PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MOHAMMED TRAKI

Existence de solutions faibles d'un nouveau type d'équations différentielles stochastiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___1_A6_0>

EXISTENCE DE SOLUTIONS FAIBLES D'UN NOUVEAU TYPE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Mohammed TRAKI
Laboratoire de Probabilités
U.E.R. Mathématiques & Informatique
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu 35042 RENNES CEDEX

On considère ici l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = F_t(Z,X)dY_t + dZ_t[\mathcal{C}(Z,X)], \\ X_o = x_o, \\ Z_o = o, \end{cases}$$

où Y est une semimartingale donnée de dimension finie, $Z[\mathcal{C}(Z,X)]$ symbolise une semimartingale de "caractéristiques locales" (c.l.) $\mathcal{C}(Z,X)$ dépendant de Z et de X, et où le coefficient F dépend de manière prévisible des trajectoires de Z et de X, et on établit l'existence des "solutions faibles" de cette équation sous des hypothèses sur F et $\mathcal{C}$ de régularité et de continuité mixte pour la topologie de Skorokhod et la topologie uniforme sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R}^d)$ (d dimension de Z et de X).

§1 - INTRODUCTION.

On considère l'équation différentielle stochastique (e.d.s.) :

$$(1.1)\quad \begin{cases} dX_t = F_t(Z,X)\ dY_t + dZ_t[\mathcal{C}(Z,X)], \\ X_o = x_o, \\ Z_o = o, \end{cases}$$

où Y est une semimartingale m-dimensionnelle donnée nulle en 0, $Z[\mathcal{C}(Z,X)]$ symbolise une semimartingale d-dimensionnelle de "c.l." $\mathcal{C}(Z,X)$ dépendant de Z et de X solution-processus d-dimensionnelle, x_o est une variable aléatoire (v.a.), et où le coefficient $F = (F^{ij})_{i\leq d, j\leq m}$ est prévisible matriciel dépendant des trajectoires de Z et de X.

Une telle équation a été étudiée dans [11] du point de vue des solutions fortes ou solutions-processus. Elle généralise les e.d.s. ordinaires correspondant au cas où $Z = 0$ et le problème de martingales étudié dans [4], [15] et [16] et correspondant au cas où $F = 0$.

Le cas $Z = 0$ a été étudié par exemple dans [9], [10] et [13] où les auteurs ont fait intervenir l'espace de Skorokhod $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ et un autre espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{\mathfrak{F}}},\underline{\mathfrak{F}},P)$, et ont établi l'existence des "solutions faibles" ou "solutions-mesure" sur $\Omega\times\mathbb{D}$ sous des hypothèses sur F de bornitude et de continuité pour la topologie uniforme sur l'espace $\mathbb{D}$.

Dans [15] (ou [16]), on a établi sur $\Omega\times\mathbb{D}$ l'existence de solutions du problème de martingales correspondant à $F = 0$ sous des hypothèses sur $\mathcal{C}$ de régularité et de continuité mixte pour la topologie de Skorokhod $\mathfrak{T}_s$ et la topologie uniforme sur l'espace $\mathbb{D}$.

Après une étude succin te montrant qu'on peut ramener dans certains cas l'e.d.s.(1.1) au problème de martingales de [15], nous généralisons ici ces travaux en montrant l'existence des "solutions faibles" de (1.1) sur $\Omega\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ sous des hypothèses sur F et $\mathcal{C}$ de régularité et de continuité mixte pour la topologie $\mathfrak{T}_s$ et la topologie uniforme sur $\mathbb{D}$.

L'existence de ces "solutions faibles" est établie en les construisant comme limites de suites relativement compactes de solutions approchées comme dans les articles [9] et [15] dont nous adaptons les techniques à notre situation.

L'étude des "solutions faibles" de (1.1) étant complexe dans le cas général, pour simplifier le problème et pour pouvoir l'aborder, nous avons choisi d'étudier le cas où Z est "quasi-continu à gauche", et où Y et Z sont "orthogonaux".

§2 - NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Nous allons reprendre partiellement les notations déjà utilisées dans [15] et les compléter. Nous nous plaçons dans les conditions habituelles et utilisons les notations usuelles (voir [5] et [12]). Soit $(\Omega,\underline{\underline{\mathfrak{F}}},\underline{\mathfrak{F}},P)$ un espace probabilisé filtré. Soit $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R}^d)$ l'espace de Skorokhod des fonctions d-dimensionelles c.a.d.l.a.g. définies sur $\mathbb{R}_+$, muni des tribus $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_t = \sigma(x(s), s\leq t)$ et $\underline{\underline{\mathbb{D}}} = \bigvee_{(t)} \underline{\underline{\mathbb{D}}}_t$. Dans toute la suite, $\mathbb{D}$ peut être noté $\mathbb{D}^x$ ou $\mathbb{D}^z$ ou $\mathbb{D}^v$ suivant la variable que l'on considère, avec une notation analogue pour les tribus. On note $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ la tribu prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$, et $\underline{\underline{\mathcal{V}}}_o^+$ l'espace des processus croissants adaptés tels que $A_t < \infty$ P-p.s. pour tout t et $A_o = 0$. On note $(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^q(\Omega)$ l'ensemble des triplets $\mathcal{C} = (B,C,\nu)$ définis sur Ω qui a priori peuvent être les c.l. d'une semimartingale q-dimensionnelle, i.e. des triplets constitués de :

- un processus q-dimensionnel prévisible à variation finie : $B = (B^i)_{i\leq q}$, avec $B_o = 0$;
- un processus adapté continu matriciel $C = (C^{ij})_{i,j\leq q}$ avec $C_o = 0$ et tel que $C_t - C_s$ soit une matrice $q\times q$ symétrique non négative si $s\leq t$;
- une mesure aléatoire (m.a.) prévisible positive ν sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^q$ telle que
  $\nu(\omega;\{0\}\times\mathbb{R}^q) = \nu(\omega;\mathbb{R}_+\times\{0\}) = 0$;
  $\nu(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}^q) \leq 1$, et $\int_{\mathbb{R}^q} \nu(\omega;\{t\}\times d\xi)\,\xi\, 1_{\{|\xi|\leq 1\}} = \Delta B_t(\omega)$ identiquement
  $\int_{\mathbb{R}^q} \nu(\omega;[o,t]\times d\xi)(|\xi|^2\wedge 1) < \infty$.

On note de même $(d\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^q(\Omega)$ l'ensemble des triplets $\mathfrak{D} = (b,c,N)$ définis sur Ω et constitués de :

- un processus q-dimensionnel prévisible : $b = (b^i)_{i\leq q}$;
- un processus $q\times q$-matriciel prévisible symétrique non négatif : $c = (c^{ij})_{i,j\leq q}$;
- une mesure de transition positive prévisible $N_t(\omega;d\xi)$ sur $\mathbb{R}^q$ qui intégre $|\xi|^2\wedge 1$.

Si $\xi,\xi'\in\mathbb{R}^q$, on note $<\xi|\xi'>$ leur produit scalaire. Si h est une $p\times q$-matrice, on note $|h|$ sa norme comme opérateur de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$|h_t| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^q,\ |\xi|\leq 1} |h_t\,\xi| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^q,\ |\xi|\leq 1} \Big(\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{q} h_t^{jk}\,\xi^k\Big)^2\Big)^{1/2}.$$

Si T est un t.a. et U un processus, on note U^T le processus arrêté en T : $U^T_t = U_{T\wedge t}$; de même si $\mathscr{C}\in(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^q(\Omega)$, on note $\mathscr{C}^T$ le triplet arrêté en T : $\mathscr{C}^T = (B^T, C^T, \nu^T = 1_{[\![0,T]\!]\times\mathbb{R}^q}\cdot\nu)$. Si U et V sont deux processus, on note $U\cdot V$ l'intégrale (de Stieltjes ou stochastique) de U par rapport à V définie par : $U\cdot V_t = \int_0^t U_s\,dV_s$. Si $G = (G^{ij})_{i\leq p,j\leq q}$ est un processus prévisible matriciel et V une semimartingale q-dimensionnelle, l'intégrale stochastique $G\cdot V$ est définie par $(G\cdot V)^i = \sum_{j\leq q} G^{ij}\cdot V^j$.

Si U est un processus cadlag, on note μ^U la m.a. sur $\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^q-\{0\})$ associée aux sauts de U par :

$$\mu^U(dt,d\xi) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta U_s\neq 0\}}\ \varepsilon_{(s,\Delta U_s)}(dt,d\xi).$$

Si W est un processus défini sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^q$, on note $W*\mu$ l'intégrale stochastique (i.s.) de W par rapport à la m.a. μ définie par :

$$W*\mu_t = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^q} W(s,\xi)\,\mu(ds,d\xi).$$

Enfin si f est une fonction définie sur un espace E, on note systématiquement par la même lettre f son prolongement naturel à tout espace-produit de la forme $E \times E'$.

On pose :

$$\begin{cases} \overline{\Omega} = \Omega \times \mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x \,;\; \overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}} = \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^x \,;\; \overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}}_t = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{\mathfrak{F}}}_s \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z{}_s \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^x{}_s \,; \\ X_s(\omega,z,x) = X_s(x) = x(s) \;;\; Z_s(\omega,z,x) = Z_s(z) = z(s). \end{cases}$$

Les <u>données</u> de notre équation (1.1) sont :

- une semimartingale Y m-dimensionnelle sur $(\Omega,\underline{\underline{\mathfrak{F}}},\mathfrak{F},P)$ telle que $Y_o = 0$ et de c.l. $\mathscr{C}^\circ = (B^\circ,C^\circ,\nu^\circ)$;
- un processus matriciel prévisible $F = (F^{ij})_{i\leq d,j\leq m}$ défini sur $\overline{\Omega}$;
- un élément $\mathscr{C}$ de $(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^d\,(\overline{\Omega})$;
- une v.a. x_o $\underline{\underline{\mathfrak{F}}}_o$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. ■

Définissons maintenant les solutions-mesure de (1.1).

(2.1) <u>Définition</u>. *On appelle solution-mesure de (1.1) toute probabilité* $\overline{P}$ *sur* $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}})$ *telle que :*

i) $\overline{P}|_\Omega = P$, $X_o = x_o$ *et* $Z_o = 0$ $\overline{P}$-p.s. ;

ii) pour la probabilité $\overline{P}$, Y *est une semimartingale de mêmes c.l.* $\mathscr{C}^\circ$ *que pour* P;

iii) pour la probabilité $\overline{P}$, Z *est une semimartingale de c.l.* $\mathscr{C}(\omega,z,x)$;

iv) On a, $\overline{P}$-p.s. :

$$X_t(x) = x_o(\omega) + \int_o^t F_s(\omega,z,x)\, d\, Y_s(\omega) + Z_t(z). \quad ■$$

Remarquons qu'alors X est aussi une semimartingale pour $\overline{P}$.

Rappelons une définition dont on aura besoin : Si $\overline{\mathcal{C}} = (\overline{B},\overline{C},\overline{\nu}) \in (\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^q(\overline{\Omega})$ et si $\overline{Y}$ est un processus cadlag adapté q-dimensionnel sur $\overline{\Omega}$, on définit, pour tout $u \in \mathbb{R}^q$, le processus prévisible à variation finie et à valeurs complexes suivant :

$$(2.2)\quad \overline{\Phi}^u_t = e^{i\langle u|\overline{Y}_-\rangle} \cdot [\, i\langle u|\overline{B}_t\rangle - \tfrac{1}{2}\langle u|\overline{C}_t\, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^q} (e^{i\langle u|\xi\rangle} - 1 - i\langle u|\xi\rangle 1_{\{|\xi|\leq 1\}})\ \overline{\nu}([o,t]\times d\xi)] .$$

§3 - SOLUTIONS-MESURE et PROBLEME DE MARTINGALES.

Introduisons d'abord les notations suivantes.

Notons $\mathcal{C}' = (B',C',\nu')$ un élément de $(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^{m+d}(\overline{\Omega})$ tel que, en utilisant l'écriture matricielles pour B' :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \nu'(\omega,z,x)(dt;dy\times\mathbb{R}^d)\, 1_{\{y\neq 0\}} = \nu^\circ(\omega;dt,dy) \ ; \\ \nu'(\omega,z,x)(dt;\mathbb{R}^m\times d\xi)\, 1_{\{\xi\neq 0\}} = \nu(\omega,z,x)(dt,d\xi) \ ; \\ B'_t(\omega,z,x) = \begin{pmatrix} B^\circ_t(\omega) - \int_{\mathbb{R}^{m+d}} y\, 1_{\{|y|\leq 1<|(y,\xi)|\}}\, \nu'(\omega,z,x)([o,t];dy,d\xi) \\ B_t(\omega,z,x) - \int_{\mathbb{R}^{m+d}} \xi\, 1_{\{|\xi|\leq 1<|(y,\xi)|\}}\, \nu'(\omega,z,x)([o,t];dy,d\xi) \end{pmatrix}; \\ C'^{ij}(\omega,z,x) = C^{\circ,ij}(\omega) \quad \text{pour } i,j\leq m \ ; \\ C'^{ij}(\omega,z,x) = C^{i-m,j-m}(\omega,z,x) \quad \text{pour } m<i,j\leq m+d \ ; \end{cases}$$

où, pour $y\in\mathbb{R}^m$ et $\xi\in\mathbb{R}^d$, on a noté $\xi' = (y,\xi)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{m+d}$ tel que : $\xi'^i = y^i$ pour $i\leq m$ et $\xi'^i = \xi^{i-m}$ pour $m<i\leq m+d$. (Remarquons que B' dans (3.1) est défini de façon analogue).

Soit l'opérateur $H = (F\ I)$, I étant la $d\times d$-matrice unité, défini par : $H(y,\xi) = Fy + \xi$.

On suppose qu'il existe $\overline{A} \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \cap \underline{\underline{\mathcal{V}}}_{o}^{+}$ tel qu'on ait les factorisations suivantes de B', C', ν' par rapport à $\overline{A}$:

$B' = b' \cdot \overline{A}$; $C' = c' \cdot \overline{A}$; $\nu'(dt, d\xi') = N'_t(d\xi')\, d\overline{A}_t$, où $\mathcal{D}' = (b', c', N') \in (d\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^{m+d}(\overline{\Omega})$.

