TOPOLOGIES POUR LES MESURES SUR UN PRODUIT D'ESPACES

Jean JACOD

§1. Introduction.

Dans cet article nous abordons le problème suivant de théorie de la mesure: soit $(Y,\underline{\underline{Y}})$ un espace mesurable quelconque, et $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace polonais muni de sa tribu borélienne; soit $\tilde{Y}=Y\times E$, $\tilde{\underline{\underline{Y}}}=\underline{\underline{Y}}\otimes\underline{\underline{E}}$. On considère un espace $\mathcal{M}$ de mesures (scalaires ou vectorielles) sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$.

Le problème consiste à définir (et à étudier) une topologie sur $\mathcal{M}$, qui sur le premier facteur Y se ramène à la topologie de la convergence en variation (ou en semi-variation, dans le cas vectoriel), et qui sur le second facteur E se ramène à la convergence étroite. De manière plus précise, on veut qu'une famille filtrante (μ_α) de $\mathcal{M}$ converge vers μ si et seulement si:

(1.1) Pour toute fonction continue bornée f sur E, les mesures $\mu_\alpha(.\times f)$ sur Y convergent en variation (ou en semi-variation) vers $\mu(.\times f)$.

Dans la partie I nous étudions le cas où $\mathcal{M}$ est l'espace des mesures réelles positives sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$. L'essentiel consiste alors en une généralisation facile de la topologie étroite, avec les mêmes méthodes et des résultats analogues: par exemple, $\mathcal{M}$ est métrisable et complet (mais pas séparable, bien-sûr, à moins que Y ne soit dénombrable).

Dans la partie II nous considérons le cas où $\mathcal{M}$ est l'espace des mesures sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$, à valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$. Là encore les méthodes sont les mêmes, mais les résultats obtenus sont beaucoup moins bons, ce qui n'est pas une surprise: déjà pour les mesures réelles signées les résultats concernant la topologie étroite sont significativement moins forts que pour les mesures positives.

Signalons que comme corollaire, nous obtenons une définition et quelques propriétés de la convergence "étroite" pour des mesures vectorielles sur un espace polonais, ce qui ne semble pas avoir été étudié jusqu'à présent.

Nous ne parlerons pas ici des applications (voir par exemple [4]). Mais cette étude (et notamment le cas vectoriel de la partie II) est motivée par la nécessité de munir les divers espaces de mesures aléatoires de topologies convenables. En effet soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$ un espace probabilisé filtré. On sait qu'une semimartingale peut être considérée comme une mesure sur $Y=\Omega\times\mathbb{R}_+$ muni de la tribu $\underline{\underline{Y}}=\underline{\underline{P}}$ des prévisibles, et à valeurs dans $\mathfrak{X}=L^0(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ (espace des variables aléatoires réelles finies, muni de la convergence en probabilité); de plus la topologie d'Emery est la topologie de la convergence en semi-variation (sur chaque intervalle de temps fini). De même, si E est un espace auxiliaire, une "mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+\times E$" peut en fait être considérée comme une mesure sur $\tilde{Y}=Y\times E$, à valeurs dans L^0 ; et, pour l'étude de la stabilité dans les équations différentielles stochastiques notamment, on a besoin d'introduire une topologie sur l'espace des mesures aléatoires qui soit "forte" (i.e. en semi-variation) sur $Y=\Omega\times\mathbb{R}_+$, et "faible" (i.e. de type "étroite") sur E.

Nous terminons cette introduction par des notations qui nous serviront dans les deux parties, qui pour l'essentiel peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre.

D'abord, $B(Y)$ (resp. $B(E)$, resp. $B(\tilde{Y})$) désigne l'espace des fonctions réelles bornées mesurables sur l'espace $(Y,\underline{\underline{Y}})$ (resp. $(E,\underline{\underline{E}})$, resp. $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$).

Ensuite, on munit E d'une distance d pour laquelle il est complet. Soit $C(E)$ (resp. $BL(E)$) l'espace des fonctions continues (resp. lipschitziennes) bornées sur E. Soit aussi $BL_a(E)$ l'ensemble des fonctions f sur E bornées par a et lipschitziennes de coefficient de Lipschitz inférieur ou égal à a ; noter que $BL(E)=\bigcup_{a>0} BL_a(E)$.

Enfin si $A(E)$ est un ensemble quelconque de fonctions sur E, on lui associe les trois ensembles suivants de fonctions sur $\tilde{Y}$:

$$(1.2)\quad \begin{cases} \tilde{A} := \{\varphi\in B(\tilde{Y}) :\ \varphi(y,.)\in A(E) \text{ pour tout } y\in Y\} \\ 1\otimes A := \{\varphi = 1\otimes f :\ f\in A(E)\} \\ B\otimes A := \{\varphi = \sum_{1\leq i\leq N} g_i\otimes f_i :\ N\in\mathbb{N},\ g_i\in B(Y),\ f_i\in A(E)\}. \end{cases}$$

En particulier $\tilde{B}=B(\tilde{Y})$; $\tilde{C}$ (resp. $\widetilde{BL}$) est l'espace des fonctions mesurables bornées sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$, qui sont continues (resp. lipschitziennes) dans la seconde variable. Noter que $\widetilde{BL}$ contient strictement $\bigcup_{a>0}\widetilde{BL}_a$. Parmi les ensembles définis en (1.2), on utilisera $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\widetilde{BL}$, et aussi $B\otimes BL$, $B\otimes C$, $1\otimes BL$, $1\otimes BL_1$, $1\otimes C$.

I - MESURES POSITIVES

§2. Dans toute la partie I nous notons $\mathcal{M}^+(Y)$ l'ensemble des mesures positives finies sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, et $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}^+(Y) - \mathcal{M}^+(Y)$ l'ensemble des mesures finies signées. On définit de même $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$, $\mathcal{M}(\tilde{Y})$, $\mathcal{M}^+(E)$, $\mathcal{M}(E)$. Notre objectif consiste à munir $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ d'une topologie vérifiant (1.1).

Commençons par compléter les notations précédentes. Si $\mu\in\mathcal{M}(\tilde{Y})$ et si $\varphi\in\tilde{B}$ ($= B(\tilde{Y})$), on définit une mesure $\varphi\times\mu$ dans $\mathcal{M}(Y)$ en posant

(2.1) $$A\in\underline{\underline{Y}} \quad\rightsquigarrow\quad \varphi\times\mu(A) = \mu(\varphi 1_{A\times E}).$$

Si $\nu\in\mathcal{M}(Y)$, sa __variation__ $\mathrm{Var}_Y(\nu)$ est par définition (l'indice Y figurant pour rappeler qu'il s'agit d'une mesure sur Y, et non sur $\tilde{Y}$):

(2.2) $$\mathrm{Var}_Y(\nu) = \sup_{g\in B(Y),\ |g|\le 1} |\nu(g)|.$$

On munit $\mathcal{M}(\tilde{Y})$ des deux normes suivantes:

(2.3) $$\|\mu\|_{\widetilde{BL}_1} := \sup_{\varphi\in\widetilde{BL}_1} \mathrm{Var}_Y(\varphi\times\mu) = \sup_{\varphi\in\widetilde{BL}_1} |\mu(\varphi)|$$

(2.4) $$\|\mu\|_{1\otimes BL_1} := \sup_{\varphi\in 1\otimes BL_1} \mathrm{Var}_Y(\varphi\times\mu)$$
$$= \sup_{f\in BL_1(E),\, g\in B(Y),\, |g|\le 1} |\mu(g\otimes f)|.$$

On a bien-sûr $\|\mu\|_{1\otimes BL_1} \leqslant \|\mu\|_{\widetilde{BL}_1}$.

Si $A\subset\tilde{Y}$, on note $\bar{A}$ (resp. $\mathring{A}$, resp. ∂A) l'ensemble des points (y,x) de Y tels que, pour tout $y\in Y$, x appartienne à l'adhérence (resp. à l'intérieur, resp. à la frontière) de la coupe $A_y = \{x : (y,x)\in A\}$ dans E.

(2.5) THEOREME: __Soit__ $\mu\in\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ __et__ (μ_α) __une famille filtrante de__ $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$. __On considère les conditions__:

(A1) $\mathrm{Var}_Y[\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)] \longrightarrow 0$ __pour toute__ $\varphi\in\tilde{C}$;

(A2) $\mathrm{Var}_Y[\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)] \longrightarrow 0$ __pour toute__ $\varphi\in\widetilde{BL}$;

(A3) $\mathrm{Var}_Y[\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)] \longrightarrow 0$ __pour toute__ $\varphi\in 1\otimes C$ (ce qui s'écrit aussi $\mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times f)-\mu(.\ f)] \longrightarrow 0$ pour toute $f\in C(E)$);

(A4) $\mathrm{Var}_Y[\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)] \longrightarrow 0$ __pour toute__ $\varphi\in 1\otimes BL$;

(A5) $\|\mu_\alpha-\mu\|_{\widetilde{BL}_1} \longrightarrow 0$;

(A6) $\|\mu_\alpha-\mu\|_{1\otimes BL_1} \longrightarrow 0$;

(A7) $\quad \mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times C) - \mu(.\times C)] \longrightarrow 0$ pour tout $C \in \underline{\underline{E}}$ tel que $\mu(Y\times\partial C) = 0$.

a) Les conditions (A2)-(A7) sont équivalentes.

b) Les conditions (A1)-(A7) sont équivalentes si la famille filtrante (μ_α) est une suite, ou bien si elle est asymptotiquement tendue, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de E et un indice β tels que $\mu_\alpha(Y\times K^c) \leq \varepsilon$ pour tout $\alpha \succ \beta$.

On munit alors $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ de la topologie pour laquelle une famille filtrante converge si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes (A2)-(A7). Cette topologie est métrisable, avec l'une quelconque des deux distances

$$d_{\widetilde{BL}_1}(\mu,\mu') = \|\mu-\mu'\|_{\widetilde{BL}_1}, \qquad d_{1\otimes BL_1}(\mu,\mu') = \|\mu-\mu'\|_{1\otimes BL_1}.$$

Remarquer que la condition (A3) est exactement la condition (1.1), de sorte que nous avons rempli notre contrat.

