

JEAN MEMIN

**Contiguïté et complète séparabilité Décompositions de Raoult ;  
comportement asymptotique sous hypothèse de contiguïté**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1982, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-27

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1982\\_\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982__1_A9_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONTIGUITE ET COMPLETE SEPARABILITE

Décompositions de Raoult ; comportement  
asymptotique sous hypothèse de contiguïté

Jean MEMIN.

1 - INTRODUCTION :

Soit  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces mesurables ; pour chaque  $n$ , on considère un couple  $(P_n, Q_n)$  de probabilités définies sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ .

(1-1) Définition : On dit que  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$  ( $(Q_n) \triangleleft (P_n)$ ) si pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $A_n \in \mathcal{F}_n$  on a l'implication :

$$(1) \quad P_n[A_n] \rightarrow 0 \Rightarrow Q_n[A_n] \rightarrow 0.$$

(1-2) Définition : On dit que  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont complètement séparables si on peut trouver une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $A_n \in \mathcal{F}_n$  telle que l'on ait :

$$(2) \quad P_n[A_n] \rightarrow 1 \text{ et } \liminf_n Q_n[A_n] = 0.$$

(1-3) Définition : On dit que  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont asymptotiquement singulières si on peut trouver  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $A_n \in \mathcal{F}_n$  telle que :

$$(3) \quad P_n[A_n] \rightarrow 1 \text{ et } Q_n[A_n] \rightarrow 0.$$

La contiguïté introduite par Le Cam [3] généralise la notion d'absolue continuité ; ainsi si on pose  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n) = (\Omega, \mathcal{F})$ ,  $P_n = P$  et  $Q_n = Q$  alors  $(Q_n) \triangleleft (P_n)$  est équivalent à  $Q$  absolument continue par rapport à  $P$  ( $Q \ll P$ ). La séparabilité complète et la singularité asymptotique généralisent la notion de singularité de deux mesures ; ainsi dans l'exemple précédent,  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont complètement séparables  $((P_n) \Delta (Q_n))$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont étrangères ( $P \perp Q$ ).

On aura une illustration du rapport entre contiguité et absolue continuité (resp : complète séparabilité et singularité) dans les paragraphes 2 et 4. Dans le paragraphe 2 nous étudierons le comportement asymptotique des lois des densités de Lebesgue de  $Q_n$  relativement à  $P_n$  ; il s'agit de résultats relativement classiques, lorsqu'on s'intéresse uniquement à la contiguité, voir par exemple [2].

Dans le paragraphe 4 nous nous intéressons au rapport entre le comportement de la suite  $(P_n)$  et de la suite  $(Q_n)$  lorsque  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$ .

(1-4) Définition : On appelle décomposition faible (resp : forte) de Raoult de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$ , une décomposition pour chaque  $n$  de  $Q_n$  sous la forme :

$$(4) \quad Q_n = \alpha_n \bar{Q}_n + (1 - \alpha_n) \hat{Q}_n \quad \alpha_n \in [0,1]$$

vérifiant les propriétés a) et b) (resp : a) et b')) suivantes :

- a)  $(\bar{Q}_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$
- b) (resp : b')) :  $(\hat{Q}_n)$  et  $(P_n)$  sont complètement séparables (resp : asymptotiquement singulières).

Raoult a étudié dans [4] le problème de l'existence d'une décomposition forte lorsqu'au lieu de probabilités on considère une suite de couples de mesures  $\sigma$ -finies ; il obtient une condition nécessaire et suffisante faisant usage d'outils topologiques, mais ne se prêtant pas facilement à des vérifications. Toutefois, il montre que dans le cadre abordé ici  $((P_n, Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de couples de probabilités), il existe une décomposition forte de Raoult de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$  lorsque la suite des lois pour  $(P_n)$  des densités de Lebesgue de  $Q_n$  relativement à  $P_n$  converge.

Nous nous proposons de montrer dans le paragraphe 3 par une méthode directe et simple le résultat de Raoult, d'en déduire l'existence d'une décomposition faible dans tous les cas, et de donner un critère de décomposabilité forte.

2 - POINTS LIMITES DES DENSITES DE LEBESGUE, CRITERES DE CONTIGUITE ET DE COMPLETE SEPARABILITE.

Pour chaque  $n$ , on note  $Z_n$  la densité de Lebesgue de  $Q_n$  relativement à  $P_n$  : autrement dit  $Z_n$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$   $P_n$ -intégrable, à valeurs dans  $(\mathbb{R}^+, \frac{P_n}{P_n})$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{F}_n$  on ait :

$$(5) : Q_n[A] = \int_A Z_n dP_n + Q_n[A \cap \{Z_n = \infty\}] .$$

La relation (5) permet donc d'écrire :  $Q_n = a_n Q'_n + (1 - a_n) Q''_n$

où  $Q'_n$  est absolument continue par rapport à  $P_n$  et où  $Q''_n$  est étrangère à  $P_n$  ; cependant en général une telle décomposition (de Lebesgue) n'est pas une décomposition de Raoult car si  $(Q''_n)$  et  $(P_n)$  sont asymptotiquement étrangères, il n'y a aucune raison pour que  $(Q'_n)$  soit contigue à  $(P_n)$ .

Mentionnons pour commencer deux critères de contiguité et de complète séparabilité.

(2-1) Lemme ([1], [2])

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$
- b)  $(Z_n)$  est  $P_n$ -uniformément intégrable et  $Q_n[Z_n = \infty] \rightarrow 0$
- c)  $(Z_n)$  est  $Q_n$ -tendue (propriété qui se traduit ici par :  $\lim_{K \uparrow \infty} (\limsup_n Q_n[Z_n > K]) = 0$ .)

(2-2) Lemme ([1])

Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- a)  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont complètement séparables
- b) pour tout  $K > 0$   $\limsup_n Q_n[Z_n > K] = 1$

La propriété c) du lemme 2-1 permet d'exprimer la contiguité d'une autre manière :

La suite des lois de  $Z_n$  pour  $Q_n$  est un ensemble de probabilités sur l'ensemble compact  $(\overline{\mathbb{R}^+}, B_{\overline{\mathbb{R}^+}})$ , cette suite est donc relativement compacte ; la propriété c) exprime que les points limites de toute sous-suite extraite sont des probabilités sur  $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$ .

On notera  $\mathcal{M}_b$  (resp :  $\mathcal{N}$ ) l'ensemble des probabilités sur  $(\overline{\mathbb{R}^+}, B_{\overline{\mathbb{R}^+}})$  points limites de sous-suites extraites de la suite  $(\mu_n)$  (resp :  $(\nu_n)$ ) où  $\mu_n$  (resp :  $\nu_n$ ) est la loi de  $Z_n$  pour  $P_n$  (resp :  $Q_n$ ).

De l'inégalité  $E_{P_n} [Z_n] \leq 1$ , on déduit immédiatement que la suite  $(Z_n)$  est  $P_n$ -tendue et donc que  $\mathcal{M}_b$  ne contient que des lois de probabilité sur  $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$ .

L'examen des ensembles  $\mathcal{M}_b$  et  $\mathcal{N}$  va nous permettre d'obtenir des critères simples de contiguité, de séparabilité complète ou de singularité asymptotique. Si la méthode est nouvelle, les critères eux-mêmes ne sont pas essentiellement originaux et peuvent être déduits de résultats proches que l'on peut trouver par exemple pour la contiguité dans [2] et pour la singularité asymptotique dans [4].