Notons alors $\overline{\mathcal{C}} = (\overline{B}, \overline{C}, \overline{\nu})$ un triplet appartenant à $(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^{m+2d}(\overline{\Omega})$ tel que, en adoptant l'écriture matricielle encore :

$$(3.2)\quad \begin{cases} \overline{\nu}(\omega,z,x)([o,t]\times A) = \displaystyle\int_o^t \int_{\mathbb{R}^{m+d}} \nu'(\omega,z,x)(ds,d\xi')\, 1_A(\xi', H_s\xi'), \quad A \in \underline{\underline{\mathcal{B}}}(\mathbb{R}^{m+2d}) ; \\[2ex] \overline{B}_t(\omega,z,x) = \begin{pmatrix} B'_t(\omega,z,x) - \displaystyle\int_o^t \int_{\mathbb{R}^{m+d}} \xi'\, 1_{\{|\xi'|\leq 1 < |(\xi', H_s\xi')|\}} \nu'(\omega,z,x)(ds,d\xi') \\ = \hat{B}'_t(\omega,z,x) \\ H(\omega,z,x) \cdot \hat{B}'_t(\omega,z,x) \end{pmatrix} ; \\[2ex] \overline{C}(\omega,z,x) = \overline{c}(\omega,z,x) \cdot \overline{A}(\omega), \quad \text{avec } \overline{c} = \begin{pmatrix} c' & c'\,{}^tH \\ Hc' & Hc'\,{}^tH \end{pmatrix} . \end{cases}$$

On note $Z' = (Y,Z)$ le processus $m+d$-dimensionnel sur $\overline{\Omega}$ défini par : $Z'^i = Y^i$ pour $i \leq m$ et $Z'^i = Z^{i-m}$ pour $m < i \leq m+d$. On pose de même $\overline{Y} = (Y,Z,X)$ processus $m+2d$-dimensionnel sur $\overline{\Omega}$ défini de façon analogue puisqu'il s'écrit aussi : $\overline{Y} = (Z',X)$. ■

On a alors le résultat suivant.

(3.3) <u>Théorème</u>. *Une probabilité* $\overline{P}$ *sur* $(\overline{\Omega}, \overline{\underline{\mathcal{F}}})$ *est une solution-mesure de l'e.d.s.* (1.1) *si et seulement si on a* ((2.1),i)) *et s'il existe* $\mathcal{C}' \in (\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^{m+d}(\overline{\Omega})$ *vérifiant* (3.1) *tel que le processus* $\overline{Y} = (Y,Z,X)$ *soit une semimartingale de c.l.* $\overline{\mathcal{C}}$ *définies par* (3.2) *sur l'espace* $(\overline{\Omega}, \overline{\underline{\mathcal{F}}}, \overline{\underline{\mathcal{F}}}, \overline{P})$.

Démonstration. Si $\overline{P}$ est solution-mesure de (1.1), alors on a les propriétés i) à iv) de la définition (2.1). On en déduit que Z' est une $\overline{P}$-semimartingale, et qu'on a aussi : $X = x_o + H.Z'$ $\overline{P}$-p.s. Si on prend alors pour $\mathcal{C}'$ le triplet des c.l. de Z' pour $\overline{P}$, qui vérifie évidemment (3.1), on en déduit la condition nécessaire d'après le théorème (6.3) de [6].

Inversement s'il existe un tel $\mathcal{C}'$, alors, d'après le même théorème, Z' est une $\overline{P}$-semimartingale de c.l. $\mathcal{C}'$, ce qui implique que Y et Z sont aussi des $\overline{P}$-semimartingales de c.l. respectives $\mathcal{C}^o$ et $\mathcal{C}$, et on a, $\overline{P}$-p.s. : $X = x_o + H.Z'$, ce qui s'écrit aussi : $X = x_o + F.Y + Z$ $\overline{P}$-p.s. ∎

Par conséquent, pour montrer qu'une probabilité $\overline{P}$ sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ est solution-mesure de (1.1), l'idée sera de choisir le triplet $\mathcal{C}'$ vérifiant (3.1) convenablement et d'appliquer la condition suffisante du théorème (3.3).

On vérifie, en remplaçant H et B' par leurs expressions, que le processus $\overline{\Phi}^u$ défini par (2.2) associé à $\overline{Y}$ et au triplet $\overline{\mathcal{C}}$ défini par (3.2) s'écrit, pour tout $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$:

$$(3.4)\quad \overline{\Phi}^u_t(\omega,z,x) = e^{i\langle u|\overline{Y}_-(\omega,z,x)\rangle} \cdot \Big[i\langle u|(B^\circ_t(\omega),\ B_t(\omega,z,x),\ F(\omega,z,x)\cdot B^\circ_t(\omega) + B_t(\omega,z,x))\rangle - \frac{1}{2}\langle u|\overline{C}_t(\omega,z,x)u\rangle$$
$$+ \int_o^t \int_{\mathbb{R}^{m+d}} \big(e^{i\langle u|(y,\xi,F_s(\omega,z,x)\,y+\xi)\rangle}$$
$$- 1 - i\langle u|(y\,1_{\{|y|\leq 1\}},\xi\,1_{\{|\xi|\leq 1\}},\ F_s(\omega,z,x)\,y\,1_{\{|y|\leq 1\}} + \xi\,1_{\{|\xi|\leq 1\}})\rangle\big)\ \nu'(\omega,z,x)(ds,dy,d\xi)\Big].\ ∎$$

§4 - THEOREMES D'EXISTENCE.

Introduisons d'abord un certain nombre de notations.

Dans toute la suite, les variables ω ou (ω,z,x) peuvent ne pas figurer dans les expressions écrites pour ne pas alourdir l'écriture.

Posons :

$$(4.1)\quad A^o = \sum_{i\le m} (V(B^{o,i}) + C^{o,ii}) + (|y|^2 \wedge 1) * \nu^o ;$$

$$(4.2)\quad A(\omega,z,x) = \sum_{i\le d} (V(B^i(\omega,z,x)) + C^{ii}(\omega,z,x)) + (|\xi|^2 \wedge 1) * \nu(\omega,z,x) :$$

A^o et $A \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \cap \underline{\underline{\mathcal{V}}}_o^+$.

S'il existe un processus $A' \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \cap \underline{\underline{\mathcal{V}}}_o^+$ tel que :

$A(\omega,z,x) < A'(\omega)$ pour tout $(\omega,z,x) \in \overline{\Omega}$,

(i.e. $A'-A$ est un processus croissant), on posera :

$$(4.3)\quad \tilde{A} = A^o + A',$$

et on considèrera dans toute la suite les factorisations suivantes de $\mathcal{C}^o = (B^o,C^o,\nu^o)$ et de $\mathcal{C} = (B,C,\nu)$ par rapport à $\tilde{A}$:

$$(4.4)\begin{cases} B^o = b^o\cdot\tilde{A} \ ; \ C^o = c^o\cdot\tilde{A} \ ; \ \nu^o(dt,dy) = N_t^o(dy)\, d\tilde{A}_t \ ; \\ B = b\cdot\tilde{A} \ ; \ C = c\cdot\tilde{A} \ ; \ \nu(dt,d\xi) = N_t(d\xi)\, d\tilde{A}_t \ ; \end{cases}$$

où $\mathcal{D}^o = (b^o,c^o,N^o) \in (d\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^m\,(\Omega)$, et $\mathcal{D} = (b,c,N) \in (d\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{L}})^d\,(\overline{\Omega})$.

Alors (4.1), (4.4) et le fait que $A^o < \tilde{A}$ impliquent :

$$(4.5)\quad |b^o| + \sum_{i\le m} c^{o,ii} + \int_{\mathbb{R}^m} (|y|^2 \wedge 1)\, N^o(dy) \le 1.$$

De même (4.2), (4.4) et le fait que $A' < \tilde{A}$ impliquent :

$$(4.6)\quad |b| + \sum_{i\le d} c^{ii} + \int_{\mathbb{R}^d} (|\xi|^2 \wedge 1)\, N\,(d\xi) \le 1.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^{m+d}$, posons :

$$(4.7)\quad \varphi_t^{F,u}(\omega,z,x) = i < u|\ (b^o{}_t(\omega),\ F_t(\omega,z,x)\ b^o{}_t(\omega))>$$

$$- \frac{1}{2} <u| \begin{pmatrix} c_t^o(\omega) & c_t^o(\omega)\ {}^tF_t(\omega,z,x) \\ F_t(\omega,z,x)\ c^o{}_t(\omega) & F_t(\omega,z,x)\ c_t^o(\omega)\ {}^tF_t(\omega,z,x) \end{pmatrix} u>$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^m} (e^{i<u|(y,F_t(\omega,z,x)y)>} - 1 - i<u|(y,F_t(\omega,z,x)y)>1_{\{|y|\le 1\}})N_t^o(\omega;dy).$$

Pour $u \in \mathbb{R}^{2d}$, posons de même :

$$(4.8)\quad \varphi_t^u(\omega,z,x) = i\langle u \mid (b_t(\omega,z,x),\ b_t(\omega,z,x))\rangle - \frac{1}{2}\langle u \mid \begin{pmatrix} c_t(\omega,z,x) & c_t(\omega,z,x) \\ c_t(\omega,z,x) & c_t(\omega,z,x) \end{pmatrix} u\rangle$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u|(\xi,\xi)\rangle} - 1 - i\langle u|(\xi,\xi)\rangle\ 1_{\{|\xi|\leq 1\}})\ N_t(\omega,z,x)(d\xi).$$

On déduit de (4.5) que le processus $\varphi^{F,u}$ défini par (4.7) est borné si F l'est, c'est-à-dire que, si $u \in \mathbb{R}^{m+d}$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$, on vérifie facilement qu'il existe une constante $\gamma' \in \mathbb{R}_+$ indépendante de b^o, c^o, N^o, mais dépendant de u telle que :

$$(4.9)\quad |F_t| \leq \gamma \ \Rightarrow\ |\varphi_t^{F,u}| \leq \gamma'.$$

(voir [10], relation (2.12)).

On déduit de même de (4.6) et de (4.9), en y faisant $F = I$ $d\times d$-matrice unité, qu'il existe une constante α indépendante de b,c,N, mais dépendant de $u \in \mathbb{R}^{2d}$ telle que :

$$(4.10)\quad |\varphi_t^u(\omega,z,x)| \leq \alpha \text{ identiquement.}$$

Dans toute la suite, si $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, on posera souvent $u = (u_1,u_2,u_3)$, où $u_1 = (u^i)_{i\leq m} \in \mathbb{R}^m$, $u_2 = (u^i)_{m<i\leq m+d} \in \mathbb{R}^d$, et $u_3 = (u^i)_{m+d<i\leq m+2d} \in \mathbb{R}^d$.

A partir de u, on formera les vecteurs $u_{13} = (u_1,u_3) \in \mathbb{R}^{m+d}$ et $u_{23} = (u_2,u_3) \in \mathbb{R}^{2d}$ définis de façon analogue.

Posons encore, pour $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^{m+2d}$:

$$(4.11)\quad \Phi_t^{F,u}(\omega,z,x) = e^{i\langle u|\overline{Y}_-(\omega,z,x)\rangle}\varphi^{F,(u_1,u_3)}(\omega,z,x)\cdot \tilde{A}_t(\omega)\ ;$$

$$(4.12)\quad \Phi_t^{u}(\omega,z,x) = e^{i\langle u|\overline{Y}_-(\omega,z,x)\rangle}\varphi^{(u_2,u_3)}(\omega,z,x)\cdot \tilde{A}_t(\omega)\ ;$$

$$(4.13)\quad \overline{\varphi}_t^{u}(\omega,z,x) = \varphi_t^{F,(u_1,u_3)}(\omega,z,x) + \varphi_t^{(u_2,u_3)}(\omega,z,x).$$

On déduit de (4.9) et de (4.10) que :

$$(4.14)\quad |\overline{\varphi}_t^u(\omega,z,x)| \leq \alpha + \gamma' \text{ identiquement. } \blacksquare$$

Si l'on choisit le triplet $\mathcal{C}'$ vérifiant (3.1) tel que :

$$(4.15)\begin{cases} \nu'(\omega,z,x)(dt,dy,d\xi) = \nu^o(\omega;dt,dy)\ \varepsilon_o(d\xi) + \nu(\omega,z,x)(dt,d\xi)\ \varepsilon_o(dy)\ ; \\ C'^{ij}(\omega,z,x) = 0 \quad \text{pour} \quad j\leq m<i\leq m+d\ ; \end{cases}$$

alors cela définit complètement les triplets $\mathcal{C}'$ et $\overline{\mathcal{C}}$ défini par (3.2). Leurs expressions deviennent en effet, en utilisant l'écriture matricielle et en notant $\underline{\underline{0}}$ la $d\times m$-matrice nulle :

$$(4.16)\ \mathcal{C}'\begin{cases} \nu' \text{ comme dans (4.15) ;} \\ B' = \begin{pmatrix} B^o \\ B \end{pmatrix}; \qquad C' = \begin{pmatrix} C^o & {}^t\underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & C \end{pmatrix} \ ; \end{cases}$$

$$(4.17)\ \overline{\mathcal{C}}\begin{cases} \overline{\nu}([o,t]\times A) = \int_o^t \int_{\mathbb{R}^m} \nu^o(ds,dy)\ 1_A(y,o,F_s y) + \int_{\mathbb{R}^d} \nu([o,t]\times d\xi)\ 1_A(o,\xi,\xi), \\ A\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+2d})\ ; \\ \overline{B} = \begin{pmatrix} B^o - y\ 1_{\{|y|\leq 1<|(y,Fy)|\}} * \nu^o = \hat{B}^o \\ B - \xi\ 1_{\{|\xi|\leq 1<|(\xi,\xi)|\}} * \nu = \hat{B} \\ F\cdot\hat{B}^o + \hat{B} \end{pmatrix}; \\ \overline{C} = \overline{c}\cdot\tilde{A},\ \text{avec}\ \overline{c} = \begin{pmatrix} c^o & {}^t\underline{\underline{0}} & c^o\,{}^tF \\ \underline{\underline{0}} & c & c \\ Fc^o & c & Fc^o\,{}^tF + c \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant.

