DISTANCE EN VARIATION ET

CONDITIONS DE CONTIGUITE POUR DES LOIS

DE PROCESSUS PONCTUELS

J. MEMIN

INTRODUCTION

Soit, sur un espace mesurable $(\Omega^\circ, \mathcal{F}^\circ)$ donné, une suite croissante $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0, \infty]$ vérifiant $T_o = 0$ et pour tout k $T_k < T_{k+1}$ si $T_k < \infty$; cette suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit un processus de comptage N° de la façon suivante :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ , \quad N^\circ_t = \begin{cases} k & \text{si } T_k \leq t < T_{k+1} \\ \infty & \text{si } t \geq T_\infty = \lim_k T_k . \end{cases}$$

Pour toute probabilité P° sur $(\Omega^\circ, \mathcal{F}^\circ)$, le couple (N°, P°) sera appelé <u>processus ponctuel</u>.

Considérons deux processus ponctuels (N^1, P^1), (N^2, P^2) relatifs à deux suites $(T^1_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(T^2_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies sur des espaces $(\Omega^1, \mathcal{F}^1)$, $(\Omega^2, \mathcal{F}^2)$ respectivement. On désire <u>évaluer la proximité des lois de (N^1, P^1) et (N^2, P^2)</u> entre 0 et un instant fixé $T \in \overline{R}+$.

Une façon naturelle d'aborder ce problème est de considérer un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ canonique sur lequel on puisse <u>réaliser</u> (N^1, P^1) et (N^2, P^2) ; on prendra pour Ω l'espace de toutes les suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, \infty]$ avec $t_o = 0$, et pour tout n $t_n < t_{n+1}$ si $t_n < \infty$. On note N le processus de comptage associé, et $\mathcal{F}$ la tribu $\sigma\{N_t, t \geq 0\}$.

Soit $\overline{P}^1$ (resp.: $\overline{P}^2$) la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ image de P^1 (resp.: P^2) par l'application $\mathcal{C}^1$ (resp.: $\mathcal{C}^2$) de Ω^1 (resp.: Ω^2) dans Ω définie par $\mathcal{C}^1 : \omega_1 \to (T_k^1(\omega_1))_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. : $\mathcal{C}^2 : \omega^2 \to (T_k^2(\omega_2))_{k \in \mathbb{N}}$)

On obtient sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$ deux processus ponctuels $(N, \overline{P}^1)$, $(N, \overline{P}^2)$ réalisations de (N^1, P^1) et (N^2, P^2) : pour G élément de la tribu $\mathcal{G}_T$ engendrée par les fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^+$, (ou de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ si $T = +\infty$), continues à droite et admettant des limites à gauche, on a :

$$P^1 [N^1 \in G] = \overline{P}^1 [N \in G] , \quad P^2 [N^2 \in G] = \overline{P}^2 [N \in G]$$

Ainsi la proximité des lois des processus N^1 et N^2 s'exprime en terme des probabilités $\overline{P}^1$ et $\overline{P}^2$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$; la mesure de proximité que nous considérons est celle de la distance en variation des lois de N^1 et N^2 entre 0 et T. Autrement dit :

$$\|N^1 - N^2\|_T = \sup_{G \in \mathcal{G}_T} | P^1(N^1 \in G) - P^2(N^2 \in G)|$$

$$= \sup_{F \in \mathcal{F}_T} |\overline{P}^1(F) - \overline{P}^2(F)| \quad \text{notée } d(\overline{P}^1, \overline{P}^2)_T,$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on note $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$.

La famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ définit une filtration de $\mathcal{F}$ continue à droite. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t)$ est l'espace canonique des processus ponctuels (noté $(\Omega, \mathcal{F})$).

Dans ce qui suit, tout processus ponctuel (N, P) que nous considérerons, et défini sur l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F})$ possédera la propriété : $P [N_t = \infty] = 0$ pour tout $t < \infty$ (propriété de non explosion de (N,P)).

Au processus (N,P), on associe son compensateur prévisible $A = (A_t)_{t \geq 0}$; A est un processus croissant nul en 0 ,continu à droite, prévisible (relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), défini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ unique à une P-indistingabilité près, tel que $(N_t - A_t)_{t \geq 0}$ soit une $(P, (\mathcal{F}_t))$ martingale locale; de plus, on peut choisir une version de A qui vérifie pour tout $t < \infty$, pour tout $\omega \in \Omega$ $\Delta A_t(\omega) \leq 1$, ΔA_t désignant l'amplitude du saut de A en t. Pour toutes les notions et notations de théorie générale des processus, ou pour les résultats de théorie des processus ponctuels utilisés on peut se refèrer à [1] [2] [5] [8] .

Dans une première partie, nous obtenons (théorème 1-4) une majoration de $d(\overline{P}^1, \overline{P}^2)_T$ en termes des compensateurs A^1 et A^2 des processus ponctuels $(N,\overline{P}^1)$ et $(N,\overline{P}^2)$. Le résultat obtenu est appliqué au cas où $(N,\overline{P}^2)$ est un processus ponctuel à accroissements indépendants (cas où A^2 est déterministe).

Dans la seconde partie, nous considérons sur l'espace canonique deux suites $(N,P_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N, P_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus ponctuels et obtenons des conditions de contiguité pour la suite $(P_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à la suite $(P_2^n)_{n \in\mathbb{N}}$. Par définition, $(P_1^n)_{n\in \mathbb{N}}$ est contigue relativement à $(P_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ si on a l'implication :

$$P_2^n(F^n) \longrightarrow 0 \ \Rightarrow\ P_1^n(F^n) \longrightarrow 0 \ , \text{ où } F^n \in \mathcal{F} \quad \text{pour tout } n.$$

Cette notion introduite par LE CAM en 1960 [7] , est très utile en Statistique. Le résultat obtenu ici en utilisant les majorations de la distance en variation de la 1ère partie est basé sur un critère de contiguité adapté aux lois de processus qui figure dans Eagleson-Memin [4] .

