PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. B. GRAVEREAUX

Probabilités de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ et équations différentielles stochastiques linéaires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-42
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___1_A4_0>

Séminaires de Probabilités 1982
Université de Rennes I

PROBABILITES DE LEVY SUR $\mathbb{R}^d$ ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LINEAIRES

J.B. GRAVEREAUX

INTRODUCTION

La notion de probabilité de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ est une généralisation de celle de loi de la classe L sur $\mathbb{R}$ développée dans le chapître 6 de [1]. (Voir aussi [3] p. 331 à 338). Les probabilités de Lévy sont indéfiniment divisibles. Leur étude a été faite par K. Urbanik dans [6]. (Voir aussi [5] et [7]).

On montre ici qu'à toute probabilité de Lévy η pleine sur $\mathbb{R}^d$ on peut associer un processus de Markov d-dimensionnel $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ dont le semi-groupe admet η comme probabilité invariante. Ce processus est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme : $dX_t = h(X_t)\,dt + dZ_t$, où h est un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^d$ tel que $\lim_{t\to+\infty} e^{th} = 0$ (e^{th} désigne l'opérateur exponentiel de th) et où $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un P - A - I - S ; on a de plus pour tout $t \geq 0$: $\eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t$ où $e^{th}.\eta$ désigne la mesure image de η par e^{th}, et η_t la loi de X_t pour P^0. ($*$ est le produit de convolution des mesures).

Dans le paragraphe 1, on étudie la classe de processus de Markov constituée des solutions d'équations différentielles stochastiques linéaires du type : $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$ avec $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et avec pour $(Z_t)_{t \geq 0}$ un P.A.I.S.

On donne une définition équivalente de cette famille de processus markoviens faisant intervenir la forme particulière du semi-groupe de transition. On pose ensuite le problème de l'existence d'une probabilité invariante. On donne des conditions suffisantes sur une probabilité pour qu'on puisse construire un processus du type considéré l'admettant comme mesure invariante.

Dans le paragraphe 2, on définit les probabilités de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ et la sous-classe des probabilités stables pour les opérateurs. On rappelle deux théorèmes importants, le premier de Urbanik (voir [6]) et le second de M. Sharpe (voir [4]).

Dans le paragraphe 3, on résout le problème de l'existence d'une probabilité invariante dans le cas où $\lim_{t \to +\infty} e^{th} = 0$. On retrouve en particulier des résultats de Jurek ([12]). Il existe une probabilité invariante dans le cas considéré si et seulement si $\mathrm{Log}(1 + \| Z_1 \|)$ est $P°$-intégrable. Cette probabilité est unique et appartient à la classe A des "probabilités autodécomposables pour les opérateurs".

On utilise les résultats précédents pour caractériser (comme dans [12]), la classe A (et en particulier les probabilités de Lévy pleines).

Dans le paragraphe 4, on étudie le problème de l'existence d'une probabilité invariante dans le cas général. On montre qu'il est nécessaire et suffisant que la projection du processus sur le sous-espace stable associé aux valeurs propres λ de h telles que $Re(\lambda) \geq 0$ (resp : $Re(\lambda) < 0$) soit déterministe (et resp : vérifie la condition d'intégrabilité donnée au paragraphe 3).

Pour ce type de résultats (et aussi pour une partie du 3)) voir aussi l'article [14] de Zabczyk.

Dans le paragraphe 5 , on étudie le caractère symétrique, relativement à une probabilité de Lévy , du semi-groupe d'un processus de Markov de la classe considérée. Lorsque ce processus vérifie : $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$ avec $h = \lambda(id)$ et $\lambda < 0$, et avec pour $(Z_t)_{t\geq 0}$, un mouvement brownien, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique et il est bien connu que, pour la loi gaussienne centrée de covariance $-\frac{1}{2\lambda}(id)$, le processus est symétrique.

Dans le cas général on montre que, lorsque $d = 1$, il y a symétrie si et seulement si la probabilité invariante est gaussienne. Lorsque d est quelconque et si la probabilité invariante η est gaussienne de covariance C, il y a symétrie si et seulement si hoC est auto-adjoint. On montre que, si h est diagonisable et s'il y a symétrie, η est nécessairement gaussienne.

1 - La classe de processus de Markov considérée.

On notera $B(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et $<,>$ le produit scalaire usuel. $L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ désignera l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

On se donne, sur l'espace probabilisé (Ω',F',P'), muni d'une filtration c.a.d $(F'_t)_{t\geq 0}$, un $(F'_t)_{t\geq 0}$ P - A - I - S (: processus à accroissements indépendants stationnaires) $(Z_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, P'-ps c.a.d.l.a.g. avec $Z_o = o$, P'-ps.

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On considère sur (Ω',F',P') l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$(*)$ $d X_t = h(X_t)\, dt + d Z_t$.

Il est bien connu que, pour tout x de $\mathbb{R}^d$, il existe une solution de $(*)$ et une seule qui vérifie $X_o = x$, P'-ps ; cette solution $(X_t(.,x))_{t\geq 0}$ est donnée par la formule suivante :

$$(1) \qquad X_t(.,x) = e^{th}\,[x + \int_{]o,t]} e^{-sh}\, dZ_s)\ (.)\ ]$$

(où, pour λ réel, $e^{\lambda h}$ désigne l'opérateur linéaire exponentiel de λh.) Elle est P'-ps c.a.d.l.a.g.

Si on se place sur l'espace produit $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R}^d$ muni de la tribu produit $F = F' \otimes B(\mathbb{R}^d)$, la famille $[(X_t(.,x))_{t\geq 0}]_{x\in\mathbb{R}^d}$ peut être considérée comme un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ sur (Ω,F) et on a :

$$(**) \quad \left| \text{ et } \begin{array}{l} X_t = \int_o^t h(X_s)\, ds + Z_t + X_o \\ X_o = x\ ,\ P^x - ps,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{array}\right.$$

avec $P^x = P' \otimes \varepsilon_x$ (où ε_x désigne la mesure de Dirac en x) et en considérant $(Z_t)_{t\geq 0}$ comme un processus sur (Ω,F) indépendant de x.

La solution considérée de $(**)$ est fortement markovienne comme le montre la proposition suivante (ou encore par un résultat classique : il y a unicité trajectorielle et le processus directeur $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un P-A-I-S.)

On notera $F_t = F'_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour $t \geq 0$.

$(F_t)_{t\geq 0}$ est c.a.d.

Proposition (1-1) :

$(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, (P^x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ est un processus de Markov fort semi-martingale ; il est normal et ps c.a.d. l.a.g.
Il vérifie la propriété (P) suivante (avec $g(t) = e^{th}, \forall t \geq 0$).

(P)
Il existe une application g c.a.d. de $\mathbb{R}^+$ dans $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que l'on ait :

$$E^x\,[f(X_t)] = E^\circ\,[f(X_t + g(t)(x))]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \geq 0,\quad \forall f \in b\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

($b\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *désignant l'ensemble des applications boréliennes bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$*).

Démonstration :

D'après (1) et les définitions de F_t et P^x, $(X_t)_{t\geq o}$ est, pour chaque x de $\mathbb{R}^d$, une $((F_t)_{t\geq o}, P^x)$-semimartingale P^x-ps c.a.d.l.a.g. et on a $X_o = x$, P^x-ps.
On a la propriété (P), avec $g(t) = e^{th}$, car si on pose $Y_t = \int_{]o,t]} e^{-sh} dZ_s$
pour $t\geq o$, $(Y_t)_{t\geq o}$ ne dépend que de ω' et on a :

$$X_t(\omega',x) = e^{th}(x) + e^{th}(Y_t(\omega')) = e^{th}(x) + X_t(\omega',o).$$

Pour obtenir la propriété de Markov forte, on écrit, pour tout $(F_t)_{t\geq o}$ - temps d'arrêt T, sur $[T<\infty]$:

$$X_{T+t}(\omega',x) = e^{th}(X_T(\omega',x)) + e^{T(\omega',x).h+th}\left(\int_{]T(\omega',x),T(\omega',x)+t]} e^{-sh}\,dZ_s\right)$$

Soit :

$X_{T+t} = e^{th}\,[X_T + \int_{]o,t]} e^{-sh}\,d\tilde{Z}_s]$ avec

$\tilde{Z}_s(\omega',x) = Z_{T(\omega',x)+s} - Z_{T(\omega',x)}$, pour $s\geq o$. (Toujours sur $[T<\infty]$.)

Pour tout x fixé, $T(.,x)$ est un $(F'_t)_{t\geq o}$ -temps d'arrêt et, puisque $(Z_s)_{s\geq o}$ est un $(F'_t)_{t\geq o}$-P.A.I.S., $(\tilde{Z}_s)_{s\geq o}$ est sur $[\omega' : T(\omega',x)<\infty]$ un $(F'_{T+t})_{t\geq o}$-P.A.I.S. indépendant de F'_T et de même loi que $(Z_s)_{s\geq o}$.

Par suite, si $\tilde{Y}_t = \int_{]o,t]} e^{-sh}\,d\tilde{Z}_s$ pour $t\geq o$, sur $[T<\infty]$, $(\tilde{Y}_t)_{t\geq o}$ est un $(F'_{T+t})_{t\geq o}$-P.A.I. (non stationnaire) indépendant de F'_T et la loi de $e^{th}(\tilde{Y}_t).1_{[T<\infty]}$ pour P^x est la même que celle de X_t pour P^o, $\forall t\geq o$.

Par suite on a, sur $[T<\infty]$ et pour tout $u\in\mathbb{R}^d$:

$$E^x\,[\exp(i<u, X_{T+t}>)/F_T] = \exp(i<u,e^{th}(X_T)>).\ E^o\,[\exp(i<u, X_t>)]$$

$$= E^{X_T}\,[\exp(i<u, X_t>)]$$

D'où la proposition (1.1).