Remarquer aussi que lorsque Y est réduit à un point, on peut identifier $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ et $\mathcal{M}^+(E)$: on a alors $(A1) = (A3)$, $(A2) = (A4)$, $(A5) = (A6)$, et l'équivalence $(A3) \Longleftrightarrow (A4) \Longleftrightarrow (A7)$ est bien connue: voir par exemple Billingsley [5] ou Parthasarathy [7]; l'équivalence avec (A6) est moins connue, mais se trouve par exemple dans Araujo et Giné [1]. Pour la démonstration du théorème, nous allons d'ailleurs reproduire pour l'essentiel les démonstrations de [5] et [1].

Démonstration. a) On va montrer les implications:

$$\begin{tikzcd}
 & A3 \arrow[dr] & \\
A7 \arrow[ur] \arrow[dr] & A2 \arrow[r] & A4 \arrow[ll, bend left=70] \\
 & A5 \arrow[u] \arrow[r] & A6 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Parmi celles-ci, les implications $(A2) \longrightarrow (A4)$, $(A5) \longrightarrow (A2)$ et $(A6)$, $(A6) \longrightarrow (A4)$ et $(A3) \longrightarrow (A4)$ sont évidentes.

$(A4) \Longrightarrow (A7)$. Soit $C \in \underline{\underline{E}}$ avec $\mu(Y\times\partial C) = 0$. Il existe une suite (f_n^1) de fonctions positives de $BL(E)$ croissant vers l'indicatrice $1_{\mathring{C}}$, et une suite (f_n^2) de fonctions de $BL(E)$ bornées par 1 et décroissant vers l'indicatrice $1_{\bar{C}}$. D'après l'hypothèse faite sur C, il existe n tel que $\mu[1\otimes(f_n^2 - f_n^1)] \leq \varepsilon$. D'après (A4) il existe un indice β tel que $\mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times f_n^i) - \mu(.\times f_n^i)] \leq \varepsilon$ pour tout $\alpha \succ \beta$ et $i = 1,2$. On en déduit en particulier que si $\alpha \succ \beta$, on a

$$\mu_\alpha[1\otimes(f_n^2 - f_n^1)] \leq 3\varepsilon.$$

Soit alors $g \in B(Y)$, $|g| \leq 1$. Comme μ et μ_α sont des mesures positives, on a

$$|(\mu_\alpha - \mu)(g \otimes 1_C) - (\mu_\alpha - \mu)(g \otimes f_n^1)| \leq \mu_\alpha(1 \otimes (f_n^2 - f_n^1)) + \mu(1 \otimes (f_n^2 - f_n^1)) .$$

D'après les inégalités précédentes, on a alors pour $\alpha \succ \beta$:

$$|(\mu_\alpha - \mu)(g \otimes 1_C)| \leq \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour toute $g \in B(Y)$, $|g| \leq 1$, on a $\mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times C) - \mu(.\times C)] \leq 5\varepsilon$ pour $\alpha \succ \beta$, et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a (A7).

<u>(A7) $\Longrightarrow$ (A5)</u>. Soit $n \geq 1$. Il est facile de construire une partition mesurable $(A_p)_{p\geq 1}$ de E telle que: $\mathrm{diam}(A_p) \leq 1/n$, et $\mu(Y \times \partial A_p) = 0$. Pour chaque p on considère un point x_p de A_p. Il existe un entier N tel que si $C = \bigcup_{1 \leq p \leq N} A_p$, on ait $\mu(Y \times C^c) \leq 1/n$, et on a aussi $\mu(Y \times \partial C) = 0$. Donc d'après (A7) il existe un indice β tel que pour tout $\alpha \succ \beta$ on ait

$$\text{(2.6)} \quad \begin{cases} \mu_\alpha(Y \times C^c) \leq \frac{2}{n}, & \mu_\alpha(\tilde{Y}) \leq \mu(\tilde{Y}) + \frac{1}{n} \\ \mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times A_p) - \mu(.\times A_p)] \leq 1/N n^2 & \text{pour } p \leq N . \end{cases}$$

Soit maintenant $\varphi \in \widetilde{BL}_1$, et $K_p^i = \{y : \varphi(y, x_p) \in]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\}$ pour $-n \leq i \leq n$. Soit $\psi_p^i = \frac{i}{n} 1_{K_p^i \times A_p}$. Il est clair que

$$\text{(2.7)} \qquad \mathrm{Var}_Y[\psi_p^i \times (\mu_\alpha - \mu)] \leq \mathrm{Var}_Y[\mu_\alpha(.\times A_p) - \mu(.\times A_p)] .$$

Soit enfin $\psi = \sum_{1 \leq p \leq N} \sum_{-n \leq i \leq n} \psi_p^i$. On a $|\psi| \leq 1$ par construction; on a $\varphi \in \widetilde{BL}_1$, donc $\bigcup_{-n \leq i \leq n} K_p^i = Y$ d'une part, et d'autre part $|\varphi - \psi| \leq 1/n$ sur $Y \times C$ car $\mathrm{diam}(A_p) \leq 1/n$ et $x_p \in A_p$. Par suite, les mesures μ_α et μ étant positives, on a

$$\mathrm{Var}_Y(\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)) \leq \mu(Y \times C^c) + \mu_\alpha(Y \times C^c) + \frac{1}{n}[\mu_\alpha(\tilde{Y}) + \mu(\tilde{Y})] + \mathrm{Var}_Y(\psi \times (\mu_\alpha - \mu)) .$$

D'après (2.6) et (2.7) il vient alors, pour $\alpha \succ \beta$:

$$\mathrm{Var}_Y(\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)) \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}[2\mu(\tilde{Y}) + \frac{1}{n}] + \frac{1}{Nn^2}(2Nn) \leq \frac{1}{n}[6 + 2\mu(\tilde{Y})] .$$

Cette majoration ne dépendant pas de φ dans $\widetilde{BL}_1$, on a $\|\mu_\alpha - \mu\|_{\widetilde{BL}_1} \leq \frac{1}{n}[6 + 2\mu(\tilde{Y})]$. Comme n est arbitraire, on en déduit (A5).

<u>(A7) $\Longrightarrow$ (A3)</u>. Soit $f \in C(E)$ et $M > \sup_x |f(x)|$. Soit $A(s) = \{x : f(x) = s\}$ et $D = \{s : \mu(Y \times \partial A(s)) > 0\}$, qui est au plus dénombrable. Donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision finie $a_0 \leq -M < a_1 < \ldots < a_{n-1} < M \leq a_n$ telle que $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$, et que $a_i \notin D$. Soit $C_i = \{x : a_i \leq f(x) < a_{i+1}\}$. Comme f est continue, on a $\partial C_i \subset \{x : f(x) = a_i \text{ ou } f(x) = a_{i+1}\}$, de sorte que $\mu(Y \times \partial C_i) = 0$. Si alors

$f' = \sum_{0\leq i\leq n-1} a_i 1_{C_i}$, on déduit immédiatement de (A7) qu'il existe un indice β tel que pour tout $\alpha \succ \beta$ on ait $\mathrm{Var}_Y[(1\otimes f')\times(\mu_\alpha - \mu)] \leq \varepsilon$, et aussi $\mu_\alpha(\tilde{Y}) \leq \mu(\tilde{Y}) + \varepsilon$. Enfin $f' \leq f \leq f' + \varepsilon$ par construction.

Soit alors $g \in B(Y)$, $|g| \leq 1$. Comme μ et μ_α sont positives, on a

$$|(\mu_\alpha - \mu)(g\otimes f) - (\mu_\alpha - \mu)(g\otimes f')| \leq \varepsilon\,[\mu_\alpha(\tilde{Y}) + \mu(\tilde{Y})],$$

donc si $\alpha \succ \beta$ il vient

$$|(\mu_\alpha - \mu)(g\otimes f)| \leq \varepsilon + \varepsilon[2\mu(\tilde{Y}) + \varepsilon] \leq 2\varepsilon[1 + \mu(\tilde{Y})]$$

dès que $\varepsilon \leq 1$. On a donc aussi $\mathrm{Var}_Y[(1\otimes f)\times(\mu_\alpha - \mu)] \leq 2\varepsilon[1 + \mu(\tilde{Y})]$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a (A3).

b) Pour démontrer la partie (b) du théorème, il suffit évidemment de montrer que si (μ_α) satisfait les hypothèses de (b), plus l'une des conditions équivalentes (A2)-(A7), alors elle vérifie (A1). Remarquons d'abord que si la famille (μ_α) est une <u>suite</u> qui vérifie (A3), alors la suite $(\mu_\alpha(Y\times .))$ de mesures positives sur E converge étroitement vers $\mu(Y\times .)$, donc elle est relativement compacte pour la topologie étroite, et d'après le critère de Prokhorov on voit qu'elle est uniformément tendue.

On peut donc dans tous les cas supposer que (μ_α) est asymptotiquement uniformément tendue, et vérifie (A2). Soit $\varepsilon > 0$. Soit K un compact de E et β_1 un indice tels que si $\alpha \succ \beta_1$ on ait $\mu_\alpha(Y\times K^c) \leq \varepsilon$ et $\mu_\alpha(\tilde{Y}) \leq \mu(\tilde{Y}) + \varepsilon$, ainsi que $\mu(Y\times K^c) \leq \varepsilon$.

L'espace C(K) est séparable pour la topologie uniforme et admet une suite dense constituée de fonctions lipschitziennes. De plus chaque $f \in BL(K)$ se prolonge en une fonction $\bar{f} \in BL(E)$ telle que $\sup_{x\in K}|f(x)| = \sup_{x\in E}|\bar{f}(x)|$. Il existe donc une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ dans BL(E) telle que $|f_k| \leq 1$ et que la suite des restrictions des f_k à K soit dense dans l'ensemble $\{f \in C(K) : |f| \leq 1\}$.

Il suffit de montrer (A1) pour toute fonction $\varphi \in \tilde{C}$ bornée par 1. Soit alors φ une telle fonction. D'après ce qui précède, les ensembles

$$B_k = \{y \in Y : y \notin \bigcup_{1\leq q\leq k-1} B_q,\ \sup_{x\in K}|\varphi(y,x) - f_k(x)| \leq \varepsilon\}$$

constituent une partition mesurable de Y. On pose $\psi = \sum_{k\geq 1} 1_{B_k}\otimes f_k$. On a $\psi \in \widetilde{BL}$, donc d'après (A2) il existe un indice $\beta_2 \succ \beta_1$ tel que si $\alpha \succ \beta_2$ on ait: $\mathrm{Var}_Y(\psi\times(\mu_\alpha - \mu)) \leq \varepsilon$. Par ailleurs $|\psi| \leq 1$ et $|\psi - \varphi| \leq \varepsilon$ sur $Y\times K$. Comme les mesures μ_α et μ sont positives on en déduit que pour $\alpha \succ \beta_2$:

$$\mathrm{Var}_Y(\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)) \leq \mu_\alpha(Y\times K^c) + \mu(Y\times K^c) + \varepsilon[\mu_\alpha(\tilde{Y})+\mu(\tilde{Y})] + \mathrm{Var}_Y(\psi\times(\mu_\alpha-\mu))$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon[2\mu(\tilde{Y})+\varepsilon] + \varepsilon \leq 2\varepsilon[\mu(\tilde{Y})+2]$$

dès que $\varepsilon \leq 1$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit (A1). ∎

Nous allons maintenant montrer que l'espace $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ est complet pour les distances précédentes. Pour cela, on rappelle d'abord un résultat de [4] (Théorème (2.6)).