I

RAPPELS SUR LES PROCESSUS PONCTUELS ET DISTANCE EN VARIATION

Nous avons besoin des deux résultats suivants maintenant classiques sur les processus ponctuels, que nous énonçons sous forme de théorèmes.

1-1 <u>Théorème</u> ([2], [5], [8])

Soit A un processus croissant prévisible nul en 0, continu à droite défini sur $(\Omega,\mathcal{F})$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, tel que pour tout $t<\infty$, pour tout $\omega\in\Omega$, on ait $\Delta A_t(\omega)\leq 1$ et $A_t(\omega)<\infty$; alors il existe une probabilité P et une seule sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que (N,P) soit un processus ponctuel non explosif de compensateur A; en outre, si deux tels processus A et A' coincident jusqu'à un temps d'arrêt τ, les probabilités correspondantes P et P' coincident en restriction à $\mathcal{F}_t$ sur l'ensemble $\{t\leq\tau\}$ pour $t\in\mathbb{R}^+$.

La seconde partie du théorème seule n'est pas classique; elle est cependant immédiate à partir de la démonstration de la première partie.

1-2 <u>Théorème</u> ([6], [5])

Soit (N,P) et (N,Q) deux processus ponctuels non explosifs définis sur $(\Omega,\mathcal{F})$, de compensateurs respectifs A et B. On se fixe $T\in\mathbb{R}^+$ et on note P_T et Q_T les restrictions de P et Q à $\mathcal{F}_T$;

P_T est absolument continue par rapport à Q_T ($P_T\ll Q_T$) si et seulement si les propriétés suivantes (i) et (ii) sont vérifiées:

(i) $\Delta B=1$ implique $\Delta A=1$ (à un ensemble P_T-évanescent près), et il existe un processus prévisible positif Y tel que pour tout $t\leq T$

$$A_t=\int_0^t Y_s\,dB_s \qquad \text{(à un ensemble } P_T\text{-négligeable près)}$$

(ii) $\widetilde{C}_T<\infty$ P_T-p.s. où pour tout $t\leq T$

$$\widetilde{C}_t = \int_0^t (1-\sqrt{Y_s})^2 dB_s + \sum_{s\leq t}(\sqrt{1-\Delta A_s} - \sqrt{1-\Delta B_s})^2 .$$

De plus, si $\widetilde{C}_T<\infty$ P_T et Q_T-p.s., le processus densité Z (où l'on a $Z_t = dP_t/dQ_t$) peut s'écrire:

$$(1) \qquad Z_t = \mathcal{E}(M)_t \quad \text{avec} \quad M_t = \int_0^t \frac{Y_s-1}{1-\Delta B_s}\,\mathbb{1}_{\{\Delta B_s<1\}}\,d(N_s-B_s)$$

($\mathcal{E}(L)$ désigne, lorsque L est une semi martingale, la semi martingale exponentielle de Doléans de L, autrement dit l'unique solution de l'équation:

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\,dL_s \;).$$

Rappelons enfin un résultat élémentaire sur la distance en variation de deux probabilités

1-3 Lemme

Soit $(\mathcal{X},\mathcal{Q})$ un espace mesurable, sur lequel sont définies trois probabilités μ^1,μ^2,ν telles que μ^1 et μ^2 soient absolument continues par rapport à ν ; notons φ^1,φ^2 les densités de Radon-Nikodym respectives $d\mu^1/d\nu, d\mu^2/d\nu$; on a alors:

$$(2)\qquad d(\mu^1,\mu^2) = \sup_{F\in\mathcal{Q}}|\mu^1(F)-\mu^2(F)| = 1/2\ E_\nu\big[|\varphi^1-\varphi^2|\big] .$$

Le résultat de base de cette première partie est le théorème suivant:

1-4 Théorème

Soit sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ deux processus ponctuels $(N,P^1),(N,P^2)$ de compensateurs respectifs A^1,A^2 ; soit $T\in R^+$ fixé ; on fait l'hypothèse suivante:

(H_1) *Il existe $K\in R^+$ tel que pour tout $t\le T$, tout $\omega\in\Omega$*

$A_t^1(\omega)\le K,\ A_t^2(\omega)\le K$.

Alors on a l'évaluation:

$$(3)\qquad d(P^1,P^2)_T \le E_{P^1}[\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T]\wedge E_{P^2}[\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T]$$

où $\mathrm{Var}(A^1-A^2)$ désigne le processus "Variation totale" du processus à variation finie A^1-A^2.

Si maintenant pour tout $T\in\mathbb{R}^+$, il existe une constante $K(T)$ pour laquelle (H_1) est réalisé, on a:

$$(3')\qquad d(P^1,P^2) \le E_{P^1}[\mathrm{Var}(A^1-A^2)_\infty]\wedge E_{P^2}[\mathrm{Var}(A^1-A^2)_\infty] .$$

La méthode de démonstration va consister à exhiber des probabilités qui dominent P^1 et P^2 et à utiliser la formule (2).