Inversement, partant d'un processus de Markov d-dimensionnel normal c.a.d.l.a.g et qui vérifie (P), on peut lui associer une équation différentielle stochastique linéaire qu'il satisfait comme le montre la proposition suivante.
On désignera par f^* l'adjoint de $f \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$

Proposition (1.2) :

Soit $(\Omega,F,(F_t)_{t\geq o},(X_t)_{t\geq o},(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ *un processus de Markov à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *normal, ps c.a.d.l.a.g , avec* $(F_t)_{t\geq o}$ *c.a.d. On suppose de plus qu'on a* (P).

Alors :

(a) *Il existe* h *dans* $L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ *telle que* $g(t) = e^{th}$ *pour tout* $t\geq o$ *et telle que si* $\Phi_t(u) = E^o[e^{i<u,X_t>}]$ *on ait* $\Phi_{t+s}(u) = \Phi_t(e^{sh^*}(u)).\Phi_s(u)$, $\forall s,t\geq o$, $\forall u\in\mathbb{R}^d$.

(b) *Si* $Z_t \underset{P^x\text{-}ps}{=\!=} X_t - \int_o^t h(X_s)ds - X_o$ *pour* $t\geq o$, $(Z_t)_{t\geq o}$ *est un* $(F_t)_{t\geq o}$-P.A.I.S. ps c.a.d.l.a.g *ayant même loi pour tous les* P^x *et* $Z_o = o$, ps.

(c) $(X_t)_{t\geq o}$ *est une* $((F_t)_{t\geq o},P^x)$ *-semimartingale,* $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

(d) $(\Omega,F,(F_t)_{t\geq o},(X_t)_{t\geq o},(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ *est fortement markovien, et on a :*

$$X_t \underset{P^x\text{-}ps}{=\!=} e^{th}\,[x + \int_{]o,t]} e^{-sh}\, dZ_s].$$

(e) *La loi de* X_t *est, pour chaque* $t\geq o$, *indéfiniment divisible.*

<u>**Démonstration**</u> :

On a, d'après la propriété de Markov et (P) :

$$E^x\,[e^{i<u,X_{s+t}>}] = E^x\,[E^{X_t}(e^{i<u,X_s>})] = E^x\,[e^{i<u,g(s)(X_t)>}].\Phi_s(u)$$

$$= e^{i<g^*(s)(u),g(t)(x)>}.\Phi_t(g^*(s)(u)).\ \Phi_s(u).$$

Donc :

(2) $$E^x\,[e^{i<u,X_{s+t}>}] = e^{i<u,g(s)\circ g(t)(x)>}\ .\Phi_t(g^*(s)(u)).\ \Phi_s(u).$$

Comme d'après (P) on a aussi $E^x\,[e^{i<u,X_{s+t}>}] = e^{i<u,g(s+t)(x)>}.\ \Phi_{s+t}(u)$

on a :

(3) $$e^{i<u,g(s)\circ g(t)(x)>}.\Phi_t(g^*(s)(u)).\Phi_s(u) = e^{i<u,g(s+t)(x)>}.\ \Phi_{s+t}(u)$$

Prenant x = o dans (3), on obtient : $\Phi_{s+t}(u) = \Phi_t(g^*(s)(u)).\ \Phi_s(u)$.

En choisissant u assez petit pour que $\Phi_{s+t}(u) \neq 0$ et en faisant varier x, on obtient :

(4) $g(s+t) = g(s)\circ g(t), \quad \forall s,t\geq o.$

A cause de la continuité à droite de g, on a $g(t) = e^{th}$ pour un h de $L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$. D'où (a).

Pour obtenir (b), on fixe t et on pose $Y_s = X_{t+s} - e^{sh}(X_t)$ pour $s\geq 0$. On va démontrer la propriété suivante :

(P') *Pour chaque* P^x *le processus* $(Y_s)_{s\geq o}$ *est indépendant de* F_t *et a même loi que* $(X_s)_{s\geq o}$ *sous* P^o.

Il suffit pour cela de montrer que :

(5) $$E^x \left[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \langle u_k , Y_{s_k}\rangle)/F_t\right] = E^o \left[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \langle u_k,X_{s_k}\rangle)\right]$$

pour tout $n>1$, tous $s_k\geq o$, $u_k \in\mathbb{R}^d$.

C'est presque évident pour $n = 1$ en utilisant la propriété de Markov et (P) :

$$E^x \left[\exp(i\langle u,Y_s\rangle)/F_t\right] = E^{X_t} \left[\exp(i\langle u,X_s\rangle)\right] \exp(-i\langle u,e^{sh}(X_t)\rangle),$$

donc $E^x \left[\exp(i\langle u,Y_s\rangle)/F_t\right] = E^o \left[\exp(i\langle u,X_s\rangle)\right]$.

Supposons que (P') est vraie à l'ordre n. Soient $s_1,\dots,s_{n+1}$ avec $s_1<s_2<\dots<s_{n+1}$. D'après la propriété de Markov en $t+s_n$ et (P), $E^x \left[\exp(i \sum_{k=1}^{n+1} \langle u_k,Y_{s_k}\rangle)/F_t\right]$ peut s'écrire sous la forme :

$$E^x \left[\exp(i(\sum_{k=1}^{n} \langle u_k,Y_{s_k}\rangle-\langle u_{n+1},g(s_{n+1})(X_t)\rangle)).\ E^{X_{t+s_n}}(e^{i\langle u_{n+1},X_{s_{n+1}-s_n}\rangle})/F_t)\right]$$

ou encore :

$$E^x \left[\exp(i(\sum_{k=1}^{n} \langle u_k,Y_{s_k}\rangle-\langle u_{n+1},g(s_{n+1})(X_t) + g(s_{n+1}-s_n)(X_{t+s_n})\rangle))/F_t\right] \Phi_{s_{n+1}-s_n}(u_{n+1})$$

Finalement on obtient :

(6) $$E^x \left[\exp(i \sum_{k=1}^{n+1} \langle u_k,Y_{s_k}\rangle)/F_t\right] = E^x\left[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \langle u_k,Y_{s_k}\rangle+\langle g^*(s_{n+1}-s_n)(u_{n+1}),Y_{s_k}\rangle)/F_t\right] \times \Phi_{s_{n+1}-s_n}(u_{n+1})$$

en utilisant (4) et la définition de Y_{s_n}).

On a de même en appliquant la propriété de Markov en s_n et (P):

$$E^o\,[\exp(i\sum_{k=1}^{n+1} <u_k,X_{s_k}>)] = E^o\,[\exp(i\sum_{k=1}^{n} <u_k,X_{s_k}>).\ E^{X_{s_n}}(e^{i<u_{n+1},X_{s_{n+1}-s_n}>})]$$

$$(7) \quad \text{———————} = E^o\,[\exp(i(\sum_{k=1}^{n} <u_k,X_{s_k}>+<g^*(s_{n+1}-s_n)(u_{n+1}),X_{s_n}>))] \times \Phi_{s_{n+1}-s_n}(u)$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que (6) et (7) sont égales. D'où (P').
Z_t est bien définie à une égalité presque sûre près pour tout $t\geq o$, car $(X_t)_{t\geq o}$ est ps c.a.d.l.a.g. $(Z_t)_{t\geq o}$ est ps c.a.d.l.a.g. et $Z_o = o$, P^x-ps, $\forall x$ de manière évidente.

$$Z_{t+s} - Z_t = (X_{t+s} - X_t) - \int_t^{t+s} h(X_v)dv$$

$$\text{————} = (X_{t+s} - X_t) - \int_o^{s} h(X_{t+v})dv$$

$$\text{————} = Y_s + (e^{sh}-id)(X_t) - \int_o^{s} h(Y_v + e^{vh}(X_t))dv.$$

Donc $Z_{t+s} - Z_t = Y_s - \int_o^s h(Y_v)dv + (e^{sh}-id)(X_t) - (\int_o^s h\circ e^{vh}dv)(X_t)$ (en utilisant la linéarité de h). Finalement on obtient :

(8) $Z_{t+s} - Z_t = Y_s - \int_o^s h(Y_v)dv$ car $\frac{\partial}{\partial s}(e^{sh}) = h\circ e^{sh}$ qui est continu par rapport à s.

En appliquant (P'), on obtient que $Z_{t+s} - Z_t$ est indépendante de F_t et que sa loi pour P^x est la même que celle de $X_s - \int_o^s h(X_v)dv = Z_s$ pour P°.

En particulier, pour $t = 0$, on voit que Z_s a même loi pour tous les $P^x (\forall\ s \geq 0)$. (Il en est de même pour $(Z_s)_{s>0}$). On a donc (b). (c) est immédiat à partir de (b). (d) s'obtient en utilisant la formule de Ito et la proposition (1.1).

Comme $X_t = e^{th} [x + \int_{]o,t]} e^{-sh}\, dZ_s]$, la loi de X_t est indéfiniment divisible pour tout $t \geq 0$ (: si $Y_t = \int_{]o,t]} e^{-sh}\, dZ_s$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un P. A.I sans discontinuité fixe. D'où l'on a (e) et la proposition (1-2).

Remarque (1.3)

On peut démontrer que, si $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, (P^x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ est un processus de Markov normal d-dimensionnel vérifiant (P), avec $(F_t)_{t>0}$ c.a.d, on peut, quitte à compléter les tribus et si on suppose que $t \to \Phi_t(u)$ est c.a.d. l.a.g. pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, en construire une version ps/c.a.d. l.a.g.

(Pour cela on montre que , $\forall\ u \in \mathbb{R}^d$, si $M_t^{(u)} = \dfrac{\exp(i < u, Y_t >)}{E^o\, [\exp(i < u, Y_t >)]}$,

avec $Y_t = e^{-th}(X_t)$, $(M_t^{(u)})_{t\geq 0}$ est une $(P^o, (F_t)_{t\geq 0})$-martingale).