(2-3) Proposition :

- 1) Etant donnée une probabilité  $\nu$  sur  $(\overline{\mathbb{R}^+}, B_{\overline{\mathbb{R}^+}})$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$  si et seulement si il existe  $\mu \in \mathcal{M}_b$  avec pour tout  $A \in B_{\overline{\mathbb{R}^+}}$ 

$$(6) \quad \nu(A) = \int_A x \, d\mu(x) + \nu[A \cap \{\infty\}]$$
- 2) Etant donnée une probabilité  $\mu$  sur  $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_b$  si et seulement si il existe  $\nu \in \mathcal{N}$  tel que le couple  $(\nu, \mu)$  vérifie (6)
- 3) La correspondance établie entre  $\mathcal{M}_b$  et  $\mathcal{N}$  par (6) est une bijection.

Démonstration :

- 1) Soit d'abord  $\nu$  une probabilité sur  $(\overline{\mathbb{R}^+}, B_{\overline{\mathbb{R}^+}})$ ,  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{N}$  ; il existe une suite  $(\nu_{n_k})$  convergeant en loi vers  $\nu$ , comme la suite  $(\mu_{n_k})$  est relativement compacte pour la topologie associée à la convergence des lois de probabilités sur  $(\mathbb{R}^+, B_{\mathbb{R}^+})$ , on peut extraire

de la suite  $(\mu_{n_k})$  une sous-suite qui converge vers une probabilité  $\mu$  sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$  ; pour ne pas compliquer la notation, on notera encore  $(\mu_{n_k})$  cette sous-suite.

Pour tout  $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  on a la décomposition de Lebesgue :

$$v_{n_k}(F) = \int_F x \, d\mu_{n_k}(x) + v_{n_k}[F \cap \{\infty\}] .$$

On veut donc montrer que l'on a encore cette relation à la limite.

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  tels que  $\mu(\delta A) = v(\delta A) = 0$ ,

où  $\delta A$  est la frontière de  $A$  ; il est facile de voir que  $\mathcal{A}$  forme une algèbre et que la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$  est  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ .

Soit  $(a_p)$  une suite de nombres réels positifs convergeant vers l'infini et tels que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $\mu\{a_p\} = v\{a_p\} = 0$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap [0, a_p] \in \mathcal{A}$  et  $A \cap [a_p, +\infty] \in \mathcal{A}$

On a donc :  $v_{n_k}[A \cap [0, a_p]] \rightarrow v[A \cap [0, a_p]]$

$$\mu_{n_k}[A \cap [0, a_p]] \rightarrow \mu[A \cap [0, a_p]]$$

et de même  $\int_{A \cap [0, a_p]} x \, d\mu_{n_k}(x) \rightarrow \int_{A \cap [0, a_p]} x \, d\mu(x)$

on a donc  $v[A] = \int_{A \cap [0, a_p]} x \, d\mu(x) + v[A \cap [a_p, +\infty]]$

comme lorsque  $p \rightarrow \infty$   $\int_{A \cap [0, a_p]} x \, d\mu(x) \rightarrow \int_A x \, d\mu(x)$  et que

$v[A \cap [a_p, +\infty]] \rightarrow v[A \cap \{\infty\}]$  , on en déduit que pour tout  $A \in \mathcal{A}$

on a la relation cherchée (6).

Maintenant la famille des éléments de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  qui vérifie (6) est une classe monotone. Elle contient  $\mathcal{A}$ , elle contient donc la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$  qui est  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  d'où le résultat.

Réciproquement soit  $v$  une probabilité sur  $(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^+})}$ , et  $\mu$  un élément de  $\mathcal{M}$  tels que l'on ait la relation (6) pour le couple  $(v, \mu)$ .

On peut trouver une suite  $(\mu_{n_k})$  convergeant vers  $\mu$  ; la suite  $(\nu_{n_k})$  est relativement compacte dans l'ensemble compact des lois de probabilités sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ , de sorte qu'en extrayant une sous-suite que l'on note encore  $(\nu_{n_k})$ , il existe  $\nu' \in \mathcal{N}$  avec  $(\nu_{n_k}) \rightarrow \nu'$  (pour convergence en loi).

On peut appliquer ce qui précède à  $\nu'$  et à  $\mu$ . On a pour tout  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  :  $\nu'(A) = \int_A x d\mu(x) + \nu' [A \cap \{\infty\}]$   
on en déduit  $\nu = \nu'$  et le résultat final de 1).

Remarquons que la correspondance  $\nu \rightarrow \mu$  considérée définit  $\mu$  comme l'unique élément de  $\mathcal{M}$  tel que l'on ait (6).

En effet soit  $\mu'$  un autre élément de  $\mathcal{M}$  tel que  $(\nu, \mu')$  vérifie (6):

$$\text{On a } \int_A x d\mu'(x) = \int_A x d\mu(x) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \text{ et par}$$

conséquent  $\mu \equiv \mu'$ .

2) Soit  $\mu \in \mathcal{M}$ , et  $(\mu_{n_k})$  une suite extraite de  $(\mu_n)$  convergeant vers  $\mu$ . On peut extraire de  $(\nu_{n_k})$  une sous-suite qui converge vers un élément  $\nu \in \mathcal{N}$  ; d'après ce qui précède  $(\nu, \mu)$  vérifie (6) et on a le résultat voulu.

Réciproquement soit  $\mu$  une probabilité sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$  telle qu'il existe  $\nu \in \mathcal{N}$  avec  $(\nu, \mu)$  vérifiant (6) ; en appliquant le 1) de la proposition on peut trouver  $\mu' \in \mathcal{M}$  tel que  $(\nu, \mu')$  vérifie (6) d'où  $\mu = \mu'$ , et  $\mu \in \mathcal{M}$ .

3) On a déjà montré que  $\nu \rightarrow \mu$  avec  $(\nu, \mu)$  vérifiant (6) définit  $\mu$  de façon unique parmi les éléments de  $\mathcal{M}$ . Le résultat réciproque a aussi été vu dans la démonstration du 1), à  $\mu$  on sait associer  $\nu \in \mathcal{N}$  de façon unique avec  $(\nu, \mu)$  vérifiant (6), d'où le résultat final.

(2-4) Corollaire : (Voir [2] pour des énoncés proches).

Les énoncés suivants sont équivalents.

- (a)  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$
- (b) pour tout  $\mu \in \mathcal{M}$  on a  $E[\mu] = 1$
- (c) tout  $\nu \in \mathcal{N}$  est une probabilité sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$
- (d) l'application  $\mu \rightarrow \nu$  définie par  $\nu(A) = \int_A x d\mu$  pour  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$  applique bijectivement  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{N}$ .

Démonstration : En effet (a) et (c) sont équivalents d'après le lemme (2-1), (c) et (d) sont équivalents et (c) et (b) sont équivalents d'après la proposition (2-3).

(2-5) Corollaire :

Les énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $(Q_n)$  et  $(P_n)$  sont complètement séparables
- (b) il existe  $\mu \in \mathcal{M}$  avec  $E[\mu] = 0$
- (c) il existe  $\nu \in \mathcal{N}$  avec  $\nu\{\infty\} = 1$ .

Démonstration : D'après la proposition (2-3) : (b)  $\iff$  (c).