(4.18) <u>Lemme</u>. *Si le triplet $\mathcal{C}'$ vérifie aussi (4.15), le processus $\overline{\Phi}^u$ défini par (2.2) associé à $\overline{Y}$ et à $\overline{\mathcal{C}}$ s'écrit : $\overline{\Phi}^u = \Phi^{F,u} + \Phi^u$, ce qui donne, d'après (4.11), (4.12) et (4.13) :*

$$(4.19)\quad \overline{\Phi}^u = e^{i<u|\overline{Y}_->}\ \overline{\varphi}^u\cdot\tilde{A}.$$

<u>Démonstration</u>. Si on remplace, dans l'expression (3.4) du processus $\overline{\Phi}^u$ associé à $\overline{Y}$ et au triplet $\overline{\mathcal{C}}$, ce dernier par sa nouvelle expression (4.17),

et si on écrit :

$e^{i(r+r')}-1 = (e^{ir}-1) + (e^{ir'}-1) + (e^{ir}-1)(e^{ir'}-1)$, et qu'on sépare les termes en $\mathcal{C}^{o}$ et les termes en $\mathcal{C}$, on vérifie bien que l'on a :

$\overline{\Phi}^{u} = \phi^{F,u} + \phi^{u}$. ∎

On déduit de (4.14) et de (4.19) que l'on a :

(4.20) $|\dot{\overline{\Phi}}{}^{u}_{t}(\omega,z,x)| \leq (\alpha+\gamma')\, \lambda_{t}(\omega)$ identiquement.

On considère les topologies suivantes sur $\mathbb{D}$:

- $\mathcal{T}_{s}$ topologie de Skorokhod ;

- $\mathcal{T}_{u}$ topologie de la convergence uniforme sur les compacts ;

- la topologie uniforme définie par la distance :

(4.21) $\delta(x,x') = \sup\limits_{t} |x(t) - x'(t)|$.

On sait que la topologie $\mathcal{T}_{u}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_{s}$, ce qui entraîne que la $\mathcal{T}_{s}$-continuité sur $\mathbb{D}$ est plus forte que la $\mathcal{T}_{u}$-continuité. De même la topologie uniforme sur $\mathbb{D}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_{u}$; mais pour une fonction prévisible, sa $\mathcal{T}_{u}$-continuité est équivalente à sa continuité pour la topologie uniforme. ∎

On a alors un premier théorème d'existence dont les hypothèses permettent de se ramener à la situation du problème de martingales de [15].

(4.22) Théorème. *Les hypothèses suivantes impliquent l'existence d'au moins une solution-mesure de l'e.d.s.* (1.1) :

(4.23) *le coefficient* F *est borné : il existe une constante* $\gamma \in \mathbb{R}_{+}$ *telle que :* $|F_{t}(\omega,z,x)| \leq \gamma$ *identiquement ;*

(4.24) $\nu^{\rho}(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}^{m}) = 0$ *identiquement ;*

(4.25) $\nu(\omega,z,x)(\{t\}\times\mathbb{R}^d) = 0$ *identiquement* ;

(4.26) *il existe* $A' \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \cap \underline{\underline{\mathcal{V}}}_0^+$ *tel que* :

$A(\omega,z,x) < A'(\omega)$ *pour tout* $(\omega,z,x) \in \overline{\Omega}$;

(4.27) $\lim_{a\uparrow\infty} \sup_{z,x} N_t(\omega,z,x)(\{|\xi|> a\}) = 0$ *pour tous* $\omega\in\Omega$ *et* $t \geq 0$;

et :

(4.28) *Pour tout* (ω,t) *dans une partie pleine de* $\Omega\times\mathbb{R}_+$ *pour la mesure* $P(d\omega)\times d\tilde{A}_t(\omega)$, *et pour tout* $u\in\mathbb{R}^{2d}$, *les applications* $(z,x) \to F_t(\omega,z,x)$ *et* $(z,x) \to \varphi^u{}_t(\omega,z,x)$ *sont* $\mathcal{E}_s$-*continues sur* $\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x$;

ou :

(4.29) *Pour tout* $t>0$ *et tout* $u\in\mathbb{R}^{2d}$, *il existe 2 applications* F'_t *et* φ'^u_t *définies sur* $\Omega\times\mathbb{R}^{2d}$, *bornées et telles que les applications* $(\eta,\xi) \to F'_t(\omega,\eta,\xi)$ *et* $(\eta,\xi)\to\varphi'^u{}_t(\omega,\eta,\xi)$ *soient continues pour tout* $\omega\in\Omega$, *et que* : $F_t(\omega,z,x) = F'_t(\omega,z(t-), x(t-))$ *et* $\varphi^u_t(\omega,z,x) = \varphi'^u_t(\omega,z(t-), x(t-))$.

<u>Démonstration</u>. Choisissons $\mathcal{C}'$ comme dans (4.16). Considérons le triplet $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{B},\tilde{C},\tilde{\nu}) \in (\underline{C}\,\underline{L})^{2d}(\overline{\Omega})$ défini par :

$$
(4.30)\quad \begin{cases}
\tilde{\nu}([o,t]\times A) = \int_o^t \int_{\mathbb{R}^m} \nu^o(ds,dy)\, 1_A(o,F_s y) + \int_{\mathbb{R}^d} \nu([o,t]\times d\xi)\, 1_A(\xi,\xi), \\
A \in \underline{\underline{\mathcal{B}}}(\mathbb{R}^{2d}) \;; \\
\tilde{B} = \begin{pmatrix} B - \xi\, 1_{\{|\xi|\leq 1<|(\xi,\xi)|\}} * \nu = \hat{B} \\ F\cdot\hat{B}^o + \hat{B} \end{pmatrix}, \\
\text{avec } \hat{B}^o = B^o - y\, 1_{\{|y|\leq 1<1(y,Fy)|\}} * \nu^o \;; \\
\tilde{C} = \tilde{c}\cdot\tilde{A} \text{ avec } \tilde{c} = \begin{pmatrix} c & c \\ c & Fc^{o\,t}F + c \end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

D'après (4.4), $\tilde{\mathcal{C}}$ se factorise par rapport à $\tilde{A}$ de la façon suivante:

$$(4.31)\quad \begin{cases} \tilde{\nu}(dt,d\xi) = \tilde{N}_t(d\xi)\, d\tilde{A}_t, \text{ avec :} \\ \tilde{N}_t(A) = \int_{\mathbb{R}^m} N^o_t(dy)\, 1_A(o,F_t y) + \int_{\mathbb{R}^d} N_t(d\xi)\, 1_A(\xi,\xi), \quad A \in \underline{\underline{\mathcal{B}}}(\mathbb{R}^{2d}) \;; \\ \tilde{B} = \tilde{b} \cdot \tilde{A}, \text{ avec } \tilde{b}_t = \begin{pmatrix} b_t - \int_{\mathbb{R}^d} \xi\, 1_{\{|\xi| \le 1 < |(\xi,\xi)|\}} N_t(d\xi) = \hat{b}_t \\ F_t\, \hat{b}^o_t + \hat{b}_t \end{pmatrix} \\ \text{avec } \hat{b}^o_t = b^o_t - \int_{\mathbb{R}^m} y\, 1_{\{|y| \le 1 < |(y,F_t\, y)|\}}\, N^o_t(dy) \;; \\ \tilde{C} = \tilde{c} \cdot \tilde{A} \quad \text{avec } \tilde{c} \text{ comme dans (4.30).} \end{cases}$$

Montrons que les hypothèses du théorème (2.11) de [15] sont vérifiées pour $\tilde{X} = (Z,X)$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sur l'espace $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\mathcal{F}}})$ et par rapport à la variable $\tilde{x} = (z,x)$. On a, d'après (4.5), (4.6) et (4.23) :

$$(4.32)\quad \sum_{i \le 2d} (V(\tilde{B}^i) + \tilde{C}^{ii}) + (|\xi|^2 \wedge 1) * \tilde{\nu} < (9 + \gamma + 2\gamma^2)\, \tilde{A}.$$

De même on a :

$$\tilde{N}_t(\{|\xi| > a\}) = N^o_t(\{|F_t\, y| > a\}) + N_t(\{|(\xi,\xi)| > a\}) \le N^o_t(\{|y| > \tfrac{a}{\gamma}\}) + N_t(\{|\xi| > \tfrac{a}{\sqrt{2}}\}),$$

donc, d'après (4.27), pour tous $\omega \in \Omega$ et $t \ge 0$:

$$(4.33)\quad \lim_{a \uparrow \infty} \sup_{z,x} \tilde{N}_t(\omega,z,x)(\{|\xi| > a\}) = 0.$$

Par conséquent les hypothèses (2.1) et (2.3) du théorème (2.11) de [15] sont vérifiées.

Pour $u \in \mathbb{R}^{2d}$, posons :

$$\tilde{\varphi}^u_t = i < u|\tilde{b}_t > - \frac{1}{2} < u|\tilde{c}_t\, u > + \int_{\mathbb{R}^{2d}} (e^{i<u|\xi>} - 1 - i<u|\xi> 1_{\{|\xi| \le 1\}})\, \tilde{N}_t(d\xi).$$

On vérifie, en remplaçant $\tilde{b},\tilde{c},\tilde{N}$ par leurs expressions, que l'on a, pour $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\tilde{\varphi}^u_t = \tilde{\varphi}^{F,u2}_t + \varphi^u_t \,,$$

avec, pour $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\tilde{\varphi}^{F,u} = i\langle u|Fb^o\rangle - \frac{1}{2}\langle u|Fc^{o\,t}F\,u\rangle + \int_{\mathbb{R}^m} (e^{i\langle u|Fy\rangle} - 1 - i\langle u|Fy\rangle$$

$$(1_{\{|Fy|\leq 1\}} + 1_{\{|y|\leq 1<|(y,Fy)|\}})) \, N^o(dy).$$

$\tilde{\varphi}^u$ vérifie aussi (4.28) ou (4.29) puisque F et φ^u vérifient ces hypothèses. D'après (4.24) et (4.25), $A^o_\bullet(\omega)$ et $A_\bullet(\omega,z,x)$ sont continues pour tout $(\omega,z,x) \in \overline{\Omega}$, donc on peut choisir $A'_\bullet(\omega)$, et par conséquent aussi $\tilde{A}_\bullet(\omega)$, continues. Alors, si $\tilde{\Phi}^u = e^{i\langle u|(Z_-,X_-)\rangle}\, \tilde{\varphi}^u \cdot \tilde{A}$, d'après le lemme (2.9) de [15], les hypothèses (2.7) et (2.8) du théorème (2.11) de [15] sont vérifiées pour $\tilde{\varphi}^u$ et $\tilde{\Phi}^u$ sur l'espace $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ et par rapport à la variable $\tilde{x} = (z,x)$. Donc, d'après ce théorème, il existe sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ une probabilité $\overline{P}$ faisant de $\tilde{X} = (Z,X)$ une semimartingale de c.l. $\tilde{\mathcal{C}}$ avec $\overline{P}|_\Omega = P$ et $\tilde{X}_o = (o,x_o)$ $\overline{P}$-p.s. Or la fonction $\overline{\varphi}^u$ définie par (4.13) vérifie (4.28) ou (4.29) comme F et φ^u, ce qui implique, d'après le lemme (2.9) de [15], que $\overline{\varphi}^u$ et $\overline{\Phi}^u$ (défini par (4.19)) vérifient les hypothèses (2.7) et (2.8) du théorème (2.11) de [15] par rapport à la variable $\tilde{x} = (z,x)$. Par une démonstration identique à celle du théorème (4.10) de [15] utilisant, entre autre, les hypothèses (4.24) et (4.25), on en déduit que $\overline{Y} = (Y,Z,X)$ est une $\overline{P}$-semimartingale de c.l. $\overline{\mathcal{C}}$ (définies par (4.17)). Par conséquent, d'après le théorème (3.3), la probabilité $\overline{P}$ est solution-mesure de (1.1). ■

On a aussi le théorème d'existence suivant :

(4.34) <u>Théorème</u>. *Les hypothèses suivantes impliquent l'existence d'au moins une solution-mesure de l'e.d.s.* (1.1) : (4.23), (4.25), (4.26), (4.27), *et* :

(4.35) *Pour tout* (ω,t) *dans une partie pleine de* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ *pour la mesure* $P(d\omega) \times d\tilde{A}_t(\omega)$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}^{2d}$, *les applications* $(z,x) \to F_t(\omega,z,x)$ *et* $(z,x) \to \varphi^u_t(\omega,z,x)$ *sont* $\mathcal{C}_u$*-uniformément continues sur tout* $\mathcal{C}_s$*-compact de* $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$;

(4.36) *Pour tous* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, $\omega \in \Omega$ *et* $t > 0$, *les applications* $(z,x) \to \phi_t^{F,u}(\omega,z,x)$ *et* $(z,x) \to \phi_t^{u}(\omega,z,x)$ *sont* $\mathcal{E}_s$*-continues sur* $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$. ■

Voici enfin un théorème dont les hypothèses de continuité sont plus faibles que celles des théorèmes précédents et qui permet de généraliser les résultats de [9] et de [15] et constitue notre résultat principal.