Soit $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, (P^x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ un processus de Markov normal vérifiant (P) avec $g(t) = e^{th}$, $\forall t \geq 0$. Si $(P_t)_{t\geq 0}$ désigne son semi-groupe de transition et η_t la loi de X_t pour P^o, la propriété (P) peut s'écrire encore sous la forme suivante.

$$(9) \qquad P_t\, f(x) = \int f(e^{th}(x) + y)\ \eta_t(dy)$$

Par suite, on a immédiatement la proposition suivante. On rappelle que η est invariante pour $(P_t)_{t\geq 0}$ si $\eta P_t = \eta$, $\forall t \geq 0$.

Proposition (1-4) :

Une probabilité η *sur* $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ *est invariante pour le semi-groupe* $(P_t)_{t\geq 0}$ *si et seulement si elle vérifie pour tout* $t \geq 0$:

$$(10) \qquad \eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t$$

($e^{th}.\eta$ désigne la probabilité image de η par e^{th} et $*$ le produit de convolution). On notera $P(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des probabilités sur $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$.

<u>Définition(1-5)</u> :

Soient $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$. On dit que η est "f-décomposable" s'il existe $\eta_f \in P(\mathbb{R}^d)$ telle que l'on ait :
$\eta = (f.\eta) * \eta_f$.

En termes de fonctions caractéristiques, la propriété précédente s'écrit, si ϕ désigne la fonction caractéristique de η et ϕ_f celle de η_f

(11) $$\phi(u) = \phi(f^*(u)).\ \phi_f(u), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d.$$

D'après la proposition (1-4), une probabilité invariante η est nécessairement e^{th}-décomposable pour tout $t \geq 0$ (et de plus : $\eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t$ avec pour η_t la loi de X_t pour P^o).

Dans ce qui suit, au lieu de se donner un processus de Markov de la classe considérée, on part d'une probabilité η sur $\mathbb{R}^d$ et d'un opérateur h et on leur associe un processus markovien pour lequel η est invariante.

<u>Proposition (1-6)</u> :

Soient $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ *et* $h \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$. *Si* η *est* e^{th}*-décomposable pour tout* $t \geq 0$ *et si sa fonction caractéristique* ϕ *ne s'annule pas, il existe un processus de Markov solution d'une équation stochastique de la forme (* *), unique en loi, admettant* η *comme probabilité invariante.*

<u>Démonstration</u> :

ϕ ne s'annulant pas, il existe pour chaque $t \geq 0$ une unique probabilité η_t telle que $\eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t$: car la fonction caractéristique ϕ_t de η_t s'écrit (12) $\phi_t(u) = \dfrac{\phi(u)}{\phi(e^{th^*}(u))}$.

On pose, pour $f_u(x) = e^{i<u,x>}$:

(13) $\quad P_t f_u(x) = e^{i<u,e^{th}(x)>} . \phi_t(u)$

Pour obtenir la propriété de semi-groupe $P_s(P_t f_u) = P_{s+t} f_u$, il suffit de montrer qu'on a :

(14) $\quad \eta_{s+t} = (e^{th}.\eta_s) * \eta_t .$

En effet : $P_s(P_t f_u)(x) = \exp(i<e^{th^*}(u),\ e^{sh}(x)>). \phi_s(e^{th^*}(u)). \phi_t(u)$

$$= \exp(i<u,e^{(s+t)h}(x)>) . \phi_s(e^{th^*}(u)). \phi_t(u)$$

et $P_{s+t} f_u(x) = \exp(i<u,e^{(s+t)h}(x)>) \cdot \phi_{s+t}(u)$.
(ou encore utiliser (9)).

Pour obtenir (14) on remarque que, si $f \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ et si $(\mu,v \in P(\mathbb{R}^d)$, on a : $f.(\mu * v) = (f.\mu) * (f.v)$.

Donc : $\eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t = [e^{th}.((e^{sh}.\eta) * \eta_s)] * \eta_t$ ou encore

$\eta = (e^{(s+t)h}.\eta) * (e^{th}.\eta_s) * \eta_t$. D'où le résultat par l'unicité de η_{s+t} telle que : $\eta = (e^{(s+t)h}.\eta) * \eta_{s+t}$.

Il existe donc, sur l'espace canonique $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}^+}$, un processus de

Markov dont le semi-groupe admet la restriction (13) aux f_u.
On a $\eta_o = \varepsilon_{\{o\}}$, par suite , par (13), le processus est normal. Il vérifie (P) par définition. η est invariante de manière évidente.

(12) entraîne que $t \to \phi_t(u)$ est continue pour tout u. D'où l'existence d'une modification c.a.d.l.a.g. du processus en utilisant la remarque (1-3). Par suite, en appliquant la proposition (1-2), le processus vérifie (* *). L'unicité en loi est évidente (à cause de l'unicité de η_t vue au début).■

Remarquons que, pour tout opérateur h, il existe une infinité de probabilités e^{th}-décomposables pour tout $t \geq 0$ dont la fonction caractéristique ne s'annule pas : toute probabilité de Dirac convient.
Le processus de Markov correspondant est déterministe de manière évidente.

La proposition (1-6) sera appliquée aux "probabilités autodécomposables pour les opérateurs" et aux "probabilités de Lévy pleines" que l'on va introduire maintenant.

2 - Probabilités de Lévy- Probabilités stables.

On notera I l'ensemble des lois indéfiniment divisibles sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Définitions (2-1)

(1) La classe L des "probabilités de Lévy" sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est l'ensemble des lois limites, quand $n \to +\infty$, de lois de v.a de la forme

$A_n(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) + a_n$, où $(\xi_k)_{k \geq 1}$ est une suite de v.a, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendantes, où $a_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall\, n$, et où $A_n \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et est inversible, avec la condition (UI) suivante dans laquelle $\mu_{k,n}$ désigne la loi de $A_n(\xi_k)$:

$$\text{(UI)} \quad \forall\ V \text{ voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d, \quad \lim_{n \to +\infty} \max_{1 \leq k \leq n} \mu_{k,n}(\mathbb{R}^d - V) = 0.$$

(2) La classe S des "probabilités stables pour les opérateurs" est le sous-ensemble de L obtenu en imposant que les ξ_k aient même loi.

Tout élément de L est indéfiniment divisible. Lorsque dans (1), on impose que $A_n = \frac{1}{b_n}(\mathrm{id})$ avec $b_n > 0$ (et id : identité de $\mathbb{R}^d$), on obtient la classe L_a des "probabilités autodécomposables". Lorsque de plus les ξ_k ont même loi, on obtient les lois stables au sens ordinaire.

On dit que $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ est "pleine" si son support n'est pas contenu dans un hyperplan affine. On voit facilement que η est pleine si et seulement si, ϕ désignant sa fonction caractéristique, il n'existe pas d'élément $u \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tel que l'on ait : $|\phi(\lambda u)| = 1$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$. (Voir [4], prop. 1).

<u>Définition (2-2)</u>:

Soit $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$. η est " autodécomposable pour les opérateurs", et on note $\eta \in A$, s'il existe $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que : $\lim_{s \to +\infty} e^{sh} = 0$ et telle que η soit e^{sh}-décomposable pour tout $s \geq 0$.

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème (2-3)</u> :

Soit $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$.

(1) Si η *est une probabilité de Lévy pleine, alors* η *est auto-décomposable pour les opérateurs.*

(2) Inversement, si $\eta \in A$ *, alors* η *est de Lévy. De plus le terme* η_s *de la décomposition* $\eta = (e^{sh}.\eta) * \eta_s$ *est dans* I *(et unique).*

(Voir [6] , propositions(5-1) et (5-2)).

Pour les probabilités stables au sens de la définition (2-1) (2) on a le théorème suivant dans lequel pour $\eta \in I$ de fonction caractéristique ϕ, η^{*t} désigne la probabilité de fonction caractéristique ϕ^t.

<u>Théorème (2-4)</u> :

(1) Si $\eta \in S$ *et si* η *est pleine, on a la propriété de décomposition* (D) *suivante* :

(D) $\exists$ $f \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que $\lim_{s \to +\infty} e^{-s.f} = 0$ et telle que :
$\forall$ $t>0$, $\exists$ $b_t \in \mathbb{R}^d$ avec :

$$\eta^{*t} = (e^{(\mathrm{Log}\ t)f}.\eta) * \varepsilon_{\{b_t\}}$$

(2) Inversement si $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ *vérifie* (D) *, alors* $\eta \in S$.

Remarquons que, lorsqu'on prend $t = n \in \mathbb{N}^*$ dans (D), on obtient l'expression suivante de la stabilité : si $X_1,\ldots,X_n$ sont n v.a de loi η indépendantes, $X_1+\ldots+X_n$ a même loi que $A_n(X) + b_n$, avec pour X une v.a de loi η et $A_n = e^{(\mathrm{Log}\, n).f}$.

(Voir [4] pour le (1) du théorème (2-4) ; le (2) est évident).

Remarquons que η est autodécomposable si et seulement si l'opérateur h associé dans le théorème (2-3) est $h = -id$ (ou $-\lambda(id)$ avec $\lambda > 0$).
De même η est une loi stable au sens ordinaire si et seulement si elle vérifie (D) avec $f = id$.

Corollaire (2-5) :

Si η vérifie la propriété (D), η est e^{-sf}-décomposable pour tout $s \geq 0$ et le terme η_s correspondant est :

$$\eta_s = \eta^{*(1-e^{-s})} * \varepsilon_{\{b_{e^{-s}}\}}$$

Démonstration :

On remplace t par e^{-s} dans (D) et on prend le produit de convolution avec $\eta^{*(1-e^{-s})}$ des deux membres. D'où le résultat.

