_1(P)) \; , \; \exists \mu_2^n \in V(L_1(P)) :$$

$$1_{H_n}\mu = \mu_1^n + \mu_2^n.$$

Par définition $\mu_2^n = \nu_1^n - \nu_2^n \qquad \nu_i^n \in V_+(L_1(P)) \quad i = 1,2.$

Soit alors pour $D \in \mathcal{R}'$ $\nu_i(D) = \sum_n 1_{H_n} \nu_i^n(D)$. On a : $1_{H_n} \nu_i = 1_{H_n} \nu_i^n$;

3.2.3 implique que ν_i appartient à $SM(L_o(P))$, ν_i^n étant positive, il en est de même pour ν_i, en conséquence ν_i appartient à $V_+(L_o(P))$.

Soient $\mu_2 = \nu_1 - \nu_2$ et $\mu_1 = \mu - \mu_2$. On a :

$1_{H_n} \mu_1 = 1_{H_n}(\mu-\mu_2) = 1_{H_n} \mu_1^n$ mais μ_1^n appartient à $M(L_1(P))$ donc μ_1 appartient à $M_{loc}(L_1(P))$.

4. QUASI-MARTINGALES GENERALISEES - CAS DISCRET

Soit $T = \mathbb{N}$ et $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale locale ; sous les hypothèses habituelles, on sait que X_n admet une espérance conditionnelle

généralisée par rapport à $\mathcal{A}_n$ et que $E(X_{n+1}/\mathcal{A}_n)$ est finie P.ps. ([5]).
Nous considérons ici un ensemble T dénombrable, non ordonné ; et pour $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$, nous désignons par $\mathcal{P}$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}_o = \{\{t\} \times F,\ t \in T,\ F \in \mathcal{G}_t\}$ (ici $\mathcal{R} = \{A \times F,\ A = \bigcup_{i \in I} \{t_i\},\ F \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_{t_i}\}$.

4.1 <u>Définition</u>

On appelle quasi-martingale généralisée un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ vérifiant :

4.1.1 $\forall t$ X_t possède une espérance conditionnelle généralisée par rapport à $\mathcal{G}_t$, qui est finie P.p.s.

4.1.2 $\sum_{t \in T} | E(X_t/\mathcal{G}_t) | < +\infty$ P.p.s.

4.2 <u>Proposition</u>

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, soit X une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

4.2.1 X admet une espérance conditionnelle généralisée par rapport à $\mathcal{G}$ et qui est finie P.p.s.

4.2.2 Il existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$ telle que : $\bigcup_n A_n = \Omega$ et $\forall n$ $\int_{A_n} |X| dP < +\infty$

4.2.3 La mesure $|X|.dP$ est σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

4.3 Théorème

Soit T dénombrable et soit $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{S}$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}_o = \{\{t\} \times F, t \in T, F \in \mathcal{G}_t\}$.

Soit μ un élément de $SM(L_o(P))$. On suppose que : le processus $(\mu(\{t\}) \times \Omega))_{t \in T}$ est une quasi-martingale généralisée.

Alors :

4.3.1 Il existe μ_2 élément de $V(L_o(P))$ tel que : $\mu_2(\{t\} \times \Omega)$ soit $\mathcal{G}_t$-mesurable $(\mu_2(\{t\} \times \Omega) = E(\mu(\{t\} \times \Omega))/\mathcal{G}_t))$.

4.3.2 Il existe $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de l'anneau engendré par $\mathcal{R}_o$ telle que : $H_k \subseteq H_{k+1}$ et $\bigcup_k H_k = T \times \Omega$ et pour tout k, la mesure $\mu_k : \mu_k(D) = (\mu-\mu_2)(D \cap H_k)$ appartient à $M(L_1(P))$.

4.3.3 Il existe deux mesures positives σ-finies sur $(T \times \Omega, \mathcal{S})$:

$$E(\mu(D \cap H_k)) = m^1(D \cap H_k) - m^2(D \cap H_k) \quad \forall D \in \mathcal{S}$$

et si $E(\sum_{t \in T} (E(\mu(\{t\} \times \Omega)/\mathcal{G}_t)^+) < +\infty$ ou $E(\sum_{t \in T} (E(\mu(\{t\} \times \Omega)/\mathcal{G}_t)^-) < +\infty$

$m = m^1 - m^2$ est une mesure signée σ-finie.

Démonstration :

$$\text{Soit} \begin{cases} V_t^+ = E(\mu(\{t\} \times \Omega)/\mathcal{G}_t)^+ \\ V_t^- = E(\mu(\{t\} \times \Omega)/\mathcal{G}_t)^- \end{cases}$$

V_t^+ et V_t^- sont bien définis et finis P.p.s d'après 4.1.2.