(b)  $\implies$  (a) : soit  $\mu \in \mathcal{M}$  tel que  $E[\mu] = 0$  ; on a alors  $\mu = \delta_0$  où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac en 0 ; considérons une sous-suite  $(\mu_{n_k})$  convergeant vers  $\mu$  ; pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\mu_{n_k} [0, 1/p] \rightarrow \delta_0 [0, 1/p]$$

On peut donc trouver une sous-sous-suite  $(n_{k(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  croissant vers  $+\infty$  telle que

$$n_k \geq n_{k(p)} \text{ implique } \mu_{n_k} [0, 1/p] \geq 1 - 1/p$$

Ce qui signifie  $P_{n_k} [Z_{n_k} \leq 1/p] \geq 1 - 1/p$

pour  $n_k \in [n_{k(p)}, n_{k(p+1)})$  on pose  $A_{n_k} = \{Z_{n_k} \leq 1/p\}$

pour  $n \neq n_k$  on pose  $A_n = \Omega_n$ .



On a alors  $P_n[A_n] \rightarrow 1$ , mais  $Q_{n_k}[A_{n_k}] = \int_{\{Z_{n_k} \leq 1/p\}} Z_{n_k} dP_{n_k} \leq 1/p$

pour  $n_k \in [n_{k(p)}, n_{k(p+1)}[$

quand  $k \rightarrow \infty$   $n_k \rightarrow \infty$   $n_{k(p)} \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow \infty$  de sorte que  $Q_{n_k}[A_{n_k}] \rightarrow 0$ . D'où la complète séparabilité.

(a)  $\Rightarrow$  (c) : d'après le lemme (2-2) on a la propriété :

pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$   $\limsup_n Q_n[Z_n \geq K] = 1$  ; donc on peut trouver pour chaque  $K$   $n_K$  tel que :

$n_K \uparrow +\infty$  avec  $\lim_K Q_{n_K}[Z_{n_K} \geq K] = 1$ .

Ce qui s'écrit encore  $\lim_K v_{n_K}[K, +\infty] = 1$ .

On peut extraire de la suite  $(v_{n_K})$  une sous-suite (notée encore  $(v_{n_K})$ ) qui converge vers un élément  $v \in \mathcal{M}$ .

$[K, \infty]$  est un fermé de  $\bar{\mathbb{R}}^+$  et donc pour tout  $K_0$  fixé, on a :

$$v[K_0, +\infty] \geq \limsup_K v_{n_K}[K_0, +\infty] = 1$$

pour tout  $K_0$  on a donc  $v[K_0, +\infty] = 1$ , d'où  $v[\{\infty\}] = 1$ .

(2-6) Corollaire :

Les énoncés suivants sont équivalents :

- (a)  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont asymptotiquement singulières
- (b) pour tout  $\mu \in \mathcal{M}$  on a  $E[\mu] = 0$
- (c) la suite  $(\mu_n)$  converge vers  $\delta_0$  la probabilité de Dirac en 0.

Démonstration :

(c)  $\Rightarrow$  (b) de façon triviale ; maintenant (b)  $\Rightarrow$  (c) : en effet soit  $\mu \in \mathcal{M}$ ,  $E[\mu] = 0$  est équivalent à  $\mu = \delta_0$ , donc  $\mathcal{M}$  ne contient qu'un seul élément d'où la propriété (c).

(c)  $\Rightarrow$  (a) ; pour le voir il suffit de reprendre la démonstration de la partie (b)  $\Rightarrow$  (a) du corollaire (2-5) en remplaçant la sous-suite  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  par la suite  $(\mu_n)$ , et en posant :

$$A_n = \{Z_n \leq \frac{1}{p}\} \text{ pour } n \in [n(p), n(p+1)[ .$$

(a)  $\Rightarrow$  (b); on va montrer, ce qui est équivalent que  $\mathcal{N}$  ne contient que l'élément  $v$  avec  $v[\{\infty\}] = 1$  ; soit en effet  $v \in \mathcal{N}$ ,  $v$  est limite d'une suite  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ; d'après l'hypothèse  $(Q_{n_k})$  et  $(P_{n_k})$  sont complètement séparables et donc en procédant comme la partie (a)  $\Rightarrow$  (c) de la démonstration du corollaire (2-5) on en déduit que  $v[\{\infty\}] = 1$  d'où le résultat.

### 3 - THEOREMES DE DECOMPOSITION :

Remarque préliminaire : Compte-tenu du lemme (2-1), la décomposition de Lebesgue  $Q_n = a_n Q'_n + (1-a_n) Q''_n$  de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$  fournit une décomposition forte de Raoult lorsque la suite  $(Z_n)$  est  $P_n$ -uniformément intégrable ; en effet on a

$$Q'_n(A) = \frac{1}{E[Z_n]} \int_A Z_n d P_n \quad \text{lorsque}$$

$E[Z_n] \neq 0$  et  $Q'_n = P_n$  sinon ;

En posant  $Z'_n = \frac{dQ'_n}{dP_n}$  on a  $Q'_n[Z'_n = \infty] = 0$ .

De sorte que l'on a  $(Q'_n) \triangleleft (P_n)$ .

#### (3-1) Théorème ([4])

*Sous l'hypothèse de la convergence en loi de la suite  $(\mu_n)$  vers  $\mu$ ,  $(Q_n)$  admet une décomposition forte de Raoult relativement à  $(P_n)$ .*

Démonstration : On a évidemment le résultat si  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$ , ou si  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont asymptotiquement singulières ; on supposera donc que l'on est dans aucun de ces cas et par conséquent d'après les corollaires (2-4) et (2-6), on a :

$$0 < E[\mu] < 1.$$

On peut trouver une suite  $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs

possédant les propriétés : a)  $(Y_p) \uparrow +\infty$  (quand  $p \uparrow \infty$ )

b)  $\mu\{Y_p\} = 0$ .

Comme  $(\mu_n) \rightarrow \mu$  on a pour chaque  $p$  :  $\int_0^{Y_p} d\mu_n(x) \rightarrow \int_0^{Y_p} x d\mu(x)$ .

Ensuite, comme  $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{Y_p} x d\mu(x) = E[\mu] = \alpha$ , on peut extraire

de la suite  $(\mu_n)$  une sous-suite  $(\mu_{n(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$n \geq n(p) \Rightarrow \left| \int_0^{Y_p} x d\mu_n(x) - \alpha \right| \leq \frac{1}{p}.$$

Considérons la suite  $(\bar{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des mesures suivantes sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{R}_{\mathbb{R}^+})$

$\bar{\mu}_n = \mu_n$  en restriction à l'intervalle  $[0, Y_p]$  lorsque  $n \in [n(p), n(p+1)[$

On obtient facilement les propriétés :

(\*)  $\|\bar{\mu}_n - \mu_n\| \rightarrow 0$  (distance en variation des mesures)  
 (Cette propriété découlant directement du fait que la suite  $(\mu_n)$  est tendue).

(\*\*)  $(\bar{\mu}_n) \rightarrow \mu$  (conséquence de (\*))

$$(***) \left( \int_0^\infty x d\bar{\mu}_n(x) \right) \rightarrow \int_0^\infty x d\mu(x) = \alpha.$$

Comme à  $n \in \mathbb{N}$  correspond un intervalle  $[n(p), n(p+1)[$  on notera  $Y_{p(n)}$  le  $Y_p$  correspondant.