(2.8) THEOREME: Soit ϕ une fonctionnelle linéaire positive sur $B\otimes C$ (notation (1.2)). Pour qu'il existe une mesure $\mu\in\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ telle que $\mu(\varphi)=\phi(\varphi)$ sur $B\otimes C$, il faut et il suffit que

(i) $A \rightsquigarrow \phi(1_{A\times E})$ soit une mesure sur $(Y,\underline{Y})$;

(ii) pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K de E tel que $\phi(1\otimes f)\leq\varepsilon$ pour $f\in C(E)$ vérifiant $|f|\leq 1_{K^c}$.

On a alors:

(2.9) THEOREME: L'espace $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ est complet pour $d_{\widetilde{BL}_1}$ et $d_{1\otimes BL_1}$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour la distance $d_{1\otimes BL_1}$. Soit (μ_n) une suite de Cauchy pour cette distance.

Soit $f\in BL(E)$. La suite $(\mu_n(.\times f))$ est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{M}(Y)$ muni de la convergence en variation, et cet espace est complet; donc il existe $\nu^f\in\mathcal{M}(Y)$ telle que $\mathrm{Var}_Y(\nu^f-\mu_n(.\times f)) \longrightarrow 0$.

Soit $g\in B(Y)$, $g\geq 0$. La suite $(\mu_n(g\times .))$ est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{M}^+(E)$ muni de la distance $\delta(\eta,\eta') = \sup_{f\in BL_1(E)}|\eta(f)-\eta'(f)|$, et cet espace est complet pour cette distance (qui définit la topologie étroite); donc il existe $\eta^g\in\mathcal{M}^+(E)$ telle que $\mu_n(g\times f)\longrightarrow\eta^g(f)$ pour toute $f\in C(E)$. Si maintenant $g\in B(Y)$ n'est pas positive, on pose $\eta^g = \eta^{g^+}-\eta^{g^-}$, et on a encore $\mu_n(g\times f)\longrightarrow\eta^g(f)$ pour $f\in C(E)$.

On peut alors poser $\phi(g\otimes f)=\eta^g(f)$ pour $g\in B(Y)$ et $f\in C(E)$ et prolonger ϕ par linéarité à $B\otimes C$: on a $\mu_n(\varphi)\longrightarrow\phi(\varphi)$ pour $\varphi\in B\otimes C$, donc ϕ est une fonctionnelle linéaire positive sur $B\otimes C$. Elle vérifie (2.8,ii) car $\phi(1\otimes f)=\eta^1(f)$, elle vérifie (2.8,i) car $\phi(g\otimes 1)=\nu^1(g)$; donc elle correspond à une mesure $\mu\in\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$. Enfin $\mu_n(.\times f)$ converge vers $\nu^f(.)=\mu(.\times f)$ en variation donc (μ_n) converge vers μ pour la distance $d_{1\otimes BL_1}$ d'après (2.5,a). ∎

Par contre l'espace $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ n'est pas polonais car il n'est pas séparable, en général: il est immédiat de vérifier qu'il est <u>séparable</u> (donc polonais) si et seulement si l'espace mesurable $(Y,\underline{\underline{Y}})$ admet au plus une <u>infinité dénombrable d'atomes</u>.

§3. Ce paragraphe ne contient que des résultats de détail, et peut donc être omis sans inconvénients. L'espace $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ est toujours supposé muni de la topologie définie ci-dessus (par les conditions équivalentes (A2)-(A7) du théorème (2.5)), et nous allons améliorer ce théorème pour une <u>suite</u> (μ_n) convergeant vers une limite μ dans $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$.

(3.1) PROPOSITION: <u>Soit</u> (μ_n) <u>une suite convergeant vers une limite</u> μ <u>dans</u> $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$. <u>Soit</u> φ <u>une fonction de</u> $\tilde{B}=B(\tilde{Y})$ <u>pour laquelle on ait</u> $\mu(A)=0$, <u>où</u> $A=\{(y,x):\ \varphi(y,.)$ n'est pas continue en $x\}$. <u>Alors</u>

$$\mathrm{Var}_Y[\varphi\times(\mu_n-\mu)] \longrightarrow 0 .$$

Commençons par un lemme (à comparer au lemme (2.13) de [4]).

(3.2) LEMME: <u>Soit</u> $\mu\in\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ <u>et</u> $A\in\tilde{\underline{\underline{Y}}}$. <u>Il existe une suite décroissante</u> (φ_n) <u>de fonctions positives de</u> $\widetilde{BL}$ <u>telle que</u>: $\lim \varphi_n = 1_{\bar{A}}$ μ-<u>p.s.</u> (pour la définition de $\bar{A}$, voir le début du §2).

<u>Démonstration</u>. Soit (x_i) une suite dense de points de E, soit $B(x_i,r)$ la boule fermée de centre x_i et de rayon r dans E, soit enfin $A^{in}=A\bigcap(Y\times B(x_i,\frac{1}{n}))$. On a $A^{in}\in\tilde{\underline{\underline{Y}}}$, donc d'après le théorème de section mesurable il existe une partie B^{in} de Y avec $\mu(B^{in}\times E)=0$ (noter que B^{in} n'est pas nécessairement $\underline{\underline{Y}}$-mesurable) et une application mesurable $h^{in}:\ (Y,\underline{\underline{Y}}) \longrightarrow (E,\underline{\underline{E}})$, telles que

$$y\notin B^{in} \Longrightarrow [A^{in}_y\neq\emptyset \Longleftrightarrow h^{in}(y)\in A^{in}_y].$$

Soit $B=\bigcup_{(i,n)} B^{in}$, donc $\mu(B\times E)=0$. Soit aussi

$$\begin{cases} H_y = \{h^{in}(y):\ i\geq 1,\ n\geq 1,\ h^{in}(y)\in A^{in}_y\} \\ H = \{(y,x):\ x\in H_y\} \\ \psi(y,x) = 1\wedge \inf_{i,n}[d(x,h^{in}(y))+1_{(A^{in})^c}(y,h^{in}(y))]. \end{cases}$$

Par construction on a d'une part $\psi\in\tilde{B}$, d'autre part $\psi(y,x)=1\wedge d(x,\bar{H}_y)$; on en déduit que $\psi\in\widetilde{BL}_1$. Si $\varphi_n(y,x)=[1-n\,\psi(y,x)]^+$ on a encore $\varphi_n\in\widetilde{BL}$, $\varphi_n\geq 0$, et la suite (φ_n) décroit vers l'indicatrice $1_{\bar{H}}$.

Il reste à montrer que $\bar{H} = \bar{A}$ μ-p.s. Soit $y \in B^c$. Si $x \in \bar{A}_y$, pour tout n il existe i tel que $x \in \overline{A_y^{in}}$, donc $d(x, h^{in}(y)) \leq 1/n$ et $h^{in}(y) \in A_y^{in}$, donc finalement $x \in \bar{H}_y$. Inversement si $x \notin \bar{A}_y$ on a $\rho := d(x, A_y) > 0$ et $d(x, h^{in}(y)) \geq \rho$ dès que $h^{in}(y) \in A_y^{in}$, donc $d(x, \bar{H}_y) \geq \rho$. On en déduit que $\bar{A}_y = \bar{H}_y$ dès que $y \notin B$, d'où le résultat. ∎

Le lemme suivant est un cas particulier de (3.1), celui où φ est une indicatrice d'ensemble.

(3.3) LEMME: <u>Sous les hypothèses de (3.1) on a</u> $\mathrm{Var}_Y [1_C \times (\mu_n - \mu)] \longrightarrow 0$ <u>pour tout</u> $C \in \underline{\underline{\tilde{Y}}}$ <u>tel que</u> $\mu(\partial C) = 0$.

<u>Démonstration</u>. Il existe une mesure $\nu \in \mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ par rapport à laquelle μ et chaque μ_n sont absolument continues. D'après le lemme (3.2) appliqué à C et à C^c, il existe une suite croissante (φ_p^1) de fonctions positives de $\widetilde{BL}$ tendant ν-p.s. vers $1_{\overset{\circ}{C}}$, et une suite décroissante (φ_p^2) de fonctions de $\widetilde{BL}$ bornées par 1 et tendant ν-p.s. vers $1_{\bar{C}}$. On a alors:

$$\lim_{(p)} |\varphi_p^2 - \varphi_p^1| = 0 \quad \mu\text{-p.s.}, \qquad \varphi_p^1 \leq 1_C \leq \varphi_p^2 \quad \mu_n\text{-p.s. et } \mu\text{-p.s.}$$

Il suffit donc pour obtenir le résultat de reprendre exactement la preuve de l'implication (A4) $\Longrightarrow$ (A7) du théorème (2.5), en remplaçant (A4) par (A3) et $1 \otimes f_p^i$ par φ_p^i pour $i = 1, 2$. ∎

Nous ne savons pas démontrer ce lemme pour une famille filtrante convergente: c'est pourquoi le théorème (3.1) est énoncé pour une suite.

<u>Démonstration de (3.1)</u>. Soit $M > \sup_{(y,x)} |\varphi(y,x)|$, $A(s) = \{\varphi = s\}$, et $D = \{s : \mu(\partial A(s)) > 0\}$, qui est au plus dénombrable. On reprend alors la preuve de l'implication (A7) $\Longrightarrow$ (A3) du théorème (2.5), avec les modifications suivantes: on prend $C_i = \{a_i \leq \varphi < a_{i+1}\}$; on a $\partial C \subset A \cup A(a_i) \cup A(a_{i+1})$ car $\varphi(y,.)$ est continue en dehors de A_y, donc $\mu(\partial C_i) = 0$ par hypothèse. On remplace f' par $\varphi' = \sum_{0 \leq i < n-1} a_i 1_{C_i}$ et on utilise le lemme (3.3) au lieu de (A7). ∎

Le second ensemble de résultats de ce paragraphe concerne encore les suites de mesures: on va montrer que la convergence dans $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$ équivaut à la convergence des désintégrations des mesures par rapport à une mesure finie sur Y. Rappelons d'abord que la distance

(3.4) $$d_{BL_1}(\eta, \eta') = \sup_{f \in BL_1(E)} |\eta(f) - \eta'(f)|$$

définit la topologie étroite sur $\mathcal{M}^+(E)$ (c'est d'ailleurs une conséquence de (2.5)).