1-5 Lemme

Avec les données du théorème 1-4 et sous l'hypothèse (H_1), soit pour $p\in\mathbb{N}, p\ge 2$ le processus B^p défini sur $(\Omega,\mathcal{F})$ par:

$$B_t^p = \frac{A_t^1+(p-1)A_t^2}{p}\quad si\quad t\le T,\ et\quad B_t^p = B_T^p\quad si\quad t>T.$$

Alors:

a) Il existe une probabilité Q^p sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que (N,Q^p) soit un processus ponctuel non explosif de compensateur B^p.

b) P_T^1 et P_T^2 sont absolument continues par rapport à Q_T^p, où P_T^1,P_T^2,Q_T^p sont les *restrictions de* P^1, P^2, Q^p *à* $\mathcal{F}_T$.

c) *On a :*

(4) $$d(P^1, P^2)_T \leq \frac{p-1}{p} E_{P^1} [Var(A^1-A^2)_T] + \frac{1}{p} E_{P^2} [Var(A^1-A^2)_T]$$

Démonstration

Le a) découle directement du théorème 1-1 ; le b) est immédiat aussi : il suffit de remarquer $\Delta B^p_s = 1$ implique $\Delta A^1_s = 1$ et $\Delta A^2_s = 1$; de plus il existe des processus Y^1, Y^2 prévisibles positifs tels que :

$$A^1_t = \int_0^t Y^1_s \, dB^p_s , \quad A^2_t = \int_0^t Y^2_s \, dB^p_s, \quad 0 \leq Y^1_t \leq p, \quad 0 \leq Y^2_t \leq \frac{p}{p-1} \quad \text{pour tout } t \leq T.$$

On a, en utilisant les inégalités élémentaires $(1-\sqrt{x})^2 \leq 1-x$ et $(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-y})^2 \leq |x-y|$ pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, les relations :

$$\tilde{C}^i_T \leq Var(A^i-B^p)_T + \sum_{s \leq T} |\Delta A^i_s - \Delta B^p_s| \leq Var(A^1-A^2)_T + \sum_{s \leq T} |\Delta A^1_s - \Delta A^2_s|$$

$$\leq 2(A^1_T + A^2_T) \quad \text{où} \quad i = 1,2 ;$$

de sorte que les conditions (i) et (ii) du théorème 1-2 sont remplies ; enfin la formule (1) donne l'expression des densités Z^1_T et Z^2_T de Radon-Nikodyn de P^1_T et P^2_T par rapport à Q^p_T, sous la forme

$$Z^1_T = \mathcal{E}(M^1)_T , \quad Z^2_T = \mathcal{E}(M^2)_T .$$

On a alors: (en notant $A^{1,c}$, $A^{2,c}$, $B^{p,c}$ les parties continues de A^1, A^2, B^p)

$$\begin{aligned} d(P^1,P^2)_T &= \frac{1}{2} E_Q [|Z^1_T - Z^2_T|] \\ &= \frac{1}{2} E_Q[|\int_0^T Z^1_{s-} \, dM^1_s - \int_0^T Z^2_{s-} \, dM^2_s|] \\ &\leq \frac{1}{2} E_Q[|\int_0^T (Z^1_{s-}(Y^1_s-1) - Z^2_{s-}(Y^2_s-1)) \, dB^{p,c}_s|] \\ &\quad + \frac{1}{2} E_Q [|\sum_{s \leq T} (Z^1_{s-} \Delta M^1_s - Z^2_{s-} \Delta M^2_s)|] \end{aligned}$$

On va étudier successivement les deux termes du membre de droite ;

$$\frac{1}{2} E_Q \left[\left| \int_0^T (Z^1_{s-}(Y^1_s - 1) - Z^2_{s-}(Y^2_s - 1)) dB^{p,c}_s \right| \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} E_Q \left[\int_0^T (Z^1_{s-} |Y^1_s - 1| + Z^2_{s-} |Y^2_s - 1|) dB^{p,c}_s \right]$$

$$= \frac{1}{2} E_Q \left[\frac{p-1}{p} \int_0^T Z^1_{s-} \, d(\mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_s) \right] + E_Q\left[\frac{1}{p} \int_0^T Z^2_{s-} \, d(\mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_s \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p} E_Q [Z^1_T \mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_T] + \frac{1}{p} E_Q [Z^2_T \mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_T] \right).$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p} E_{P^1} [\mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_T] + \frac{1}{p} E_{P^2} [\mathrm{Var}(A^{1,c} - A^{2,c})_T] \right).$$

Pour le second terme, on commence par exprimer ΔM^i_t $(i=1;2)$;
Notons $D = \{t : \Delta N_t \neq 0\}$, $J = \{t : \Delta B^p_t \neq 0\}$ on a :

$$\Delta M^i_t = \left(\frac{Y^i_t - 1}{1 - \Delta B^p_t} \mathbb{1}_D - \frac{Y^i_t - 1}{1 - \Delta B^p_t} \Delta B^p_t \mathbb{1}_J \right) \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_t < 1\}}$$

$$= \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_t < 1\}} \left(\frac{Y^i_t - 1}{1 - \Delta B^p_t} (1 - \Delta B^p_t) \mathbb{1}_D - \frac{Y^i_t - 1}{1 - \Delta B^p_t} \Delta B^p_t \mathbb{1}_{J \cap D^c} \right)$$

$$= (Y^i_t - 1) \mathbb{1}_D - \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_t < 1\}} \frac{Y^i_t - 1}{1 - \Delta B^p_t} \Delta B^p_t (1 - \mathbb{1}_D).$$

Ainsi $\frac{1}{2} E_Q \left[\left| \sum_{s \leq T} (Z^1_{s-} \Delta M^1_s - Z^2_{s-} \Delta M^2_s) \right| \right]$

$$\leq \frac{1}{2} E_Q \left[\sum_{s \leq T} (Z^1_{s-} |\Delta M^1_s| + Z^2_{s-} |\Delta M^2_s|) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} E_Q \left[\int_0^T Z^i_{s-} |Y^i_s - 1| dN_s + \sum_{s \leq T} Z^i_{s-} \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_s < 1\}} \frac{|Y^i_s - 1|}{1 - \Delta B^p_s} \Delta B^p_s \right.$$

$$\left. - \int_0^T \left(Z^i_{s-} \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_s < 1\}} \frac{|Y^i_s - 1|}{1 - \Delta B^p_s} \Delta B^p_s \right) dN_s \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} E_Q \Big[\int_0^T Z^i_{s-} |Y^i_s - 1| \, dB^p_s + \sum_{s \leq T} Z^i_{s-} \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_s < 1\}} \frac{|Y^i_s - 1|}{1 - \Delta B^p_s} \Delta B^p_s$$