Lorsque $d = 1$ les classes L, L_a et A coïncident et on retrouve la notion de "loi de la classe L" introduite par Paul Lévy et développée dans le chapitre 6 de [1] (ou dans [3] p.331 à 336). La loi de Poisson n'est pas de la classe L. Toute loi de la classe L est unimodale. (Voir [8] pour la première démonstration complète de ce résultat énoncé dans [1])
La fonction caractéristique correspondante est de la forme :

$\phi(u) = \frac{1}{u}\int_0^u \Phi(v)\, dv$ pour $u \neq 0$, où Φ est une autre fonction caractéristique. Par suite ϕ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ (Résultat que l'on retrouvera plus loin par une autre méthode).

3 - Existence d'une probabilité invariante : cas où $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{th} = 0$.

D'après le théorème (2-3), tout élément η de la classe A des probabilités autodécomposables pour les opérateurs (en particulier toute probabilité de Lévy pleine) est indéfiniment divisible. Par suite, on peut appliquer à η la proposition (1-6) : il existe un processus de Markov de la classe étudiée au paragraphe 1 l'admettant comme probabilité invariante.

Pour pouvoir en déduire des résultats sur la classe A, il faut voir sous quelles conditions il existe une probabilité invariante lorsque $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$ et lorsque l'opérateur h vérifie : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{th} = 0$.

On se donne donc un processus de Markov $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (P^x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ solution de $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$, avec $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{th} = 0$ et avec $(Z_t)_{t \geq 0}$ P.A.I.S. d-dimensionnel.

On notera ξ le "log" de la fonction caractéristique de Z_1 (soit : $E^\circ [e^{i \langle u, Z_1 \rangle}] = e^{\xi(u)}$, $\forall$ u). S désignera la mesure de Lévy associée aux sauts du P.A.I.S. $(Z_t)_{t \geq 0}$.

On a le résultat suivant. Voir le théorème (2-1) de [12] pour une autre démonstration antérieure et dans un cadre plus large du même type de résultat : $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un espace de Banach. Par contre, il est supposé que $\|e^h\| < 1$.

Théorème (3-1) :

Il existe une probabilité invariante η si et seulement si :

$\int_{\{\|x\| > 1\}} \log(\|x\|) \, S(dx) < +\infty$; *ou encore si on a la condition équivalente suivante :*

$E^\circ [\operatorname{Log}(1+\|Z_1\|)] < +\infty$

Dans ce cas :

(a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \xi(e^{sh^*}(u)ds = \int_0^{+\infty} \xi(e^{sh^*}(u)ds$ *existe pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$,

η *est unique et sa fonction caractéristique* ϕ *s'écrit*

$\phi(u) = \exp [\int_0^{+\infty} \xi(e^{sh^*}(u)ds]$. *De plus* $\eta \in A$.

(b) Si $U_t = \int_{]0,t]} e^{sh} \, d\, Z_s$, U_t *converge* P°-ps , *quand* $t \to +\infty$, *vers une v.a* U_∞ *de loi* η .

Démonstration :

On montre d'abord que la fonction caractéristique ϕ_t de X_t pour P° s'écrit :

(1) $\phi_t(u) = \exp [\int_0^t \xi(e^{sh*}(u))ds]$.(Résultat valable même si on n'a pas $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{th} = 0$).

C'est une conséquence immédiate de l'égalité ps suivante :

$X_t \underset{P^\circ\text{-ps}}{=} e^{th} [\int_{]0,t]} e^{-sh} dZ_s]$ vue dans la proposition (1-2) et du lemme suivant.

Lemme (3-2) :

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, *mesurable bornée sur tout intervalle* $]0,s]$, *avec* $s > 0$. *Si* $t > 0$ *et si* $Y = \int_{]0,t]} g(s) \, d\, Z_s$, *alors on a :*

(2) $E^\circ [\exp(i \langle u,Y \rangle)] = \exp [\int_0^t \xi(g^*(s)(u))ds]$.

Démonstration du lemme :

On approche Y en probabilité par une suite $Y^{(n)}$ d'intégrales stochastiques de processus étagés ; $Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} g(s_k)(Z_{s_{k+1}} - Z_{s_k})$,

où $0 = s_o < s_1 < \ldots < s_{n+1} = t$ et on a :

$$E^\circ [\exp(i < u, Y^{(n)} >)] = \exp [\sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k)\ \xi(g(s_k)^*(u))]$$ car $(Z_t)_{t \geq 0}$

est une P.A.I.S. et car la fonction caractéristique de Z_t est $e^{t.\xi}$.
D'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

Le fait que les deux conditions données au début de l'énoncé du théorème sont équivalentes est un résultat bien connu. (Voir par exemple : [10]).

Supposons qu'il existe une probabilité invariante η , alors sa fonction caractéristique vérifiant (par la proposition (1-4)) :

(3) $\phi(u) = \phi(e^{th^*}(u)).\phi_t(u)$ avec ϕ_t donnée par (1), comme $e^{th^*} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, on obtient, lorsque t tend vers $+\infty$,

(4) $\phi(u) = \lim_{t \to +\infty} \exp [\int_o^t \xi(e^{sh^*}(u)ds]$. D'où le (a) du théorème.

Pour montrer que $\int_{\{\|x\| > 1\}} \mathrm{Log}(\|x\|) S(dx) < +\infty$, on va prouver qu'on a le (b) et ensuite déduire de la convergence en probabilité de U_t, quand $t \to +\infty$, cette condition sur S.

(b) : d'après le lemme (3-2), la fonction caractéristique de U_t pour P° est la même que celle de X_t. Elle est donnée par (1). Par suite $(U_t)_{t \geq 0}$ converge en loi lorsque $t \to +\infty$ vers la loi η . Comme U_t est l'intégrale stochastique d'un processus déterministe par rapport à un P.A.I.S., les convergences en loi, en probabilité et presque sûre sont équivalentes. ([15]).
(La convergence en probabilité est immédiate car, si $t' \leq t$, on a
$E^\circ \left(e^{i < u, U_t - U_{t'} >}\right) = \exp\left(\int_{t'}^t \xi(e^{sh^*}(u)ds\right) \underset{t,t' \to +\infty}{\to} 1$, et donc $U_t - U_{t'}$ converge vers 0 en loi et donc en probabilité. Par suite, comme

l'espace $L^{o}_{\mathbb{R}^d}(\Omega, F, P)$ des v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la convergence en probabilité est métrique complet, $(U_t)_{t\geq 0}$ converge en probabilité vers une v.a U_∞ de loi η_t. D'où le (b).

On aura besoin dans la suite de la démonstration du théorème inégalités suivantes :

(5) $\exists$ $\alpha,\beta > 0$ tels que : $\|e^{sh}(u)\| \geq \alpha e^{-\beta t}\|u\|$

(6) $\exists$ $\gamma,\delta > 0$ tels que : $\|e^{sh}(u)\| \leq \gamma e^{-\delta t}\|u\|$

$\forall$ $u \in \mathbb{R}^d$, $\forall$ $t \geq 0$.

(Il suffit de prendre $-\beta$ et $-\delta$ tels que : $\mathrm{Re}(\lambda) > -\beta$ et $\mathrm{Re}(\lambda) < -\gamma < 0$ pour toute valeur propre λ de h).

(Voir [6] p.139 et 140).

Pour terminer la démonstration du fait que l'existence d'une probabilité invariante implique : $\int_{\{\|x\|>1\}} \mathrm{Log}(\|x\|)S(dx) < +\infty$, on part du résultat (b) qu'on vient de prouver.

Posons $N_t = \sum_{s\leq t} 1_{\{|\Delta U_s| > 1\}}$. $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissant à valeurs entières dont le "compensateur" est $(A_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$A_t = \int_0^t \left(\int_{\{\|e^{sh}(x)\|>1\}} S(dx)\right)ds.$$

(car on a: $\Delta U_t = e^{th}(\Delta Z_t)$, où $\Delta(.)_t$ désigne le saut du processus considéré à l'instant t).

Si $T_n = \inf\{t : N_t \geq n\}$ on a, si $A_\infty \leq +\infty$ désigne $\lim_{t\to+\infty} A_t$:

$$(7) \qquad A_\infty . P[T_n = +\infty] \leq E(A_{T_n}) = E(N_{T_n}) \leq n.$$

Comme $(U_t)_{t\geq 0}$ converge presque sûrement, $N_\infty = \lim_{t\to+\infty} N_t < +\infty$, P° - ps.

Par suite $P[T_n = \infty]$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il existe donc n tel que $P[T_n = +\infty] > 0$ et donc, par (7), on a $A_\infty < +\infty$.

On utilise maintenant (5). On a :

$$(8)\quad \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\{\|x\|>\frac{e^{\beta s}}{\alpha}\}} S(dx)\Big)ds \le \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\{\|e^{sh}(x)\|>1\}} S(dx)\Big)ds = A_\infty < +\infty$$

D'autre part, on a

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\{\|x\|>\frac{e^{\beta s}}{\alpha}\}} S(dx)\Big)ds = \int_{\{\|x\|>\frac{1}{\alpha}\}}\Big(\int_0^{\frac{1}{\beta}\log(\alpha\|x\|)} ds\Big) S(dx)$$

on obtient : $\frac{1}{\beta}\int_{\{\|x\|>\frac{1}{\alpha}\}} (\log\alpha + \log\|x\|) S(dx) < +\infty$. Ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème.