On remarque que  $\bar{\mu}_n$  est l'image par  $Z_n$  de la mesure  $P_n$  restreinte à  $\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}$ .

On pose pour  $A \in \Omega_n$ .

$$\bar{Q}_n(A) = Q_n [A | Z_n \leq Y_{p(n)}]$$

$$\bar{Q}_n(A) \text{ s'écrit } \int_A \bar{Z}_n dP_n \quad \text{où} \quad \bar{Z}_n = \frac{\mathbb{1}_{\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}} Z_n}{Q_n [Z_n \leq Y_{p(n)}]}$$

quand le second membre de cette égalité a un sens, ce qui est le cas pour  $n$  assez grand, puisque

$$Q_n [Z_n \leq Y_{p(n)}] = \int_0^\infty x d\bar{\mu}_n(x) \quad \text{et que d'après (***)} \int_0^\infty x d\bar{\mu}_n(x)$$

converge vers  $\alpha > 0$ . Lorsque  $Q_n [Z_n \leq Y_{p(n)}] = 0$ , on pose  $\bar{Z}_n = 1$ .

Pour tout  $n$   $\bar{Q}_n$  est une probabilité absolument continue par rapport à  $P_n$ , de densité de Radon-Nikodym  $d\bar{Q}_n/dP_n = \bar{Z}_n$ .

On va montrer que la suite des lois de  $\bar{Z}_n$  (sous  $P_n$ ) converge vers une probabilité  $\bar{\mu}$  et que  $E[\bar{\mu}] = 1$ , ce qui d'après le corollaire (2-4), donnera la contiguité de  $(\bar{Q}_n)$  relativement à  $(P_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Notons } \alpha_n &= Q_n [Z_n \leq Y_{p(n)}], \text{ et prenons } n \text{ tel que } \alpha_n > 0. \\ P_n [\bar{Z}_n \leq x] &= P_n [\mathbb{1}_{\{Z_n \leq Y_{p(n)}\}} Z_n \leq \alpha_n x] \\ &= P_n [Z_n > Y_{p(n)}] + P_n [Z_n \leq \alpha_n x \wedge Y_{p(n)}] \\ &= \mu_n \{Y_{p(n)}, \infty\} + \bar{\mu}_n \{[0, \alpha_n x]\} \end{aligned}$$

Soit  $x$  tel que  $\mu\{\alpha x\} = 0$  on a :

$$\begin{aligned} \mu_n \{[Y_{p(n)}, \infty\} &\rightarrow 0 \text{ d'après la propriété de tension de } (\mu_n) \\ \bar{\mu}_n \{[0, \alpha_n x]\} &\rightarrow \mu\{[0, \alpha x]\} \text{ d'après (**) et (***)}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite des lois de  $\bar{Z}_n$  (pour  $P_n$ ) converge vers  $\bar{\mu}$  avec  $\bar{\mu}\{[0, x]\} = \mu\{[0, \alpha x]\}$ ; il est clair que  $E[\bar{\mu}] = 1$ , d'où le résultat annoncé de contiguité pour  $(\bar{Q}_n)$ .

On définit alors pour tout  $n$ ,  $\hat{Q}_n$  par :

$$\hat{Q}_n = \frac{Q_n - \alpha_n \bar{Q}_n}{1 - \alpha_n} \quad \text{quand } \alpha_n \neq 1.$$

(On remarque que  $\alpha_n < 1$  dès que  $n$  est assez grand)  
 et  $\hat{Q}_n = Q_n$  quand  $\alpha_n = 1$ .

Lorsque  $\alpha_n \neq 1$ , on vérifie que  $\hat{Q}_n$  est une probabilité.

$$(1 - \alpha_n) \hat{Q}_n(A) = \int_A Z_n \mathbb{1}_{\{Z_n > Y_{p(n)}\}} dP_n + Q_n [A \cap \{Z_n = \infty\}].$$

La densité de Lebesgue de  $\hat{Q}_n$  par rapport à  $P_n$  est  $\hat{Z}_n$  avec :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_n &= \frac{1}{1 - \alpha_n} Z_n \mathbb{1}_{\{Z_n > Y_{p(n)}\}} \quad \text{si } \alpha_n \neq 1 \\ &= Z_n \quad \text{si } \alpha_n = 1. \end{aligned}$$

enfin  $(\hat{Q}_n)$  et  $(P_n)$  sont asymptotiquement singulières car

$$P_n [Z_n > Y_{p(n)}] \rightarrow 0 \quad \text{alors que } \hat{Q}_n [Z_n > Y_{p(n)}] = 1 \text{ dès que } \alpha_n \neq 1.$$

(3-2) Théorème :

*Pour toute suite  $(P_n, Q_n)$  de couples de probabilités sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $(Q_n)$  admet au moins une décomposition faible de Raoult relativement à  $(P_n)$ .*

Démonstration : Supposons que l'on ne soit pas dans le cas où  $(Q_n)$  est contigue à  $(P_n)$ , ou dans le cas  $(Q_n)$  et  $(P_n)$  complètement séparables, alors on peut trouver  $\mu \in \mathcal{M}_G$  avec  $0 < E[\mu] < 1$  d'après les corollaires (2-4) et (2-5). Considérons une sous-suite  $(\mu_{n_k})$  qui converge vers  $\mu$  ; on peut appliquer le théorème (3-1) à la suite  $(P_{n_k}, Q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

On a donc :  $Q_{n_k} = \alpha_{n_k} \bar{Q}_{n_k} + (1 - \alpha_{n_k}) \hat{Q}_{n_k}$  où  $(\bar{Q}_{n_k})$  est contigue relativement à  $(P_{n_k})$  et où  $(\hat{Q}_{n_k})$  et  $(P_{n_k})$  sont asymptotiquement singulières.

Posons pour  $n \neq n_k$   $\bar{Q}_n = P_n$ ,  $\alpha_n = 0$  et donc  $\hat{Q}_n = Q_n$ ,  $1 - \alpha_n = 1$  ;  
 donc  $(\bar{Q}_n)$  contigue relativement à  $P_n$  (avec  $\mathcal{M}$  contenant les deux mesures  $\mu$  et  $\delta_1$ ) puis  $(\hat{Q}_n)$  et  $(P_n)$  sont complètement séparables, puisque  $(\hat{Q}_{n_k})$  et  $(P_{n_k})$  le sont d'où le résultat  $\square$

Dans ce qui suit, on va supposer que  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  ne sont pas complètement séparables et sous cette hypothèse donner un critère de décomposabilité forte.

(3.3) Théorème :

On suppose que  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  ne sont pas complètement séparables et que sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$  existe une probabilité  $\hat{P}_n$  étrangère à  $P_n$ .

Pour que  $(Q_n)$  admette une décomposition forte de Raoult relativement à  $(P_n)$  il faut et il suffit qu'il existe pour tout  $n$ ,  $K_n \in \mathcal{F}_n$  avec les deux propriétés :

(i)  $P_n [K_n] \rightarrow 1$

(ii)  $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})$  est  $P_n$ -uniformément intégrable.

Pour la démonstration de ce résultat, on a besoin du lemme.