On considère des mesures $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}^+(\tilde{Y})$, et aussi une mesure $\nu \in \mathcal{M}^+(Y)$ par rapport à laquelle les $\mu_n(.\times E)$ et $\mu(.\times E)$ sont absolument continues (il existe toujours une telle mesure). On considère enfin des mesures de transition positives Q_n, Q de $(Y,\underline{\underline{Y}})$ dans $(E,\underline{\underline{E}})$ qui vérifient

(3.5) $$\mu_n(dy\times dx) = \nu(dy)Q_n(y,dx), \quad \mu(dy\times dx) = \nu(dy)Q(y,dx).$$

Enfin pour toute fonction $\varphi \in \tilde{B}$ on introduit les fonctions suivantes de $B(Y)$:

(3.6) $$(Q_n\varphi)(y) = \int Q_n(y,dx)\varphi(y,x), \quad (Q\varphi)(y) = \int Q(y,dx)\varphi(y,x).$$

(3.7) PROPOSITION: <u>Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre</u>:

(a) $\mu_n \longrightarrow \mu$ <u>dans</u> $\mathcal{M}^+(\tilde{Y})$;

(b) $Q_n\varphi \longrightarrow Q\varphi$ <u>dans</u> $L^1(Y,\underline{\underline{Y}},\nu)$ <u>pour toute</u> $\varphi \in \tilde{C}$;

(c) $Q_n(.,f) \longrightarrow Q(.,f)$ <u>dans</u> $L^1(Y,\underline{\underline{Y}},\nu)$ <u>pour toute</u> $f \in BL(E)$;

(d) $d_{BL_1}(Q_n(.),Q(.)) \longrightarrow 0$ <u>dans</u> $L^1(Y,\underline{\underline{Y}},\nu)$;

(e) <u>les</u> $Q_n(.,E)$ <u>sont</u> ν-<u>uniformément intégrables, et</u> $d_{BL_1}(Q_n,Q) \longrightarrow 0$ <u>en</u> ν-<u>mesure</u> (la seconde partie de cette condition revient à dire: les variables aléatoires Q_n à valeurs dans l'espace polonais $\mathcal{M}^+(E)$ muni de la topologie étroite convergent en ν-mesure vers la variable Q).

<u>Démonstration</u>. Pour toute $\varphi \in \tilde{B}$ on a, d'après (2.2), (3.5) et (3.6):

$$\mathrm{Var}_Y(\varphi\times(\mu_n-\mu)) = \sup_{g\in B(Y),|g|\le 1} |\nu[(Q_n\varphi - Q\varphi)\, g]|$$

et en choisissant $g=1$ si $Q_n\varphi \geq Q\varphi$, $g=-1$ sinon, on voit que $\mathrm{Var}_Y(\varphi\times(\mu_n-\mu)) = \nu[|Q_n\varphi - Q\varphi|]$. De même d'après (2.4), (3.4), (3.5) et (3.6), on a:

$$\|\mu_n - \mu\|_{1\otimes BL_1} = \nu[d_{BL_1}(Q_n,Q)].$$

Autrement dit, on a (b) = (A1), (c) = (A4) , et (d) = (A6) , d'où l'équivalence de (a), (b), (c), (d). Enfin $Q(.,1)$ est ν-intégrable (car μ est finie). On a $d_{BL_1}(Q_n,Q) \leq Q_n(E) + Q(E)$, et $Q_n(E) \leq Q(E) + d_{BL_1}(Q_n,Q)$, d'où l'équivalence (d)$\Longleftrightarrow$(e). ∎

II - MESURES VECTORIELLES

§4. Rappels sur les mesures vectorielles.

Dans cette partie, $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est un espace mesurable quelconque, et $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel muni d'une quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ pour laquelle il est complet. Nous supposerons aussi que c'est un C-espace (notion introduite par E. Thomas [9]): cela signifie que toute suite (z_n) de $\mathcal{E}$, telle que l'ensemble $\{\sum_{n\leq N} r_n z_n : N\in\mathbb{N}, |r_n|\leq 1\}$ soit borné dans $\mathcal{E}$, converge vers 0. Noter que si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace de probabilité, $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un C-espace quasi-normé complet pour tout $p\in[0,\infty[$.

Nous allons rappeler, sans aucune démonstration, les résultats essentiels concernant les mesures sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ à valeurs dans $\mathcal{E}$: pour les détails, le lecteur pourra se référer, par exemple, à Bichteler [2], [3] ou à Schwartz [8]. Signalons qu'ici, le terme "mesure" signifie "mesure σ-additive finie".

On appelle espace d'intégration sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ tout sous-espace vectoriel réticulé de $B(Y)$, contenant les constantes, et engendrant la tribu $\underline{\underline{Y}}$. On appelle mesure sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, à valeurs dans $\mathcal{E}$, la donnée d'un espace d'intégration S et d'une application linéaire $\mu : S \longrightarrow \mathcal{E}$ qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes:

(4.1) Si (g_n) est une suite uniformément bornée de S qui converge simplement vers 0, alors $\mu(g_n)\longrightarrow 0$.

$$(4.2)\begin{cases}\text{(i) L'ensemble } \{\mu(g) : g\in S,\ |g|\leq 1\} \text{ est borné dans } \mathcal{E},\\ \text{(ii) si } (g_n) \text{ est une suite de } S \text{ décroissant vers } 0, \text{ alors}\\ \quad \mu(g_n)\longrightarrow 0.\end{cases}$$

On note $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ l'espace des mesures. On verra ci-dessous qu'on peut toujours étendre une mesure à l'espace $B(Y)$, ce qui fait qu'on peut toujours choisir $S=B(Y)$ pour espace d'intégration: c'est pourquoi on note simplement par "μ" la mesure, sans mentionner l'espace d'intégration (cependant, nous utiliserons plus loin des espaces d'intégration qui ne sont pas égaux à $B(Y)$).

Passons donc à l'extension. Soit $\mu\in\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ et S un espace d'intégration quelconque, associé à μ. On pose

$$(4.3)\begin{cases} S_+^{\uparrow} = \{g=\lim\uparrow g_n :\ g_n\in S,\ g_n\geq 0\}\\ \|g\|_{L^1(\mu)} = \sup\{\|\mu(h)\|_{\mathcal{E}} :\ h\in S,\ |h|\leq g\} \quad \text{si } g\in S_+^{\uparrow}\\ \|g\|_{L^1(\mu)} = \inf\{\|h\|_{L^1(\mu)} :\ h\geq |g|,\ h\in S_+^{\uparrow}\} \quad \text{si } g \text{ est quelconque.}\end{cases}$$

On note $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace des fonctions g pour lesquelles il existe une suite (g_n) de S telle que $\|g-g_n\|_{L^1(\mu)} \longrightarrow 0$, et qui sont $\underline{\underline{Y}}$-mesurables (cette dernière exigence n'est pas habituelle, mais ici nous ne nous intéressons qu'aux fonctions $\underline{\underline{Y}}$-mesurables); la suite $\mu(g_n)$ converge alors dans $\mathcal{E}$ vers une limite, qui ne dépend pas de la suite (g_n) choisie, et qu'on note $\mu(g)$.

Comme d'habitude, on écrit $g=0$ μ-p.p. si $\|g\|_{L^1(\mu)}=0$, $L^1(\mu)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour la relation d'équivalence: $g=g'$ μ-p.p., et on identifie un élément de $\mathcal{L}^1(\mu)$ et sa classe d'équivalence dans $L^1(\mu)$.

Voici une liste de propriétés utiles:

(4.4) $\mathcal{L}^1(\mu) = \{g :\ g$ est $\underline{\underline{Y}}$-mesurable, et $\lim_{r\downarrow 0} \|r\,g\|_{L^1(\mu)} = 0\}$

(4.5) $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel réticulé contenant $B(Y)$ et complet pour la quasi-norme $\|\cdot\|_{L^1(\mu)}$.

(4.6) $L^1(\mu)$ est un espace d'intégration pour μ (c'est même le plus grand possible).

(4.7) Si $g \in L^1(\mu)$ et si h est $\underline{\underline{Y}}$-mesurable et vérifie $|h| \leq |g|$, alors $h \in L^1(\mu)$.

(4.8) $g \rightsquigarrow \mu(g)$ est continue de $L^1(\mu)$ dans $\mathcal{E}$.

(4.9) Si les g_n convergent simplement vers g, sont $\underline{\underline{Y}}$-mesurables, et sont majorées par une fonction intégrable, alors $g_n, g \in L^1(\mu)$, et $g_n \longrightarrow g$ dans $L^1(\mu)$, et $\mu(g_n) \longrightarrow \mu(g)$ dans $\mathcal{E}$.

(4.10) $$\|g\|_{L^1(\mu)} = \sup_{h\in B(Y),\,|h|\leq|g|} \|\mu(h)\|_{\mathcal{E}}.$$

(4.11) $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ est un espace vectoriel complet pour la quasi-norme suivante (quasi-norme de la <u>semi-variation</u>)

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(Y)} := \sup_{g\in B(Y),\,|g|\leq 1} \|\mu(g)\|_{\mathcal{E}} = \sup_{g\in B(Y),\,|g|\leq 1} \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

<u>§5. Mesures sur un produit.</u>

a) On considère maintenant la situation proposée dans l'introduction: $\tilde{Y} = Y\times E$, $\tilde{\underline{\underline{Y}}} = \underline{\underline{Y}}\otimes\underline{\underline{E}}$. On a d'une part l'espace $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$, d'autre part l'espace $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ et $\varphi \in L^1(\mu)$; pour toute $g \in B(Y)$ on pose

(5.1) $$\varphi\times\mu(g) = \mu(g\otimes 1\cdot\varphi)$$

D'après (4.10), il est clair que l'application linéaire $\varphi\times\mu$ ainsi définie sur l'espace d'intégration $S=B(Y)$ vérifie (4.1): on a donc défini une mesure $\varphi\times\mu\in\mathcal{M}_\xi(Y)$ (comparer à (2.1): c'est la même définition). Voici deux propriétés évidentes:

(5.2) $\varphi\in L^1(\mu)$, $\varphi(g\otimes 1)\in L^1(\mu)$ $\Longrightarrow$ $g\in L^1(\varphi\times\mu)$ et $\varphi\times\mu(g)=\mu(g\otimes 1.\varphi)$.