$$- \int_0^T Z^i_{s-} \mathbb{1}_{\{\Delta B^p_s < 1\}} \frac{|Y^i_s - 1|}{1 - \Delta B^p_s} \Delta B^p_s \, dB^p_s \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} E_Q \Big[\int_0^T Z^i_{s-} |Y^i_s - 1| \, dB^p_s + \sum_{s \leq T} Z^i_{s-} |Y^i_s - 1| \, \Delta B^p_s \Big]$$

$$= \frac{1}{2} E_Q\Big[\frac{p-1}{p} \Big(\int_0^T Z^1_{s-} \, d\,\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_s + \sum_{s \leq T} Z^1_{s-} |\Delta A^1_s - \Delta A^2_s| \Big)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2} E_Q\Big[\frac{1}{p} \Big(\int_0^T Z^2_{s-} \, d\,\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_s + \sum_{s \leq T} Z^2_{s-} |\Delta A^1_s - \Delta A^2_s| \Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{p-1}{p} E_{P^1} [\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_T] + \frac{1}{p} E_{P^2} [\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_T]$$

$$+ \frac{p-1}{p} E_{P^1} \Big[\sum_{s \leq T} |\Delta A^1_s - \Delta A^2_s| \Big] + \frac{1}{p} E_{P^2} \Big[\sum_{s \leq T} |\Delta A^1_s - \Delta A^2_s| \Big] \Big) .$$

d'où le résultat final.

Démonstration du Théorème 1-4

La première assertion découle immédiatement du lemme précédent : en effet compte tenu des hypothèses de bornitude

$$\frac{p-1}{p} E_{P^1} [\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T] \text{ converge vers } E_{P^1}[\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T]$$

et $\frac{1}{p} E_{P^2} [\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T]$ converge vers 0 lorsque $p \to \infty$. La possibilité d'échanger le rôle de P^1 et P^2 donne le résultat.

La seconde assertion est déduite aussitôt de (3) et de l'égalité :

$$d(P^1,P^2) = \sup_{T<\infty} d(P^1,P^2)_T \quad .$$

1-6 Remarque :

Avec les données du théorème 1-4 et la suite (Q^p) de probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dans le lemme 1-5, on a :

$$d(Q^p,P^2)_T \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty \quad .$$

En effet, on peut appliquer le théorème 1-4 aux probabilités P^2 et Q^p

$$d(P^2,Q^p)_T \leq \frac{1}{p} E_{P^2} [\mathrm{Var}(A^1-A^2)_T]$$

d'où le résultat.

1-7 Théorème

Soit un processus ponctuel (N°, P°) non explosif défini sur un espace $(\Omega^\circ, \mathcal{F}^\circ)$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}^\circ_t)$ (c'est à dire: $\mathcal{F}^\circ_t = \sigma\{N^\circ_s, s \leq t\}$). Soit A° le compensateur de (N°,P°), soit (N,P_{N°) la réalisation de (N°,P°) dans l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$; on fait l'hypothèse:

(H_2) Pour $T \in \mathbb{R}^+$ fixé , $E_{P^\circ}[A^\circ_T] < \infty$.

Soit d'autre part sur $(\Omega,\mathcal{F})$ un processus ponctuel (N,P) non explosif et à accroissements indépendants de compensateur m.

Alors on a l'évaluation:

$$(5) \qquad d(P_{N^\circ},P)_T \leq E_{P^\circ} [\mathrm{Var}(A^\circ-m)_T]$$

<u>Démonstration</u>

Pour $k\in\mathbb{N}$ on pose $S_k=\inf\{t;A^\circ_t \geq k\}$;et on considère le processus ponctuel $(N^{\circ k},P^\circ)$ avec $N^{\circ k}=N^\circ_{t\wedge S_k}$,dont la filtration naturelle est $(\mathcal{F}^\circ_{t\wedge S_k})_{t\geq 0}$;son compensateur en est $A^{\circ k}$ tel que $A^{\circ k}_t = A^\circ_{t\wedge S_k}$. Notons (N,P^k) la réalisation de $(N^{\circ k},P^\circ)$ dans $(\Omega,\mathcal{F})$;on a évidemment:

$$d(P_{N^\circ},P)_T \leq d(P_{N^\circ},P^k)_T + d(P^k,P)_T.$$

Evaluons d'abord $d(P_{N^\circ},P^k)_T$:

$$\sup_{F\in\mathcal{F}_T}\left[\left|P_{N^\circ}(F)-P^k(F)\right|\right] = \sup_{G\in\mathcal{G}_T}\left[\left|P^\circ(N^\circ\in G)-P^\circ(N^{\circ k}\in G)\right|\right]$$

or $\left|P^\circ(N^\circ\in G)-P^\circ(N^{\circ k}\in G)\right| \leq P^\circ(\{N^\circ\in G\}\Delta\{N^{\circ k}\in G\})$ (où Δ désigne ici la différence symétrique de deux ensembles);

$$\leq P^\circ((\{N^\circ\in G\}\Delta\{N^{\circ k}\in G\})\cap\{S_k<T\}) \leq P^\circ(S_k<T).$$

On va évaluer maintenant $d(P^k,P)$.

Soit A^k le compensateur de (N,P^k);comme on a $A^{\circ k}\leq k+1$,on peut trouver une version de A^k qui vérifie identiquement $A^k_t(\omega)\leq k+1$ pour tout $t\leq T$,et tout $\omega\in\Omega$

(N,P) étant à accroissements indépendants et non explosif son compensateur m est déterministe et pour tout t fini on a $m_t<\infty$.