(3.4) Lemme :

Si  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  ne sont pas complètement séparables, il existe  $\alpha > 0$  avec la propriété :

Pour toute suite  $(K_n)$  où  $K_n \in \mathcal{F}_n$  et  $P_n [K_n] \rightarrow 1$  on a

$$\liminf_n E_{P_n} [Z_n \mathbb{1}_{K_n}] \geq \alpha$$

Démonstration : Reprenant les notations du paragraphe 2, on va d'abord montrer que'il existe  $\alpha > 0$ , avec  $\lim_{\mu \in \mathcal{M}} \inf E[\mu] \geq \alpha$ . Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite  $(\mu^{(p)})_p \in \mathcal{N}$  d'éléments de  $\mathcal{M}$

avec  $E[\mu^{(p)}] \rightarrow 0$  ; comme  $\mathcal{M}$  est compact, on peut extraire une sous-suite  $(\mu^{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\mu^\infty$  élément de  $\mathcal{M}$ .

On a :  $\lim_p E[\mu^{(p)}] \geq \liminf_k E[\mu^{p_k}] \geq E[\mu^\infty]$

Ceci implique  $E[\mu^\infty] = 0$  ; d'après le corollaire (2.5)  $(Q_n)$  et  $(P_n)$  seraient alors complètement séparables d'où la contradiction. Montrons maintenant le lemme ; en notant toujours  $\mu_n$  la loi de  $Z_n$  pour  $P_n$ , puis  $\mu'_n$  la loi de  $Z_n \mathbb{1}_{K_n^c}$  pour  $\mu'_n$ , on a  $\|\mu_n - \mu'_n\| \leq 2 P_n[K_n^c]$  de sorte que  $\|\mu_n - \mu'_n\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ;  $\mathcal{M}$  est aussi l'ensemble des points limites des suites extraites de  $(\mu'_n)$ .

Supposons que  $\liminf_n E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}] < \alpha$

on peut alors trouver une suite  $(\mu'_{n_k})$  extraite de  $(\mu'_n)$  telle que

$$E[\mu'_{n_k}] \rightarrow a < \alpha, \text{ avec } \mu'_{n_k} \rightarrow \mu \in \mathcal{M}$$

mais  $\liminf_k E[\mu'_{n_k}] \geq E[\mu] \geq \alpha$  d'après ce qui précède, d'où la contradiction et le résultat annoncé.

### Démonstration du théorème (3.3) :

#### A) condition suffisante :

D'après le lemme précédent, il existe  $\alpha > 0$  et  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$

$E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}] \geq \alpha$ . Posons alors :

$$\bar{Q}_n(F) = \frac{\int_F Z_n \mathbb{1}_{K_n} dP_n}{E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}]} = \int_F \bar{Z}_n dP_n \text{ avec } \bar{Z}_n = \frac{Z_n \mathbb{1}_{K_n}}{E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}]}$$

D'après l'hypothèse et le lemme (3.4)  $(\bar{Z}_n)$  est  $P_n$ -uniformément intégrable, et  $\bar{Q}_n[\bar{Z}_n = \infty] = 0$ , on a donc d'après le lemme (2.1)  $(\bar{Q}_n) \triangleleft (P_n)$ .

Posons alors  $\hat{Q}_n[.] = Q_n[. | K_n^c]$  lorsque  $Q_n[K_n^c] \neq 0$   
 $= \hat{P}_n[.]$  lorsque  $Q_n[K_n^c] = 0$

en posant  $\alpha_n = E_{P_n} [Z_n \mathbb{1}_{K_n}]$ , on a  $Q_n[K_n^c] = (1 - \alpha_n)$

et  $Q_n(.) = \alpha_n \bar{Q}_n(.) + (1 - \alpha_n) \hat{Q}_n(.)$

enfin on a  $\hat{Q}_n(K_n) = 0$  d'où le résultat de décomposition.

B) condition nécessaire : (on s'inspire de [4])

Soit  $Q_n = \alpha_n \bar{Q}_n + (1 - \alpha_n) \hat{Q}_n$  une décomposition forte de  $(Q_n)$ .  
 On note  $(K_n, K_n^c)$  la décomposition de Mahn de  $\Omega_n$  pour la mesure  $Q_n - P_n$ .

Considérons  $A_n \in \mathcal{F}_n$  tel que  $P_n[A_n] \rightarrow 1$  et  $\hat{Q}_n(A_n) \rightarrow 0$

$$(P_n - \hat{Q}_n)(A_n) \rightarrow 1$$

de sorte que pour n assez grand  $A_n \subset K_n$ .

On a donc  $P_n[K_n] \rightarrow 1$  et  $P_n[K_n^c] \rightarrow 0$ .

Soit maintenant  $B_n \in \mathcal{F}_n$  avec  $P_n[B_n] \rightarrow 0$

$$P_n[B_n \cap K_n] \geq \hat{Q}_n(B_n \cap K_n)$$

et donc  $\hat{Q}_n(B_n \cap K_n) \rightarrow 0$ .

Comme  $\bar{Q}_n[B_n \cap K_n] \rightarrow 0$ , on en déduit

$$Q_n[B_n \cap K_n] \rightarrow 0.$$

On pose  $Q_n^1[.] = Q_n[. | K_n]$  si  $Q[K_n] \neq 0$

$$= P_n[.] \quad \text{si } Q[K_n] = 0$$



$$\begin{aligned}
 Q_n^2[.] &= Q_n[. | K_n^c] && \text{si } Q[K_n^c] \neq 0 \\
 &= \hat{P}_n[.] && \text{si } Q[K_n^c] = 0
 \end{aligned}$$

On a alors la décomposition forte

$$Q_n[.] = a_n Q_n^1[.] + (1 - a_n) Q_n^2[.]$$

avec  $a_n = Q[K_n]$  et  $1 - a_n = Q[K_n^c]$ ; en effet, comme

$Q_n[K_n] \geq E_{P_n}[Z_n \mathbb{1}_{K_n}]$  on a en utilisant le lemme (3.4)  $(Q_n^1) \triangleleft (P_n)$ , d'autre part  $(Q_n^2)$  est asymptotiquement singulière à  $(P_n)$  car  $P_n[K_n] \rightarrow 1$  et  $Q_n^2[K_n] = 0$ .

D'après le lemme (2.1)  $(Z_n^1)$  est  $P_n$ -uniformément intégrable avec

$$Z_n^1 = \frac{Z_n \mathbb{1}_{K_n}}{Q_n[K_n]} \quad (\text{densité de Lebesgue de } Q_n \text{ par rapport à } P_n)$$

comme  $Z_n \mathbb{1}_{K_n} \leq Z_n^1$ ,  $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})$  est aussi  $P_n$ -uniformément intégrable, d'où le résultat final.

(3.5) Remarque : Les deux cas d'existence d'une décomposition forte de Raoult rentrent dans le cadre d'application du théorème (3.3). C'est évident avec la décomposition de Lebesgue lorsque  $(Z_n^1)$  est  $P_n$ -uniformément intégrable ; (par contre on n'a pas besoin alors de supposer  $(Q_n)$  et  $(P_n)$  non complètement séparables).

Dans le deuxième cas (celui du théorème (3.7)), posons  $K_n = \{Z_n \leq y_{p(n)}\}$  ; alors si  $\mu_n \rightarrow \mu$  et en posant  $\mu'_n$  la loi de  $Z_n \mathbb{1}_{K_n}$  pour  $P_n$  on a, d'après la démonstration du théorème (3.1)  $\mu'_n \rightarrow \mu$  et  $E[\mu'_n] \rightarrow E[\mu]$  de sorte que  $(Z_n \mathbb{1}_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est  $P_n$ -uniformément intégrable d'où le résultat.