(5.3) $\varphi\in L^1(\mu)\Longrightarrow \|\varphi\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}\leq\|\varphi\|_{L^1(\mu)}$ (inégalité stricte en général).

Nous allons utiliser systématiquement les notations (1.2). De plus si $\tilde{D}$ est une partie de $\tilde{B}=B(\tilde{Y})$ on introduit les expressions suivantes (qui seront utilisées pour $\tilde{D}=\tilde{A}$, $\tilde{D}=1\otimes A$ et $\tilde{D}=B\otimes A$, avec $A(E)=B(E)$, $=C(E)$, $=BL_a(E)$):

(5.4) $\mu\in\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})\rightsquigarrow\|\mu\|_{\tilde{D}}=\sup_{\varphi\in\tilde{D},\,|\varphi|\leq 1}\|\varphi\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}$

(5.5) $\mu\in\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})$, φ mesurable sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$

$$\rightsquigarrow\quad\|\varphi\|_{\tilde{D}-\mu}=\sup_{\psi\in\tilde{D},\,|\psi|\leq|\varphi|}\|\psi\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}.$$

Remarquer que, <u>dès que</u> $\tilde{D}$ <u>contient</u> $1\otimes BL_1$ (c'est-à-dire, pour tous les ensembles $\tilde{D}$ utilisés ci-dessous), $\|.\|_{\tilde{D}}$ <u>est une quasi-norme</u> sur $\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})$: en effet si $\|\mu\|_{1\otimes BL_1}=0$ on a $(1\otimes f)\times\mu=0$ pour $f\in BL_1(E)$, donc $\mu(g\otimes f)=0$ pour $g\in B(\tilde{Y})$ et $f\in BL(E)$, donc $\mu(\varphi)=0$ pour $\varphi\in B\otimes BL$. Or $B\otimes BL$ est un espace d'intégration sur $(\tilde{Y},\tilde{\underline{\underline{Y}}})$, donc on en déduit que $\mu=0$.

Voici quelques résultats évidents:

(5.6) $\|\mu\|_{\tilde{B}}=\|\mu\|_{\mathcal{M}(\tilde{Y})}$, $\quad\|\varphi\|_{\tilde{B}-\mu}=\|\varphi\|_{L^1(\mu)}$

(5.7) Si $\tilde{D}$ est un $B(Y)$-module, alors $\|\mu\|_{\tilde{D}}=\sup_{\varphi\in\tilde{D},\,|\varphi|\leq 1}\|\mu(\varphi)\|_\xi$ et $\|\varphi\|_{\tilde{D}-\mu}=\sup_{\psi\in\tilde{D},\,|\psi|\leq|\varphi|}\|\mu(\psi)\|_\xi$.

(5.8) $|\varphi|\leq|\psi|\Longrightarrow\|\varphi\|_{\tilde{D}-\mu}\leq\|\psi\|_{\tilde{D}-\mu}$.

(5.9) Si r est une constante, on a $\|r\mu\|_{\tilde{D}}=\|r\|_{\tilde{D}-\mu}$.

b) Nous allons maintenant introduire une série de propriétés, qui semblent à première vue un peu compliquées, mais qui seront constamment utilisées dans la suite. $\tilde{D}$ est toujours une partie de $B(\tilde{Y})$, et on considère d'abord une partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})$.

(5.10) $\mathcal{L}$ est dite $\tilde{D}$-<u>bornée</u> si: $\lim_{r\downarrow 0}\sup_{\mu\in\mathcal{L}}\|r\mu\|_{\tilde{D}}=0$.

(5.11) $\mathcal{L}$ est dite $\tilde{D}$-<u>fortement bornée</u> ($\tilde{D}$-<u>f. bornée</u>) si pour toute suite (g_n) de $B(Y)$ décroissant vers 0, on a: $\lim_{(n)} \sup_{\mu\in\mathcal{L}} \|g_n\otimes 1\|_{\tilde{D}-\mu} = 0$.

(5.12) $\mathcal{L}$ est dite $\tilde{D}$-<u>uniformément tendue</u> ($\tilde{D}$-<u>u.t.</u>) si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K_ε de E tel que: $\sup_{\mu\in\mathcal{L}} \|1_{Y\times K_\varepsilon^c}\|_{\tilde{D}-\mu} \leq \varepsilon$.

On considère maintenant une famille filtrante (μ_α) de mesures de $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$, et on pose:

(5.13) (μ_α) est $\tilde{D}$-<u>asymptotiquement bornée</u> ($\tilde{D}$-<u>as. bornée</u>) si $\lim_{r\downarrow 0} \lim\sup_\alpha \|r\mu_\alpha\|_{\tilde{D}} = 0$.

(5.14) (μ_α) est $\tilde{D}$-<u>asymptotiquement fortement bornée</u> ($\tilde{D}$-<u>as. f. bornée</u>) si pour toute suite (g_n) de $B(Y)$ décroissant vers 0, on a: $\lim_{(n)} \lim\sup_\alpha \|g_n\otimes 1\|_{\tilde{D}-\mu_\alpha} = 0$.

(5.15) (μ_α) est $\tilde{D}$-<u>asymptotiquement uniformément tendue</u> ($\tilde{D}$-<u>as.u.t.</u>) si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K_ε de E tel que: $\lim\sup_\alpha \|1_{Y\times K_\varepsilon^c}\|_{\tilde{D}-\mu_\alpha} \leq \varepsilon$.

Bien entendu, toutes ces conditions sont d'autant plus fortes que la partie $\tilde{D}$ de $B(\tilde{Y})$ est grande. D'après (5.9), fortement borné entraine borné. Enfin si une famille filtrante est $\tilde{D}$-bornée (resp. $\tilde{D}$-f. bornée, resp. $\tilde{D}$-u.t.), elle est a-fortiori $\tilde{D}$-as. bornée (resp. $\tilde{D}$-as.f. bornée, resp. $\tilde{D}$-as.u.t.)

(5.16) THEOREME: <u>Toute famille finie de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$ <u>est</u> $\tilde{B}$-<u>f. bornée et</u> $\tilde{B}$-<u>u.t.</u>

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer le résultat pour une famille réduite à une seule mesure, soit μ. Que $\{\mu\}$ soit $\tilde{B}$-f. bornée découle de (5.6) et de (4.9).

Soit (x_i) une suite dense de E, et $\mathring{B}(x_i,r)$ la boule ouverte de centre x_i et de rayon r dans E. Soit $G_{np} = \bigcup_{i\leq p} \mathring{B}(x_i,\frac{1}{n})$. On a $\bigcup_{(p)} G_{np} = E$, donc d'après (4.9) $1_{Y\times G_{np}^c}$ tend vers 0 dans $L^1(\mu)$ quand $p\uparrow\infty$. Si $\varepsilon>0$ il existe alors $p_n\geq 1$ tel que

$$\|1_{Y\times G^c_{n,p_n}}\|_{L^1(\mu)} = \|1_{Y\times G^c_{n,p_n}}\|_{\tilde{B}-\mu} \leq \varepsilon . 2^{-n} .$$

On prend $K_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 1} \bar{G}_{n,p_n}$, qui est compact dans E car E est polonais, et qui vérifie $K^c \subset \bigcup_{n\geq 1} G^c_{n,p_n}$, donc $\|1_{Y\times K^c}\|_{\tilde{B}-\mu} \leq \varepsilon$. ∎

(5.17) COROLLAIRE: <u>Soit</u> $\tilde{D}\subset B(\tilde{Y})$. <u>Soit</u> (μ_n) <u>une suite de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$. <u>Alors la famille</u> (μ_n) <u>est</u> $\tilde{D}$-<u>bornée (resp.</u> $\tilde{D}$-<u>f. bornée, resp.</u> $\tilde{D}$-<u>u.t.) si et</u>

seulement si elle est $\tilde{D}$-as. bornée (resp. $\tilde{D}$-as. f. bornée, resp. $\tilde{D}$-as.u.t.) (ce n'est pas nécessairement vrai pour une famille filtrante).

Voici enfin un "théorème de Riesz":

(5.18) THEOREME: Pour qu'une application linéaire μ : $B\otimes BL \longrightarrow \mathcal{E}$ se prolonge en une mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$, il faut et il suffit que:

(i) si (g_n) est une suite de $B(Y)$ décroissant vers 0, on ait

$$\lim_{(n)} \sup_{\varphi \in B\otimes BL,\ |\varphi| \leq g_n \otimes 1} \|\mu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} = 0$$

(i.e., $\{\mu\}$ est $B\otimes BL$-f. bornée);

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de E tel que si $\varphi \in B\otimes BL$ vérifie $|\varphi| \leq 1_{Y\times K_\varepsilon^c}$ on ait $\|\mu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$ (i.e., $\{\mu\}$ est $B\otimes BL$-u.t.)

Ce théorème est à comparer à (2.8), dans lequel on pourrait remplacer $B\otimes C$ par $B\otimes BL$ sans rien changer. Il est facile de vérifier que si $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ et si μ est une application positive, les conditions de (2.8) et de (5.18) sont équivalentes. En fait, la simplicité de (2.8) vient plus de la positivité de ϕ que du fait que $\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

Démonstration. La nécessité découle immédiatement de (5.16). Supposons inversement qu'on ait (i) et (ii). L'espace $B\otimes BL$ est un espace d'intégration sur $(\tilde{Y}, \tilde{\underline{Y}})$, donc il suffit de vérifier qu'on a (4.2) avec $S = B\otimes BL$. En prenant $g_n = \frac{1}{n}$, on voit immédiatement que (i) entraine (4.2,i).

Pour vérifier (4.2,ii), on considère une suite (φ_n) de $B\otimes BL$ décroissant vers 0, et telle que $\varphi_n \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, et $K = K_\varepsilon$ le compact intervenant dans (ii). Si $y \in Y$ et $p \geq 1$, les ensembles $\{x \in K : \varphi_n(y,x) \geq 1/p\}$ sont fermés et décroissent vers l'ensemble vide quand $n \uparrow \infty$, donc ils sont vides pour n assez grand. Donc si

$$C(n,p) = \{y : \sup_{x \in K} \varphi_n(y,x) \geq \frac{1}{p}\}$$

on a: $\lim_{(n)} \downarrow C(n,p) = \emptyset$.