Ainsi l'hypothèse (H_1) du Théorème 1-4 est satisfaite et:

$$d(P^k,P)_T \leq E_{P^k}\left[\operatorname{Var}(A^k-m)_T\right] \leq E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^{\circ,k}-m)_T\right]$$

on en déduit donc:

$$d(P_{N^\circ},P)_T \leq P^\circ[S_k<T] + E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^{\circ,k}-m)_T\right]$$

$$\leq P^\circ[S_k<T] + E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^{\circ,k}-m)_T\,\mathbb{1}_{\{S_k<T\}}\right]$$

$$+ E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^\circ-m)_T\,\mathbb{1}_{\{S_k\geq T\}}\right].$$

Mais $E_{P^\circ}[A^\circ_T]<\infty$ implique que $\lim_k P^\circ[S_k<T] = 0$ et d'autre part que $E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^\circ-m)_T\,\mathbb{1}_{\{S_k\geq T\}}\right]$ converge vers $E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^\circ-m)_T\right]$ alors que $E_{P^\circ}\left[\operatorname{Var}(A^{\circ,k}-m)_T\,\mathbb{1}_{\{S_k<T\}}\right]$ converge vers 0; le résultat cherché en découle.

Exactement comme pour la seconde assertion du Théorème 1-4 on déduit:

1-8 Corollaire

Avec les données du Théorème 1-7, si pour tout t fini $E_{P^o}\left[A^o_t\right] < \infty$ *alors*

$$d(P_{N^o},P) \leq E_{P^o}[\,Var(A^o - m)_\infty\,]$$

1-9 Remarque

Lorsque $t \to m_t$ est continue, c'est-à-dire lorsque (N,P) est un processus de Poisson de mesure associée à m, l'évaluation (5) est à rapprocher de celle obtenue par Brown [3] pour (T étant fixé)

la distance en variation des lois des variables aléatoires N^o_T sous P^o et N_T sous P; notons $\mathcal{L}_{N^o_T}$ et $\mathcal{L}_{N_T}$ ces lois de variables aléatoires réelles, Brown obtient l'inégalité:

$$(6) \qquad d(\mathcal{L}_{N^o_T},\mathcal{L}_{N_T}) \leq E_{P^o}\left[\left|A^o_T - m_T\right|\right] + E_{P^o}\left[\sum_{s\leq T} (\Delta A^o_s)^2\right].$$

On peut déduire de (6) en passant aux lois des éléments multidimensionnels $(N^o_{t_1},\dots .N^o_{t_n})$ et $(N_{t_1},\dots .N_{t_n})$ une évaluation pour $d(P_{N^o},P)$ de la forme:

$$(6') \qquad d(P_{N^o},P)_T \leq E_{P^o}\left[Var(A^o - m)_T\right] + E_{P^o}\left[\sum_{s\leq T}(\Delta A^o_s)^2\right] ,$$

moins bonne que celle que nous obtenons en nous situant directement sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$.

Cependant l'inégalité (6) est d'une autre nature que celle que nous obtenons, et on ne peut la déduire de (5).

II

CONTIGUITE D'UNE SUITE DE LOIS DE PROCESSUS PONCTUELS RELATIVEMENT A UNE AUTRE

On considère dans cette partie deux suites $(N,P_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N,P_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus ponctuels non explosifs définis sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$ muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$;on note $A^{1,n}$(resp:$A^{2,n}$)le compensateur de (N,P_1^n) (resp:(N,P_2^n)).On désire alors exprimer des conditions de contiguité de (P_1^n) relativement à (P_2^n).

Considèrons les deux hypothèses suivantes:

(H_3) Pour tout t fini,tout $n\in\mathbb{N}$,il existe $l^n(t)<\infty$ tel que pour tout $\omega\in\Omega$ on ait:

$$A_t^{2,n}(\omega)\leq l^n(t) ,$$

(H_4) Pour tout n,il existe K(n) tel que $\mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_\infty\leq K(n)<\infty$,où $K(n)/n\longrightarrow 0$ quand $n\longrightarrow\infty$,pour tout $\omega\in\Omega$.

Dans toute cette partie (H_3) est supposée satisfaite (sauf pour le Théorème 2-6 où (H_3) est impliquée par les données de ce Théorème;l'hypothèse (H_4) est supposée satisfaite jusqu'au Théorème 2-4 ,après quoi elle est remplacée par une hypothèse plus faible.

On déduit de (H_3) et de (H_4) que pour tout t fini,$A_t^{1,n}$ et $A_t^{2,n}$ sont bornés;posons alors $B_t^n=\frac{1}{n}(A_t^{1,n}+(n-1)A_t^{2,n})$,on obtient que pour tout t fini B_t^n est borné et comme dans la première partie on peut associer à B^n un processus ponctuel (N,Q^n) non explosif défini sur $(\Omega,\mathcal{F})$ de compensateur B^n relativement à $(\mathcal{F}_t)$.De plus P_1^n est absolument continue par rapport à Q^n:en effet il est facile de voir que (H_4) implique que pour chaque n , $\tilde{C}_\infty^n<\infty$ où:

$$\tilde{C}_t^n = \int_0^t(1-\sqrt{Y_s^n})^2dB_s^n + \sum_{s\leq t}(\sqrt{1-\Delta A_s^{1,n}} - \sqrt{1-\Delta B_s^n})^2 \quad \text{avec} \quad Y^n= dA^{1,n}/dB^n$$

car on a :

$$\tilde{C}_t^n\leq \mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_t + \sum_{s\leq t}\left|\Delta A_s^{1,n}-\Delta A_s^{2,n}\right| \leq 2\mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_t.$$

On a alors le lemme:

2-1 <u>Lemme</u>

(P_1^n) est contigue relativement à (P_2^n) si et seulement si (P_1^n) est contigue relativement à (Q^n) .

Démonstration

Pour obtenir le résultat il suffit de montrer que $d(Q^n,P_2^n)\longrightarrow 0$, quand $n\longrightarrow\infty$; pour cela on applique le Théorème 1-4.