(3.6) Remarque : On peut préciser dans l'esprit du paragraphe 2, l'ensemble  $\overline{\mathcal{M}}$  des points limites des lois  $\bar{\mu}$  des densités de Lebesgue  $\bar{Z}_n$  (pour  $P_n$ ) de  $\bar{Q}_n$  relativement à  $P_n$ , dans le cas d'une décomposition forte,  $\mathcal{M}$  désignant

comme précédemment l'ensemble des points limites des lois  $\mu$  des densités  $Z_n$  (pour  $P_n$ ) de  $Q_n$  relativement à  $F_n$ .

Comme on l'a vu,  $\mathcal{M}$  est encore l'ensemble des points limites des lois de  $Z_n \mathbb{1}_{K_n}$  (pour  $P_n$ ) de sorte que  $\overline{\mathcal{M}}$  est l'ensemble des lois  $\bar{\mu}$  définies par  $\bar{\mu}\{[0, x]\} = \mu\{[0, E[\mu]x]\}$  pour  $\mu \in \mathcal{M}$ .

#### 4 - CONTIGUITE ET ABSOLUE CONTINUITÉ ASYMPTOTIQUE

Dans ce paragraphe nous supposons que les suites  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont définies sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ , où, jusqu'à la remarque (4.3) compris,  $\Omega$  est polonais,  $\mathcal{F}$  étant sa tribu borélienne. Nous étudions d'abord la question suivante : supposons que  $(P_n) \xrightarrow{f} P$  au sens de la convergence étroite des probabilités sur  $\Omega$ , que peut-on dire de la suite  $(Q_n)$  lorsqu'on a contiguïté de  $(Q_n)$  par rapport à  $(P_n)$ .

Dans la deuxième partie du paragraphe  $(\Omega, \mathcal{F})$  est quelconque et on s'intéresse au cas où  $(P_n) \xrightarrow{m} P$  (au sens où pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P_n(A) \rightarrow P(A)$ ). On termine par un résultat de convergence stable.

##### (4.1) Lemme :

Si  $(P_n)$  est relativement compacte (dans l'espace des probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  muni de la topologie de la convergence faible des mesures) et si  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$ ,  $(Q_n)$  est relativement compacte.

Démonstration : Pour que  $(Q_n)$  soit relativement compacte, il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un compact  $K$  de  $\Omega$  tel que  $Q_n[K^c] \leq \varepsilon$  pour tout  $n$ . Soit  $\varepsilon$ , d'après la contiguïté de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$ , il existe  $\alpha$ ,  $n_0$  tel que, pour tout  $F_n \in \mathcal{F}$  pour  $n \geq n_0$ , on ait  $P_n[F_n] \leq \alpha \Rightarrow Q_n[F_n] \leq \varepsilon$ .

Comme  $(P_n)$  est relativement compact, il existe  $K_0$  compact avec  $P_n [K_0^c] \leq \varepsilon$  ; d'après ce qui précède, on a :

$$\text{pour } n \geq n_0 \quad Q_n [K_0^c] \leq \varepsilon$$

pour  $n = 1 \dots n_0 - 1$ , il existe  $K_1, \dots, K_{n_0-1}$  avec

$$Q_i [K_i^c] \leq \varepsilon \text{ pour } i = 1 \dots n_0 - 1$$

De sorte que en posant  $K = \left( \bigcup_{i=1}^{n_0-1} K_i \right) \cup K_0$  on a pour tout  $n$ ,  
 $Q_n [K] \leq \varepsilon$ , et le résultat annoncé.

(4.2) Théorème :

On suppose que  $(P_n) \xrightarrow{f} P$  et que  $(Q_n)$  est contigue à  $(P_n)$  ; alors, toute probabilité  $Q$  point limite de la suite  $(Q_n)$  est absolument continue par rapport à  $P$ .

Démonstration : On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des  $A \in \mathcal{F}$  tels que  $P(\delta A) = Q(\delta A) = 0$ , (comme dans la démonstration de la proposition (2.3)  $\mathcal{A}$  est une algèbre et  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$  ; soit  $(Q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une suite extraite de  $(Q_n)$  qui converge vers  $Q$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on a  $Q(A) = \lim_k Q_{n_k}(A)$  et

$P(A) = \lim_k P_{n_k}(A)$  ainsi :

$$Q(A) = \lim_k \int_A Z_{n_k} dP_{n_k} + \lim_k Q_{n_k} [A \cap \{Z_{n_k} = \infty\}] .$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq k_0$  implique  $Q_{n_k} [Z_{n_k} = \infty] \leq \varepsilon$   
 d'après la contiguité et il existe  $K$  tel que  $\int_{A \cap \{Z_{n_k} > K\}} dP_{n_k} \leq \varepsilon$

d'après le lemme (2.1) ; ainsi pour  $k \geq k_0$  on a la relation :

$$Q(A) \leq K P_{n_k}(A) + 2 \varepsilon \quad \text{d'où à la limite :}$$

$$(7) \quad Q(A) \leq K P(A) + 2 \varepsilon$$

(Notons que  $K$  dépend de  $\varepsilon$  mais pas de  $A$ ).

Soit alors  $\mathcal{E}$  la famille des éléments  $A$  de  $\mathcal{F}$  pour lesquels (7) est vraie ;  $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  est une classe monotone, d'où  $\mathcal{E}$  contient  $\mathcal{F}$ .

On prend maintenant  $A \in \mathcal{F}$  avec  $P(A) = 0$ , on déduit de (7)  $Q(A) \leq 2\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est arbitraire, d'où le résultat d'absolue continuité de  $Q$  par rapport à  $P$ .

(4.3) Remarque : Le résultat obtenu ici est beaucoup plus faible que le corollaire (2-4) où est obtenue une propriété d'absolue continuité des points limites des lois des densités de Lebesgue ; soulignons en quelques différences :

a) alors que  $P$  est l'unique point limite de la suite  $(P_n)$ ,  $Q$  n'est pas nécessairement unique (ex : soit  $\tilde{P}$  une probabilité absolument continue par rapport à une probabilité  $P$ , prenons :

$P_n = P, Q_{2n} = P, Q_{2n+1} = \tilde{P}$  on a  $(Q_n) \ll (P_n)$  avec deux points limites pour  $(Q_n)$ .)

b) soit  $(P_n) \xrightarrow{f} P$  et  $(Q_n) \xrightarrow{f} Q$ , l'absolue continuité  $Q \ll P$  n'implique pas la contiguité de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$  ; (ex : prenons  $P_n = \delta_{1-1/n}$   $Q_n = \delta_{1+1/n}$ , on a  $P = Q = \delta_1$  alors que pour tout  $n$   $P_n \perp Q_n$  et donc  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont complètement séparables.

Les résultats (4-1) et (4-2) de ce paragraphe sont connus :  
(4-1) figure par exemple dans Roussas [5] ; pour (4-2) la méthode de démonstration est celle employée par Gihman Skorokhod ([6] chap. 7 p. 444) pour obtenir une propriété d'absolue continuité ; je remercie G.K. Eagleson de m'avoir signalé cette référence.

On considère maintenant  $(\Omega, \mathcal{F})$  quelconque.