Inversement, si $\int_{\{\|x\|>1\}} \log(\|x\|) S(dx) < +\infty$, il suffit de démontrer la formule (9) suivante pour obtenir l'existence d'une probabilité invariante.

$$(9)\quad \forall\ M>0,\ \text{on a :}\quad \int_0^{+\infty}\big(\sup_{\|u\|\le M} |\xi(e^{sh^*}(u))|\big)ds < +\infty.$$

En effet, si on a (9) et si on pose : $\phi(u) = \exp\big[\int_0^{+\infty}\xi(e^{sh^*}(u))ds\big]$,

ϕ est bien définie pour tout u et de plus on a :

(10) $\phi(u) = \lim\limits_{t\to+\infty} \phi_t(u)$, avec pour ϕ_t, d'après (1), la fonction caractéristique de X_t pour P°. (9) entraine que, dans (10), la convergence a lieu uniformément en u dans chaque compact de $\mathbb{R}^d$. ϕ est donc continue. Par suite, ϕ est une fonction caractéristique. Elle est indéfiniment divisible (car la loi de X_t l'est) et la probabilité correspondante η est dans A et est invariante d'après la formule (11) suivante, la définition de ϕ et (1) ainsi que la proposition (1-4).

(11) $\qquad \phi(e^{th^*}(u)) = \exp\left[\int_t^{+\infty} (e^{sh^*}(u))ds\right]$

Pour démontrer (9), on utilise les inégalités suivantes :

(12) $$|e^{iv} - 1| \leq 2 \wedge |v| \leq \frac{2e^2}{e^2-1}(1 - e^{-|v|})$$

et

$$|e^{iv} - 1 - iv| \leq |v|^2 \quad \forall\, v \in \mathbb{C}$$

Comme $\quad \xi(u) = i\, \langle a,u\rangle - \frac{1}{2} \langle C(u),u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle 1_{\{\|x\| \leq 1\}}) S(dx)$

avec $a \in \mathbb{R}^d$, C opérateur symétrique positif et S mesure positive sur $\mathbb{R}^d-\{0\}$ telle que $\int (\|x\|^2 \wedge 1) S(dx) < +\infty$, il existe une constante $K(\geq \frac{2e^2}{e^2-1})$ telle que l'on ait :

(13) $$|\xi(u)| \leq K.\left[\|u\| + \|u\|^2 + \int_{\{\|x\|>1\}} (1-e^{-\|u\|\cdot\|x\|}) S(dx)\right]$$

On utilise (6) : si $M = 2^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixée), on a :

(14) $\|u\| \leq M$ entraine : $|\xi(e^{sh^*}(u))| \leq \gamma' K(M+M^2)e^{-\delta s} + K\int_{\{\|x\|>1\}} (1-e^{-\gamma M\|x\|e^{-\delta s}}) S(dx)$

$$\gamma' = \gamma \vee \gamma^2$$

On a les majorations suivantes, pour $\|x\| > 1$:

$$1 - e^{-\gamma 2^n \|x\| e^{-\delta s}} \leq 2^n(2 - e^{-\gamma\|x\|e^{-\delta s}})$$

et

$$2^n (1 - e^{-\gamma\|x\|e^{-\delta s}}) \leq 2^n \left[1_{[\|x\| > \frac{e^{\delta s/2}}{\gamma}]} + 1_{[1<\|x\|<\frac{e^{\delta s/2}}{\gamma}]} \cdot (1 - e^{-\frac{e}{\gamma}^{-\frac{\delta s}{2}}})\right]$$

On obtient donc :

(15) si $\|u\| \leq M$, on a :

$$|\xi(e^{sh^*}(u))| \leq \gamma'.K(M + M^2)\ e^{-\delta s} + K\,2^n \int_{[\|x\| > \frac{e^{\delta s/2}}{\gamma}]} S(dx) + K2^n(1-e^{-\frac{e^{-\frac{\delta s}{2}}}{\gamma}})S(\|x\|>1)$$

D'où :

$$\int_o^{+\infty} \sup_{\|u\|\leq M} |\ (e^{sh^*}(u))|ds \leq \gamma'.K(M+M^2).\int_o^{+\infty} e^{-\delta s}\, ds + K2^n(\int_o^{+\infty}(1-e^{-\frac{e^{-\frac{\delta s}{2}}}{\gamma}})ds)S(\|x\|>1$$

$$+ \frac{K.2^{n+1}}{\gamma} \int_{[\|x\|>\frac{1}{\gamma}]} (\log\gamma + \log(\|x\|))\ S(dx) < +\infty,$$

car $\int_{[\|x\|>1]} \log(\|x\|)\ S(dx) < +\infty$ et car : $1 - e^{-\frac{e^{-\frac{\delta s}{2}}}{\gamma}} \leq \frac{e^{-\frac{\delta s}{2}}}{\gamma}$

D'où le théorème 1.

Comme application du théorème (3.1)et de la proposition (1.6) on a le résultat suivant. (C'est le théorème (3.1) de [12] sans l'hypothèse $\|e^h\|<1$ mais en dimension finie).

<u>Proposition (3.3)</u> :

Soit $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $\eta \in A$ *si et seulement s'il existe* $h \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ *avec* $\lim_{t\to+\infty} e^{th} = 0$ *et s'il existe un* P.A.I.S ps c.a.d.ℓ.a.g $(Z_t)_{t\geq 0}$ *tels que* : $U_t = \int_{]o,t]} e^{sh}\, dZ_s$ *converge en loi vers* U_∞ *de loi* η lorsque $t \to +\infty$.

Démonstration :

Si $\eta \in A$ on a vu qu'on a les hypothèses de la proposition (1.6). Par suite, il existe un processus de Markov d-dimensionnel solution d'une équation stochastique de la forme $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$ l'admettant comme probabilité invariante, $(Z_t)_{t\geq 0}$ étant un P.A.I.S ps c.a.d.l.a.g et h un opérateur tel que : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{th} = 0$. Par suite, en appliquant (b) du théorème (3.1), on obtient la convergence en loi de U_t vers U_∞ de loi η.

Inversement, s'il existe une telle famille d'intégrales stochastiques dont les lois convergent vers η et si e^{ξ} désigne la fonction caractéristique de Z_1, on a (par le lemme (3.2)) :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \xi(e^{sh*}(u))\, ds \quad \text{existe,} \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \quad \text{et}$$

la fonction caractéristique Φ de η s'écrit :

$$\Phi(u) = \exp\left[\int_0^{+\infty} \xi(e^{sh*}(u))ds\right].$$

Par suite on a : $\Phi(u) = \Phi(e^{th*}(u)).\, \Phi_t(u)$, $\forall t\geq 0$, avec pour Φ_t la fonction caractéristique de U_t. Donc $\eta \in A$. □

Fixons $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{th} = 0$.

On note A(h) l'ensemble des probabilités e^{th}-décomposables, $\forall t\geq 0$. On a : $A(h) \subset A$. Si J désigne l'ensemble des probabilités μ sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\mu \in I$ et $\int \log(1 + \|x\|)(\mu(dx) < +\infty$, le théorème (3.1) permet de définir une application ℓ_h de J dans A(h) :

$\eta = \ell_h(\mu)$ est la loi de fonction caractéristique

$\Phi(u) = \exp\left[\int_0^{+\infty} \xi(e^{sh*}(u))ds\right]$ où ξ désigne le "log" de la fonction caractéristique de μ . ℓ_h est de manière évidente un homomorphisme de semi-groupes (pour la convolution). D'après la proposition (1.6) c'est un isomorphisme. (Voir aussi le lemme (3.1) de [12]).
On a encore le résultat suivant (voir le corollaire (3.1) de [12]).

Proposition (3.4) :

Soit $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$. On a alors : $\eta \in A$ si et seulement si sa fonction caractéristique Φ est de la forme suivante :

$$\Phi(u) = \exp[\, i\langle a,u\rangle - \frac{1}{2}\langle D(u),u\rangle + \int_0^{+\infty} ds \int_{\mathbb{R}^d-[o]} [\, e^{i\langle u,e^{sh}(x)\rangle} - 1 - i\langle u,e^{sh}(x)\rangle 1_{[\|x\|\leq 1]}]\, S(dx)]$$

où $h \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ avec $\lim_{t\to+\infty} e^{th} = 0$, $a \in \mathbb{R}^d$, $D \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ est symétrique positif et tel que $h\circ D + D\circ h^*$ soit négatif, enfin S est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d-[o]$ telle que

$$\int_{[\|x\|\leq 1]} \|x\|^2\, S(dx) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{[\|x\|>1]} \log(\|x\|)\, S(dx) < +\infty$$

a et D sont uniques ; à chaque $h \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ correspond une unique mesure S.

Démonstration :

Soit $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$. On suppose que sa fonction caractéristique a la forme précédente. On remarque d'abord que, comme $h\circ D + D\circ h^*$ est négatif, l'opérateur $D_t = D - e^{th}\circ D\circ e^{th*}$ est positif, $\forall t\geq 0$.

En effet, si on pose : $k_u(t) = \langle D_t(u),u\rangle$, on a :

$$\frac{d}{dt} k_u(t) = -\langle (h\circ D + D\circ h^*)\circ e^{th*}(u),\, e^{th*}(u)\rangle \geq 0, \quad \forall t\geq 0 \text{ et } \forall u\in\mathbb{R}^d.$$

D'où le résultat.

Or, on a : $\dfrac{\Phi(u)}{\Phi(e^{th*}(u))} = \exp\,[i\langle a-e^{th}(a),u\rangle - \frac{1}{2}\langle D_t(u),u\rangle + \int_0^t \Psi(e^{sh*}(u))ds]$,

où $\Psi(u) = \int_0^{+\infty} [e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle 1_{[\|x\|\leq 1]}]\, .S(dx)$. Par suite D_t

étant positif et $\exp\,[\int_0^t \Psi(e^{sh*}(u)ds\,]$ étant une fonction caractéristique

par le lemme (1.2), $\dfrac{\Phi(\cdot)}{\Phi(e^{th*}(\cdot))}$ est une fonction caractéristique,

$\forall t\geq 0$. Donc $\eta \in A$.