On obtient : $d(Q^n,P_2^n) \le E_{Q^n}\left[\, Var(B^n-A^{2,n})_\infty\right] \le \frac{1}{n}\, E_{Q^n}\left[Var(A^{1,n}-A^{2,n})_\infty\right]$

$$\le \frac{K(n)}{n} \quad \text{d'où le résultat.}$$

On s'est ainsi ramené à étudier la contiguité de (P_1^n) relativement à (Q^n), où pour chaque n P_1^n est absolument continue par rapport à Q^n ; c'est dans ce cadre là que figure dans [4] un critère de contiguité que nous allons utiliser.

Notons Z^n le processus "densité" obtenu à partir de la densité de Radon-Nikodym dP_1^n/dQ^n ; d'après le Théorème 1-2 on a $Z_t^n=\mathcal{E}(M^n)_t$ où M^n est une Q^n-martingale locale avec

$$M_t^n = \int_0^t \frac{Y_s^n-1}{1-\Delta B_s^n}\mathbb{1}_{\{\Delta B_s^n<1\}}\, d(N_s-B_s^n)$$

Considérons alors le processus C^n à variation Q^n-localement intégrable défini par:

$$C_t^n = \sum_{s\le t}\left(\Delta M_s^n+2-2(1+\Delta M_s^n)^{1/2}\right)$$

2-2 Lemme ([5], [6])

a) Le processus $\tilde{C}^n$ *défini précédemment par:*

$$\tilde{C}_t^n = \int_0^t (1-\sqrt{Y_s^n})^2 dB_s^n + \sum_{s\le t}\left(\sqrt{1-\Delta A_s^{1,n}}-\sqrt{1-\Delta B_s^n}\right)^2$$

est le Q^n*-compensateur de* C^n.

b) Soit $p\in\mathbb{N}$ *; le* Q^n*-compensateur du processus* V *défini par:*

$$V_t^n = \sum_{s\le t}(1+\Delta M_s^n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n|>p\}}$$

est le processus $\tilde{V}^n$ *défini par:*

$$\tilde{V}_t^n = \int_0^t Y_s^n \mathbb{1}_{\{|Y_s^n-1|>p\}} dB_s^n + \sum_{s\le t}\left((-Y_s^n+1)\Delta B_s^n+(1-\Delta B_s^n)\right)\mathbb{1}_{\{\Delta B_s^n<1\}\cap\{|Y_s^n-1|\Delta B_s^n>p(1-\Delta B_s^n)\}}$$

Démonstration

On a, en notant $D=\{t;\Delta N_t\neq 0\}$ et en procédant comme dans la démonstra- du lemme 1-5

$$\Delta M_t^n = (Y_t^n-1)\mathbb{1}_D - \mathbb{1}_{\{\Delta B_t^n<1\}}\frac{Y_t^n-1}{1-\Delta B_t^n}\Delta B_t^n(1-\mathbb{1}_D).$$

Ainsi si f désigne une fonction de variables réelles avec $f(0)=0$ borélienne, telle que $\sum_{s\le t} f(\Delta M_s^n)$ soit à variation Q^n-intégrable localement, on a:

$$\sum_{s\le t} f(\Delta M^n_s) = \int_0^t f(Y^n_s - 1)dN_s + \sum_{s\le t} f\Big(\frac{-Y^n_s+1}{1-\Delta B^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta B^n_s<1\}}\Delta B^n_s\Big)$$
$$- \int_0^t f\Big(\frac{-Y^n_s+1}{1-\Delta B^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta B^n_s<1\}}\Delta B^n_s\Big)dN_s$$

et son Q^n-compensateur prévisible noté $\widetilde{\sum_s f(\Delta M^n_s)}^{Q^n}$ est alors:

$$\widetilde{\sum_{s\le t} f(\Delta M^n_s)}^{Q^n} = \int_0^t f(Y^n_s-1)dB^n_s + \sum_{s\le t} f\Big(\frac{-Y^n_s+1}{1-\Delta B^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta B^n_s<1\}}\Delta B^n_s\Big)$$
$$- \int_0^t f\Big(\frac{-Y^n_s+1}{1-\Delta B^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta B^n_s<1\}}\Delta B^n_s\Big)dB^n_s$$
$$= \int_0^t f(Y^n_s-1)dB^n_s + \sum_{s\le t}(1-\Delta B^n_s) f\Big(\frac{-Y^n_s+1}{1-\Delta B^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta B^n_s<1\}}\Delta B^n_s\Big).$$

On déduit aisément de cette dernière formule les deux assertions du lemme lorsqu on prend $f(x)=x+2-2(1+x)^{1/2}$ puis $f(x)=(1+x)\mathbb{1}_{\{|x|>p\}}$.

On énonce maintenant le critère de contiguité dont nous nous servirons.

2-3 Théorème ([4] corollaire 2-12)

Soit $(N,\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N,\nu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de processus ponctuels définis sur $(\Omega,\mathcal{F})$, de compensateurs associés α^n et β^n, telles que pour tout n μ^n soit localement absolument continue par rapport à ν^n (c'est à dire que pour tout $t<\infty$ on ait $\mu^n_t \ll \nu^n_t$); soit M^n défini comme précédemment par:

$$M^n_t = \int_0^t \frac{u^n_s-1}{1-\Delta\beta^n_s}\mathbb{1}_{\{\Delta\beta^n_s<1\}}d(N_s-\beta^n_s)$$

où $\alpha^n_t = \int_0^t u^n_s d\beta^n_s$ *et* $\tilde{C}^n_t = \int_0^t (1-\sqrt{u^n_s})^2 d\beta^n_s + \sum_{s\le t}(\sqrt{1-\Delta\alpha^n_s} - \sqrt{1-\Delta\beta^n_s})^2$

On a le résultat suivant:

Si les deux conditions a) et b) ci-dessous sont remplies

a) pour $p\in\mathbb{N}$ $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n \mu^n(\tilde{C}^n_\infty > p) = 0$

b) pour tout $\varepsilon>0$, pour $p\in\mathbb{N}$, $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n \mu^n\Big(\widetilde{\big(\sum_s (1+\Delta M^n_s)\mathbb{1}_{\{|\Delta M^n_s|>p\}}\big)}^{\nu^n} \ge \varepsilon\Big) = 0$

Alors (μ^n) *est contigue relativement à* (ν^n) .