D'après (i) il existe p tel que $\|\mu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$ pour tout $\varphi \in B\otimes BL$ tel que $|\varphi| \leq 1/p$; d'après (i) encore il existe $N \geq 1$ tel que $\|\mu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$ pour tout $\varphi \in B\otimes BL$ tel que $|\varphi| \leq 1_{C(N,p)\times E}$. Par ailleurs, par définition de $C(n,p)$, on a

(5.19) $$\varphi_n \leq \frac{1}{p} + 1_{C(n,p)\times E} + 1_{Y\times K^c}.$$

Posons alors:

$$\varphi_n^1 = \varphi_n \wedge \frac{1}{p}, \quad \varphi_n^2 = (\varphi_n - \varphi_n^1) \wedge 1_{C(n,p)\times E}, \quad \varphi_n^3 = \varphi_n - \varphi_n^2 .$$

On a $\varphi_n^i \in B\otimes BL$. Comme $|\varphi_n^1| \leq 1/p$ on a $\|\mu(\varphi_n^1)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \varepsilon$. Comme $0 \leq \varphi_n^2 \leq 1_{C(n,p)\times E}$ on a $\|\mu(\varphi_n^2)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \varepsilon$ si $n \geq N$. Comme $0 \leq \varphi_n^3 \leq 1_{Y\times K^c}$ d'après (5.19), on a $\|\mu(\varphi_n^3)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \varepsilon$ d'après (ii). Par suite $\|\mu(\varphi_n)\|_{\mathfrak{Y}} \leq 3\varepsilon$ si $n \geq N$ et on en déduit que $\mu(\varphi_n) \longrightarrow 0$ dans $\mathfrak{Y}$. ∎

§6. Topologies sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{Y}}(\tilde{Y})$.

a) On va maintenant comparer diverses topologies sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{Y}}(\tilde{Y})$. Ces topologies sont caractérisées par la convergence des familles filtrantes. Afin de les définir on considère les conditions suivantes, portant sur une famille filtrante (μ_α) et une mesure μ de $\mathcal{M}_{\mathfrak{Y}}(\tilde{Y})$.

(A1) $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in \tilde{C}$

(A2) $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in \widetilde{BL}$

(A3) $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in 1\otimes C$

(A4) $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in 1\otimes BL$

(A5) $\|\mu_\alpha - \mu\|_{\widetilde{BL}_1} \longrightarrow 0$

(A6) $\|\mu_\alpha - \mu\|_{1\otimes BL_1} \longrightarrow 0$.

On remarque que lorsque $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}$, la condition (Ai) ci-dessus coïncide avec la condition (Ai) du théorème (2.5).

(6.1) DEFINITION: On note $\mathcal{T}_i$ <u>la topologie sur</u> $\mathcal{M}_{\mathfrak{Y}}(\tilde{Y})$ pour laquelle une famille filtrante (μ_α) converge vers μ si et seulement si elle vérifie (Ai). Si $\mathcal{L}$ est une partie de $\mathcal{M}_{\mathfrak{Y}}(\tilde{Y})$, on note $\bar{\mathcal{L}}^i$ son adhérence pour la topologie $\mathcal{T}_i$.

(6.2) THEOREME: a) <u>Si la famille</u> (μ_α) <u>est</u> $\widetilde{BL}$-<u>as. bornée et</u> $\widetilde{BL}$-<u>as. u.t., les conditions (A2), (A4), (A5), (A6), sont équivalentes</u>.

b) <u>Si la famille</u> (μ_α) <u>est</u> $\tilde{C}$-<u>as. bornée et</u> $\tilde{C}$-<u>as. u.t., les conditions (A1)-(A6) sont équivalentes</u>.

(6.3) REMARQUES: 1) On pourrait aussi montrer que si la famille (μ_α) est $B\otimes C$-as. bornée et $B\otimes C$-as. u.t., les conditions (A2)-(A6) sont équivalentes.

2) On pourrait également introduire une condition (A7) du même type que la condition (A7) de (2.5). Mais cette condition n'est équi-

valente aux autres que sous des conditions plus fortes, sans doute peu intéressantes dans les applications (sauf lorsque les mesures μ_α sont "positives", au sens où nous les introduirons dans le §7).∎

Les implications suivantes sont évidentes:

$$\begin{tikzcd} & A3 \arrow[dr] & \\ A1 \arrow[ur] \arrow[r] & A2 \arrow[r] & A4 \\ & A5 \arrow[u] \arrow[r] & A6 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Il suffit donc de montrer les lemmes (6.5) et (6.9) ci-dessous pour obtenir le théorème (6.2).

(6.5) LEMME: <u>Si la famille</u> (μ_α) <u>est</u> $\widetilde{BL}$-<u>as. bornée et</u> $\widetilde{BL}$-<u>as.u.t., on a</u> $(A4) \Longrightarrow (A5)$.

<u>Démonstration</u>. a) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un $n \geq 1$, un compact K de E, et un indice β tels que $\| \frac{1}{n} \mu_\alpha \|_{\widetilde{BL}} \leq \varepsilon$ et $\| 1_{Y \times K^c} \|_{\widetilde{BL}-\mu_\alpha} \leq \varepsilon$ pour $\alpha \succ \beta$. D'après (5.16) on peut aussi choisir n et K pour que ces inégalités soient vraies également pour μ. Donc

$$\varphi \in \widetilde{BL},\ |\varphi| \leq \frac{3}{n} + 2 \cdot 1_{Y \times K^c} \quad \Longrightarrow \quad \|\varphi \times \mu_\alpha\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq 5\varepsilon, \quad \|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq 5\varepsilon \tag{6.6}$$

pour $\alpha \succ \beta$: en effet soit $\varphi' = \varphi \wedge \frac{3}{n}$ et $\varphi'' = \varphi - \varphi'$; on a $\varphi' \in \widetilde{BL}$ et $|\varphi'| \leq 3/n$, donc $\|\varphi' \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq 3\varepsilon$; de même $\varphi'' \in \widetilde{BL}$ et $|\varphi''| \leq 2 \cdot 1_{Y \times K^c}$, donc $\|\varphi'' \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq 2\varepsilon$, et on a les mêmes inégalités pour μ_α, $\alpha \succ \beta$.

b) Soit (x_i) une suite dense de E. Soit $C_i = \bigcup_{1 \leq q \leq i} \mathring{B}(x_i, \frac{1}{n})$ et $A_1 = C_1$, $A_i = C_i \setminus C_{i-1}$ pour $i \geq 2$. Comme K est compact, il existe un $j \geq 1$ tel que $K \subset C_j$. Soit $f_i(x) = [1 - \frac{1}{n} d(x, B(x_i, \frac{1}{n}))]^+$; on a $f_i \in BL(E)$. Soit enfin $F = \{0,1,..,2n\}^j$. Si $(q_1,..,q_j) \in F$ on pose

$$h_{q_1,..,q_j}(x) = \sup_{i \leq j} \frac{q_i}{n} f_i(x).$$

On a $h_{q_1,..,q_j} \in BL(E)$. D'après (A2) il existe $\beta' \succ \beta$ tel que

$$\alpha \succ \beta' \Longrightarrow \begin{cases} \|1 \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq \varepsilon \\ \|(1 \otimes h_{q_1,..,q_j}) \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq \dfrac{\varepsilon}{(2n+1)^j} \end{cases} \tag{6.7}$$

c) Soit maintenant $\varphi \in \widetilde{BL}_1$. On pose

$$K_{iq} = \{y \in Y :\ 1 + \varphi(y, x_i) \in]\tfrac{q-1}{n}, \tfrac{q}{n}]\} \qquad (q = 0,1,..,2n)$$

$$\psi_i(y,x) = \sum_{0\le q\le 2n} \frac{q}{n} 1_{K_{iq}}(y)\otimes f_i(x)$$
$$\psi(y,x) = \sup_{i\le j} \psi_i(y,x) - 1 .$$

Soit $y\in K_{iq}$ et $x\in K$. Si $d(x,x_i)\le 1/n$ on a $f_i(x)=1$ et comme $\varphi(y,.)\in BL_1(E)$ on a $|\psi_i(y,x)-\varphi(y,x)-1|\le 2/n$; si $d(x,x_i)\ge 2/n$ on a $f_i(x)=0$ et $\psi_i(y,x)=0$; si enfin $1/n<d(x,x_i)<2/n$ on a $0<f_i(x)<1$ et $|\frac{q}{n}-\varphi(y,x)-1|\le 3/n$, donc $\psi_i(y,x)\le\varphi(y,x)+1+3/n$. D'après la définition de ψ, et comme $\bigcup_{0\le q\le 2n} K_{iq} = Y$, on en déduit que

(6.8) $$|\varphi-\psi| \le \frac{3}{n} + 2\cdot 1_{Y\times K^c} .$$

Par ailleurs pour $(q_1,..,q_j)\in F$ on pose $L_{q_1,..,q_j} = \bigcap_{i\le j} K_{i,q_i}$. On a alors
$$\psi(y,x) = \sum_{a\in F} 1_{L_a}(y)\otimes h_a(x) - 1 .$$

Enfin si $g\in B(Y)$, $|g|\le 1$, on a clairement $\|(g\otimes h)\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}\le \|(1\otimes h)\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}$. On déduit alors de (6.7) et de la définition de ψ que $\|\psi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 2\varepsilon$ pour $\alpha\succ\beta'$. Comme $\varphi-\psi\in\widetilde{BL}$ on a $\|(\varphi-\psi)\times\mu_\alpha\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 5\varepsilon$ pour $\alpha\succ\beta$ et $\|(\varphi-\psi)\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 5\varepsilon$, d'après (6.8) et (6.6). Donc finalement $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 12\varepsilon$ pour $\alpha\succ\beta'$. Comme ceci est vrai pour toute $\varphi\in\widetilde{BL}_1$, on en déduit que $\|\mu_\alpha-\mu\|_{\widetilde{BL}_1}\le 12\varepsilon$, d'où (A5). ∎

(6.9) LEMME: <u>Si la famille</u> (μ_α) <u>est</u> $\widetilde{C}$-<u>às. bornée et</u> $\widetilde{C}$-<u>as.u.t., on a</u> (A2) $\Longrightarrow$ (A1).