(4-4) Théorème :

On suppose que  $(P_n) \stackrel{w}{\rightarrow} P$  (pour tout  $A \in \mathcal{F}, P_n(A) \rightarrow P(A)$ )  
et que  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$ , alors on peut  
trouver une sous-suite  $(Q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et une probabilité  $Q$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$   
telles que  $(Q_{n_k}) \stackrel{w}{\rightarrow} Q$ .  
De plus  $Q$  est absolument continue par rapport à  $P$ .

Démonstration : La seconde assertion est évidente lorsque l'on a la première : en effet soit  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $P(A) = 0$  ; on a  $P_n(A) \rightarrow 0$  et donc par contiguité  $Q_n(A) \rightarrow 0$  donc  $Q_{n_k}(A) \rightarrow 0$  ; d'où  $Q(A) = 0$ .

Montrons la première assertion ; soit  $\tilde{P}$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  par

$$\tilde{P} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} P_n ; \text{ pour tout } n, P_n \text{ est absolument continue par rapport}$$

à  $\tilde{P}$ , de sorte que en posant  $\tilde{P}_n = \tilde{P}$ , on a  $(P_n) \triangleleft (\tilde{P}_n)$ .

En effet, notons  $z_n = dP_n/d\tilde{P}$  et  $z = dP/d\tilde{P}$  (il est évident que

l'on a  $P \ll \tilde{P}$ ). On a pour tout  $A \in \mathcal{F}$  :

$$\int_A z_n d\tilde{P} \rightarrow \int_A z d\tilde{P},$$

donc d'après un résultat classique  $(z_n)$  est une suite  $\tilde{P}$ -uniformément intégrable et  $P_n[z_n = \infty] = 0$  de sorte que le critère b) du lemme (2-1) fournit la contiguité  $(P_n) \triangleleft (\tilde{P}_n)$ .

Par transitivité on trouve  $(Q_n) \triangleleft (\tilde{P}_n)$ . Soit  $\tilde{Z}_n$  la densité de Lebesgue de  $Q_n$  par rapport à  $\tilde{P}$ ;  $(\tilde{Z}_n)$  est  $\tilde{P}$ -uniformément intégrable; d'après le critère de compacité de Dunford-Pettis (voir par exemple [9] chap. 1 théorème 25), on peut extraire de  $(\tilde{Z}_n)$  une sous-suite  $(\tilde{Z}_{n_k})$  qui converge au sens de la topologie  $\sigma(L^1(\tilde{P}), L^\infty(\tilde{P}))$ , il existe donc  $Z \in L^1(\tilde{P})$  avec, pour tout  $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A \tilde{Z}_{n_k} d\tilde{P} \rightarrow \int_A Z d\tilde{P}.$$

Comme (toujours d'après le b) du lemme (2-1))  $Q_{n_k} [A \cap \{\tilde{Z}_{n_k} = \infty\}] \rightarrow 0$  on a donc pour tout  $A \in \mathcal{F}$ :

$$Q_{n_k}(A) \rightarrow Q(A) = \int_A Z d\tilde{P}.$$

D'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks,  $Q$  est une probabilité et la démonstration est terminée.

Le théorème (4-4) va nous permettre de faire le lien entre contiguité et convergence "stable" (voir, pour cette notion introduite par Rényi, par exemple [7]).

Commençons par un critère élémentaire de contiguité :

(4-5) Lemme :

Etant donné  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$  espaces mesurables quelconques et  $(P_n, Q_n)$  couple de probabilités sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $(Q_n)$  est contigue relativement à  $(P_n)$  si et seulement si pour toute suite  $(g_n)$  de fonctions bornées par 1, où  $g_n$  est mesurable de  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$  dans  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ , on a l'implication :

$$P_n(g_n) \rightarrow 0 \Rightarrow Q_n(g_n) \rightarrow 0.$$

Démonstration : Seule la partie nécessaire demande une démonstration.

$$\text{Soit } \varepsilon > 0 ; \quad P_n(g_n) \geq P_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}}) \geq \varepsilon P_n\{g_n > \varepsilon\}$$

donc  $P_n(g_n) \rightarrow 0$  implique  $P_n[g_n > \varepsilon] \rightarrow 0$ .

$Q_n \ll (P_n)$  entraîne  $Q_n[g_n > \varepsilon] \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Maintenant } Q_n(g_n) &= Q_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n < \varepsilon\}}) + Q_n(g_n \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}}) \\ &\leq \varepsilon + Q_n[g_n > \varepsilon] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(4-6) Lemme :

pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  on considère  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$ ,  $(P_n, Q_n)$   
 couple de probabilités sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $T_n(\omega_n, dx_n)$  probabilité  
 de transition de  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$  dans  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$ , on note  $R_n$  (resp:  $\tilde{R}_n$ )  
 les probabilités  $R_n(d\omega_n, dx_n) = P_n(d\omega_n) T_n(\omega_n, dx_n)$   
 (resp:  $\tilde{R}_n(d\omega_n, dx_n) = Q_n(d\omega_n) T_n(\omega_n, dx_n)$ )  
 définies sur  $(\Omega_n \times \mathcal{X}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n \otimes \mathcal{B}_n)$ ;  $R_n^{\mathcal{X}_n}$  (resp:  $\tilde{R}_n^{\mathcal{X}_n}$ ) désignent  
 les marginales de  $R_n$  (resp:  $\tilde{R}_n$ ) sur  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$ .

alors sous l'hypothèse :  $(Q_n)$  contigue relativement à  $(P_n)$

- on a :
- a)  $(\tilde{R}_n)$  contigue relativement à  $(R_n)$
  - b)  $(\tilde{R}_n^{\mathcal{X}_n})$  contigue relativement à  $(R_n^{\mathcal{X}_n})$

Démonstration : Elle est immédiate : puisque pour tout  $B_n \in \mathcal{B}_n$

(resp:  $A_n \in \tilde{\mathcal{F}}_n \otimes \mathcal{B}_n$ ) on a  $R_n^{\mathcal{X}_n}(B_n) = P_n(T_n(\cdot, B_n))$

(resp:  $R_n(A_n) = P_n\left(\int_{\mathcal{X}_n} \mathbb{1}_{A_n}(\cdot, x_n) T_n(\cdot, dx_n)\right)$ ).

On obtient le résultat désiré en appliquant le lemme (4-5) à

$g_n(\cdot) = T_n(\cdot, B_n)$  (resp:  $g_n(\cdot) = \int_{\mathcal{X}_n} \mathbb{1}_{A_n}(\cdot, x_n) T_n(\cdot, dx_n)$ ).

□

On considère maintenant  $(P_n, Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  un espace polonais muni de sa tribu borélienne.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ .

(4-7) Définition :

On dira que  $(X_n)$  converge de façon stable pour  $(P_n)$  si pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , toute fonction  $f$  continue bornée de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{R}^+$  la suite  $(E_{P_n} [\mathbb{1}_A f(X_n)])_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

On sait montrer alors (voir [8]) qu'il existe une probabilité  $R$  sur  $(\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$  telle que :

$$E_{P_n} [\mathbb{1}_A f(X_n)] \rightarrow R(\mathbb{1}_A \otimes f).$$

Cette notion de convergence est intermédiaire entre la convergence en loi de  $(X_n)$  et la convergence en probabilité ; on dira que  $R$  est la limite stable de  $(X_n)$  pour  $(P_n)$ .