Utilisant ce Théorème et le lemme 2-2 nous allons déduire un résultat de contiguité en termes de compensateurs $A^{1,n}$ et $A^{2,n}$. On notera <u>f^n la densité de Lebesgue de $A^{1,n}$ par rapport à $A^{2,n}$</u>: c'est à dire que pour tout E borèlien de $\mathbb{R}^+$ on a

$$A^{1,n}(E) = \int_E f^n_s dA^{2,n}_s + A^{1,n}(E\cap\{f^n=\infty\});$$

de plus, f^n est un processus prévisible qui est unique à un ensemble $P^n_1+P^n_2$ évanescent près; il est élémentaire de calculer f^n à partir de Y^n, on trouve:

$$f^n = \frac{(n-1)Y^n}{n - Y^n}$$

On obtient alors le Théorème suivant.

2-4 Théorème

Soit $(N, P_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(N, P_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de processus ponctuels non explosifs définis sur l'espace canonique* $(\Omega, \mathcal{F})$ *de compensateurs respectifs* $A^{1,n}$ *et* $A^{2,n}$*, satisfaisant aux hypothèses* (H_3), (H_4) *et à la suivante b')*

b') pour tout $\varepsilon>0$*, pour* $p\in\mathbb{N}$, $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P_1^n\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{f_s^n>p\}}dA_s^{1,n} > \varepsilon\right) = 0$

où f^n *est la densité de Lebesgue de* $A^{1,n}$ *par rapport à* $A^{2,n}$;

Alors (P_1^n) *est contigue relativement à* (P_2^n) .

Démonstration

Le lemme 2-2 nous donne les expressions de $\tilde{C}^n$ et de $\tilde{V}^n = \overline{\sum_s (1+\Delta M_s^n)\mathbb{1}_{\{|\Delta M_s^n|>p\}}}^{Q^n}$; d'autre part on a vu que $\tilde{C}_t^n \leq 2\mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_t$ de sorte que (H_4) entraine que la condition a) du Théorème 2-3 est satisfaite. Passons maintenant à b); il n'est pas difficile de voir que $\mathbb{1}_{\{|Y_s^n-1|\,\Delta B_s^n>p(1-\Delta B_s^n)\}}$ est nul dès que $p>2$ pour n assez grand, car cette expression s'écrit:

$$\mathbb{1}_{\{|\Delta A_s^{1,n}-\Delta A_s^{2,n}|>p(1-\frac{1}{n}\Delta A_s^{1,n}-(\frac{n-1}{n})\Delta A_s^{2,n})\frac{n}{n-1}\}}$$

et b) est vérifié si on a : pour tout $\varepsilon>0$ $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P_1^n\left(\int_0^\infty Y_s^n\mathbb{1}_{\{|Y_s^n-1|>p\}}dB_s^n>\varepsilon\right)$ est nul, ce qui s'écrit $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P_1^n\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{Y_s^n>p-1\}}dA_s^{1,n}>\varepsilon\right) = 0$

ou encore: pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{q\uparrow\infty}\limsup_n P_1^n\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{f_s^n>q\}}dA_s^{1,n}>\varepsilon\right) = 0$

en remplaçant Y^n en fonction de f^n; ainsi la condition b') implique b).

On a montré que (H_3), (H_4) et b') assurent la contiguité de (P_1^n) relativement à (Q^n), d'où le résultat désiré d'après le lemme 2-1.

On va maintenant généraliser le Théorème 2-4 en remplaçant l'hypothèse (H_4) par une condition plus faible du type de la condition a) du Théorème 2-3.

2-5 Théorème

Avec les données du Théorème 2-4, les hypothèses (H_3)*, b'), et la suivante:*

(H_4') $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P_1^n(\mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_\infty>p) = 0$

(P_1^n) *est contigue relativement à* (P_2^n) .

Démonstration

On commence par définir la suite de temps d'arrêt $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\sigma_n = \inf\{t;\mathrm{Var}(A^{1,n}-A^{2,n})_t \geq \sqrt{n}\}$; de (H_4') on déduit aisément que $\lim_n P_1^n(\sigma_n<\infty) = 0$

On considère alors la suite de processus ponctuels $(N^{\sigma_n},P_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$; on notera pour chaque n $(N,\hat{P}_1^n)$ la réalisation de (N^{σ_n},P_1^n) sur $(\Omega,\mathcal{F})$: cette réalisation est obtenue à partir de l'application $\hat{\sigma}_n:\Omega\rightarrow\Omega$ où $\hat{\sigma}_n:\omega\rightarrow\omega^{\sigma_n}$ (trajectoire arrêtée en σ_n), $\hat{P}_1^n$ étant la probabilité image de P_1^n par $\hat{\sigma}_n$; on peut alors définir les processus $\hat{A}^{1,n},\hat{A}^{2,n},\hat{f}^n$ tels que l'on ait les factorisations:

$$A^{1,n,\sigma_n} = \hat{A}^{1,n}\circ\hat{\sigma}_n,\ A^{2,n,\sigma_n} = \hat{A}^{2,n}\circ\hat{\sigma}_n,\ f^{n,\sigma_n} = \hat{f}^n\circ\hat{\sigma}_n .$$

On peut choisir des versions de $\hat{A}^{1,n}$ et de $\hat{A}^{2,n}$ telles que l'on ait identiquement $\mathrm{Var}(\hat{A}^{1,n}-\hat{A}^{2,n})_\infty \leq \sqrt{n}+1$, pour tout $t\leq\sigma_n(\omega)$ $\hat{A}_t^{2,n}(\omega) = A_t^{2,n}(\omega)$ et pour $t>\sigma_n(\omega)$ $\hat{A}_t^{2,n}(\omega) = A^{2,n}_{\sigma_n(\omega)}$, de sorte que $\hat{A}^{2,n}$ vérifie (H_3); enfin $\hat{A}^{1,n}$ est le compensateur du processus ponctuel $(N,\hat{P}_1^n)$.