<u>Démonstration</u>. Soit $\varepsilon>0$. On montre exactement comme dans le lemme (6.4) qu'il existe un $n\ge 1$, un compact K de E, et un indice β, tels que

(6.10) $$\varphi\in\widetilde{C},\ |\varphi|\le\frac{1}{n}+2\cdot 1_{Y\times K^c} \longrightarrow \|\varphi\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 3\varepsilon ,\quad \|\varphi\times\mu_\alpha\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 3\varepsilon$$

pour $\alpha\succ\beta$. On reprend alors la démonstration de la partie (b) du théorème (2.5): on a les fonctions f_k, et si $\varphi\in\widetilde{C}$, $|\varphi|\le 1$, on pose

$$B_k = \{y\in Y:\ y\notin\bigcup_{1\le q\le k-1} B_q ,\ \sup_{x\in K}|\varphi(y,x)-f_k(x)|\le\frac{1}{n}\}.$$

On pose $\psi=\sum_{k\ge 1} 1_{B_k}\otimes f_k$, donc $\psi\in\widetilde{BL}$. D'après (A2) il existe $\beta'\succ\beta$ tel que $\|\psi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}\le\varepsilon$ pour $\alpha\succ\beta'$. Enfin $|\varphi-\psi|\le\frac{1}{n}+2\cdot 1_{Y\times K^c}$, donc d'après (6.10) on a $\|(\varphi-\psi)\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 3\varepsilon$ et $\|(\varphi-\psi)\times\mu_\alpha\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 3\varepsilon$ si $\alpha\succ\beta$. On en déduit que $\|\varphi\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)}\le 7\varepsilon$ pour $\alpha\succ\beta'$, d'où (A1). ∎

b) Le théorème (6.2) n'est pas vraiment satisfaisant: en effet les topologies $\mathcal{T}_i$, pour $i=1,..,6$, ne coïncident pas (les relations entre ces topologies se déduisent du tableau (6.4): une flèche de (Ai) vers (Aj) signifie que $\mathcal{T}_i$ est plus fine que $\mathcal{T}_j$). Toutefois, elles coïncident sur des sous-espaces suffisamment petits de $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$, comme nous allons le déduire du théorème (6.2). Commençons par un lemme:

(6.11) LEMME: <u>Soit</u> $\mathcal{X}$ <u>une partie de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$. <u>Dans les deux cas suivants:</u>

(i) $\tilde{A} = \tilde{C}$ <u>et</u> $i = 1$,

(ii) $\tilde{A} = \widetilde{BL}$ <u>et</u> $i = 1, 2, 5$,

<u>si</u> $\mathcal{X}$ <u>est</u> $\tilde{A}$-<u>bornée (resp.</u> $\tilde{A}$-<u>f. bornée, resp</u>. $\tilde{A}$-<u>u.t.), alors</u> $\bar{\mathcal{X}}^i$ <u>est</u> au <u>aussi</u> $\tilde{A}$-<u>bornée (resp</u>. $\tilde{A}$-<u>f. bornée, resp</u>. $\tilde{A}$-<u>u.t</u>.)

<u>Démonstration</u>. D'après le diagramme (6.4), il suffit dans (ii) de montrer le résultat pour $i = 2$. Si $\tilde{A}' \subset \tilde{B}$ on pose

$$g(\tilde{A}') = \sup_{\mu \in \mathcal{X}} \sup_{\varphi \in \tilde{A}'} \|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} .$$

Il suffit alors de montrer que si $\mu \in \bar{\mathcal{X}}^i$ on a aussi $\|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} \leq g(\tilde{A}')$, pour toute $\varphi \in \tilde{A}'$, dans les cas suivants:

$$\begin{cases} \text{pour } \tilde{A}\text{-borné, prendre } \tilde{A}' = \{\varphi \in \tilde{A}, |\varphi| \leq r\}, \text{ où } r > 0 \\ \text{pour } \tilde{A}\text{-f. borné, prendre } \tilde{A}' = \{\varphi \in \tilde{A}, |\varphi| \leq g \otimes 1\}, \text{ où } g \in B(Y), |g| \leq 1 \\ \text{pour } \tilde{A}\text{-u.t., prendre } \tilde{A}' = \{\varphi \in \tilde{A}, |\varphi| \leq 1_{Y \times K^c}\}, \text{ où } K \text{ est un compact de } E. \end{cases}$$

Mais si $\mu \in \bar{\mathcal{X}}^i$ il existe une famille filtrante (μ_α) de $\mathcal{X}$ qui converge vers μ pour $\mathcal{T}_i$, donc elle vérifie (Ai) et donc $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour $\varphi \in \tilde{A}$ (rappelons que $i = 1$ si $\tilde{A} = \tilde{C}$, et $i = 2$ si $\tilde{A} = \widetilde{BL}$). On en déduit que $\|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}(Y)} = \lim_\alpha \|\varphi \times \mu_\alpha\|_{\mathcal{M}(Y)}$, d'où le résultat. ∎

On déduit immédiatement de ce lemme et du théorème (6.2) que:

(6.12) THEOREME: a) <u>Si</u> $\mathcal{X}$ <u>est une partie</u> $\widetilde{BL}$-<u>bornée et</u> $\widetilde{BL}$-<u>u.t. de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$, <u>on a</u> $\bar{\mathcal{X}}^i = \bar{\mathcal{X}}^2$ <u>pour</u> $i = 4, 5, 6$ <u>et les topologies</u> $\mathcal{T}_i$ <u>coïncident sur</u> $\bar{\mathcal{X}}^2$ <u>pour</u> $i = 2, 4, 5, 6$.

b) <u>Si</u> $\mathcal{X}$ <u>est une partie</u> $\tilde{C}$-<u>bornée et</u> $\tilde{C}$-<u>u.t. de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$, <u>on a</u> $\bar{\mathcal{X}}^1 = \bar{\mathcal{X}}^i$ <u>pour</u> $i = 2, 3, 4, 5, 6$, <u>et les topologies</u> $\mathcal{T}_i$ <u>coïncident sur</u> $\bar{\mathcal{X}}^1$ <u>pour</u> $i = 1, .., 6$.

Voici enfin un théorème à comparer à (2.9), mais encore une fois beaucoup moins satisfaisant:

(6.13) THEOREME: <u>Soit</u> $\mathcal{X}$ <u>une partie</u> $\widetilde{BL}$-<u>f. bornée et</u> $\widetilde{BL}$-<u>u.t. de</u> $\mathcal{M}_\Sigma(\tilde{Y})$. <u>Alors</u> $\bar{\mathcal{X}}^2$ ($= \bar{\mathcal{X}}^4 = \bar{\mathcal{X}}^5 = \bar{\mathcal{X}}^6$) <u>est complet pour les quasi-normes</u> $\|\cdot\|_{\widetilde{BL}_1}$ <u>et</u> $\|\cdot\|_{1 \otimes BL_1}$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer le résultat pour $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$. D'après (6.11,ii), $\overline{\mathcal{X}}^2$ est aussi $\widetilde{BL}$-f. bornée et $\widetilde{BL}$-u.t., donc on peut supposer que $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}^2$.

Soit (μ_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{X}$ pour $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$. Si $f \in BL(E)$ la suite $((1\otimes f)\times\mu_n)$ est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{M}_\xi(Y)$ muni de la quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(Y)}$, donc d'après (4.11) elle converge pour cette quasi-norme vers une limite $\nu^f \in \mathcal{M}_\xi(Y)$. En particulier $\mu_n(g\otimes f) \longrightarrow \nu^f(g)$ dans ξ pour $g \in B(Y)$: donc si on pose $\mu(g\otimes f) = \nu^f(g)$ pour $g \in B(Y)$ et $f \in BL(E)$, on peut à l'évidence prolonger μ par linéarité à $B\otimes BL$ et on a $\mu_n(\varphi) \longrightarrow \mu(\varphi)$ dans ξ pour toute $\varphi \in B\otimes BL$.

Il suffit maintenant de montrer que μ se prolonge en une mesure de $\mathcal{M}_\xi(\tilde{Y})$. Comme $\mathcal{X}$ est $\widetilde{BL}$-f. bornée et $\widetilde{BL}$-u.t., la même démonstration que pour le lemme (6.11), avec $\tilde{A} = B\otimes BL$, montre que μ satisfait les conditions du théorème (5.18), donc admet le prolongement souhaité (pour appliquer la preuve de (6.11), il faut pouvoir écrire que $\|\varphi\times(\mu_n - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour $\varphi \in B\otimes BL$; mais comme $\nu^f \in \mathcal{M}_\xi(Y)$ pour toute $f \in BL(E)$, il est facile de voir que $\varphi\times\mu(g) = \mu(g\otimes 1\cdot\varphi)$ définit une mesure $\varphi\times\mu \in \mathcal{M}_\xi(Y)$; de plus $\|\nu^f - (1\otimes f)\times\mu_n\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$, donc on en déduit que $\|\varphi\times(\mu_n - \mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$). ∎

<u>§7. Mesures vectorielles positives</u>.

a) Dans ce paragraphe, nous ajoutons une hypothèse supplémentaire sur l'espace ξ. Cette hypothèse est encore vérifiée par les espaces $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ pour $p \in [0,\infty[$.

(7.1) <u>Hypothèse</u>. ξ est réticulé; le cône positif de ξ est fermé; si $a,b \in \xi$ vérifient $|a| \le |b|$ on a $\|a\|_\xi \le \|b\|_\xi$. ∎

On note alors $\mathcal{M}^+_\xi(Y)$ l'ensemble des <u>mesures positives</u> sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ (et de même $\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$), c'est-à-dire des mesures $\eta \in \mathcal{M}_\xi(Y)$ qui vérifient:

(7.2) $$g \in L^1(\eta),\ g \ge 0 \Longrightarrow \eta(g) \ge 0 \ \text{(dans } \xi\text{)}.$$

On a alors les propriétés évidentes suivantes:

(7.3) $\eta \in \mathcal{M}^+_\xi(Y)$, $g \in L^1(\eta) \longrightarrow |\eta(g)| \le \eta(|g|)$ et $\|g\|_{L^1(\eta)} = \|\eta(|g|)\|_\xi$.

(7.4) $\eta \in \mathcal{M}^+_\xi(Y) \Longrightarrow \|\eta\|_{\mathcal{M}(Y)} = \|\eta(1)\|_\xi$.