Inversement soit $\eta \in A$. Soit $h \in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ tel que $\lim_{t\to+\infty} e^{th} = 0$

et tel que η soit e^{th}-décomposable pour tout $t \geq 0$.

On a vu qu'il existe une unique probabilité $\mu \in J$ telle que $\ell_h(\mu) = \eta$. Si ξ est le "log" de la fonction caractéristique de μ, la fonction caractéristique Φ de η est : $\Phi(u) = \exp[\int_0^{+\infty} \xi(e^{sh*}(u))ds]$.

Ce qui donne, si $\xi(u) = i\langle b,u\rangle - \frac{1}{2}\langle C(u),u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} [e^{i\langle u,s\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle 1_{\{\|x\|\leq 1\}}] S(dx)$

avec $b \in \mathbb{R}^d$, C opérateur symétrique positif et S mesure positive sur $\mathbb{R}^d-\{0\}$ telle que : $\int_{\{\|x\|\leq 1\}} \|x\|^2 S(dx) < +\infty$ et $\int_{\{\|x\| > 1\}} \log(\|x\|) S(dx) < +\infty$,

l'expression de ϕ de la proposition (3-4) avec $a = -\int_0^{+\infty} e^{sh*}(b)ds$,

$D = -\int_0^{+\infty} e^{sh} \circ C \circ e^{sh*} ds$ (bien définis car $e^{sh} \underset{s\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\exists\ \gamma,\delta > 0$ tels que $\|e^{sh}\| \leq \gamma e^{-\delta s}$, $\forall\ s \geq 0$.)

Il reste à voir que $D \circ h^* + h \circ D$ est négatif. Pour cela on remarque que, η étant e^{th}-décomposable, $\forall\ t \geq 0$, on a nécessairement

$D_t = D - e^{th} \circ D \circ e^{th*}$ positif. (C'est la covariance intervenant dans la formule de Lévy-Khintchine appliquée à la loi $\eta_t \in I$ telle que $\eta = (e^{th}.\eta) * \eta_t$.). Par suite, en faisant un développement limité on a $D_t = -t(h \circ D + D \circ h^*) + o(t)$, donc $h \circ D + D \circ h^*$ est négatif.

D'après l'unicité de la représentation de Lévy-Khintchine, a et D sont uniques, quelque soit l'opérateur h associé à η.

S est unique si on fixe h car ℓ_h est injective.

<u>Remarques (3-5)</u> :

1) On voit facilement, en remplaçant u par $e^{th^*}(u)$ dans l'expression de Φ donnée dans la proposition (3-4), que $t \to \Phi(e^{th^*}(u))$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $\forall\, u \in \mathbb{R}^d$ fixé.

En particulier, lorsque $d = 1$, on peut en déduire que Φ est continûment dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$. (Résultat énoncé plus haut comme conséquence de l'unimodalité de la loi η de la classe L correspondante).

2) Lorsque $h = c(id)$ avec $c < 0$ (et id : identité sur $\mathbb{R}^d$), on déduit de la proposition (3-4) une caractérisation des lois autodécomposables (bien connue ; c'est un résultat de Urbanik obtenu par une autre méthode) : $\eta \in L_a$ si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme :

$$\phi(u) = \exp\left[i\langle b,u\rangle - \frac{1}{2}\langle D(u),u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \left(\left[\int_0^{\langle u,x\rangle} \frac{e^{iv}-1}{v}\, dv\right) - i\langle u,x\rangle 1_{\{\|x\|\leq 1\}} \right] S(dx)\right)$$

où $b \in \mathbb{R}^d$, D est un opérateur positif et où S vérifie les mêmes hypothèses que dans la proposition (3-4).

(Car l'intégrale double considérée est égale à

$$\int_0^{+\infty} ds \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \left((e^{ie^{-s}\langle u,x\rangle} - 1 - ie^{-s}\langle u,x\rangle\, 1_{(\|x\|\leq 1)}\right) S(dx)$$

en posant $v = e^{-s}. \langle u,x\rangle$.)

Voici maintenant des résultats de [12] concernant les probabilités stables et leur application au cadre présent.

On notera $S(h)$ l'ensemble des éléments de S qui vérifient la propriété (D) du théorème (2-4) avec $f = -h$ (et $\lim_{t\to+\infty} e^{th} = 0$).

Si $\mu \in \mathcal{S}$, on a : $\int \log(1+\|x\|)\, \mathcal{S}(dx) < +\infty$. (Voir [10], corollaire 2).
Donc S est contenue dans J.

Soit $(X_t)_{t>0}$ vérifiant $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$, avec μ loi de Z_1 dans J.
On sait qu'il existe une probabilité invariante et une seule : $\eta = \ell_h(\mu)$.

On a : $\mu \in S(h)$ si et seulement si $\eta = \mu^{*c} * \varepsilon_{\{x_0\}}$ avec $c > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. (Et donc $\eta \in S(h)$ aussi). (Voir le théorème (3-6) de [12]).

4 - Existence d'une probabilité invariante : cas général

On se donne un processus de Markov solution d'une équation différentielle stochastique de la forme : $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$ avec $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ P.A.I.S. d-dimensionnel.

A h on peut associer une unique décomposition de $\mathbb{R}^d$ en somme directe $\mathbb{R}^d = E \oplus F$ telle que :

(a) E et F soient stables par h

et

(b) la restriction h^E (resp : h^F) de h à E (resp : à F) n'ait que des valeurs propres λ telles que $Re(\lambda) < 0$ (resp : $Re(\lambda) \geq 0$).

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on notera $x = x^E + x^F$ où $x^E \in E$ et $x^F \in F$.
De même on notera $(Z_t^E)_{t \geq 0}$ (resp$(X_t^E)_{t \geq 0}$) la projection de $(Z_t)_{t \geq 0}$ sur E relativement à F (resp de $(X_t)_{t \geq 0}$...) De même on définit $(Z_t^F)_{t \geq 0}$ et $(X_t^F)_{t \geq 0}$. $(Z_t^E)_{t \geq 0}$ et $(Z_t^F)_{t \geq 0}$ sont des P.A.I.S.

A $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ on associe ses lois marginales que l'on note η^E et η^F.
On a alors le résultat suivant. (Voir [14] pour une autre étude dans la même direction).

<u>Théorème (4-1)</u>:

Pour qu'il existe une probabilité invariante η , il faut et il suffit qu'on ait les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) Le processus $(Z_t^E)_{t \geq 0}$ est tel que $\int_E \log(1+\|x\|)\mu(dx) < +\infty$,
μ désignant la loi de Z_1^E .

(ii) $(Z_t^F)_{t \geq 0}$ *est déterministe de la forme* $Z_t^F = t.h^F(\alpha)$ *avec* $\alpha \in F$.

Dans ce cas, on a : $X_t^F = e^{th^F}(X_o+\alpha) - \alpha \quad \forall\, t \geq 0$ et η^E *est unique avec* $\eta^E \in A(E)$.

($A(E)$ désigne l'ensemble des probabilités sur $(E, B(E))$ autodécomposables pour les opérateurs).

On aura besoin du lemme suivant où π désigne la projection sur G selon G' et où $h/_G$ désigne la restriction de h à G.

Lemme (4-2) :

Si $\mathbb{R}^d = G \oplus G'$ *et si le sous-espace vectoriel* G' *est stable par* h, *la projection* $(X_t^G)_{t \geq 0}$ *de* $(X_t)_{t \geq 0}$ *sur* G *relativement à* G' *vérifie :* $dX_t^G = h^G(X^G)dt + dZ_t^G$ *où* $(Z_t^G)_{t \geq 0}$ *désigne la projection de* $(Z_t)_{t \geq 0}$ *sur* G *selon* G' *et où* $h^G = \pi \circ h/_G$.

Démonstration :

Il suffit de projeter sur G. On a $X_t = \int_o^t h(X_s)ds + Z_t + X_o$.

Donc : $\pi(X_t) = X_t^G = \int_o^t \pi \circ h(X_s)ds + Z_t^G + X_o^G$ et comme $\pi \circ h(x) = \pi \circ h(x^G)$, on a le résultat.

Démonstration du théorème :

D'après le lemme (4-2), $(X_t^E)_{t \geq 0}$ et $(X_t^F)_{t \geq 0}$ sont des processus de Markov normaux vérifiant (P).

Supposons que l'on ait (i) et (ii).
D'après le théorème (3-1), $(X_t^E)_{t \geq 0}$ admet une probabilité invariante

$\eta^E \in A(E)$. Comme on a (ii), $(X_t^F)_{t \geq 0}$ s'écrit :

(1) $X_t^F(\omega, x^F) = e^{th^F}(x^F) + e^{th^F}(\alpha) - \alpha$

(Car : $X_t^F = e^{th^F}[x^F + \left(\int_{]o,t]} e^{-sh^F} ds\right)(h^F(\alpha))]$ et car $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-th^F}) = - e^{th^F} \circ h^F\Big)$.

Si $x^F = -\alpha$, on a donc $X_t^F = \alpha$, $\forall\, t \geq 0$. La probabilité $\varepsilon_{\{-\alpha\}}$ est donc invariante pour $(X_t^F)_{t \geq 0}$. On en déduit immédiatement que si $\eta^F = \varepsilon_{\{-\alpha\}}$, $\eta = \eta^E \otimes \eta^F$ est invariante pour $(X_t)_{t \geq 0}$.

Inversement supposons qu'il existe une probabilité invariante η Sa loi marginale : η^E (resp : η^F) est donc invariante pour E (resp : F).

On a donc (i) et l'unicité de η^E en utilisant le théorème (3-1).