(4.37) Théorème. *Les hypothèses suivantes impliquent l'existence d'au moins une solution-mesure de l'e.d.s.* (1.1) : (4.23), (4.25), (4.26), (4.27), *et* :

(4.38) *Si* $F'_t(\omega,z,v) = F_t(\omega,z,v+z)$, $\varphi'^u_t(\omega,z,v) = \varphi^u_t(\omega,z,v+z)$, *pour tout* (ω,t) *dans une partie pleine de* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ *pour la mesure* $P(d\omega) \times d\tilde{A}_t(\omega)$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}^{2d}$, *les deux familles d'applications* $\{v \to F'_t(\omega,z,v)\}_{z \in \mathbb{D}^z}$ *et* $\{v \to \varphi'^u_t(\omega,z,v)\}_{z \in \mathbb{D}^z}$ *sont équicontinues sur* $\mathbb{D}^v$ *muni de la topologie uniforme ;*

(4.39) *Pour tout* (ω,t) *dans une partie pleine de* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ *pour la mesure* $P(d\omega) \times d\tilde{A}_t(\omega)$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}^{2d}$, *les 2 familles d'applications* $\{z \to F_t(\omega,z,x)\}_{x \in \mathbb{D}^x}$ *et* $\{z \to \varphi^u_t(\omega,z,x)\}_{x \in \mathbb{D}^x}$ *sont* $\mathcal{E}_u$*-uniformément équicontinues sur tout* $\mathcal{E}_s$*-compact de* $\mathbb{D}^z$;

(4.40) *Pour tous* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{D}^x$ *et* $t > 0$, *les applications* $z \to \phi_t^{F,u}(\omega,z,x)$ *et* $z \to \phi_t^{u}(\omega,z,x)$ *sont* $\mathcal{E}_s$*-continues sur* $\mathbb{D}^z$. ■

Les hypothèses de continuité des théorèmes (4.34) et (4.37) ne permettent pas de retrouver celles du théorème (2.11) de [15], et par conséquent on ne peut pas appliquer ce théorème pour les démontrer. Par exemple, d'après les hypothèses de (4.34), le processus $\mathfrak{F}^u$, considéré dans la démonstration de (4.22), n'est pas $\mathcal{C}_s$-continu en $\tilde{x} = (z,x)$, et donc la méthode utilisée dans cette démonstration ne s'applique pas pour établir (4.34).

On est alors conduit à faire une étude directe pour ces deux théorèmes ayant pour but de construire une probabilité $\overline{P}$ qui fasse de $\overline{Y}$ une semimartingale de c.l. $\overline{\mathcal{C}}$ définies par (4.17). Cette étude va consister à raisonner par rapport au triplet $\overline{Y} = (Y,Z,X)$ en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème (4.10) de [15]. Comme cette méthode emprunte beaucoup à [15], pour alléger un peu certaines démonstrations, on renverra parfois le lecteur aux démonstrations correspondantes de [15] qui leur sont identiques.

On va mener simultanément les deux démonstrations de (4.34) et de (4.37) en indiquant à chaque étape les différences entre les deux situations lorsqu'elles se présentent.

La démonstration des théorèmes (4.34) et (4.37) va se faire en plusieurs étapes. Nous allons d'abord les démontrer dans un cas particulier, en construisant des solutions approchées.

§5 - CAS OU ON A L'HYPOTHESE SUPPLEMENTAIRE:

(5.1) $E(\tilde{A}_t) < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$.

On a alors le résultat suivant.

(5.2) __Théorème__. *Sous les hypothèses du théorème* (4.34), *ou du théorème* (4.37), *et la condition supplémentaire* (5.1), *l'e.d.s.* (1.1) *admet au moins une solution-mesure sur l'espace* $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\mathcal{F}}})$. ■

Tout ce paragraphe sera consacré à la démonstration de ce théorème, qui va débuter par la construction de solutions approchées.

§ 5 - a - Approximation des solutions mesures de (1.1).

Introduisons d'abord les notations suivantes.

Pour tous $s \geq 0$, $x \in \mathbb{D}$, $n \geq 1$, on définit $s_n \geq 0$, $x^s \in \mathbb{D}$, $x^{s-} \in \mathbb{D}$ par :

(5.3) $s_n = \frac{k}{n}$ si $\frac{k}{n} < s \leq \frac{k+1}{n}$, $s_n = 0$ si $s = 0$;

$$x^s(t) = x(s \wedge t) \; ;$$

$$x^{s-}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t < s \; ; \\ x(s-) & \text{si } t \geq s \text{ (avec } x(0-) = x(0)). \quad \blacksquare \end{cases}$$

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, définissons un nouveau processus matriciel prévisible $F^{n,k}$ sur $\overline{\Omega}$ par :

$$(5.4) \quad F_t^{n,k}(\omega, z, x) = \begin{cases} F_t(\omega, z^{t_n}, x^{t_n}) & \text{si } t \leq \frac{k}{n} \; ; \\ 0 & \text{si } t > \frac{k}{n}. \end{cases}$$

De même, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, définissons un nouvel élément $\mathfrak{J}^{n,k} = (b^{n,k}, c^{n,k}, N^{n,k})$ de $(d\,\underline{\underline{C}}\,\underline{L})^d\,(\overline{\Omega})$ par :

(5.5) $b_t^{n,k}(\omega,z,x)$ (resp. $c_t^{n,k}(\omega,z,x)$, $N_t^{n,k}(\omega,z,x)$

$$= \begin{cases} b_t(\omega, z^{tn}, x^{tn})\,(\text{resp. } c_t(\omega, z^{tn}, x^{tn}), N_t(\omega, z^{tn}, x^{tn})) & \text{si } t \leq \frac{k}{n} \\ 0 \;(\text{resp. } 0,\, 0) & \text{si } t > \frac{k}{n}. \end{cases}$$

Par des formules analogues aux formules (4.4), (4.7), (4.8), (4.11), (4.12), (4.13), (4.16) et (4.17), on définit respectivement $\mathscr{C}^{n,k} = (B^{n,k}, C^{n,k}, \nu^{n,k})$, $\varphi^{F^{n,k},u}$, $\varphi^{n,k,u}$, $\Phi^{F^{n,k},u}$, $\Phi^{n,k,u}$, $\overline{\varphi}^{n,k,u}$, $\mathscr{C}'^{n,k} = (B'^{n,k}, C'^{n,k}, \nu'^{n,k})$ et $\overline{\mathscr{C}}^{n,k} = (\overline{B}^{n,k}, \overline{C}^{n,k}, \overline{\nu}^{n,k})$ à l'aide de $\mathfrak{J}^{n,k}$ et de $F^{n,k}$.

Alors les majorations (4.6), (4.9), (4.10) et (4.14) se transposent aux nouveaux éléments. On vérifie aussi que le processus $\overline{\Phi}^{n,k,u}$, avec $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, défini par (2.2) associé à $\overline{Y}$ et au triplet $\overline{\mathscr{C}}^{n,k}$ s'écrit :

(5.6) $\overline{\Phi}^{n,k,u} = \Phi^{F^{n,k},u} + \Phi^{n,k,u}$,

ce qui donne, comme dans (4.19) :

(5.7) $\overline{\Phi}^{n,k,u} = e^{i\langle u|\overline{Y}_-\rangle}\, \overline{\varphi}^{n,k,u} \,.\, \tilde{A}$,

et, comme dans (4.20) :

(5.8) $|\overline{\Phi}_t^{n,k,u}(\omega,z,x)| \leq (\alpha+\gamma')\, \tilde{A}_t(\omega)$ identiquement.

Dans toute la suite, $\mathfrak{D}^{n,n^2}$, $\mathcal{C}^{n,n^2}$, $\mathcal{C}'^{n,n^2}$, $\overline{\mathcal{C}}^{n,n^2}$, F^{n,n^2}, $\varphi^{n,n^2,u}$, $\overline{\varphi}^{n,n^2,u}$, $\Phi^{n,n^2,u}$ et $\overline{\Phi}^{n,n^2,u}$ seront notés respectivement $\mathfrak{D}^n$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}'^n$, $\overline{\mathcal{C}}^n$, F^n, $\varphi^{n,u}$, $\overline{\varphi}^{n,u}$, $\Phi^{n,u}$ et $\overline{\Phi}^{n,u}$ pour simplifier. ■

Soit $\overline{x}$ une application de $\Omega \times \mathbb{D}^z$ dans $\mathbb{D}^x$ qu'on suppose adaptée par rapport à la filtration $(\bigcap_{s>t} \underline{\underline{\mathfrak{F}}}_s \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}_s^z)_{t\geq 0}$. Pour tous $(\omega,z) \in \Omega \times \mathbb{D}^z$, $n\geq 1$ et $k\geq 0$ fixés, on note $Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}$ la probabilité de transition de $(\Omega \times \mathbb{D}^z, \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z)$ dans $(\mathbb{D}^z, \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z)$ qui fait de Z un PAI-semimartingale de c.l. déterministes $\mathcal{C}^{n,k+1}(\omega,z,\overline{x}(\omega,z))$ sur $]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ (voir [15], définition (3.11), lemme (3.12) et corollaire (3.13)).

Remarquons que l'hypothèse (4.25) implique que, pour tous $n\geq 1$ et $k\geq 0$, on a aussi : $\nu^{n,k}(\omega,z,x)(\{t\} \times \mathbb{R}^d) = 0$ identiquement. On en déduit que : *le processus* Z *n'a pas de discontinuités fixes pour* $Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}$ *sur* $]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ (voir [5], théorème (3.51). ■

On va maintenant établir, en s'inspirant des techniques de [15], des résultats permettant de construire des solutions-mesure approchées de l'e.d.s. (1.1).

Voici un premier résultat dans cette direction.

(5.9) Lemme. *Pour* $\omega \in \Omega$ *et* $n \geq 1$ *fixés, et pour tout* $k \geq 0$, *il existe une probabilité* $P^{\omega,\frac{k}{n}}$ *sur* $(\mathbb{D}^z, \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z)$ *telle que* :

i) $Z_0 = 0$ $\quad P^{\omega,\frac{k}{n}}$ - p.s. ;

ii) pour la probabilité $P^{\omega,\frac{k}{n}}$, Z *est une semimartingale de c.l.* $\mathcal{C}^{n,k}(\omega,\cdot,\overline{x}(\omega,\cdot))$

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme (3.14) de [15].

Rappelons simplement la formule permettant de construire les probabilités $P^{\omega,\frac{k}{n}}$: Pour $D \in \mathfrak{K} = \{ A \cap B \cap C \quad : \quad A \in \underline{\underline{D}}^z_{k/n}, \quad B \in \underline{\underline{D}}^{z,\frac{k}{n}}_{\frac{k+1}{n}}$, $C \in \underline{\underline{D}}^{z,\frac{k+1}{n}} \}$, on pose :

$$(5.10) \quad P^{\omega,\frac{k+1}{n}}(D) = \int_A P^{\omega,\frac{k}{n}}(dz) \int_B Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}(dy) \quad \varepsilon_{\xi(y)} \ (C)$$

où $\xi(y) \in \mathbb{D}^z$ est défini par : $\xi(y)(t) = y(\frac{k+1}{n})$ pour tout $t \geq \frac{k+1}{n}$;

On définit ainsi une probabilité sur $\mathfrak{K}$, et, comme $\underline{\underline{D}}^z = \sigma(\mathfrak{K})$, elle se prolonge de manière unique en une probabilité sur $\underline{\underline{D}}^z$, notée encore $P^{\omega,\frac{k+1}{n}}$, qui coïncide, d'après (5.10), avec $P^{\omega,\frac{k}{n}}$ sur $\underline{\underline{D}}^z_{k/n}$. ■

On a aussi le :

(5.11) Lemme. *Pour* $n \geq 1$ *fixé, et pour tout* $k \geq 0$, *il existe une probabilité* $\dot{P}^{k/n}$ *sur* $(\Omega \times \mathbb{D}^z, \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{D}}^z)$ *telle que :*

i) $\dot{P}^{k/n}\big|_\Omega = P$ *et* $Z_o = o$ $\dot{P}^{k/n}$ - p.s. ;

ii) pour $\dot{P}^{k/n}$, Z *est une semimartingale de c.l.* $\mathcal{C}^{n,k}(\cdot,\overline{x}(\cdot))$;

iii) pour $\dot{P}^{k/n}$, Y *est une semimartingale de mêmes c.l.* $\mathcal{C}^o$ *que pour* P ;

iv) pour $\dot{P}^{k/n}$ *, le couple* $Z' = (Y,Z)$ *est une semimartingale de c.l.* $\mathcal{C}'^{n,k}(\cdot,\overline{x}(\cdot))$;

v) il existe sur $[o,\frac{k}{n}]$ *une semimartingale* $\overline{X}$ *définie sur* $\Omega \times \mathbb{D}^z$ *telle que :*

$$(5.12) \quad \overline{X}_t(\omega,z) = x_o(\omega) + F^{n,k}(\omega,z,\overline{X}(\omega,z)) \cdot Y_t(\omega) + Z_t(z) \quad \dot{P}^{k/n}\text{-p.s.}$$

Démonstration. 1) Pour $A \in \underline{\underline{\mathfrak{F}}}$ et $B \in \underline{\underline{D}}^z$, posons :

$$(5.13) \quad \dot{P}^{k/n}(A \times B) = \int_A P(d\omega) \ P^{\omega,k/n}(B).$$

On définit ainsi une probabilité sur $(\Omega \times \mathbb{D}^z, \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{D}}^z)$, et on montre facilement, grâce au lemme (5.9), que Z est une $\dot{P}^{k/n}$-semimartingale de c.l. $\mathcal{C}^{n,k}(\cdot,\overline{x}(\cdot))$ avec $Z_o = o$ $\dot{P}^{k/n}$ - p.s. (voir [15], lemme (3.16)).

Puisque $P^{\omega,k/n}(B) \in \underline{\underline{\mathcal{F}}}_s$ pour tous $s \geq 0$, $B \in \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z_s$ et $\omega \in \Omega$ par construction, toute P-martingale est une $\dot{P}^{k/n}$-martingale, et par conséquent Y est une $\dot{P}^{k/n}$-semimartingale de mêmes c.l. $\mathcal{C}^o$ que pour P.

2) Montrons, par récurrence sur k, que Y et Z n'ont pas, $\dot{P}^{k/n}$-p.s., de saut commun sur $[o,\frac{k}{n}]$. C'est vrai pour $k = 0$. Supposons que c'est vrai jusqu'à k et montrons-le pour k+1. Soit $(T_m)_{m\geq 0}$ une suite de t.a., ordonnés suivant l'ordre croissant, qui épuisent les sauts de Y.