Montrons que (P_1^n) est contigue relativement à $(\hat{P}_1^n)$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\hat{P}_1^n(F_n)\longrightarrow 0$; il existe, pour chaque n, $G_n\in\mathcal{G}$ tel que $F_n = \{N\in G_n\}$; or $P_1^n(F_n) = P_1^n(N\in G_n)$

$$= P_1^n(\{N\in G_n\}\cap\{\sigma_n=\infty\}) + P_1^n(\{N\in G_n\}\cap\{\sigma_n<\infty\})$$

$$\leq P_1^n(N^{\sigma_n}\in G_n) + P_1^n(\sigma_n<\infty).$$

Mais $P_1^n(N^{\sigma_n}\in G_n) = \hat{P}_1^n(N\in G_n)$, et ce terme tend vers 0 par hypothèse lorsque $n\longrightarrow\infty$, enfin $P_1^n(\sigma_n<\infty)\longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow\infty$, d'après la remarque préliminaire.

Soit maintenant la suite $(N,R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus ponctuels, où pour chaque n (N,R^n) est la réalisation sur $(\Omega,\mathcal{F})$ de (N^{σ_n},P_2^n); (N,R^n) admet pour compensateur $\hat{A}^{2,n}$.

Il est facile alors de vérifier que les suites $(N,\hat{P}_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N,R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont aux hypothèses du Théorème 2-4: en effet on a d'abord par construction $\mathrm{Var}(\hat{A}^{1,n}-\hat{A}^{2,n})_\infty\leq\sqrt{n}+1$ d'où (H_4), ensuite $\hat{f}^n$ est la densité de Lebesgue de $\hat{A}^{1,n}$ par rapport à $\hat{A}^{2,n}$; enfin l'hypothèse b') implique que

$$\text{pour tout } \varepsilon>0,\ \lim_p \limsup_n \hat{P}_1^n\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\hat{f}_s^n>p\}}\,d\hat{A}_s^{1,n}>\varepsilon\right) = 0 ,$$

d'où le résultat; ainsi $(\hat{P}_1^n)$ est contigue relativement à (R^n).

Pour terminer la démonstration, considérons (F_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $P_2^n(F_n)\longrightarrow 0$.

$$P_2^n(F_n) = P_2^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\}) + P_2^n(F_n\cap\{\sigma_n<\infty\});$$

On a $P_2^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\}) = R^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\})$ et donc $P_2^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\})\longrightarrow 0$ implique d'après ce qui précède:

$$\hat{P}_1^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\})\longrightarrow 0 \quad \text{d'où} \quad P_1^n(F_n\cap\{\sigma_n=\infty\})\longrightarrow 0.$$

D'un autre coté

$P_1^n(F_n\cap\{\sigma_n<\infty\}) \leq P_1^n(\sigma_n<\infty)$; or $P_1^n(\sigma_n<\infty)\longrightarrow 0$ d'où le résultat final.

On applique maintenant le Théorème 2-5 au cas où $(N,P_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus ponctuels à accroissements indépendants.

2-6 Théorème

Soit une suite $(N^n,P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus ponctuels non explosifs tels que pour chaque n (N^n,P^n) soit défini sur un espace $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0}$ de N^n, de compensateur A^n.

Soit $(N,\Pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuels non explosifs, à accroissements indépendants définis sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$ de compensateurs respectifs m^n.

On fait les hypothèses suivantes :

(i) $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P^n(Var(A^n-m^n)_\infty>p) = 0$

(ii) *Pour tout* $\varepsilon>0$, $\lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P^n(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{f_s^n>p\}}dA_s^n > \varepsilon) = 0$

où f^n est la densité de Lebesgue de A^n par rapport à m^n.

Alors avec (i), (ii), la suite (P^n) est contigue relativement à (Π^n).

C'est en effet une application triviale du Théorème 2-5 si on remarque que (H_3) est vérifiée et qu'ensuite (i) et (ii) impliquent respectivement (H_4') et b') pour les suites $(\bar{P}^n)$ et (Π^n) à la place de (P_1^n) et (P_2^n), où $(N,\bar{P}^n)$ est la réalisation de (N^n,P^n) sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

REFERENCES

[1] P.BREMAUD: Point processes and queues (martingale dynamics) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1981 .

[2] P.BREMAUD-J.JACOD: Processus ponctuels et martingales:résultats récents sur la modèlisation et le filtrage Adv.Appl.Probab. n°9 p 362-416 1977 .

[3] T.C.BROWN: Poisson approximations and exchangeable random variables A paraitre dans:Proc.of conf.on exchangeability, North-Holland

[4] G.K.EAGLESON-J.MEMIN: Sur la contiguité de deux suites de mesures:généralisation d'un Théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev A paraitre aux Séminaires de Probabilité XVI,Lect.Notes in Maths. Springer-Verlag.

[5] J.JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales Lect.Notes in Maths. n°714 Springer-Verlag,Berlin Heidelberg New-York 1979 .

[6] Y.M.KABANOV-R.S.LIPTSER-A.N.SHIRYAYEV: Absolue continuité et singularité de deux probabilités localement absolument continues II Mat.Sbornik n°108-1 p 32-61 Moscou 1979 .

[7] L.LE CAM: Local asymptotically normal families of distributions Univ.Calif.Public.Statist. 3 p 37-98 1960 .

[8] R.S.LIPTSER-A.N.SHIRYAYEV: Statistics of stochastic processes Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1978 .