Il existe alors deux éléments de $V_+(L_o(P))$ que nous notons ν^+ et ν^- vérifiant, $\forall$ $\{t\} \times F \in \mathcal{R}_o$:

$$\begin{cases} \nu^+(\{t\} \times F) = 1_F \, V_t^+ \\ \nu^-(\{t\} \times F) = 1_F \, V_t^- \end{cases}$$

(utiliser l'hypothèse 4.1.2, la positivité de V^+ et V^- et le corollaire 6.3 de [2]).

On a donc prouvé 4.3.1, avec $\mu_2 = \nu^+ - \nu^-$.

Nous prouvons maintenant 4.3.2.

L'hypothèse 4.1.1 est équivalente à :

$$\forall\, t \in T \quad \exists\, (F_n(t))_{n \in \mathbb{N}},\ F_n(t) \in \mathcal{G}_t,\ F_n(t) \uparrow \Omega :$$

$$\int 1_{F_n(t)} \, |\mu(\{t\} \times \Omega)| \, dP < +\infty.$$

Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-ensembles finis de T telle que : $\bigcup\limits_k T_k = T$ et soit H_k :

$$H_k = \sum_{t \in T_k} \{t\} \times F_k(t).$$

H_k appartient à l'anneau engendré par $\mathcal{R}_o$ et, pour D élément de $\mathcal{R}$ ' on a :

$$* \quad D = \bigcup_{k=1}^{r} A_k \times F_k = \bigcup_{i \in I} \{a_i\} \times F_{a_i} \qquad F_{a_i} \in \mathcal{G}_{a_i}$$

$$* \quad \mu(D \cap H_k) = \sum_{t \in T_k} 1_{F_t} \, 1_{F_k(t)} \mu(\{t\} \times \Omega)$$

Alors

$$* \quad |\mu(D \cap H_k)| \leq \sum_{t \in T_k} 1_{F_k}(t) |\mu(\{t\} \times \Omega)| \in L_1(P)$$

$$* \quad |\mu(A_n \times F_n) \cap H_k)| \leq 1_{F_n} \sum_{t \in A_n} 1_{F_n}(t) |\mu(\{t\} \times \Omega)|$$

ce qui implique que l'application μ_k :

$\mu_k(D) = \mu(D \cap H_k)$ appartient à $SM(L_1(P))$.

. Par le même raisonnement, on vérifie que μ_k^2 :

$\mu_k^2(D) = \mu^2(D \cap H_k)$ appartient à $V(L_1(P))$.

Soit alors $\mu^1 = \mu - \mu^2$, μ^1 appartient à $SM(L_o(P))$ et $\mu_k^1 = \mu_k - \mu_k^2$ appartient à $SM(L_1(P))$ mais $\forall\, t \in T$, $\forall\, F \in \mathcal{G}_t$, on a :

$$\int 1_F \; 1_{F_k}(t) \; \mu(\{t\} \times \Omega) \; dP = \int 1_F \; 1_{F_k}(t) \; \mathbb{E}(\mu(\{t\} \times \Omega)/\mathcal{G}_t) \; dP$$

$$\Longrightarrow \forall\, t \in T \quad \forall\, F \in \mathcal{G}_t \quad E(1_F \; \mu_k^1(\{t\} \times \Omega)) = 0.$$

d'où 4.3.2 .

Pour prouver 4.3.3, il suffit de remarquer que m^+ et m^- définies par : $m^+(D) = E(\nu^+(D))$ et $m^-(D) = E(\nu^-(D))$ sont des mesures σ-finies.

4.4 <u>Remarque</u> :

Les processus V^+ et V^- sont prévisibles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIN M.F. : Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable.
Séminaire de Rennes (1979).

[2] ALLAIN M.F. : Semi-martingales indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$ et formule de Itô. Cas continu.
Z.W. 65 p. 421-444 (1984).

[3] ALLAIN M.F. : Mesures stochastiques et décomposition de Doob.
Séminaire de Rennes (1983).

[4] BICHTELER K. : Stochastic integration and L_p-theory of semi-martingales.
Annals of Proba. Vol 9 n°1 p.49-89 (1981).

[5] DELLACHERIE C. et MEYER P.A. : Probabilités et potentiel. Chapîtres V à VIII.
Théorie des martingales. Hermann (1980).

[6] HÜRZELER H. : Quasi-martingale und stochastische integratoren mit halbgeordneten index mengen.
Diss. ENTHNR 7088 Zürich (1982).

[7] MERZBACH E. : Processus stochastiques à indices partiellement ordonnés.
Rapport interne n°55 Ecole Polytechnique.

[8] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. : Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L_o.
Z.W. 40 p.101-114 (1979).

[9] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. : Stochastic integration.
New-York Academic Press (1980).

[10] TALAGRAND M. : Les mesures vectorielles à valeurs dans L_o sont bornées
Annales Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série t. 14
p. 445-452 (1981).