Si T est un tel t.a. $\leq \frac{k}{n}$, alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} \in \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z_{k/n}$, et on a :

$$\dot{P}^{\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_t \neq 0\} = \int P(d\omega)\, P^{\omega,\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} \qquad \text{(d'après (5.13))}$$

$$= \int P(d\omega)\, P^{\omega,\frac{k}{n}}\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} \qquad \text{(d'après (5.10))}$$

$$= \dot{P}^{\frac{k}{n}}\{\Delta Z_T \neq 0\} \qquad \text{(d'après (5.13))}$$

$$= 0 \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}$$

Si T est un tel t.a. compris entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, on a, en remarquant que, cette fois-ci, $\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} \in \underline{\underline{\mathbb{D}}}^{z,k/n}_{\frac{k+1}{n}}$ pour tout $\omega \in \Omega$:

$Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}^z$ puisque Z n'a pas de discontinuités fixes pour $Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}$ sur $]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$. On en déduit, d'après (5.10) :

$$P^{\omega,\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} = \int P^{\omega,\frac{k}{n}}(dz)\, Q_z^{\omega,n,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_{T(\omega)} \neq 0\} = 0.$$

Cela implique, d'après (5.13), que : $\dot{P}^{\frac{k+1}{n}}\{\Delta Z_T \neq 0\} = 0$ aussi dans ce cas.

Par conséquent c'est vrai aussi pour k+1, donc pour tout k.

3) Montrons que $<Y^c,Z^c> = 0$ $\dot{P}^{\frac{k}{n}}$-p.s. Posons :

$Y' = Y - S(\Delta Y\ 1_{\{|\Delta Y|>1\}}) - B^o$, $Z'' = Z - S(\Delta Z\ 1_{\{|\Delta Z|>1\}}) - B^{n,k}$. Alors $Y' \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(P)$, et $Z'' \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(P^{\omega,\frac{k}{n}})$ pour tout $\omega \in \Omega$ d'après (5.9) ; en outre, Y' et Z'' sont à sauts bornés ; donc $Y' \in \underline{\underline{\mathcal{H}}}^{\infty}_{o,loc}(P)$ et $Z'' \in \underline{\underline{\mathcal{H}}}^{\infty}_{o,loc}(P^{\omega,\frac{k}{n}})$.

Montrons que $L = Y'Z'' \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(\dot{P}^{\frac{k}{n}})$. Soient $(T_m)_{m\geq 0}$ et $(S_m)_{m\geq 0}$ deux suites localisantes pour Y' et Z'' respectivement, et $\tau_m = T_m \wedge S_m$. Si $s\leq t$, $A \in \underline{\underline{\mathfrak{F}}}_s$, $B \in \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z_s$, on a, Y'^{τ_m}, Z''^{τ_m} et donc L^{τ_m} étant bornés pour tout m :

$$\dot{E}^{\frac{k}{n}}(1_{A\times B}\ L^{\tau_m}_t) = E\,[1_A\ Y'^{\tau_m}_t\ E^{\cdot,\frac{k}{n}}(1_B\ Z''^{\tau_m}_t)]$$

$$= E\,[1_A\ Y'^{\tau_m}_t\ E^{\cdot,\frac{k}{n}}(1_B\ Z''^{\tau_m}_s)]\ .$$

Or $E^{\cdot,\frac{k}{n}}(1_B\ Z''^{\tau_m}_s) \in b\,\underline{\underline{\mathfrak{F}}}_s$ puisque $1_B\ Z''^{\tau_m}_s \in b\underline{\underline{\mathbb{D}}}^z_s$ et par construction de $P^{\cdot,\frac{k}{n}}$.

On en déduit que :

$$\dot{E}^{\frac{k}{n}}(1_{A\times B}\ L^{\tau_m}_t) = E\,[1_A\ Y'^{\tau_m}_s\ E^{\cdot,\frac{k}{n}}(1_B\ Z''^{\tau_m}_s)]$$

$$= \dot{E}^{\frac{k}{n}}(1_{A\times B}\ L^{\tau_m}_s\ ).$$

Donc $L^{\tau_m} \in \underline{\underline{\mathcal{M}}}(\dot{P}^{\frac{k}{n}})$, et, puisque $\tau_m \uparrow +\infty$, on en déduit que $L = Y'Z'' \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(\dot{P}^{\frac{k}{n}})$. Cela implique que $[Y',Z''] \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(\dot{P}^{\frac{k}{n}})$ aussi. On en déduit que $[Y',Z'']$ est purement discontinu. Par conséquent, on a : $<Y'^c,Z''^c> = <Y^c,Z^c> = 0$ $\dot{P}^{\frac{k}{n}}$-p.s.

4) On déduit alors de 1), 2) et 3) que $Z' = (Y,Z)$ est une $\dot{P}^{\frac{k}{n}}$-semimartingale de c.l. $\mathcal{C}'^{n,k}(\cdot,\bar{x}(\cdot))$.

5) Montrons enfin, par récurrence sur k, qu'il existe sur $[o,\frac{k}{n}]$ une semimartingale $\bar{X}$ définie sur $\Omega\times\mathbb{D}^z$ et vérifiant (5.12).

Pour $k=0$, il suffit de poser $\overline{X} = x_o$ $\dot{P}^o$-p.s. Supposons que c'est vrai jusqu'à k et montrons-le pour $k+1$. Si $\overline{X}$ est la $\dot{P}^{\frac{k}{n}}$-semimartingale définie par (5.12), le processus $F^{n,k+1}(\omega,z,\overline{X}(\omega,z))$ est prévisible borné, et on peut poser : $X'_t(\omega,z) = x_o(\omega) + F^{n,k+1}(\omega,z,\overline{X}(\omega,z)).\ Y_t(\omega) + Z_t(z)$ $\dot{P}^{\frac{k+1}{n}}$-p.s. : on définit ainsi une $\dot{P}^{\frac{k+1}{n}}$-semimartingale. Si $t \leq \frac{k}{n}$, on a : $X'_t = \overline{X}_t$ d'après l'hypothèse de récurrence et (5.4). Cela implique, d'après (5.4) aussi, que $F^{n,k+1}_t(\omega,z,X'(\omega,z)) = F^{n,k+1}_t(\omega,z,\overline{X}(\omega,z))$ si $\frac{k}{n} < t \leq \frac{k+1}{n}$. On en déduit que, sur $[o,\frac{k+1}{n}]$:

$$X'_t(\omega,z) = x_o(\omega) + F^{n,k+1}(\omega,z,X'(\omega,z)).\ Y_t(\omega) + Z_t(z) \quad \dot{P}^{\frac{k+1}{n}}\text{-p.s.}$$

Par conséquent c'est vrai aussi pour $k+1$, donc pour tout k. ■

Notons $X^{n,k}$ la $\dot{P}^{\frac{k}{n}}$-semimartingale vérifiant (5.12), et X^n celle correspondant à $k = n^2$. On a alors le résultat suivant qui établit l'existence de solutions-mesure approchées de (1.1).

(5.14) <u>Lemme</u>. *Pour tout* $n \geq 1$, *il existe une probabilité* $\overline{P}^n$ *sur* $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}})$ *telle que :*

i) $\overline{P}^n\big|_{\Omega} = P$, *et* $Z_o = 0$ $\overline{P}^n$-p.s. ;

ii) pour $\overline{P}^n$, Z *est une semimartingale de c.l.* $\mathcal{C}^n(\cdot,X^n(\cdot))$;

iii) pour $\overline{P}^n$, Y *est une semimartingale de mêmes c.l.* $\mathcal{C}^o$ *que pour* P ;

iv) pour $\overline{P}^n$, *le couple* $Z' = (Y,Z)$ *est une semimartingale de c.l.* $\mathcal{C}'^n(\cdot,X^n(\cdot))$;

v) on a aussi, $\overline{P}^n$ -p.s. :

(5.15) $X^n_t(\omega,z,x) = x_o(\omega) + F^n(\omega,z,X^n(\omega,z,x)).\ Y_t(\omega) + Z_t(z)$.

Par conséquent X^n *est aussi une* $\overline{P}^n$ *-semimartingale.*

Démonstration. Posons :

$$(5.16)\quad \overline{P}^n(d\omega,dz,dx) = P(d\omega)\, P^{\omega,n}(dz)\, \varepsilon_{X^n(\omega,z)}(dx)$$
$$= \dot{P}^n(d\omega,dz)\, \varepsilon_{X^n(\omega,z)}(dx).$$

On définit ainsi une probabilité sur $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}})$. Puisque, pour tout $C \in \underline{\underline{D}}^x_s$, $\{X^n(\cdot) \in C\} \in \underline{\underline{F}}_s \times \underline{\underline{D}}^z_s$, et donc $\varepsilon_{X^n(\cdot)}(C) = 1_{\{X^n(\cdot)\in C\}} \in b(\underline{\underline{F}}_s \times \underline{\underline{D}}^z_s)$, toute martingale pour $\dot{P}^n$ est une martingale pour $\overline{P}^n$, et par conséquent Y,Z et Z' sont des $\overline{P}^n$-semimartingales de mêmes c.l. respectives $\mathcal{C}^o$, $\mathcal{C}^n(\cdot,X^n(\cdot))$ et $\mathcal{C}'^n(\cdot,X^n(\cdot))$ que pour $\dot{P}^n$. On vérifie alors facilement les autres propriétés du lemme à partir du lemme (5.11). ■

On en déduit le résultat important suivant.

(5.17) Corollaire. *Le processus* $\overline{Y}$ *est une* $\overline{P}^n$*-semimartingale de c.l.* $\overline{\mathcal{C}}^n$.

Démonstration. La relation (5.15) s'écrit aussi :

$X^n = x_o + H^n \,.\, Z'$ $\quad \overline{P}^n$-p.s.,

avec $H^n = (F^n\ I)$, et il suffit d'appliquer le théorème (6.3) de [6]. ■

Concernant les lois marginales $\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z}$ et $\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^x}$ pour la situation du théorème (4.37), et $\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x}$ pour la situation du théorème (4.34), on a le :

(5.18) Lemme. *Sous les hypothèses* (4.23) , (4.26) *et* (4.27) , *et la condition* (5.1), *les suites de probabilités* $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z})_{n\geq 0}$, $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^x})_{n\geq 0}$ *et* $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x})_{n\geq 0}$ *sont relativement compactes pour la topologie de la convergence faible des mesures sur les espaces respectifs* $\mathbb{D}^z$, $\mathbb{D}^x$ *et* $\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x$ *munis de la topologie* $\mathcal{T}_s$.

Démonstration. Pour la suite $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z})_{n\geq 0}$, c'est exactement la même démonstration que dans le lemme (3.17) de [15]. Pour la deuxième suite, c'est une démonstration analogue à partir des c.l. de X pour $\overline{P}^n$ calculées à partir de $\overline{\mathcal{C}}^n$. Démontrons-le pour la troisième suite : les c.l. $\tilde{\mathcal{C}}^n$ de $\tilde{X} = (Z,X)$ pour

$\overline{P}^n$ s'obtiennent par des formules analogues aux formules (4.30). On obtient alors, comme dans (4.32) :

$$\sum_{i\leq 2d} (V(\tilde{B}^{n,i}) + \tilde{C}^{n,ii}) + (|\xi|^2 \wedge 1) * \tilde{\nu}^n < (9 + \gamma + 2\gamma^2)\,\tilde{A} ;$$

de même :

$$\tilde{\nu}^n(\omega,z,x)([o,t] \times \{|\xi|>a\}) = \int_o^t \nu^o(\omega ; ds \times \{|F_s^n\, y| > a\})$$

$$+ \ \nu^n(\omega,z,x)\ ([o,t] \times \{|(\xi,\xi)| > a\}) \leq \nu^o(\omega ; [o,t] \times \{|y| > \tfrac{a}{\gamma}\})$$

$$+ \int_o^t d\,\tilde{A}_s \ \sup_{z,x} N_s(\omega,z,x)(\{|\xi| > \tfrac{a}{\sqrt{2}}\}) ;$$

le dernier membre tend vers 0 quand $a \uparrow \infty$ pour tout $\omega \in \Omega$ d'après l'hypothèse (4.27) et le théorème de Lebesgue. Comme on a en outre : $\tilde{X}_o = (o,x_o)$ $\overline{P}^n$-p.s. pour tout $n\geq 0$, on a bien le résultat d'après le théorème (2.17) de [7] avec l'hypothèse (2.6). ∎

§5 - b. Démonstration du théorème (5.2).

Pour $n\geq 1$, $t\geq 0$, $\eta>0$ et $\omega\in\Omega$, posons :

$D(n,t,\eta) = \{z \in \mathbb{D}^z : |\Delta z(r)| \leq \eta \text{ pour } t_n < r < t\}$,

t_n étant défini par (5.3) ;

$\tilde{D}(n,t,\eta) = \{\tilde{x} = (z,x) \in \mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x : |\Delta \tilde{x}(r)| \leq \eta \text{ pour } t_n < r < t\}$;

$\tilde{D}'(n,t,\eta) = \{\tilde{x} = (z,X^n(\omega,z)) : z \in D(n,t,\eta/4)\}$.

On a le résultat suivant qu'on démontre exactement comme on a démontré le lemme (3.18) de [15].