Pour montrer (ii), on peut supposer que $F = \mathbb{R}^d$.
On utilise une décomposition complexe de Jordan pour h et, pour les valeurs propres complexes, on regroupe les sous-espaces conjugués. On a donc : $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{j=1}^{n} F_j$, avec F_j stable par h pour tout j et la matrice de la restriction de h à F_j est de l'une des formes suivantes :

$$M_j = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou } N_j = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \sigma & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \ddots 1 & \lambda & 0 & & \sigma \\ -\sigma & & 0 & \lambda & & 0 \\ & \ddots & & 1 & \ddots & \\ 0 & & -\sigma & 0 & \ddots 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \geq 0$ et $\sigma \neq 0$.

D'après le lemme (4-2), $(X_t^{F_j})_{t \geq 0}$ est un processus de Markov normal vérifiant (P). La loi marginale η^{F_j} est donc invariante pour $(X_t^{F_j})_{t \geq 0}$. On va prouver que $(Z_t^{F_j})_{t \geq 0}$ est déterministe. Pour cela, on peut supposer à nouveau que $\mathbb{R}^d = F_j$.

1er cas : La matrice de h est de l'une des formes précédentes avec $\lambda > 0$. Le résultat est alors presque immédiat. En remplaçant u par $e^{-th^*}(u)$ dans l'égalité : $\phi(u) = \phi(e^{th^*}(u)) . \phi_t(u)$ on obtient que $|\phi(e^{-th^*}(u))| \leq |\phi(u)|$. D'où, si t tend vers $+\infty$, on obtient $|\phi(u)| = 1$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$ (car $e^{-th^*}(u) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$). On a donc aussi $|\phi_t(u)| = 1$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$.

Comme $\phi_t(u) = \exp [\int_0^t \xi(e^{sh^*}(u))ds]$, on a $\mathrm{Re}\xi \equiv 0$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ est déterministe.

2ème cas : $\lambda = 0$ et la matrice de h est de la forme M_j.
Désignons par ρ la partie réelle de ξ. On a :

(2) $\quad |\Phi(u)| = |\Phi(e^{th^*}(u))| \; . \exp [\int_0^t \rho(e^{sh^*}(u) \, ds]$.

On fait une démonstration par récurrence : on suppose que les m premières coordonnées de $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont déterministes. On a donc :

(3) $\quad \rho(u_1,\dots,u_m,u_{m+1},0,\dots,0) = \rho(0,\dots,0,u_{m+1},0,\dots,0)$

$\forall \; u_1,\dots,u_{m+1}$ dans $\mathbb{R}^d$.

On a donc par (2) :

(4) $\quad |\Phi(0,\dots,0,u_{m+1},0,\dots,0)| \leq \exp [t.\rho(0,\dots,0,u_{m+1},0,\dots,0)]$

(Car si $u = (0,\dots,0,u_{m+1},0,\dots,0)$, la (m+1)-ième coordonnée de $e^{th^*}(u)$ est u_{m+1} et les coordonnées suivantes sont nulles).

Si u_{m+1} est assez proche de 0, en faisant tendre t vers $+\infty$ dans (4), on obtient : $\rho(0,\dots,0,u_{m+1},0,\dots,0) = 0$, $\forall u_{m+1} \in \mathbb{R}^d$. (Car $\rho \leq 0$).

On en déduit, avec (3) que les m+1 premières composantes de $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont déterministes. Ce qui donne le résultat.

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $\lambda = 0$ et matrice de la forme N_j.

On a : $\mathbb{R}^d = F_j$ et $d = 2q$. Tout vecteur $x = (x^j)_{j=1,\dots,2q}$ est noté par "ses coordonnées doubles" : $\hat{x}^j = (x^j, x^{q+j}) \in \mathbb{R}^2$.

On note R la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$(5) \qquad \widehat{(h(x))}^j = R(\hat{x}^j) + \hat{x}^{j-1} \quad \text{si } j \geq 2$$

et $\widehat{(h(x))}^1 = R\hat{x}^1$

La transposée S_t de la matrice $e^{t.R}$ est $S_t = \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) & -\sin(\sigma t) \\ \sin(\sigma t) & \cos(\sigma t) \end{pmatrix}$

Si $u = (0,\dots,0,\hat{u}_{m+1},0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{2q}$, la $(m+1)$-ième 'coordonnée double" de $e^{th^*}(u)$ est $S_t(\hat{u}_{m+1})$ et les suivantes sont nulles.

On fait une démonstration par récurrence. On suppose que les k premières coordonnées doubles de $(Z_t)_{t \geq 0}$ sont déterministes, $\forall\, k \leq m$.

On a alors :

$$\rho(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{m+1}, 0, \dots, 0) = \rho(0,\dots,0,\hat{u}_{m+1},0,\dots,0)$$

et d'après (2), on a :

$$(6) \quad |\phi(0,\dots,0,\hat{u}_{m+1},0,\dots,0)| \leq \exp\left[\int_0^t \rho(0,\dots,0,S_s(\hat{u}_{m+1}),0,\dots,0)\, ds\right]$$

Or la fonction $f(s) = \rho(0,\dots,0,S_s(\hat{u}_{m+1}),0,\dots,0)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\sigma}$, continue négative ; donc si elle n'est pas identiquement nulle, le second membre de (6) tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
Pour $\hat{u}_{m+1}$ dans un voisinage de 0, on doit avoir donc :

$\rho(0,\dots,0,\hat{u}_{m+1},0,\dots,0) = 0$ et donc $(Z_t)_{t \geq 0}$ a ses $m+1$ premières coordonnées doubles déterministes. D'où le résultat.

Revenons pour terminer au cas où $\mathbb{R}^d = F$; d'après ce qui précède $(Z_t)_{t \geq 0}$ est déterministe, donc de la forme $Z_t = \beta t$ avec $\beta \in F$.

Pour terminer, il reste à montrer que $\beta \in h(F)$. Or on a :

$$(7) \qquad \phi(u) = \phi(e^{th^*}(u)). \exp \left[i \int_o^t <e^{sh^*}(u),\beta > ds \right]$$

Soit F' le noyau de h^* dans F. Si $u \in F'$ on a : $e^{th^*}(u) = u$ et donc : $\phi(u) = \phi(u). \exp [it <u,\beta>]$ ce qui entraine que : $<u,\beta> = 0$. β est donc orthogonal à F', ce qui équivaut à dire que $\beta \in h(F)$. D'où le résultat.

<u>Remarque (4-3)</u> :

Lorsque $Re(\lambda) > 0$ pour toute valeur propre λ de h, il n'y a une probabilité invariante que si $(Z_t)_{t \geq 0}$ est déterministe comme on vient de le voir. Par contre, on peut toujours associer au processus une probabilité $\eta \in A$ telle que la fonction caractéristique ϕ_t de X_t pour $P°$ s'écrive, $\forall t \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi_t(u) = \frac{\phi(e^{th^*}(u))}{\phi(u)}, \qquad \phi \text{ désignant la fonction caractéristique}$$

de η . (Considérer la fonction caractéristique pour $P°$ de $Y_t = e^{-th}(X_t)$.)

Inversement à tout élément de A on peut associer un processus de Markov du type considéré avec l'expression précédente des ϕ_t. (On opère comme dans la proposition (1-6).)

5 - Etude du caractère symétrique du semi-groupe

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe du transition d'un processus de Markov d-dimensionnel. On dira que le processus est "symétrique" relativement à une probabilité $\eta \in P(\mathbb{R}^d)$ si on a :

$$(S) \qquad \int P_t\, f(x).g(x)\eta(dx) = \int f(x).P_t g(x)\eta(dx), \quad \forall\ t\geq 0 \quad \forall\ f,g \in b\,B(\mathbb{R}^d).$$

De manière immédiate, pour qu'on ait ce caractère symétrique, il est nécessaire que η soit invariante pour $(P_t)_{t\geq 0}$.

On considère tout d'abord le cas où $d = 1$. On se donne un processus de Markov normal solution d'une équation différentielle stochastique de la forme : $dX_t = cX_t\,dt + dZ_t$ avec $c < 0$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ P.A.I.S. réel tel que $\int \log(1+|x|).\,\mu(dx) < +\infty$, η désignant la loi de Z_1. (Si $c \geq 0$, on a vu que s'il y a une probabilité invariante, le processus est déterministe au paragraphe 4). Soit η la loi de la classe L invariante pour le processus (η a été construite dans un cadre plus général en [3]).

On a alors le résultat suivant :

Proposition (5-1) :

Le processus de Markov considéré est symétrique relativement à η *si et seulement si* η *est gaussienne. (ou encore si* $Z_t = at + \sigma B_t$ *avec* $a,\sigma \in \mathbb{R}$ *et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien).*

Démonstration :

Par un argument de classe monotone, on voit facilement qu'il y a symétrie pour η si et seulement si on a, pour $f_u(x) = e^{iux}$ et $f_v(x) = e^{ivx}$:

$$\int P_t\, f_u(x).f_v(x)\ \eta(dx) = \int f_u(x).P_t\, f_v(x)\ \eta(dx).$$

Or on a : $\int P_t\, f_u(x).f_v(x)\ \eta(dx) = \left[\int e^{i(ue^{ct}+v)x}\ \eta(dx)\right] e^{\psi(u)-\psi(ue^{ct})}$

(e^{ψ} désignant la fonction caractéristique de η). Donc il y a symétrie si et seulement si on a :

$$(1)\qquad (\psi(ue^{ct}+v)+\psi(u)-\psi(ue^{ct}) \underset{[2\pi]}{=} \psi(ve^{ct}+u)+\psi(v)-\psi(ve^{ct})$$

$$\forall\ u,v \in \mathbb{R},\quad \forall\ t \geq 0$$

Si η est gaussienne, on a $\psi(u) = iau - \frac{\sigma^2}{2}u^2$ et on voit facilement que (1) est vérifiée.