On peut tirer de [8] (théorème (2-8) et proposition (2-10), le résultat suivant :

(4-8) Proposition :

Si  $\mathcal{F}$  est séparable, si  $(X_n)$  converge en loi pour  $(P_n)$  et si  $P_n \xrightarrow{m} P$ , on peut extraire de  $(X_n)$  une sous-suite  $(X_{n_k})$  qui converge de façon stable pour  $(P_{n_k})$ .

(4-9) Lemme :

La proposition précédente tient sans hypothèse de séparabilité pour  $\mathcal{F}$ .



Démonstration :

On considère  $\tilde{P}$  la probabilité  $\tilde{P} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} P_n$ , comme  $P_n \xrightarrow{m} P$ , on a  $P < \tilde{P}$ , et on note  $\tilde{Z}_n = dP_n / d\tilde{P}$ ,  $\tilde{Z} = dP / d\tilde{P}$ .

Soit  $\mathcal{F}'$  la sous-tribu de  $\mathcal{F}$  engendrée par les deux suites  $(\tilde{Z}_n)$ ,  $(X_n)$  et par  $\tilde{Z}$ .  $\mathcal{F}'$  est une tribu séparable. D'après la proposition (4-8) précédente, il existe une sous-suite  $(P_{n_k})$  et une probabilité  $R$  sur  $(\Omega \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$  telle que pour toute  $f$  continue bornée de  $(X, \mathcal{B})$  dans  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ , et toute  $h$  bornée mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F}')$  dans  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$

$$(i) : P_{n_k}(h f(X_{n_k})) \rightarrow R(h \otimes f)$$

$R$  s'écrit  $R(d\omega, dx) = P(d\omega) T(\omega, dx)$  où  $\omega \rightarrow T(\omega, dx)$  est  $\mathcal{F}'$ -mesurable, de sorte que la convergence (i) s'écrit :

$$(ii) : \tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k} h f(X_{n_k})) \rightarrow \tilde{P}(\tilde{Z} h T(\cdot, f)).$$

On veut montrer que pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , on a :

$$P_{n_k}(\mathbb{1}_A f(X_{n_k})) \rightarrow R(\mathbb{1}_A \otimes f).$$

Posons  $h = E_{\tilde{P}}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}']$ , on a :

$$P_{n_k}(\mathbb{1}_A f(X_{n_k})) = \tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k} \mathbb{1}_A f(X_{n_k})) = \tilde{P}(\tilde{Z}_{n_k} h f(X_{n_k}))$$

et d'après (ii) on a la convergence vers  $\tilde{P}(\tilde{Z} h T(\cdot, f))$ , or ce dernier terme est  $\tilde{P}(\tilde{Z} \mathbb{1}_A T(\cdot, f)) = R(\mathbb{1}_A \otimes f)$  ; d'où le résultat.

(4-10) Théorème :

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , et soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  un espace polonais muni de sa tribu borélienne,  $(P_n, Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de couples de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  ; sous l'hypothèse de contiguïté de  $(Q_n)$  relativement à  $(P_n)$  on a le résultat suivant :

Si  $(X_n)$  converge de façon stable pour  $(P_n)$ , alors on peut extraire de  $(X_n)$  une sous-suite  $(X_{n_k})$  qui converge de façon stable pour  $(Q_{n_k})$ . De plus soit  $R^{n_k}$  (resp :  $\tilde{R}$ ) la limite stable de  $(X_n)$  pour  $(P_n)$  (resp : de  $(X_{n_k})$  pour  $(Q_{n_k})$ ), en notant

$$R(dw, dx) = P(dw) T(\omega, dx) \quad (\text{resp : } \tilde{R}(dw, dx) = Q(dw) \tilde{T}(\omega, dx))$$

on a  $Q \ll P$ .

Démonstration :

On va montrer que les hypothèses de (4-8) et (4-9) sont satisfaites pour une sous-suite de  $(X_n)$  pour les probabilités  $Q_n$ .

Lim stable  $(X_n) = R$  implique, en prenant  $f = 1$  dans la définition (4-7) que pour tout  $A \in \mathcal{F}$  on a  $P_n(A) \rightarrow P(A)$ . D'après le théorème (4-4), on peut trouver une sous-suite  $(Q_{n_k})$  de  $(Q_n)$  et une probabilité  $Q \ll P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que  $Q_{n_k}(A) \rightarrow Q(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

On prend maintenant  $A = \Omega$ , on a alors :

$$E_{P_n} [f(X_n)] \rightarrow R^{\mathcal{X}}(f).$$

Ce qui signifie que  $(X_n)$  converge en loi vers  $R^{\mathcal{X}}$  (pour  $P_n$ ) ; de sorte que d'après le lemme (4-1) appliqué aux deux suites : suite des lois de  $X_n$ , pour  $P_n$ , et suite des lois de  $X_n$ , pour  $Q_{n_k}$ , cette seconde suite étant contigue relativement à la première, il existe une sous-suite  $(X_{n''})$  extraite de  $(X_{n_k})$  telle que  $(X_{n''})$  converge en loi pour  $(Q_{n''})$ .

Appliquant (4-8) (4-9) à la suite  $(X_{n''})$  pour  $(Q_{n''})$   
on obtient une sous-suite  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant de façon stable  
pour  $(Q_{n_k})$ .

Notons  $\tilde{R}$  la probabilité sur  $(\Omega \times \mathbb{E}, \tilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{B})$  limite stable de  $(X_{n_k})$  pour  
 $(Q_{n_k})$ , avec  $\tilde{R}(d\omega, dx) = \tilde{P}(d\omega) \tilde{T}(\omega, dx)$ .

Pour tout  $A \in \tilde{\mathcal{F}}$  on obtient  $Q_{n_k}(A) \rightarrow \tilde{P}(A)$  ; comme d'après ce qui  
précède on a :  $Q_{n_k}(A) \rightarrow Q(A)$   $\tilde{P} = Q$ , et on a la propriété annoncée.

REFERENCES :

- [ 1 ] G.K. Eagleson - J. Mémin : *Sur la contiguité de deux suites de mesures ; généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev.*  
Sém. de Proba. XVI ; Lect. Notes in Maths n° 920 - Springer-Verlag.  
Berlin Heidelberg New York 1982.
  
- [ 2 ] W.J. Hall - R.M. Loynes : *On the concept of contiguity.*  
The annals of Probability, 1977, vol. 5 n° 2.
  
- [ 3 ] L. Le Cam : *Local asymptotically normal families of distributions;*  
Univer. Calif. Publ. Statist. 3 (1960) 37-98.
  
- [ 4 ] J.P. Raoult : *Décomposition de Lebesgue des suites de mesures.*  
Bull. Sc. Math. 2ème série. 94, 1970 209-229.
  
- [ 5 ] G.G. Roussas : *Contiguity of Probability measures : some applications of statistics.*  
Cambridge University Press (1972).
  
- [ 6 ] I.I. Gihman - A.V. Skorokhod : *Theory of stochastic processes.*  
Tome 1. Springer Verlag - Berlin-Heidelberg - New-York 1975.
  
- [ 7 ] D.J. Aldous - G.K. Eagleson : *On mixing and stability of limit theorems* : The annals of Probability (1978) vol. 6 n° 2  
p. 325-331.
  
- [ 8 ] J. Jacod - J. Mémin : *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité.*  
Séminaire de Probabilité XV (1981). Lecture notes in Maths.  
n° 850 - Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
  
- [ 9 ] C. Dellacherie - P.A. Meyer : *Probabilités et potentiels.*  
(Tome 1) Hermann, Paris (1975).