(5.19) <u>Lemme</u> (situation (4.37)). *Pour tous* $\varepsilon > 0$ *et* $\omega \in \Omega$, *et pour* $t \leq n$, *on a :*

$$P^{\omega,n}(D(n,t,\eta)^c) \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon(\eta^2 \wedge 1)} (\tilde{A}_{t-}(\omega) - \tilde{A}_{t_n}(\omega)).\ \blacksquare$$

(5.20) <u>Corollaire</u>. (situation (4.34)). *Si* $\tau(\omega)$ *est le plus grand des points* $\tau_i(\omega)$ (il y en a un nombre fini) *de* $[o,t[$ *où* $\gamma|\Delta Y_{\tau_i(\omega)}(\omega)| > \eta/2$, *alors on a , pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$n \geq \frac{1}{t-\tau(\omega)} \Rightarrow P^{\omega,n,X^n}(\tilde{D}(n,t,\eta)^c) \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon(\frac{\eta^2}{16} \wedge 1)} (\tilde{A}_{t-}(\omega) - \tilde{A}_{t_n}(\omega)),$$

où l'on a posé : $P^{\omega,n,X^n}(dz,dx) = P^{\omega,n}(dz)\, \varepsilon_{X^n(\omega,z)}(dx)$, *probabilité sur* $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$ *pour* $\omega \in \Omega$ *fixé.*

<u>Démonstration</u>. Si $n \geq \frac{1}{t-\tau(\omega)}$, l'intervalle $]t_n,t[$ ne contient aucun des points $\tau_i(\omega)$, donc $\gamma|\Delta Y| \leq \frac{\eta}{2}$ sur $]t_n,t[$. On en déduit, d'après (5.15) :

$$n \geq \frac{1}{t-\tau(\omega)},\ z \in D(n,t,\tfrac{\eta}{4}) \Rightarrow |(\Delta z,\Delta X^n)| \leq |\Delta z| + |\Delta X^n| \leq 2|\Delta z| + \gamma|\Delta y| \leq \eta$$

sur $]t_n,t[$. Par conséquent :

$$n \geq \frac{1}{t-\tau(\omega)} \Rightarrow \tilde{D}'(n,t,\eta) \subseteq \tilde{D}(n,t,\eta),$$

d'où l'on déduit le résultat d'après (5.19) puisqu'on a :

$$P^{\omega,n,X^n}(\tilde{D}'(n,t,\eta)^c) = P^{\omega,n}(D(n,t,\tfrac{\eta}{4})^c). \blacksquare$$

Etablissons maintenant des résultats de passage à la limite concernant les fonctions φ^u et $\varphi^{n,u}$.

(5.21) <u>Lemme</u>. (situation (4.34)). *Pour tous* $\mathcal{C}_s$*-compact* K *de* $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$, $\omega \in \Omega$, $s \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a :*

$$\lim_{(n)} E^{\omega,n,X^n}[1_K |\varphi_s^{n,u}(\omega,\cdot) - \varphi_s^u(\omega,\cdot)|] = 0.$$

<u>Démonstration</u>. On peut supposer $s \leq n$. Soit K un $\mathcal{C}_s$-compact de $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$ qu'on peut supposer stable par arrêt et par arrêt strict (i.e. $\tilde{x} \in K \Rightarrow \tilde{x}^t$, $\tilde{x}^{t-} \in K$ pour tout $t \geq 0$). Soit $\omega \in \Omega$. La fonction φ^u définie par (4.13) vérifie aussi l'hypothèse (4.35) comme F et φ^u. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_s(\omega) > 0$ tel que :

(5.22) $\tilde{x},\ \tilde{x}' \in K,\quad \delta(\tilde{x},\tilde{x}') \leq \eta_s(\omega) \Rightarrow |\bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x}) - \bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x}')| \leq \varepsilon.$

Soient $\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \dots < \tau_p(\omega)$ les points t de $[o,s[$ où $\gamma|\Delta Y_t(\omega)| > \frac{\eta_s(\omega)}{4}$. Supposons $]s',s[\ \cap \{\tau_1(\omega),\dots,\tau_p(\omega)\} = \emptyset$, et $|\Delta\tilde{x}| \leq \frac{\eta_s(\omega)}{4}$ sur $]s',s[$. On établit alors, comme dans la démonstration du lemme (3.19) de [15], l'existence d'un nombre $\theta_s(\omega) > 0$ tel que :

(5.23) $\tilde{x} \in K,\quad s' < s \leq s' + \theta_s(\omega),\ ]s',s[\ \cap \{\tau_1(\omega),\dots,\tau_p(\omega)\} = \emptyset,$

$|\Delta\tilde{x}| \leq \frac{\eta_s(\omega)}{4}$ sur $]s',s[\ \Rightarrow\ \delta(\tilde{x}^{s-},\tilde{x}^{s'}) \leq \eta_s(\omega).$

Si $n_o(s,\omega)$ est un entier $> \frac{1}{\theta_s(\omega)}$ et $\frac{1}{s-\tau_p(\omega)}$, on en déduit que :

(5.24) $n \geq n_o(s,\omega),\quad \tilde{x} \in K \cap \tilde{D}(n,s,\frac{\eta_s(\omega)}{4}) \Rightarrow \delta(\tilde{x}^{s_n},\tilde{x}^{s-}) \leq \eta_s(\omega).$

Rappelons que $\bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x}) = \bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x}^{s-})$ et $\varphi^{n,u}_s(\omega,\tilde{x}) = \bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x}^{s_n})$. Puisque K est stable par arrêt et par arrêt strict, (5.22) et (5.24) impliquent :

(5.25) $n \geq n_o(s,\omega),\quad \tilde{x} \in K \cap \tilde{D}(n,s,\frac{\eta_s(\omega)}{4}) \Rightarrow |\varphi^{n,u}_s(\omega,\tilde{x}) - \bar{\varphi}^u_s(\omega,\tilde{x})| \leq \varepsilon.$

La démonstration se poursuit alors comme dans le lemme (3.19) de [15] en y utilisant, entre autre, (4.14) et le corollaire (5.20). ■

On en déduit, en raisonnant exactement de la même façon que dans les lemmes (3.27) et (3.28) de [15] et en utilisant la relative compacité de la suite $(\bar{P}^n|_{\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x})_{n \geq 0}$, le résultat suivant.

(5.26) <u>Lemme</u>. (situation (4.34). *Pour tous* $t \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a :*

$$\lim_{(n)} \bar{E}^n [\int_o^t |\varphi^{n,u}_s - \bar{\varphi}^u_s|\, d\tilde{A}_s] = 0. \quad ■$$

En ce qui concerne la situation du théorème (4.37), on a :

(5.27) Lemme (situation 4.37). *Pour tous* $\mathcal{C}_s$*-compact* K *de* $\mathbb{D}^z$, $\omega \in \Omega$ $s \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a* :

$$\lim_{(n)} \int P^{\omega,n,X^n}(dz,dx) \; [1_K |\bar{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \bar{\varphi}_s^u(\omega,z,x)|] = 0.$$

Démonstration. Soient K un $\mathcal{C}_s$-compact de $\mathbb{D}^z$ supposé stable par arrêt et par arrêt strict, $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{D}^x$. La fonction $\bar{\varphi}^u$ vérifie aussi l'hypothèse (4.39) comme F et φ^u. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_s(\omega) > 0$ tel que :

$$(5.28) \quad z,z' \in K, \quad \delta(z,z') \leq \eta_s(\omega) \Rightarrow |\bar{\varphi}_s^u(\omega,z,x) - \bar{\varphi}_s^u(\omega,z',x)| \leq \varepsilon.$$

On établit, comme dans la démonstration du lemme (3.19) de [15], l'existence d'un entier $n_o(s,\omega)$ tel que (5.28) implique :

$$(5.29) \quad n \geq n_o(s,\omega), \quad z \in K \cap D(n,s,\frac{\eta_s(\omega)}{4}) \Rightarrow |\bar{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \bar{\varphi}_s^u(\omega,z,x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, d'après (4.14) :

$$(5.30) \quad \int P^{\omega,n,X^n}(dz,dx) \; [1_K |\bar{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \bar{\varphi}_s^u(\omega,z,x)|]$$

$$\leq \int P^{\omega,n}(dz) \; [\sup_x 1_{K \cap D(n,s,\frac{\eta_s(\omega)}{4})} |\bar{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \bar{\varphi}_s^u(\omega,z,x)|]$$

$$+ \; 2(\alpha+\gamma') \, P^{\omega,n} \, (D(n,s,\frac{\eta_s(\omega)}{4})^c).$$

On poursuit la démonstration comme dans le lemme (3.19) de [15] en y utilisant cette fois-ci le lemme (5.19). ■

On en déduit, en raisonnant encore exactement de la même façon que dans les lemmes (3.27) et (3.28) de [15] et en utilisant la relative compacité de la suite $(\bar{P}^n|_{\mathbb{D}^z})_{n \geq 0}$, le résultat suivant.

(5.31) <u>Lemme</u> (situation (4.37)). *Pour tous* $t \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$ *, on a :*

$$\lim_{(n)} \int \overline{P}^n(d\omega,dz,dx) \left[\int_0^t |\overline{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \overline{\varphi}_s^u(\omega,z,x)| \, d\tilde{A}_s(\omega)\right] = 0. \blacksquare$$

Pour $z \in \mathbb{D}^z$ fixé, soit h l'application de $\mathbb{D}^x$ dans $\mathbb{D}^v$ définie par : $h(x) = v = x - z$: h est bijective $\mathcal{T}_u$-bicontinue. Posons $V^n = X^n - Z = h(X^n)$, où X^n est la $\overline{P}^n$ -semimartingale vérifiant (5.15). Posons encore :

$$\overline{P}_h^n(d\omega,dz,dv) = P(d\omega)\, P^{\omega,n}(dz)\, \varepsilon_{V^n(\omega,z)}(dv) = \dot{P}^n(d\omega,dz)\, \varepsilon_{V^n(\omega,z)}(dv),$$

probabilité sur $\Omega \times \mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^v$. On a alors :

$(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^x}) \circ h^{-1} = \overline{P}_h^n\big|_{\mathbb{D}^v}$, et, d'après (5.18), la suite de probabilités

$(\overline{P}_h^n\big|_{\mathbb{D}^v})_{n \geq 0}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures sur l'espace $\mathbb{D}^v$ muni de la topologie $\mathcal{T}_s$ (voir [1]).

V^n est une $\overline{P}_h^n$-semimartingale sur $(\Omega \times \mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^v, \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^v)$.

Posons de même : $\mathbb{D}^v_{\gamma\,|\Delta Y(\omega)|} = \{v \in \mathbb{D}^v : |\Delta v(t)| \leq \gamma |\Delta Y_t(\omega)|$ pour tout $t > 0\}$, et $\mathbf{D}^v_\gamma = \{(\omega,z,v) : v \in \mathbb{D}^v_{\gamma\,|\Delta Y(\omega)|}\}$.

On a le résultat suivant (lemme (4.2) de [9]).

(5.32) <u>Lemme</u>. $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$ *est un ensemble fermé pour* $\mathcal{T}_u$ *et* $\mathcal{T}_s$, *et les 2 topologies* $\mathcal{T}_u$ *et* $\mathcal{T}_s$ *induisent la même topologie sur* $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$. $\blacksquare$

On a : $|\Delta V_t^n| \leq \gamma |\Delta Y_t|$ $\overline{P}_h^n$ - p.s. pour tout $t > 0$.

Donc $V^n(\omega) \in \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$, et $\overline{P}_h^n(\mathbb{D}^v_\gamma) = 1$ pour tout n.

Pour $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^{m+2d}$, notons $\overline{\varphi}'^u_t$ l'application définie sur $\Omega \times \mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^v$ par :

$$\overline{\varphi}'^u_t(\omega,z,v) = \overline{\varphi}^u_t(\omega,z,v+z)$$

$$= \varphi'^{F',(u_1,u_3)}_t(\omega,z,v) + \varphi'^{(u_2,u_3)}_t(\omega,z,v),$$

avec, pour $u \in \mathbb{R}^{m+d}$: $\varphi'^{F',u}_t(\omega,z,v) = \varphi^{F,u}_t(\omega,z,v+z)$ (voir hypothèse (4.38)).

On a alors le lemme suivant.

(5.33) Lemme (situation (4.37)). *Pour tous* $\mathcal{C}_s$*-compact* K *de* $\mathbb{D}^v, \omega \in \Omega$, $s \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a* :

$$\lim_{(n)} \sup_z \sup_{v \in K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}} |\bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v^{s_n}) - \bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v)| = 0.$$

Démonstration. Soit K un $\mathcal{C}_s$-compact de $\mathbb{D}^v$ supposé stable par arrêt et par arrêt strict. La fonction $\bar{\varphi}'^u$ vérifie aussi l'hypothèse (4.38) comme F' et φ'^u. D'après (5.32), $K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$ est un $\mathcal{C}_u$-compact de $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$, et ainsi la famille d'applications $\{v \to \bar{\varphi}'^u_t(\omega,z,v)\}_{z \in \mathbb{D}^z}$ est $\mathcal{C}_u$-uniformément équicontinue sur $K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_s(\omega) > 0$ tel que :

(5.34) $v, v' \in K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$, $\delta(v,v') \leq \eta_s(\omega) \Rightarrow |\bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v) - \bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v')| \leq \varepsilon$.

Soient $\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \ldots < \tau_p(\omega)$ les points t de $[o,s[$ où $\gamma|\Delta Y_t(\omega)| > \frac{\eta_s(\omega)}{4}$. Si $v \in \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$ et si $]s',s[\cap \{\tau_1,\ldots,\tau_p\} = \emptyset$, on a : $|\Delta v| \leq \frac{\eta_s(\omega)}{4}$ sur $]s',s[$. Comme dans la démonstration de (5.21), il existe alors un nombre $\theta_s(\omega) > 0$ tel que :

(5.35) $v \in K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$, $s' < s \leq s' + \theta_s(\omega)$,

$$]s',s[\cap \{\tau_1,\ldots,\tau_p\} = \emptyset \Rightarrow \delta(v^{s-}, v^{s'}) \leq \eta_s(\omega).$$

Si $n_o(s,\omega)$ est un entier $> \frac{1}{\theta_s(\omega)}$ et $\frac{1}{s-\tau_p(\omega)}$, alors (5.34) et (5.35) impliquent :

$$n \geq n_o(s,\omega),\quad v \in K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|} \Rightarrow |\bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v^{sn}) - \bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v)| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a bien le résultat. ■

On en déduit, en raisonnant exactement de la même façon que dans le lemme (3.27) de [15], le lemme suivant :

(5.36) Lemme (situation (4.37)). *Pour tous* $\mathcal{C}_s$*-compact* K *de* $\mathbb{D}^v, \omega \in \Omega$, $t \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a* :

$$\lim_{(n)} \sup_z \sup_{v \in K \cap \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}} \int_o^t |\bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v^{sn}) - \bar{\varphi}'^u_s(\omega,z,v)|\, d\tilde{A}_s(\omega) = 0. \blacksquare$$

(5.37) <u>Lemme</u> (situation (4.37)). *Pour tous* $t \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a* :

$$\lim_{(n)} \int \overline{P}_h^n(d\omega,dz,dv) \left[\int_0^t |\overline{\varphi}'^{n,u}_s(\omega,z,v) - \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z^{s_n},v)| \, d\tilde{A}_s(\omega)\right] = 0.$$

<u>Démonstration</u>. Posons $U^n(\omega,z,v) = \int_0^t |\overline{\varphi}'^{n,u}_s(\omega,z,v) - \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z^{s_n},v)| \, d\tilde{A}_s(\omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, d'après la relative compacité de la suite $(\overline{P}_h^n|_{\mathbb{D}^v})_{n\geq 0}$, un $\mathcal{C}_s$-compact K de $\mathbb{D}^v$ tel que $\overline{P}_h^n|_{\mathbb{D}^v}(K) \geq 1-\varepsilon$ pour tout n.