Inversement, partant de (1), on va montrer que η est nécessairement gaussienne. Pour cela, on utilise le fait, énoncé au paragraphe 2 et dans la remarque (3-5), que la fonction caractéristque ϕ de η est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

En dérivant (1) par rapport à u, on obtient :

$$(2)\qquad e^{ct}\,[\psi'(ue^{ct}+v)-\psi'(ue^{ct})] = \psi'(ve^{ct}+u)-\psi'(u)$$

$$\forall\ t \geq 0,\quad \forall\ u,v \in \mathbb{R}\qquad \text{tels que } ue^{ct}+v \neq 0 \text{ et } ve^{ct}+u \neq 0.$$

En particulier, pour $v = u \neq 0$ et $t \geq 0$, on a, en posant $x = u$ et $y = xe^{ct}$:

$$(3)\qquad \frac{y}{x}\,[\ \psi'(x+y)-\psi'(y)] = \psi'(x+y) - \psi'(x)$$

$$\forall\ x \neq 0,\quad \forall\ y \neq 0 \quad \text{avec } x.y > 0.$$

Posant $G(x) = x.\ \psi'(x)$, on obtient :

$$(4)\qquad (x+y)(G(x)-G(y)) = (x-y).G(x+y)$$

$$\forall\ x \neq 0,\quad \forall\ y \neq 0 \qquad \text{avec } x.y > 0.$$

Posant $h = x-y$, on a, si $x \neq y$:

$$\frac{G(y+h) - G(h)}{h} = \frac{G(2y+h)}{2y+h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{G(2y)}{2y}$$

en utilisant la continuité de ψ', donc de G, sur $\mathbb{R}^*$. G est donc continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

(5) $G'(y) = \dfrac{G(2y)}{2y}$, $\forall\, y \neq 0$. D'où aussi l'existence de $G^{(n)}$, pour tout entier $n \geq 1$.

Posant $y = \frac{w}{2} + u$ et faisant un développement limité à l'ordre 3 de G au voisinage de $\frac{w}{2}$ on a :

$$G(y) = G(\tfrac{w}{2}) + uG'(\tfrac{w}{2}) + \frac{u^2}{2} G''(\tfrac{w}{2}) + \frac{u^3}{6} G^{(3)}(\tfrac{w}{2}) + o(u^3)$$

et aussi

$$G(w-y) = G(\tfrac{w}{2}) - uG'(\tfrac{w}{2}) + \frac{u^2}{2} G''(\tfrac{w}{2}) - \frac{u^3}{6} G^{(3)}(\tfrac{w}{2}) + o(u^3).$$

Ce qui donne en retranchant :

$$G(w-y) - G(y) = -2u.G'(\tfrac{w}{2}) - \frac{u^3}{3} G^{(3)}(\tfrac{w}{2}) + o(u^3).$$

Mais (4) s'écrit, si $w = x+y$:

$$G(w-y) - G(y) = (-2u)\,\frac{G(w)}{w} \quad (\text{car } w - 2y = -2u)$$

et avec (5) : $G(w-y) - G(y) = -2u.G'(\frac{w}{2})$

On a donc : $-2uG'(\frac{w}{2}) - \frac{u^3}{3} G^{(3)}(\frac{w}{2}) + o(u^3) = -2uG'(\frac{w}{2})$.

D'où :

(6) $G^{(3)}(w) = 0, \quad \forall\, w \neq 0.$

On en déduit que G est de la forme $G(x) = Cx^2 + Dx + E, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Comme $G(x) = x\,\psi'(x)$, on a donc : $\psi'(x) = Cx + D + \frac{E}{x}$ et donc $\psi(x) = C\frac{x^2}{2} + Dx + E\log|x|$, $\forall\, x \neq 0$.

Comme e^{ψ} est une fonction caractéristique, on a nécessairement $E = 0$. Comme la loi correspondante est indéfiniment divisible on a : $C \in R^-$ et D est un imaginaire pur. η est donc gaussienne et on a la proposition (5-1). ($Z_t = at + \sigma B_t$, $\forall\, t \geq 0$, de manière évidente).

■

On revient maintenant au cas où d est quelconque. On se donne un processus de Markov normal solution de $dX_t = h(X_t)dt + dZ_t$, avec $h \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $(Z_t)_{t>0}$ P.A.I.S. d-dimensionnel.

On supposera que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{th} = 0$.

(Le cas général s'y ramène en considérant sur le sous-espace F associé aux valeurs propres λ telles que $Re(\lambda) \geq 0$ une loi marginale η^F de Dirac).

On impose pour la loi μ de Z_1 : $\int \log(1+|x|)\,\mu(dx) < +\infty$.

Par suite il existe une probabilité invariante unique η et $\eta \in A$.

On a alors tout d'abord :

<u>Proposition (5-2)</u> :

Si η est gaussienne de covariance C, il y a symétrie relativement à η si et seulement si $h_o C$ est autoadjoint.

<u>Démonstration</u> :

Comme dans (1) de la démonstration de la proposition précédente, il y a symétrie si et seulement si on a :

$$(7)\qquad \psi(e^{th^*}(u)+v) + \psi(u) - \psi(e^{th^*}(u)) = \psi(e^{th^*}(v)+u) + \psi(v) - \psi(e^{th^*}(v))$$

$$\forall\, u,v \in \mathbb{R}^d,\quad \forall\, t \geq 0.$$

Si η est gaussienne, ψ est de la forme : $\psi(u) = i<a,u> - \frac{1}{2} <C(u),u>$, où $a \in \mathbb{R}^d$ et où C est un opérateur symétrique sur $\mathbb{R}^d$, positif.

(7) s'écrit alors après simplification :

$$(8) \qquad <e^{th^*}(u),C(v)> = <e^{th^*}(v),C(u)> \quad , \quad \forall\, u,v \in \mathbb{R}^d \ , \quad \forall\, t \geq 0$$

ou encore :

$$(9) \qquad e^{th} \circ C = C \circ e^{th^*}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Or (9) est équivalente à $h \circ C = C \circ h^*$. D'où le résultat.

Proposition (5-3) :

Si on suppose que h *est diagonisable et s'il y a symétrie, alors* η *est gaussienne (et donc* $(Z_t)_{t \geq 0}$ *est un P.A.I.S. gaussien).*

Remarques (5-4) :

(i) Si h est autoadjoint, on obtient de plus que la matrice de covariance C associée à η commute avec h.

(ii) Lorsque $h = c(id)$ avec $c < 0$, les propositions (5-2) et (5-3) entraine qu'il y a symétrie si et seulement si η est gaussienne.

Dans le cas général, avec h diagonisable, il y a symétrie si et seulement si η est gaussienne et si de plus $h \circ C = C \circ h^*$, avec C covariance associée à η .

Démonstration de la proposition (5-3) :

h étant diagonisable, il existe une base de vecteurs propres. Dans cette base, chacune des composantes $(X_t^j)_{t \geq 0}$, $j=1,\dots,d$ de $(X_t)_{t \geq 0}$ est markovienne et admet comme probabilité invariante la loi marginale η_j.

(On utilise le lemme (4-2)).

Par suite, en utilisant la proposition (5-1), on obtient que η_j est gaussienne pour tout $j = 1,2,\dots,d$. Comme η est indéfiniment divisible, on en déduit que η est gaussienne.

REFERENCES

[1] GNEDENKO et KOLMOGOROV. (1954).
Limit distributions for sums of independent variables.
(Addison-Wesley, Cambridge).

[2] KUMAR A et SCHREIBER B.B.
Self decomposable probability measures on Banach spaces.
(Studia Mathematica, Tome 53, 1975, p. 55 à 71).

[3] LOEVE M.
Probability theory.
(1950, New-York).

[4] SHARPE M.
Operator-stable probability distributions on vector groups.
(Trans. Amer. Math. Soc, 136, 1969, p. 51 à 65).

[5] URBANIK K.
Extreme point method in probability theory.
(Lecture notes in mathematics n° 472, Springer-Verlag, p. 169 à 194).

[6] URBANIK K.
Lévy's probability measures on Euclidean spaces.
(Studia Mathematica, tome 44, 1972, p. 119 à 148).

[7] URBANIK K.
Lévy's probability measures on Banach spaces.
(Studia Mathematica, Tome 63, p. 283 à 308).

[8] YAMAZATO M.
Unimodality of infinitely divisible distributions functions of class L.
(Annals of Probability, 1978, vol. 6 n° 4, p. 523 à 531).

[9] JUREK Z.J.
Convergence of types, selfdecomposability and stability of measures on linear spaces.
(1981, Lectures notes in Mathematics, n°860, p.257 à 267).

[10] JUREK Z.J. and SMALARA J.
On integrability with respect to infinitely divisible meesures.
(Bull. Ac. Polonaise des Sciences, Vol XXIX, n°3-4, 1981).

[11] JUREK Z.J.
Structure of a class of operator-self-decomposable probability measures.
(The Annals of Probability, 1982, Vol. 10, n°3, p. 849 à 856).

[12] JUREK Z.J.
An integral representation of operator-selfdecomposable random variables
(Bull. Ac. Polonaise des Sciences, Vol.XXX, n°7-8, 1982).

[13] WOLFE S.J.
On a continuous analogue of the stochastic difference equation
$X_n = \rho X_{n-1} + B_n$.
(Stochastic processes and their applications, 12, 1982, p.301 à 312).

[14] ZABCZYK J.
Stationary distributions for linear equations driven by general noise.
(Report n°73, August 1982, Universität Bremen).

[15] JUREK Z.I. and VERVAAT W.
An integral representation for selfdecomposable Banach space valued random variables.
(Z.W. 62, p.247 à 262, 1983).