(7.5) $\mu \in \mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$, $\varphi \in L^1(\mu)$, $\varphi \ge 0 \Longrightarrow \varphi\times\mu \in \mathcal{M}^+_\xi(Y)$, $\|\varphi\times\mu\|_{\mathcal{M}(Y)} = \|\varphi\|_{L^1(\mu)}$.

(7.6) Pour toute partie $\tilde{D}$ de $\tilde{B}$ contenant la fonction 1, on a pour

$\mu\in\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$: i) $\|\mu\|_{\tilde{D}} = \|\mu\|_{\mathcal{M}(\tilde{Y})} = \|\mu(1)\|_\xi$

ii) si $\varphi\in\tilde{D}$, $\|\varphi\|_{\tilde{D}-\mu} = \|\varphi\|_{L^1(\mu)} = \|\mu(|\varphi|)\|_\xi$

iii) si les fonctions de $\tilde{D}$ engendrent la tribu $\underline{\underline{\tilde{Y}}}$, on a $\|\varphi\|_{\tilde{D}-\mu} = \|\varphi\|_{L^1(\mu)} = \|\mu(|\varphi|)\|_\xi$ pour toute fonction mesurable φ.

Ainsi, si on considère une famille filtrante (μ_α) et une mesure μ de $\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$, il n'y a pas lieu de distinguer: $\widetilde{BL}$-a.s. borné ou $\widetilde{BL}$-as.u.t., d'avec $\tilde{C}$-as. borné ou $\tilde{C}$-as.u.t. Donc les deux parties (a) et (b) du théorème (6.2) (resp. du théorème (6.12)) se confondent.

Mais en fait, on peut faire beaucoup mieux. Introduisons la condition supplémentaire suivante:

(A7) $\quad \| 1_{Y\times C}\times(\mu_\alpha-\mu)\|_{\mathcal{M}(Y)} \longrightarrow 0$ pour tout $C\in\underline{\underline{E}}$ avec $\mu(Y\times\partial C)=0$.

(7.7) THEOREME: <u>Si les</u> μ_α <u>et</u> μ <u>sont dans</u> $\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$, <u>alors</u>

a) <u>les comditions (A2)-(A7) sont équivalentes</u>;

b) <u>les conditions (A1)-(A7) sont équivalentes si la famille filtrante est une suite, ou bien si elle est asymptotiquement uniformément tendue, au sens où pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>il existe un compact</u> K_ε <u>de</u> E <u>tel que</u> $\limsup_\alpha \|\mu_\alpha(1_{Y\times K^c_\varepsilon})\|_\xi \le \varepsilon$ (ce qui revient à dire qu'elle est $\tilde{D}$-as.u.t. pour $\tilde{D}=\widetilde{BL}$, ou pour $\tilde{D}=\tilde{C}$, ou pour $\tilde{D}=1\otimes BL$, comme on veut).

<u>Démonstration</u>. Il suffit de reprendre textuellement la preuve du théorème (2.5), en remplaçant "Var_Y" par "$\|\cdot\|_{\mathcal{M}(Y)}$", et en remplaçant toutes les inégalités du type $|\mu(\varphi)|\le\varepsilon$ ou $|(\mu-\mu_\alpha)(\varphi)|\le\varepsilon$ par $\|\mu(\varphi)\|_\xi\le\varepsilon$ ou par $\|(\mu_\alpha-\mu)(\varphi)\|_\xi\le\varepsilon$. Il y a seulement deux points nouveaux:

1) la propriété suivante, qui intervient au début des preuves des implications (A7)$\Longrightarrow$(A5) et (A7)$\Longrightarrow$(A3):

(7.8) Si (A_s) est une famille de parties disjointes deux-à-deux, mesurables, on a $\mu(A_s)\ne 0$ pour au plus une infinité dénombrable de valeurs de s.

Mais comme $\mu\in\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$, la dernière partie de (7.1) permet de montrer (7.8) exactement comme dans le cas des mesures réelles.

2) Le fait que toute <u>suite</u> vérifiant les conditions équivalentes (A2)-(A7) est asymptotiquement uniformément tendue (et même, uniformément tendue). Cela découle du lemme suivant, qui sera encore utilisé plus loin. ■

(7.9) LEMME: <u>Toute suite de Cauchy</u> (μ_n) <u>dans</u> $\mathcal{M}^+_\xi(\tilde{Y})$ <u>pour l'une des quasi-</u>

normes $\|\cdot\|_{\widetilde{BL}_1}$ ou $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$ est uniformément tendue, au sens où pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K_ε de E tel que: $\sup_n \|\mu_n(1_{Y\times K_\varepsilon^c})\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$. Soit (x_i) une suite dense dans E et $G_{np} = \bigcup_{1\leq i\leq p} \overset{\circ}{B}(x_i,1/n)$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon>0$ fixés. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\|\mu_m-\mu_N\|_{1\otimes BL_1} \leq \varepsilon/4n$ si $m\geq N$; il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que si $B=G_{n,k}$ et $B'=G_{2n,k}$, on ait $\|\mu_m(Y\times B'^c)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon/2$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. Soit $f(x) = 1-1\bigwedge[2n\, d(x,B^c)]$. Il est clair que $f/2n \in BL_1(E)$, donc $\|\mu_m(1\otimes f)-\mu_N(1\otimes f)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon/2$ si $m\geq N$; il est clair aussi que $1_{B^c} \leq f \leq 1_{B'^c}$. Par suite si $m\geq N$ on a

$$\begin{aligned}\|\mu_m(Y\times B^c)\|_{\mathcal{E}} \leq \|\mu_m(1\otimes f)\|_{\mathcal{E}} &\leq \|\mu_N(1\otimes f)\|_{\mathcal{E}} + \|(\mu_N-\mu_m)(1\otimes f)\|_{\mathcal{E}}\\ &\leq \|\mu_N(Y\times B'^c)\|_{\mathcal{E}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \leq \quad \varepsilon,\end{aligned}$$

tandis que si $m\leq N$ on a:

$$\|\mu_m(Y\times B^c)\|_{\mathcal{E}} \leq \|\mu_m(Y\times B'^c)\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\varepsilon>0$, il existe k tel que $\|\mu_m(Y\times G^c_{nk})\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. Il existe donc $p_n\in\mathbb{N}$ tel que $\|\mu_m(Y\times G^c_{n,p_m})\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon.2^{-n}$. On pose alors $K_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 1}\overline{G}_{n,p_n}$, qui est compact car E est polonais, et qui vérifie $\|\mu_m(Y\times K_\varepsilon^c)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. ∎

Le théorème (6.12) devient:

(7.10) THEOREME: a) Les topologies $\mathcal{T}_i$ coïncident sur $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}(\widetilde{Y})$ pour $i = 2,3,4,5,6$.

b) Si $\mathcal{X}$ est une partie uniformément tendue (au sens de (7.9)) de $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}(\widetilde{Y})$, les topologies $\mathcal{T}_i$ coïncident sur $\overline{\mathcal{X}}^1$ pour $i=1,..,6$.

b) Le théorème suivant achève de montrer qu'on a en fait les mêmes résultats pour les mesures positives vectorielles que pour les mesures positives scalaires.

(7.11) THEOREME: L'espace $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}(\widetilde{Y})$ est complet pour les quasi-normes $\|\cdot\|_{\widetilde{BL}_1}$ et $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$. Soit (μ_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}(\widetilde{Y})$ pour cette quasi-norme. Reprenons d'abord la preuve de (6.13): on construit une application linéaire μ: $B\otimes BL \longrightarrow \mathcal{E}$, qui est clairement positive car $\mu_n(\varphi) \longrightarrow \mu(\varphi)$ dans $\mathcal{E}$

pour toute $\varphi \in B\otimes BL$.

Il reste à montrer que μ vérifie les conditions de (5.18). Soit d'abord (g_n) une suite de $B(Y)$ décroissant vers 0 , et telle que $g_n \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq 1$ tel que $\|\mu_m - \mu_N\|_{1\otimes BL_1} \leq \varepsilon$ pour $m \geq N$; il existe $p \geq 1$ tel que $\|\mu_N(g_p \otimes 1)\|_{\xi} \leq \varepsilon$. Par définition de $\|\cdot\|_{1\otimes BL_1}$ on voit que si $n \geq N$ on a

$$\|\mu_n(g_p \otimes 1)\|_{\xi} \leq \|\mu_N(g_p \otimes 1)\|_{\xi} + \|\mu_N - \mu_n\|_{1\otimes BL_1} \leq 2\varepsilon .$$

En passant à la limite, on obtient $\|\mu(g_p \otimes 1)\|_{\xi} \leq 2\varepsilon$. D'après la positivité de μ, on en déduit qu'on a (5.18,i).

Par ailleurs la suite (μ_n) est uniformément tendue d'après le lemme (7.9): soit K_ε le compact associé à $\varepsilon > 0$ dans ce lemme. Si $\varphi \in B\otimes BL$ vérifie $|\varphi| \leq 1_{Y\times K_\varepsilon^c}$ on a $\|\mu_m(\varphi)\|_{\xi} \leq \varepsilon$ pour tout m , et comme $\mu_m(\varphi)$ converge vers $\mu(\varphi)$ dans ξ on en déduit que $\|\mu(\varphi)\| \leq \varepsilon$. Donc (5.18,ii) est vérifié. ∎

BIBLIOGRAPHIE

1 A. ARAUJO, E. GINE: The central limit Theorem for real and Banach valued random variables. Wiley, New York: 1980.

2 K. BICHTELER: Integration Theory. Lect. Notes in Math. 315, 1973.

3 K. BICHTELER: Function norms and function metrics satisfying the dominated convergence theorem and their applications. A paraitre, (1981).

4 K. BICHTELER, J. JACOD: Random measures and Stochastic Integration. A paraitre dans: Proc. IFIP-ISI Conference, Bangalore; ed. by Kallianpur, 1982.

5 P. BILLINGSLEY: Convergence of Probability measures. Wiley, New York: 1968.

6 J. JACOD, J. MEMIN: Sur un type de convergence intermédiaire entre convergence en loi et convergence en probabilité. Sém. Proba. XV, Lect. Notes in Math. 850, 529-546, 1981.

7 K.R. PARTHASARATHY: Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York: 1967.

8 L. SCHWARTZ: Les semimartingales formelles. Sém. Proba XV, Lect. Notes in Math. 850, 413-489, 1981.

9 E. THOMAS: On Radon maps with values in arbitrary topological vector spaces, and their integral extensions. Preprint, Dept. Math. Yale Univ. 1877.