Puisque U^n est uniformément bornée en n (par $2(\alpha+\gamma')\tilde{A}_t$), il suffit par conséquent de montrer que $\overline{E}_h^n(U^n 1_{\Omega\times\mathbb{D}^z\times K}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $\mathcal{C}_s$-compact K de $\mathbb{D}^v$.

Posons $W^n(\omega) = \sup\limits_{z} \sup\limits_{v\in K\cap\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}} \int_0^t |\overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z,v^{s_n}) - \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z,v)| d\tilde{A}_s(\omega)$:

W^n est $\underline{\underline{\mathcal{F}}}$-mesurable puisqu'elle est uniformément bornée en n et que $\sup\limits_{z} \int_0^t |\overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z,v^{s_n}) - \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z,v)| \, d\tilde{A}_s(\omega)$ est par conséquent $\mathcal{C}_s$-continue en v sur l'ensemble $K\cap\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$ d'après (4.38) ; et on a :

$\overline{E}_h^n(U^n 1_{\Omega\times\mathbb{D}^z\times K}) \leq E(W^n)$ puisque $\overline{P}_h^n(\mathbb{D}^v_\gamma) = 1$. Comme $W^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après (5.36), $E(W^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ aussi d'après le théorème de Lebesgue, d'où le résultat. ■

On a alors le résultat suivant analogue à (5.26).

(5.38) <u>Lemme</u> (situation (4.37)). *Pour tous* $t \geq 0$ *et* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, *on a* :

$$\lim_{(n)} \overline{E}^n \left[\int_0^t |\overline{\varphi}^{n,u}_s - \overline{\varphi}^{u}_s| \, d\tilde{A}_s\right] = 0.$$

<u>Démonstration</u>. Ecrivons : $\overline{\varphi}^{n,u}_s(\omega,z,x) - \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z,x) = \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z^{s_n},x^{s_n}) -$

$\overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z^{s_n},x) + \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z^{s_n},x) - \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z,x) = \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z^{s_n},v^{s_n}) - \overline{\varphi}'^{u}_s(\omega,z^{s_n},v)$

$+ \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z^{s_n},x) - \overline{\varphi}^{u}_s(\omega,z,x)$,

avec $v = x - z = h(x)$. On en déduit :

$$\overline{E}^n \left[\int_o^t |\overline{\varphi}_s^{n,u} - \overline{\varphi}_s^u \mid d\tilde{A}_s\right] \leq \int \overline{P}_h^n(d\omega,dz,dv) \left[\int_o^t |\overline{\varphi}'^{n,u}_s(\omega,z,v)\right.$$
$$\left. - \overline{\varphi}'^u_s(\omega,z^{s_n},v) \mid d\tilde{A}_s(\omega)\right] + \int \overline{P}^n(d\omega,dz,dx) \left[\int_o^t |\overline{\varphi}_s^u(\omega,z^{s_n},x) - \overline{\varphi}_s^u(\omega,z,x)| \, d\tilde{A}_s(\omega)\right].$$

Par conséquent on a bien le résultat d'après les lemmes (5.31) et (5.37).■

On note $B_{mc}(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables bornées et telles que $U(\omega,z,x)$ soit $\mathcal{C}_s$-continue sur $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^x$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(5.39) <u>Définition</u>. *On note* $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$ *l'ensemble de toutes les probabilités sur* $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{\mathcal{F}}}})$ *muni de la topologie la moins fine rendant continues les fonctions* $\mu \to \mu(U)$, $U \in B_{mc}(\overline{\Omega})$. ■

Puisque $\overline{P}^n\big|_{\Omega} = P$ pour tout $n \geq 0$, et que les 2 suites $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z})_{n\geq 0}$ et $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^x})_{n>0}$ pour la situation (4.37), et la suite $(\overline{P}^n\big|_{\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x})_{n\geq 0}$ pour la situation (4.34), sont relativement compactes, la suite $(\overline{P}^n)_{n\geq 0}$ est aussi relativement compacte dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$ d'après le théorème (3.3) de [10].
Si $\overline{P}$ est une probabilité limite de la suite $(\overline{P}^n)_{n\geq 0}$, alors la probabilité $\overline{P}_h$ définie sur $(\Omega\times\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^v,\ \underline{\underline{\mathcal{F}}}\times\underline{\underline{\mathbb{D}}}^z\times\underline{\underline{\mathbb{D}}}^v)$ par $\overline{P}_h(A\times B\times C) = \overline{P}(A\times B\times h^{-1}(C))$ est une probabilité limite de la suite $(\overline{P}_h^n)_{n\geq 0}$ qui est évidemment aussi relativement compacte. ■

Posons $V = X - Z = h(X)$; $\overline{Y}' = (Y,Z,V+Z)$; $U'(\omega,z,v) = U(\omega,z,v+z)$ avec $U \in B_{mc}(\overline{\Omega})$;

et enfin : $\overline{\Phi}'^u(\omega,z,v) = \overline{\Phi}^u(\omega,z,v+z)$, où $\overline{\Phi}^u$ est défini comme dans (4.18) ; ce qui donne, d'après (4.19) :

$$\overline{\Phi}'^u = e^{i\langle u|\overline{Y}'_-\rangle}\ \overline{\varphi}'^u \cdot \tilde{A}.$$

(5.40) <u>Lemme</u> (situation 4.37)). *La fonction* $U'(\omega,z,v) = U(\omega,z,v+z)$ *pour* $U \in B_{mc}(\overline{\Omega})$ *, et, pour tout* $t \geq 0$, *les fonctions* $\overline{Y}'_t(\omega,z,v)$ *et* $\overline{\Phi}'^u_t(\omega,z,v)$ *sont* $\mathcal{C}_s$*-continues en* v *sur* $\mathbb{D}^v_{Y|\Delta Y|}$.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{D}^z$ fixé, la fonction $v \to v+z$ est $\mathcal{C}_u$-continue, donc $\mathcal{C}_s$-continue sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$ d'après (5.32) ; et puisque U est $\mathcal{C}_s$-continue en x, la fonction composée $v \to U(\omega,z,v+z) = U'(\omega,z,v)$ est $\mathcal{C}_s$ -continue sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$. Pour les autres fonctions, il suffit, d'après (5.32) toujours, de montrer qu'elles sont $\mathcal{C}_u$-continues en v sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$. Puisque $x \to \overline{Y}_t(\omega,z,x)$ est $\mathcal{C}_u$-continue pour tout $t \geq 0$, la fonction composée $v \to \overline{Y}_t(\omega,z,v+z) = \overline{Y}'_t(\omega,z,v)$ est $\mathcal{C}_u$-continue sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$. On déduit de cette dernière propriété, ainsi que de l'hypothèse (4.38), de la majoration (4.14) et d'une application du théorème de Lebesgue, que $\overline{\Phi}'^u_t$ est aussi $\mathcal{C}_u$-continue en v sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$. ■

On peut alors démontrer le théorème (5.2).

Démonstration du théorème (5.2)

Démontrons d'abord le cas de la situation (4.37).

Supposons que la suite $(\overline{P}^n)_{n\geq 0}$ tend vers la probabilité limite $\overline{P}$ dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$. Montrons que $\overline{P}$ est une solution-mesure de l'e.d.s. (1.1).

On a $\overline{P}\big|_\Omega = P$, $X_o = x_o$ et $Z_o = o$ $\overline{P}$-p.s. puisque $\overline{P}^n\big|_\Omega = P$, $X_o = x_o$ et $Z_o = 0$ $\overline{P}^n$-p.s. pour tout n.

Choisissons $\mathcal{C}'$ comme dans (4.16). Pour $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$, posons alors :
$M = e^{i<u|\overline{Y}>} - \overline{\Phi}^u$, $M^n = e^{i<u|\overline{Y}>} - \overline{\Phi}^{n,u}$, $\overline{\Phi}^u$ étant défini comme dans (4.18) et $\overline{\Phi}^{n,u}$ étant défini par (5.6) avec $k = n^2$.

Soit $\Delta = \{t : \overline{P}(\Delta Z_t \neq 0)=0\}$. Soient $t \in \Delta$ et $U \in B_{mc}(\overline{\Omega}) \cap \overline{\underline{\underline{\mathcal{F}}}}_t$. On peut écrire, d'après (4.19) et (5.7) (avec $k = n^2$) :

$$(5.41)\quad \overline{E}^n(U M^n_t) - \overline{E}(U M_t) = [\overline{E}^n_h(U' e^{i<u|\overline{Y}'_t>}) - \overline{E}_h(U' e^{i<u|\overline{Y}'_t>})]$$
$$- \overline{E}^n[U\, e^{i<u|\overline{Y}_->}(\overline{\varphi}^{n,u} - \overline{\varphi}^u) \cdot \tilde{A}_t]$$
$$- [\overline{E}^n_h(U' \overline{\Phi}'^u_t) - \overline{E}_h(U' \overline{\Phi}'^u_t)] .$$

Or les fonctions $U'\, e^{i<u|\overline{Y}'_t>}$ et $U'\, \overline{\Phi}'^u_t$ sont $\mathcal{C}_s$-continues en z puisque $t \in \Delta$ et d'après l'hypothèse (4.40) et la relation $\overline{\Phi}^u = \Phi^{F,u} + \Phi^u$, et sont

$\mathcal{C}_s$-continues en v sur $\mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y|}$ d'après le lemme (5.40). Puisque $\overline{P}^n_h(\mathbb{D}^v_\gamma) = 1$ pour tout n, ce qui implique $\overline{P}_h(\mathbb{D}^v_\gamma) = 1$ puisque les coupes $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^v_{\gamma|\Delta Y(\omega)|}$ de $\mathbb{D}^v_\gamma$ sont $\mathcal{C}_s$-fermées dans $\mathbb{D}^z \times \mathbb{D}^v$ et d'après la proposition (2.11) de [8], on en déduit que les premier et troisième termes du membre de droite de (5.41) tendent vers 0 quand $n \to +\infty$; le deuxième terme tend aussi vers 0 quand $n \to +\infty$ d'après (5.38). Donc on a, pour tous $t \in \Delta$ et $U \in B_{mc}(\overline{\Omega}) \cap \overline{\mathfrak{F}}_t$:

$$\overline{E}^n(U\, M^n_t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{E}(U\, M_t).$$

Puisque M^n est une $\overline{P}^n$-martingale d'après (5.17) et le théorème 1 de [4], on en déduit que :

$$\overline{E}\,[U(M_t - M_s)] = 0 \quad \text{pour tous } s,t \in \Delta \text{ avec } s \leq t \text{ et } U \in B_{mc}(\overline{\Omega}) \cap \overline{\mathfrak{F}}_s.$$

Par un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration du théorème (3.2) de [15], on montre alors que le processus M est une $\overline{P}$-martingale sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}})$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$. D'après le théorème 1 de [4] encore, on en déduit que $\overline{Y}$ est une $\overline{P}$-semimartingale de c.l. $\mathcal{C}$ défini par (4.17). Par conséquent, d'après le théorème (3.3), $\overline{P}$ est bien solution-mesure de (1.1).

Le cas de la situation (4.34) se traite de la même façon en utilisant la $\mathcal{C}_s$-continuité de $\overline{\Phi}^u$ par rapport à $\tilde{x} = (z,x)$ d'après (4.36), et le lemme (5.26). ■

On va maintenant étudier le cas général qui se déduira du cas particulier du paragraphe précédent en arrêtant Y et $\mathcal{C}$ à des t.a. bien choisis et en montrant que l'e.d.s. (1.1) correspondante admet une solution-mesure.

§ 6 - CAS GENERAL : DEMONSTRATION DES THEOREMES (4.34) et (4.37).

On a d'abord le résultat suivant.

(6.1) Théorème. *Sous les hypothèses du théorème (4.34), ou du théorème (4.37), et si* T *est un t.a. tel que* $\tilde{A}_T$ *soit borné, il existe sur* $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}})$ *au moins une solution-mesure de l'e.d.s. suivante :*

$$(6.2)\quad \begin{cases} dX_t = F_t(Z,X)\, d\,Y_t^T + d\,Z_t\,[\mathscr{C}^T(Z,X)]\,, \\ X_o = x_o, \\ Z_o = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Montrons que les hypothèses du théorème (5.2) sont vérifiées pour F, Y^T, Z, X et $\mathscr{C}^T$.

D'après les relations (4.4), on a pour $\mathscr{C}^T$: $B^T = b\cdot\tilde{A}^T, C^T = c\cdot\tilde{A}^T$, $\nu^T(dt,d\xi) = N_t(d\xi)d\,\tilde{A}_t^T$, avec des relations analogues pour $\mathscr{C}^{o,T}$ triplet des c.l. de Y^T ; on en déduit, d'après (4.6) :

$\sum_{i\leq d} (V(B^{T,i}) + C^{T,ii}) + (|\xi|^2 \wedge 1) * \nu^T < \tilde{A}^T$ avec en outre $E(\tilde{A}_t^T) \leq E(\tilde{A}_T) < \infty$ pour tout t. Donc l'hypothèse (4.26), ainsi que la condition (5.1), sont vérifiées. L'hypothèse (4.25) est aussi vérifiée pour ν^T. Les hypothèses (4.23), (4.27) et (4.35) pour la situation (4.34), et (4.23), (4.27), (4.38) et (4.39) pour la situation (4.37), portant sur les éléments inchangés F et $\mathfrak{D}$, restent valables ici.

Pour $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^{m+2d}$, les fonctions :

$\Phi'^{F,u} = e^{i<u|(Y_-^T,Z_-,X_-)>}\varphi^{F,(u_1,u_3)}\cdot\tilde{A}^T$, et $\Phi'^{u} = e^{i<u|(Y_-^T,Z_-,X_-)>}\varphi^{(u_2,u_3)}\cdot\tilde{A}^T$

sont, à des facteurs déterministes en z et x près, égales respectivement à $(\Phi^{F,u})^T$ et $(\Phi^u)^T$, et vérifient par conséquent l'hypothèse (4.36) pour la situation (4.34) et (4.40) pour la situation (4.37).

Donc toutes les hypothèses du théorème (5.2) sont satisfaites. On en déduit, d'après ce théorème, qu'il existe une solution-mesure $\overline{P}^T$ de (6.2) sur $(\overline{\Omega},\underline{\underline{\mathscr{F}}})$.■

(6.3) Remarque. Si les hypothèses du théorème (6.1) sont satisfaites, on affectera systématiquement de la lettre T, comme on l'a déjà fait pour Y, $\mathscr{C}$ et $\overline{P}$, tous les processus, c.l. et probabilités considérés au paragraphe 5 et qui permettent de montrer l'existence d'une solution-mesure de l'e.d.s. (6.2). On écrira par exemple $\mathscr{C}^{T,n}$ l'arrêt de $\mathscr{C}^T$ en n, défini comme l'est $\mathscr{C}^n$; de même on notera $\overline{P}^{T,n}$ la solution-mesure approchée de (6.2) correspondante à

$\mathscr{C}^{T,n}$ et construite comme au lemme (5.14). On sait que $\overline{P}^T$ est la probabilité limite dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$ de la suite $(\overline{P}^{T,n})_{n\geq 0}$, et qu'elle fait du triplet (Y^T,Z,X) une semimartingale de c.l. $\overline{\mathscr{C}}^T$, $\overline{\mathscr{C}}$ étant défini par (4.17) (voir démonstration du théorème (5.2)). ∎

Voyons maintenant deux résultats techniques dont nous aurons besoin pour la démonstration des théorèmes (4.34) et (4.37).

(6.4) Lemme. *Sous les hypothèses du théorème* (6.1) , *on a* : $Z = Z^T$ $\overline{P}^T$-p.s., *et par conséquent* : $X = X^T$ $\overline{P}^T$-p.s., *et* $(Y^T,Z,X) = \overline{Y}^T$ $\overline{P}^T$-p.s.

Démonstration. Soient $F = \{Z = Z^T\} = \{(\omega,z,x) : z = z^{T(\omega)}\} \in \underline{\underline{\mathfrak{F}}}$, et $F' = \{(\omega,z) : z = z^{T(\omega)}\} \in \underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z$. Puisque la suite $(\overline{P}^{T,n})_{n\geq 0}$ a pour limite $\overline{P}^T$ dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$, la suite des probabilités marginales $(\dot{P}^{T,n} = \overline{P}^{T,n}|_{\Omega\times\mathbb{D}^z})_{n\geq 0}$ a pour limite $\dot{P}^T = \overline{P}^T|_{\Omega\times\mathbb{D}^z}$. Comme, d'après le lemme (4.5) de [15], $Z = Z^T$ $\dot{P}^T$-p.s., et que $F = F' \times \mathbb{D}^x$, on en déduit que : $Z = Z^T$ $\overline{P}^T$-p.s. aussi. Puisque $X = x_o + F(X)\bullet Y^T + Z$ $\overline{P}^T$-p.s., on en déduit que : $X = x_o + F(X)\bullet Y^T + Z^T$ $\overline{P}^T$-p.s., c'est-à-dire $X = X^T$ $\overline{P}^T$-p.s. ∎

(6.5) Lemme. *Sous les hypothèses du théorème* (6.1) , *si* $M = e^{i\langle u|\overline{Y}\rangle} - \overline{\Phi}^u$ *, où* $\overline{\Phi}^u = \Phi^{F,u} + \Phi^u$, *alors* M^T *est une* $\overline{P}^T$*-martingale sur* $(\overline{\Omega},\underline{\underline{\overline{\mathfrak{F}}}})$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$.

Démonstration. D'après le théorème (6.1) et le théorème 1 de [4], le processus $M' = e^{i\langle u|(Y^T,Z,X)\rangle} - e^{i\langle u|(Y^T_-,Z_-,X_-)\rangle}\varphi^{F,(u_1,u_3)}\cdot\tilde{A}^T - e^{i\langle u|(Y^T_-,Z_-,X_-)\rangle}\varphi(u_2,u_3)\cdot\tilde{A}^T$ est une $\overline{P}^T$-martingale sur $(\overline{\Omega},\underline{\underline{\overline{\mathfrak{F}}}})$ pour tout $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^{m+2d}$. Il suffit alors de voir que $M' = M^T$ $\overline{P}^T$-p.s. d'après le lemme (6.4). ∎

Démonstration des théorèmes (4.34) et (4.37).

Puisque les processus A^o et $A(\omega,z,x)$ défini par (4.2) sont à sauts bornés, on peut choisir A', et par conséquent $\tilde{A}$ aussi, à sauts bornés. Puisqu'en outre $\tilde{A} \in \underline{\underline{\mathfrak{P}}} \cap \underline{\underline{\mathscr{V}}}^+_o$, il existe alors une suite $(T_p)_{p\geq 0}$ de t.a. prévisibles >0, croissant P-p.s. vers $+\infty$ telle que $\tilde{A}_{T_p}$ soit borné pour tout $p \geq 0$.

On peut alors considérer la suite $(\overline{P}^{T_p})_{p\geq 0}$ des solutions-mesure des e.d.s.

(6.2) avec T prenant successivement les valeurs $T_o, T_1, \ldots, T_p, \ldots$, chacune des probabilités $\overline{P}^{T_p}$ étant limite de la suite de probabilités approchées $(\overline{P}^{T_p,n})_{n\geq 0}$.

Montrons que cette suite est relativement compacte dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$. Puisque $\overline{P}^{T_p}\big|_{\Omega} = P$ pour tout $p\geq 0$, il suffit, d'après le théorème (3.3) de [10], de montrer, dans la situation (4.37), que les deux suites $(\overline{P}^{T_p}\big|_{\mathbb{D}^z})_{p\geq 0}$ et $(\overline{P}^{T_p}\big|_{\mathbb{D}^x})_{p\geq 0}$ le sont. Pour la première suite, c'est exactement la même démonstration que dans celle du théorème (2.11) de [15]. Pour la deuxième suite, calculons les c.l. $\mathcal{C}''$ de X pour $\overline{P}^{T_p}$; on trouve :

$$\nu''([o,t]\times A) = \int_o^t \int_{\mathbb{R}^m} \nu^{o,T_p}(ds,dy)\ 1_A(F_s y) + \int_{\mathbb{R}^d} \nu^{T_p}([o,t]\times d\xi)\ 1_A(\xi),$$

$A\in \underline{\underline{\mathcal{B}}}(\mathbb{R}^d)$;

$$B'' = F\cdot B^{o,T_p} + B^{T_p}\ ;\quad C'' = c''\cdot \tilde{A}^{T_p}, \text{ avec } c'' = F c^o\, {}^tF + c.$$

On en déduit, d'après (4.5), (4.6) et (4.23), que :

$$A'' = \sum_{i\leq d} (V(B''^i) + C''^{ii}) + (|\xi|^2\wedge 1) * \nu'' < (2+\gamma^2)\, \tilde{A}^{T_p} < (2+\gamma^2)\,\tilde{A}$$

pour tout $p\geq 0$.

De même on a :

$$\nu''([o,t]\times\{|\xi|>a\}) \leq \nu^{o,T_p}([o,t]\times\{|y|>\tfrac{a}{\gamma}\}) + \int_o^{T_p\wedge t} d\tilde{A}_s \sup_{z,x} N_s(\{|\xi|>a\})$$

$$\leq \nu^o([o,t]\times\{|y|>\tfrac{a}{\gamma}\}) + \int_o^t d\tilde{A}_s \sup_{z,x} N_s(\{|\xi|> a\}) \quad \text{pour tout } p\ ;$$

le dernier membre de cette double inégalité tend vers 0 quand $a\uparrow\infty$ d'après l'hypothèse (4.27) et le théorème de Legesgue. Puisqu'en plus $X_o = x_o$ $\overline{P}^{T_p}$-p.s. pour tout p, la suite $(\overline{P}^{T_p}\big|_{\mathbb{D}^x})_{p\geq 0}$ est bien relativement compacte d'après le théorème (2.17) de [7] avec l'hypothèse (2.6).

Pour la situation (4.34), on montre de la même façon que la suite $(\overline{P}^{T_p}\big|_{\mathbb{D}^z\times\mathbb{D}^x})_{p\geq 0}$ est relativement compacte en s'inspirant des calculs faits dans la démonstration du lemme (5.18).

Soit $\overline{P}$ une probabilité limite de la suite $(\overline{P}^{T_p})_{p\geq 0}$ dans $\underline{\underline{M}}_{mc}(\overline{\Omega})$. Montrons que $\overline{P}$ est solution-mesure de (1.1). On a $\overline{P}\big|_{\Omega} = P, X_o = x_o$ et $Z_o = 0$ $\overline{P}$-p.s. puisque c'est vrai pour $\overline{P}^{T_p}$ pour tout p. Supposons pour l'instant que $\overline{P}$ coïncide avec $\overline{P}^{T_p}$ sur $\overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}}_{T_p-}$ pour tout p.

Choisissons $\mathscr{C}'$ comme dans (4.16). On sait, d'après le lemme (6.5), que $M = e^{i\langle u|\overline{Y}\rangle} - \overline{\Phi}^u$ est une $\overline{P}^{T_p}$-martingale pour tout p et tout $u \in \mathbb{R}^{m+2d}$. On montre alors exactement comme dans la démonstration du théorème (2.11) de [15] que M est une $\overline{P}$-martingale locale sur $(\overline{\Omega}, \overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}})$. D'après le théorème 1 de [4], on en déduit que $\overline{Y}$ est une $\overline{P}$-semimartingale de c.l. $\overline{\mathscr{C}}$ défini par (4.17). Par conséquent, d'après le théorème (3.3), $\overline{P}$ est bien solution-mesure de l'e.d.s. (1.1) sur $(\overline{\Omega}, \overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}})$.

Il reste à démontrer le résultat suivant.

(6.6) <u>Lemme</u>. *La probabilité limite* $\overline{P}$ *coïncide avec* $\overline{P}^{T_p}$ *sur* $\overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}}_{T_p-}$ *pour tout* $p \geq 0$.

<u>Démonstration.</u> On démontre, exactement comme dans le 1) de la démonstration du lemme (4.7) de [15], que $\dot{P}^{T_\ell,n}$ coïncide avec $\dot{P}^{T_p,n}$ sur $(\underline{\underline{\mathfrak{F}}} \times \underline{\underline{\mathbb{D}}}^z)_{T_p \wedge n}$ pour tout $\ell \geq p$ et tout n (avec les notations du lemme (5.11)). Comme $X^{T_\ell,n}$ coïncide évidemment avec $X^{T_p,n}$ sur $[\![o, T_p \wedge n]\!]$ pour tout $\ell \geq p$, on en déduit, d'après la formule (5.16) définissant $\overline{P}^{T_p,n}$, que $\overline{P}^{T_\ell,n}$ coïncide avec $\overline{P}^{T_p,n}$ sur $\overline{\underline{\underline{\mathfrak{F}}}}_{T_p \wedge n}$ pour tout n et tout $\ell \geq p$.

La démonstration se poursuit alors exactement comme dans celle du lemme (4.7) de [15]. ∎

BIBLIOGRAPHIE

1 - P. BILLINGSLEY : Convergence of probability measures. J. WILEY and Sons, New-York, 1968.

2 - C. DELLACHERIE, P.A. MEYER : Probabilités et Potentiel, tome I, Chapîtres I à IV, Hermann, Paris, 1975.

3 - C. DELLACHERIE, P.A. MEYER : Probabilités et Potentiel, tome II, Chapîtres V à VIII, théorie des martingales. Hermann, 1979.

4 - B. GRIGELIONIS, R. MIKULEVICIUS : On weak convergence of semimartingales. Lit. Math. J. XXI, 3, p. 9-24, 1981.

5 - J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales. L N 714, 1979.

6 - J. JACOD : Weak and strong solutions of stochastic differential equations. Stochastics 3, p. 171-191, 1980.

7 - J. JACOD, J. MEMIN : Un nouveau critère de compacité relative pour des suites de processus. Sém. Proba. Rennes (79), p. 1-27, 1980.

8 - J. JACOD, J. MEMIN : Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité. Sém. Proba. XV, L N 850, p. 529-546, 1981.

9 - J. JACOD, J. MEMIN : Existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving semimartingales. Stochastics 4, p. 317-337, 1980.

.../...

/... (Bibliographie)

10 - J. JACOD, J. MEMIN : Weak and strong solutions of stochastic differential equations : existence and stability. Stochastic integrals. D. Williams. L N 851, 1981.

11 - J. JACOD, P. PROTTER : Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques. Sém. Proba. XVI, L N 920, p. 447-458.

12 - P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, L N 511, p. 245-400, 1976.

13 - J. PELLAUMAIL : Solutions faibles et semimartingales. Sém. Proba. XV, L N 850, p. 561-586, 1981.

14 - D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan : Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag (g.s. 233), Berlin, 1979.

15 - M. TRAKI : Existence de solutions d'un problème de martingales. A paraître.

16 - M. TRAKI : Existence de solutions d'un problème de martingales (énoncé des résultats). C.R.A.S. Paris, t. 297, Série I, p. 353-356, 1983.

I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX