PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

YVES GUIVARC'H

ALBERT RAUGI

Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 2, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___1_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FRONTIERE DE FURSTENBERG. PROPRIETES DE CONTRACTION ET THEOREMES DE CONVERGENCE.

Yves GUIVARC'H et Albert RAUGI

1. PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

Nous donnons ci-dessous une description des décompositions d'Iwasawa, de Bruhat et polaire, d'un groupe de Lie semi-simple. Cette description résume des résultats classiques, exposés, par exemple, dans [5].

Soit G un groupe de Lie ayant $(\mathfrak{g},[.])$ pour algèbre de Lie. Nous appelons ad la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\operatorname{ad} X(Y) = [X,Y]$, $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$). Nous disons que G [resp. $\mathfrak{g}$] est semi-simple si la forme de Killing

$$B(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y) \ , \ (X,Y \in \mathfrak{g}),$$

est non dégénérée.

(1.1) Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple il existe des décompositions $\mathfrak{g} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$ de $\mathfrak{g}$ en la somme directe d'une sous-algèbre $\mathcal{K}$ et d'un semi-espace $\mathcal{P}$ vérifiant :

i) $[\mathcal{K},\mathcal{K}] \subset \mathcal{K}$, $[\mathcal{K},\mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$, $[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subset \mathcal{K}$

ii) La restriction de la forme de Killing à $\mathcal{K}$ [resp. à $\mathcal{P}$] est définie négative (resp. définie positive). $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux pour B.

Ces décompositions sont dites de Cartan.

[Par exemple si $\mathfrak{g} = s\ell\,(d,K) = \{$ matrices carrées d'ordre d à coefficients dans K $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de trace nulle$\}$, ou plus généralement si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple <u>auto-adjointe</u> de matrices (i.e. $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow {}^t\overline{X} \in \mathfrak{g}$), alors la décomposition d'une matrice en la somme d'une matrice antihermitienne et d'une matrice hermitienne est une décomposition de Cartan].

Du fait que la forme de Killing est définie négative sur $\mathcal{K} \oplus i\,\mathcal{P}$, il résulte que l'algèbre de Lie de matrices $\mathrm{ad}(\mathcal{K} \oplus i\,\mathcal{P})$ est la conjuguée par un élément de $GL(\dim \mathcal{G}, \mathbb{C})$ d'une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes. Autrement dit, il existe une base de la complexifiée $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{G}$ dans laquelle les matrices $\mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathcal{K}$ (resp. $X \in \mathcal{P}$) sont antihermitiennes (resp. hermitiennes).

Choisissons une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{P}$. Il existe alors une base de $\mathcal{G}$ dans laquelle les matrices de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ sont diagonales. Les éléments diagonaux de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ définissent des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{a}$ appelées racines.

Appelons Δ l'ensemble des racines et, pour tout $\alpha \in \Delta$, posons $\mathcal{G}_\alpha = \{X \in \mathcal{G} : \mathrm{ad}\, H(X) = \alpha(H)\, X,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}$; nous obtenons la décomposition $\mathcal{G} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_\alpha$.

Appelons σ l'automorphisme involutif de $\mathcal{G}$ défini par $\sigma(X) = X$, si $X \in \mathcal{P}$ et $\sigma(X) = -X$ si $X \in \mathcal{K}$. On vérifie facilement que :

i) si $\alpha \in \Delta$, alors $(-\alpha) \in \Delta$ et $\mathcal{G}_{(-\alpha)} = \sigma(\mathcal{G}_\alpha)$

ii) $\mathcal{G}_0 = \mathcal{M} \oplus \mathfrak{a}$, où $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{K} : [X,\mathfrak{a}] = (0)\}$.

Soit $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ où aucune racine de $\Delta - \{0\}$ ne s'annule. Les composantes connexes de $\mathfrak{a}'$ (en nombre fini) sont les <u>chambres de Weyl</u>. Choisissons une chambre de Weyl W et notons Δ_-, [resp Δ_+] l'ensemble des racines, non nulles, négatives [resp. positives] sur W.

Posons $\mathcal{N} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathcal{G}_\alpha$ et $\tilde{\mathcal{N}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathcal{G}_{(-\alpha)} = \sigma(\mathcal{N})$.

Des inclusions,

$$\forall \alpha, \beta \in \Delta,\ [\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] \subset \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$$

(avec la convention $\mathcal{G}_{\alpha+\beta} = (0)$ si $\alpha+\beta \notin \Delta$), il résulte que $\mathcal{N}$ et $\tilde{\mathcal{N}}$ sont des sous-algèbres de Lie <u>nilpotentes</u> de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}$ sont des sous-algèbres de Lie <u>résolubles</u> de $\mathfrak{g}$ et nous avons

$$\mathfrak{n} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}], \quad \tilde{\mathfrak{n}} = [\mathfrak{a}, \tilde{\mathfrak{n}}].$$

On obtient alors pour $\mathfrak{g}$ les décompositions, dites "d'Iwasawa", $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}$. La seconde se déduisant de la première par l'automorphisme σ.

Ces décompositions dépendent des choix : de la décomposition de Cartan ; du sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ et de la chambre de Weyl W. On montre que deux décompositions d'Iwasawa se déduisent par un automorphisme intérieur.

D'autre part, nous obtenons aussi la décomposition dite "de Bruhat" :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{m}.$$

(1.2) Désignons par N, $\tilde{N}$, A et K les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathfrak{n}$, $\tilde{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k}$ pour algèbre de Lie. N et $\tilde{N}$ sont des sous-groupes nilpotents simplement connexes de G. A est un sous-groupe abélien simplement connexe de G, donc isomorphe à $(\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{a}}, +)$. K contient le centre discret Z(G) de G et le quotient K/Z(G) est un groupe compact.

Appelons Ad la représentation adjointe de G. Soient $\alpha \in \Delta$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $a \in A$; écrivons $a = \exp H$ avec $H \in \mathfrak{a}$, nous avons

$$\mathrm{Ad}\, a(X) = \mathrm{Ad}(\exp H)\,(X) = \mathrm{Exp\ ad}\, H(X) = e^{\alpha(H)}\, X\ ;$$

autrement dit,

$$\mathrm{Ad}\, a(X) = \varphi_\alpha(a)\, X,$$

où φ_α est un homomorphisme de A dans $\mathbb{R}_+$.

Appelons M (resp. M') le centralisateur (resp. le normalisateur) de A dans K. M et M' sont des sous-groupes fermés de G ayant $\mathfrak{m}$ pour algèbre de Lie. Comme M et M' contiennent le centre Z(G) de G et comme K/Z(G) est compact, M'/M est un groupe fini, appelé le groupe de Weyl. Chaque élément de M' permute les chambres de Weyl. Le groupe de Weyl opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres de Weyl.

Ceci dit nous avons pour G les décompositions suivantes :

1) <u>Décomposition d'Iwasawa de G</u>. $G = NAK$ (ou $G = KAN$, $\tilde{N}AK$, $KA\tilde{N}$)

L'application qui au triplet (n,a,k) associe le produit nak est un isomorphisme de variétés analytiques de $N \times A \times K$ sur G.

2) <u>Décomposition polaire de G</u>. $G = K \exp \overline{W} K$

Tout élément g de G s'écrit $k_1 \exp a\, k_2$, avec $k_1, k_2 \in K$ et $a \in \overline{W}$ (fermeture de la chambre de Weyl W dans $\mathfrak{a}$). L'élément a est déterminé de façon unique. Lorsque $a \in W$, les autres décompositions de g s'obtiennent en remplaçant le couple (k_1,k_2) par $(k_1 m, m^{-1} k_2)$ avec $m \in M$.

3) <u>Décomposition de Bruhat de G</u>. $G = \bigcup_{m\in M'/M} Nm\tilde{N}AM$

$$(\text{ou } G = \bigcup_{m\in M'/M} Nm\, NAM = \bigcup_{m\in M'/M} \tilde{N}m\, NAM = \bigcup_{m\in M'/M} \tilde{N}m\, \tilde{N}AM)$$

Choisissons des représentants m_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, dans M' des éléments de M'/M. Alors G est la réunion disjointe des sous-variétés $Nm_i\tilde{N}AM$, $1 \leqslant i \leqslant s$. $N\tilde{N}AM$ est une sous-variété ouverte de G et les autres sont des sous-variétés de dimensions strictement plus petites. L'application qui au quadruplet $(u,\tilde{u},a,\gamma)$ associe le produit $u\tilde{u}a\gamma$ est un isomorphisme de variété analytique de $N \times \tilde{N} \times A \times M$ sur l'ouvert $N\tilde{N}AM$ de G.

Pour tout $m \in M'$, nous avons

$$(m^{-1} Nm) = [(m^{-1} Nm) \cap N][(m^{-1} Nm) \cap \tilde{N}] ;$$

et par suite

$$Nm\, A\tilde{N}M = m\, [(m^{-1} Nm) \cap N]\, A\tilde{N}M = (N \cap m N m^{-1})\, m\, A\tilde{N}M.$$

Le groupe nilpotent $(m^{-1}\,Nm) \cap N$ admet pour algèbre de Lie

$$\bigoplus_{\{\alpha \in \Delta_- : \alpha \circ \mathrm{Ad}m \in \Delta_-\}} \mathfrak{g}_\alpha \quad .$$

Par suite $(m^{-1}\,Nm) \cap N = N \iff \alpha \circ \mathrm{Ad}m \in \Delta_-,\ \forall \alpha \in \Delta_- \iff m \in M.$

Lorsque m envoie Δ_- sur Δ_+ (i.e. lorsque m correspond à l'élément du groupe de Weyl qui envoie W dans (-W)), nous avons $(m^{-1}\,Nm) \cap N = \{e\}$ et $Nm\,A\tilde{N}M = m\,A\tilde{N}M$.

Dans la suite nous noterons m_s un représentant dans M' de l'élément de groupe de Weyl qui envoie W sur (-W).

(1.3) <u>Exemple</u>.

<u>$G=SL(d,\mathbb{R})$</u> N = {matrices triangulaires supérieures réelles à éléments diagonaux égaux à 1}

$\tilde{N}$ = {matrices triangulaires inférieures réelles à éléments diagonaux égaux à 1}

A = {matrices diagonales à coefficients strictement positifs, de déterminant 1}

K = SO(d) = {matrices orthogonales de déterminant 1}

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_d \end{pmatrix} : \varepsilon_i = \pm 1 \ ,\ \prod_{i=1}^{d} \varepsilon_i = 1 \right\}$$

<u>Décomposition d'Iwasawa</u> : G = NAK (ou KAN)

<u>Décomposition polaire</u> : $G = K \,\mathrm{Exp}\, \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x_d \end{bmatrix} : \sum_{i=1}^{d} x_i = 0,\ x_1 \leq \ldots \leq x_d \right\} K$

<u>Décomposition de Bruhat</u> : • pour <u>d = 2</u>, $M' = \{\pm I, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$,

d'où $G = N\,\tilde{N}AM + N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM = N\,\tilde{N}AM + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM$

$N\,\tilde{N}AM = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : d \neq 0\}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : d = 0\}$.

• <u>pour d = 3</u>, le groupe de Weyl admet les représentants suivants dans M' :

$$\{I, m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\quad m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,$$

$$m_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}.$$

On vérifie que :

$$N\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{33} \neq 0 \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\}$$

$$Nm_2\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij}) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{33} = 0 \text{ et } \Delta \neq 0\}$$

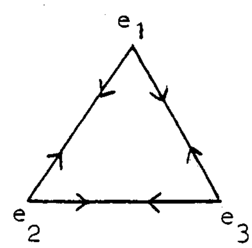
$$Nm_3\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{33} \neq 0 \text{ et } \Delta = 0\}$$

$$Nm_4\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{33} = a_{23} = 0,\; a_{32} \neq 0\}$$

$$Nm_5\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{32} = a_{33} = 0,\; a_{23} \neq 0\}$$

$$Nm_6\,A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) \;:\; a_{32} = a_{33} = a_{23} = 0\} = m_6\,A\tilde{N}M.$$

Ces parties de G, en projection sur $G/A\tilde{N}M$ sont des orbites de N et elles s'interprètent géométriquement comme suit. Comme $A\tilde{N}M$ est le stabilisateur du couple des sous-espaces engendrés par e_3 seul et (e_3, e_2) , l'espace homogène $G/A\tilde{N}M$ est l'espace des drapeaux de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des couples formés de deux sous-espaces emboités de dimension 1 et 2. D'autre part, l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$ n'est autre que le plan projectif $\mathbb{P}^2$ et $G/A\tilde{N}M$ s'identifie donc également à l'ensemble des éléments de contact à $\mathbb{P}^2$, c'est-à-dire des couples $(x, [x,y])$ formés par un point $x \in \mathbb{P}^2$ et une droite passant par ce point et notée $[x,y]$. Alors, en notant de la même façon vecteurs et points correspondants de $\mathbb{P}^2$, les éléments m_i du groupe de Weyl se projettent suivant les 6 éléments de contact



$(e_3,[e_3,e_2])$, $(e_3,[e_3,e_1])$, $(e_2,[e_2,e_3])$

$(e_2,[e_2,e_1])$, $(e_1,[e_1,e_3])$, $(e_1,[e_1,e_2])$

dont les orbites sous N sont respectivement :

- tous les éléments de contact d'origine extérieure à la droite $[e_1,e_2]$ et ne passant pas par e_1 (dim 3)

- tous les éléments de contact passant par e_1 mais d'origine non située sur $[e_1,e_2]$ (dim 2)

- tous les éléments de contact d'origine sur $[e_1,e_2]$ mais ne passant pas par e_1 (dim 2)

- tous les éléments de contact passant par e_1 mais distincts de $(e_1,[e_1,e_2])$

- tous les éléments de contact d'origine e_1 mais distincts de $(e_1,[e_1,e_2])$

- l'élément de contact $(e_1,[e_1,e_2])$.

(1.4) Les groupes NAM (ou $\tilde{N}AM = m_s\, NAM\, m_s^{-1}$) de la section (1.2) sont des sous-groupes fermés moyennables de G : en effet NAM est une extension compacte du groupe résoluble NAZ(G). Comme deux décompositions d'Iwasawa de G se déduisent par un automorphisme intérieur, ces groupes s'obtiennent, à partir de l'un d'eux, par conjugaison. En fait nous savons ([2] théorème (1.10)) que ces groupes sont des sous-groupes moyennables <u>maximaux</u> de G.

(1.5) <u>Définition</u>. Nous appelons sous-groupe parabolique de G, tout sous-groupe fermé de G contenant un des sous-groupes NAM.

(1.6) Donnons-nous une décomposition d'Iwasawa G = NAK de G et le sous-groupe moyennable maximal NAM correspondant.

D'après ([1], § 11), nous savons que les sous-groupes fermés de G contenant NAM sont les sous-groupes P_Θ définis de la façon suivante.

Désignons par Δ_- l'ensemble des racines qui ont servi à définir N ; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_-. [Rappelons qu'une racine de Δ_- est simple si elle n'est pas la somme de deux racines de Δ_- ; tout élément de Δ_- est alors, de façon unique, une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de racines simples].

Soit Θ un sous-ensemble de Σ ; posons $A_\Theta = \{a \in A : \varphi_\alpha(a) = 1, \forall\alpha \in \Theta\}$ et appelons K_Θ le centralisateur de A_Θ dans K ; alors P_Θ est le sous-groupe parabolique $K_\Theta AN = NAK_\Theta$. L'application $\Theta \longrightarrow P_\Theta$ est visiblement croissante et de plus $P_\Theta \cap P_{\Theta'} = P_{\Theta\cap\Theta'}$, $P_\emptyset = M$, $P_{\Delta_-} = G$.

Notons $[\Theta]$ le sous-ensemble des racines de Δ qui sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de racines de Θ ; l'algèbre de Lie de P_Θ est alors $\bigoplus_{\alpha\in[\Theta]\cup\Delta_-} \mathcal{G}_\alpha$.

Tout sous-groupe parabolique de G est donc un conjugué d'un des sous-groupes paraboliques standard P_Θ, $\Theta \subset \Sigma$. En outre, tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur.

Nous notons $\tilde{P}_\Theta$ le sous-groupe parabolique $K_\Theta \tilde{A}\tilde{N} = \tilde{N}AK_\Theta$. L'algèbre de Lie de $\tilde{P}_\Theta$ est $\bigoplus_{\alpha\in[\Theta]\cup\Delta_+} \mathcal{G}_\alpha$.

Nous avons

$$G = \bigcup_{m\in M'/M'_\Theta} Nm\,\tilde{P}_\Theta \quad (= \bigcup_m Nm\,P_\Theta = \bigcup_m \tilde{N}m\,P_\Theta = \bigcup_m \tilde{N}m\,\tilde{P}_\Theta),$$

où $M'_\Theta = M' \cap K_\Theta$. La sous-variété $Nm\,\tilde{P}_\Theta$ s'écrit aussi $m\,N^{m,\Theta}\,\tilde{P}_\Theta$, où $N^{m,\Theta}$ est le sous-groupe de Lie connexe de N ayant $\bigoplus_{\alpha\in(\Delta_- \circ \mathrm{Ad}m)\cap\complement[\Theta]\cap\Delta_-} \mathcal{G}_\alpha$ pour algèbre de Lie.

L'application qui au couple (u,p) associe le produit up est un isomorphisme de variétés analytiques de $N^{e,\Theta} \times \tilde{P}_\Theta$ sur l'ouvert $N^{e,\Theta}\,\tilde{P}_\Theta$ de G.

(1.7) Considérons une décomposition de Bruhat de G, soit

$$G = \bigcup_{m \in M'/M} Nm\,\tilde{N}AM.$$

Pour tout $m \in M'/M$, appelons W_m la fermeture de la sous-variété $Nm\,\tilde{N}AM$ dans G. W_m est la réunion de $Nm\,\tilde{N}AM$ et d'une réunion W'_m de sous-variétés $Nm'\,\tilde{N}AM$, $m' \in M'/M$, de dimensions strictement plus petites que celle de $Nm\,\tilde{N}AM$. $Nm\,\tilde{N}AM$ est un ouvert de W_m, pour la topologie induite.

Pour tout élément g de G et tout $m \in M'/M$, $g\,W_m \cap W_m$ est soit égal à W_m soit contenu dans une réunion finie de translatés de W'_m.

(1.8) <u>Exemples</u>.

. <u>$G = SL(2,\mathbb{R})$</u>

$$W_e = G \quad \text{et} \quad W_{m_s} = m_s\,\tilde{N}AM \ .$$

Les sous-groupes paraboliques de $SL(2,\mathbb{R})$ sont $SL(2,\mathbb{R})$ et les conjugués de NAM (ou $\tilde{N}AM$).

. <u>$G = SL(3,\mathbb{R})$</u>

$$W_e = G\ ,\ W_{m_2} = N\,\{m_2,m_4,m_5,m_6\}\,\tilde{N}AM$$

$$W_{m_3} = N\,\{m_3,m_4,m_5,m_6\}\,\tilde{N}AM\ ,\ W_{m_4} = N\,\{m_4,m_6\}\,\tilde{N}AM$$

$$W_{m_5} = N\,\{m_5,m_6\}\,\tilde{N}AM\ ,\ W_{m_6} = m_6\,\tilde{N}AM\ .$$

Les sous-groupes paraboliques de $SL(3,\mathbb{R})$ sont $SL(3,\mathbb{R})$ et les conjugués des sous-groupes NAM (ou $\tilde{N}AM$), $\{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) : a_{21} = a_{31} = 0\}$ et $\{((a_{ij})) \in SL(3,\mathbb{R}) : a_{31} = a_{32} = 0\}$.

2. RESULTATS PRINCIPAUX

A) Suites contractantes.

(2.1) Définition. Nous disons qu'une suite $\{g_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de G est contractante si pour une décomposition polaire $G = K \exp \overline{W} K$ de G, g_n s'écrit $x_n\, a_n\, k_n$ avec $x_n, k_n \in K$, $a_n \in \exp \overline{W}$ et $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, pour tout $\alpha \in \Delta_-$.

Nous allons à présent étudier de telles suites ; en particulier nous allons voir que lorsque $\{g_n\}$ est une suite contractante, alors la propriété énoncée est vraie pour toutes les décompositions polaires (corollaire (2.3)).

(2.2) Lemme. *Soit* $\tilde{u}_n$ [resp. u_n] *une suite d'éléments d'un compact* C *de* $\tilde{N}$ [*resp. de* N] *Soit* a_n *une suite d'éléments de* A *telle que* $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, $\forall\alpha \in \Delta_-$. *Alors* $\tilde{u}_n\, a_n$ [*resp.* $a_n\, u_n$] *s'écrit* $x_n\, b_n\, k_n$ *avec* $x_n, k_n \in K$, $b_n \in \exp \overline{W}$ *tels que* $x_n \to e$, $k_n \to e$ *et* $a_n\, b_n^{-1} \to e$.

Preuve. Ecrivons $\tilde{u}_n\, a_n = x'_n\, b_n\, k'_n$ avec $x'_n, k'_n \in K$ et $b_n \in \exp \overline{W}$.

1°) Supposons que la suite x'_n converge vers x.

G possède la décomposition de Bruhat $G = \sum_{m \in M'/M} \tilde{N}m\, AMN$. Soit $m \in M'$ tel que $x \in \tilde{N}m\, AMN$. x appartient alors à l'ouvert $K \cap \tilde{N}AM\, Nm$ de K ; si bien qu'à partir d'un certain rang x'_n s'écrit :

$$x'_n = \tilde{v}_n\, v_n\, c_n\, \gamma_n\, m$$

avec $\tilde{v}_n \in \tilde{N}$, $v_n \in N$, $c_n \in A$, $\gamma_n \in M$ tel que $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$, $v_n \to v$, $c_n \to c$, $\gamma_n \to \gamma$ et $x = \tilde{v}\, v\, c\, \gamma\, m$.

Nous avons alors :

$$\tilde{u}_n\, a_n = x_n\, (m\, b_n\, m^{-1})\, k_n$$

en posant $\quad k_n = \gamma_n\, m\, k'_n \quad$ et $\quad x_n = x'_n\, (\gamma_n\, m)^{-1} = \tilde{v}_n\, v_n\, c_n \to \tilde{v}\, v\, c.$

Comme $a_n^{-1}\, \tilde{u}_n\, a_n$ et $a_n^{-1}\, \tilde{v}_n\, a_n$ convergent vers e, de l'égalité
$(a_n^{-1}\, \tilde{u}_n\, a_n) = (a_n^{-1}\, \tilde{v}_n\, a_n)\, (a_n^{-1}\, v_n\, a_n)\, [a_n^{-1}\, c_n\, (m\, b_n\, m^{-1})]\, k_n$,
il en résulte (continuité de la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$) que :

1) $a_n^{-1}\, v_n\, a_n \to e$; ce qui entraîne $v_n \to e = v$

2) $c_n\, a_n^{-1}\, (m\, b_n\, m^{-1}) \to e$; ce qui entraîne que $\varphi_\alpha(m\, b_n\, m^{-1}) \to 0 \quad \forall\alpha \in \Delta_-$, donc $m\, b_n\, m^{-1} \in \exp W$, à partir d'un certain rang ; par suite (puisque $b_n \in \exp \overline{W}$) $m \in M$ et $m\, b_n\, m^{-1} = b_n$.

3) $k_n \to e$.

Mais alors nous avons aussi $x_n \to \tilde{v}\, c \in \tilde{N}A \cap K = \{e\}$. Et le lemme est ainsi prouvé, dans le cas considéré.

2°) <u>Cas général</u>.

D'après la première partie les valeurs d'adhérence de la suite x'_n sont dans M ; autrement dit l'image de la suite $\{x'_n\}$ dans K/M est une suite convergeant vers l'image de l'élément neutre de K. Nous pouvons donc trouver une suite $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ de M telle que $x_n = x'_n\, \gamma_n \to e$. En écrivant $\tilde{u}_n\, a_n = x_n\, b_n\, k_n$ avec $k_n = \gamma_n^{-1}\, k'_n$, nous sommes alors ramenés à la situation envisagée au 1°).
[Ce lemme généralise le lemme 4 de [7] qui suppose qu'en outre $\sup_n \dfrac{\alpha(\log a_n)}{\beta(\log a_n)} < +\infty$, pour $\alpha, \beta \in \Delta_-$].

(2.3) <u>Corollaire</u>. *Si* $\{g_n\}_{n\geq 1}$ *est une suite contractante de* G, *alors pour tous* $x, y \in G$ *la suite* $\{x g_n\, y\}_{n\geq 1}$ *l'est aussi.*

<u>Preuve</u>. Soit $g_n = x_n\, a_n\, k_n$ avec $x_n, k_n \in K$ et $a_n \in \exp \overline{W}$ tel que $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, $\forall\alpha \in \Delta_-$.

Ecrivons $x\, x_n = k'_n\, \tilde{u}_n\, b_n$ avec $k'_n \in K$, $\tilde{u}_n \in \tilde{N}$ et $b_n \in A$. $\tilde{u}_n$ et b_n varient respectivement dans un compact de $\tilde{N}$ et de A. Appliquons le lemme (2.2) à la suite $\tilde{u}_n\, b_n\, a_n$, $x\, g_n\, y$ s'écrit alors $x'_n\, c_n\, \ell_n\, y$ avec x'_n, $\ell_n \in K$ et $c_n \in \exp \overline{W}$ avec $\varphi_\alpha(c_n) \to 0$, $\forall \alpha \in \Delta_-$.

Le corollaire (2.3) s'obtient alors en écrivant

$\ell_n\, y = d_n\, u_n\, \ell'_n$ avec $d_n \in A$, $u_n \in N$ et $\ell'_n \in K$

et en appliquant le lemme (2.2) à la suite $c_n\, d_n\, u_n$.

(2.4) <u>Corollaire</u>. *Soit* $\{g_n\}_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* G. *Alors nous avons l'équivalence :*

i) g_n *admet une décomposition polaire* $x_n\, a_n\, k_n$ *telle que* $x_n \to x \in NAM\tilde{N}$ et $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$ $\forall \alpha \in \Delta_-$.

ii) g_n *admet la décomposition d'Iwasawa* $u_n\, a'_n\, k'_n$ $(u_n \in N,\ a'_n \in A,\ k'_n \in K)$ *telle que* $u_n \to u$, $\varphi_\alpha(a'_n) \to 0$ $\forall \alpha \in \Delta_-$ *et* $k'_n = k''_n\, k_n$ *où* $\{k''_n\}$ *est une suite d'élément de* K *convergeant vers un élément de* M.

Dans ce cas on a nécessairement $\zeta(u) = \zeta(x)$; où $\zeta : G \to G/_{AMN}$.

<u>Preuve</u>. i) $\Rightarrow$ ii).

Ecrivons, avec des notations évidentes,

$$x_n = u_n\, b_n\, m_n\, \tilde{u}_n \in NAM\tilde{N} \longrightarrow x = u\, b\, m\, \tilde{u}.$$

Alors $a_n^{-1}\, \tilde{u}_n\, a_n \to e$ et $a_n^{-1}\, \tilde{u}_n\, a_n$ s'écrit $v_n\, c_n\, k''_n$ avec $v_n \in N$, $c_n \in A$, $k''_n \in K$ tels que $v_n \to e$, $c_n \to e$ et $k''_n \to e$.

D'où g_n s'écrit $u'_n\, a'_n\, k'_n$ avec

$$u'_n = u_n\, (b_n\, m_n\, a_n\, v_n\, a_n^{-1}\, m_n^{-1}\, b_n^{-1}) \to u$$

$$a'_n = a_n\, b_n\, c_n \text{ et } \varphi_\alpha(a'_n) \to 0 \qquad \forall \alpha \in \Delta_-$$

$$k'_n = m_n\, k''_n\, k_n\ .$$

ii) $\Rightarrow$ i).

Ecrivons $u_n = \ell_n \tilde{u}_n b_n$ avec $\ell_n \in K$, $b_n \in A$ et $\tilde{u}_n \in N$. Il suffit alors d'appliquer le lemme (2.2) à la suite $\tilde{u}_n b_n a'_n$.

B) Théorème principal.

(2.5) Définition. Soit $\tilde{N}AM$ un sous-groupe moyennable maximal de G. Une mesure de probabilité ν sur l'espace homogène $B = G/\tilde{N}AM$ est dite irréductible si

$$g\nu(\zeta(Nm)) = 0 \quad , \quad \forall g \in G \ , \ \forall m \in M'/M - \{\bar{e}\} \quad ;$$

où ζ désigne l'application naturelle de G sur B.

Si μ est une mesure de probabilité sur G, nous appelons T_μ (resp. G_μ) le semi-groupe (resp. le sous-groupe) fermé engendré par le support de μ.

(2.6) Théorème. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* G *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de loi* μ, *définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans* G.

Supposons que T_μ *contienne une suite contractante (déf. (2.1)) et que* G_μ *et ses sous-groupes d'indice fini ne soient pas contenus dans un sous-groupe parabolique propre de G.*

Soient $G = NAK$ *une décomposition d'Iwasawa de* G *et* $G = K (\exp \overline{W}) K$ *la décomposition polaire de* G *correspondante. (*W *est la chambre de Weyl qui a servi à définir* N*). Nous appelons* M *le centralisateur de* A *dans* K.

Alors il existe une unique *mesure de probabilité* μ*-invariante sur* $B = G/\tilde{N}AM$ *et cette mesure est irréductible (déf. (2.5)). Pour toute mesure de probabilité irréductible* λ *sur* B *et pour tous* $y, g \in G$, *la suite de mesure* $\{y\, Y_1 \ldots Y_n\, g\, \lambda\}_{n\geq 1}$ *converge* $\mathbb{P}$*-p.s. vers une mesure de Dirac* $\varepsilon_{y.Z}$ *indépendante de* g.

De plus, si nous écrivons $y\, Y_1 \ldots Y_n\, g = x_n\, a_n\, k_n$ *avec* $x_n, k_n \in K$ *et* $a_n \in \exp \overline{W}$, *alors l'image de* x_n *dans* $G/\tilde{N}AM$ *converge p.s. vers la v.a.* $y.Z$ *et pour tout* $\alpha \in \Delta_-$, *la suite* $\{\varphi_\alpha(a_n)\}$ *converge vers zéro.*

En prenant $B' = {}_{NAM}\backslash G$ et la marche aléatoire gauche $Y_n \ldots Y_1$, on a évidemment un résultat analogue. Si ζ' désigne l'application naturelle de G sur B', on en déduit que les lois des v.a. $\zeta'(k_n)$ sont les mêmes que celles d'une suite de v.a. convergente. D'où le corollaire :

(2.7) <u>Corollaire</u>. *Avec les hypothèses et les notations du théorème (2.6), l'image de la suite* $\{k_n\}$ *dans* ${}_{NAM}\backslash G$ *converge en loi vers l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* ${}_{NAM}\backslash G$.

D'autre part d'après le corollaire (2.4), nous avons aussi :

(2.8) <u>Corollaire</u>. *Avec les hypothèses et les notations du théorème (2.6), écrivons* $y\, Y_1 \ldots Y_n\, g = N_n\, A_n\, K_n$ *avec* $N_n \in N$, $A_n \in A$ et $K_n \in K$.

Alors la suite N_n *converge p.s. vers une v.a.* N_∞ *ayant* $y.Z$ *pour image dans* $G/\tilde{N}AM$ *; pour tout* $\alpha \in \Delta_-$, *la suite* $\varphi_\alpha(A_n)$ *converge vers zéro et la suite* $\zeta'(K_n)$ *converge en loi vers l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* $B' = {}_{NAM}\backslash G$.

C) <u>Preuve du théorème (2.6)</u>.

La démonstration découle de plusieurs lemmes.

(2.9) Nous désignons par ζ l'application naturelle de G sur $B = G/\tilde{N}AM$. Soient $a \in A$ et $u \in N$; écrivons $u = \exp \sum_{\alpha \in \Delta_-} X_\alpha$ avec $X_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$. Pour tout élément m de M', nous avons

$$\zeta(a\ u\ m) = \zeta\,(a\ u\ a^{-1}\ m) = \exp\Big(\sum_{\alpha \in \Delta_-} \varphi_\alpha(a)\ X_\alpha\Big).\ \zeta(m)$$

puisque $B = \sum_{m \in M'/M} \zeta\,(Nm)$, nous voyons que l'homéomorphisme de B associé à un élément a de A est déterminé de façon unique par la famille des réels

$\{\varphi_\alpha(a),\ \alpha \in \Sigma\}$; où Σ désigne l'ensemble des racines simples de Δ_- (voir (1.6)). Ce qui n'est pas étonnant puisque a lui-même est déterminé par cette famille ; il suffit de noter que Σ engendre $\mathfrak{a}^*$.

Réciproquement considérons une famille de réels positifs ou nuls $\{r_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\}$. Nous définissons une transformation $\tau(\{r_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\})$ de B, en posant, pour $m \in M'$ et $u = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Delta_-} X_\alpha\right) \in N$,

$$\tau(\zeta(u\, m)) = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Delta_-} r_\alpha X_\alpha\right).\zeta(m) ;$$

où, pour $\alpha \in \Delta_- - \Sigma$, r_α se déduit de façon évidente des réels $\{r_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\}$.

Il est clair que $\tau(\{r_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\})$ s'écrit $a \circ \tau(\{\delta_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\})$ avec $a \in A$ et $\delta_\alpha \in \{0,1\}$, $\forall \alpha \in \Sigma$. L'élément a de A n'étant unique que si $r_\alpha > 0$, $\forall \alpha \in \Sigma$.

Nous notons $\mathfrak{T}$ l'ensemble des transformations de B associées à des éléments $\{\delta_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\}$ de $\{0,1\}^\Sigma$.

Nous avons :

(2.10) Lemme. *De toute suite* $\{g_n\}$ *d'éléments de* G, *on peut extraire une sous-suite* $\{g_{\Psi(n)}\}$ *pour laquelle il existe des éléments* $x,\ k \in K$, $a \in A$ *et* $\tau \in \mathfrak{T}$ *telle que, pour tout* z *appartenant à l'ouvert* $\zeta(k^{-1} N)$ *de* B, *la suite* $\{g_{\Psi(n)}.z\}_{n\geq 1}$ *converge vers* $x\, a\, \tau\, k.z$.

La suite $\{g_n\}$ *est contractante si et seulement si toutes "ses valeurs d'adhérence* $x\, a\, \tau\, k$*" sont telles que* τ *corresponde à l'élément nul de* $\{0,1\}^\Sigma$.

Preuve. Ecrivons $g_n = x_n\, a_n\, k_n$ avec $x_n,\ k_n \in K$ et $a_n \in \exp \overline{W}$. Nous avons $\varphi_\alpha(a_n) \in [0,1]$ car $a_n \in \exp \overline{W}$. Choisissons une suite d'entiers $\{\Psi(n)\}_{n\geq 1}$ telle que :

$$k_{\Psi(n)} \to k\ ,\ x_{\Psi(n)} \to x \text{ et } \forall \alpha \in \Sigma,\ \varphi_\alpha(a_{\Psi(n)}) \to \lambda_\alpha \in [0,1] .$$

On vérifie aisément que pour tout $z \in \zeta(k^{-1} N)$,

$$g_{\psi(n)} . z \to x\, \tau(\{\lambda_\alpha, \alpha \in \Sigma\})\, k.z.$$

Ce qui prouve la première assertion du lemme. La deuxième assertion est évidente.

(2.11) Lemme. *Soit* $\{g_n\}$ *une suite d'éléments de* G *et* β *une mesure de probabilité irréductible sur* B *telle que la suite de mesures* $\{g_n . \beta\}_{n \geqslant 1}$ *converge vers une mesure de Dirac* ε_u. *Ecrivons* $g_n = x_n\, a_n\, k_n$ *avec* $x_n, k_n \in K$ *et* $a_n \in \exp \overline{W}$.

Alors la suite $\zeta(x_n)$ *converge vers* u *et* g_n *est une suite contractante. Si bien que, pour toute mesure de probabilité irréductible* λ *sur* B, $g_n . \lambda$ *converge vers* ε_u.

Preuve. On voit aisément que les seules valeurs d'adhérence $x\, a\, \tau\, k$ de la suite $\{g_n\}$ sont telles que :

i) τ est l'élément de $\mathcal{T}$ associé à l'élément nul de $\{0,1\}^\Sigma$.

ii) $\zeta(x) = u$.

De i) il résulte (lemme (2.10)) que $\{g_n\}$ est une suite contractante. De ii) il résulte que la suite $\zeta(x_n)$ n'admet que la valeur d'adhérence u ; ce qui montre que $\zeta(x_n)$ converge vers u.

(2.12) Lemme. *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* G *telle que* G_μ *et ses sous-groupes d'indice fini ne soient pas contenus dans un sous-groupe parabolique propre de* G. *Alors toute mesure de probabilité* μ*-invariante* ν *sur* B *est irréductible.*

Preuve. Identifions les sous-variétés W_m, $m \in M'/M$, de G définies en (1.7) à leurs images dans B.

Considérons une sous-variété fermé de dimension minimale W_m, $m \in M'/M$, telle que $\nu(g_o^{-1} W_m) > 0$ pour un certain $g_o \in G$. Puisque pour tout $g \in G$, la sous-variété $g\, W_m \cap W_m$ est soit égale à W_m, soit contenue dans une réunion finie de translatée de W'_m, il en résulte que, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des sous-variétés $g^{-1}\, W_m$, $g \in G$, vérifiant $\nu(g^{-1}\, W_m) > \delta$ est fini. Il existe donc un élément h de G tel que $\nu(h^{-1}\, W_m) = \sup_{g \in G} \nu(g^{-1}\, W_m)$ et l'ensemble $\mathfrak{I} = \{g^{-1}\, W_m : \nu(g^{-1}\, W_m) = \nu(h^{-1}\, W_m)\}$ est fini.

L'équation de convolution

$$\nu(h^{-1}\, W_m) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \int_G g.\nu\, (h^{-1}\, W_m)\, \mu^k\, (dg),$$

nous montre alors que T_μ, et par suite G_μ, applique $\mathfrak{I}$ dans lui-même. Le conjugué $h^{-1}\, G_\mu\, h$ de G_μ possède alors un sous-groupe d'indice fini laissant invariant W_m. Ce sous-groupe d'indice fini est donc contenu dans le sous-groupe parabolique P_m de G laissant W_m invariant. Nous devons donc avoir $P_m = G$; ce qui implique que $W_m = B$ (i.e. $m = e$).

(2.13) Lemme. *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $\{Y_i\}_{i>1}$ une suite de v.a. indépendantes et de loi μ, définies sur $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, à valeurs dans G. Soit ν une mesure de probabilité μ-invariante sur B. Nous appelons X_n le produit $Y_1 \ldots Y_n$ et nous notons λ la mesure $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}\, \mu^n$.*

Alors pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega, \xi) \in \Omega \times G$, les suites de mesures de probabilité $\{X_n(\omega).\nu\}_{n \geq 1}$ et $\{X_n(\omega)\ \xi.\nu\}_{n \geq 1}$ convergent vaguement vers la même limite $\Theta(\omega)$.

Preuve. Elle repose sur la théorie des martingales et sur une idée utilisée dans ([6] lemme (1.7)).

Notons C(B) l'espace des fonctions continues sur B. Pour tout $\varphi \in C(B)$, la fonction $F_\varphi(g) = g\ \nu(\varphi)$, $g \in G$, est une fonction μ-harmonique bornée sur G (i.e. $\int_G F_\varphi\, (g\, g')\, \mu(dg') = F_\varphi(g)$). Il s'ensuit que la suite de v.a. $\{F_\varphi(X_n)\}_{n \geq 1}$ est une martingale bornée ; par conséquent $F_\varphi(X_n)$ converge $\mathbb{P}$-p.s. .

D'autre part, pour tout $\varphi \in C(B)$ et pour tous entiers p et r, nous avons

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}\left[\int (F_\varphi(X_k\,\xi) - F_\varphi(X_k))^2\,\mu^r(d\xi)\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\int_G F_\varphi^2(g)\,\mu^{k+r}(dg) - \int_G F_\varphi^2(g)\,\mu^k(dg)\right]$$

(en utilisant le fait que F_φ est μ-harmonique)

$$\leqslant 2r\,\|\varphi\|_\infty^2 \quad .$$

On en déduit que pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega,\xi) \in \Omega \times G$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F_\varphi(X_k(\omega)\,\xi) - F_\varphi(X_k(\omega)))^2 < +\infty \;;$$

ce qui entraîne que pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega,\xi) \in \Omega \times G$,

$$\lim_n F_\varphi(X_n(\omega)\,\xi) = \lim_n F_\varphi(X_n(\omega)).$$

Le lemme (2.13) se déduit alors de ce qui précède en notant qu'une suite de mesures de probabilité $\{\nu_n\}$ sur B converge vaguement si et seulement si la suite $\{\nu_n(\varphi_i)\}_{n\geqslant 1}$ converge pour une suite dense $\{\varphi_i\}_{i\geqslant 1}$ de C(B).

(2.14) <u>Lemme</u>. *Soient μ une mesure de probabilité sur G et ν une mesure de probabilité, μ-invariante, sur B. Supposons que T_μ contienne une suite contractante et que toute mesure de probabilité μ-invariante sur B soit irréductible.*

Alors la suite de mesures $\{X_n\,\nu = Y_1\ldots Y_n\,\nu\}_{n\geqslant 1}$ converge p.s. vers une mesure de Dirac.

<u>Preuve</u>. D'après le lemme (2.13), nous pouvons trouver une suite $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ dense dans T_μ et un sous-ensemble mesurable Ω' de Ω de $\mathbb{P}$-mesure 1 tels que :

(*) $$\forall\omega \in \Omega',\ \forall i \geqslant 1,\ \lim_n X_n(\omega)\,\xi_i.\nu = \lim_n X_n(\omega).\nu = \Theta(\omega).$$

Soient $\omega \in \Omega'$ et $x(\omega)\ a(\omega)\ \tau(\omega)\ k(\omega)$ une valeur d'adhérence de la suite $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ (lemme (2.10)) ; c'est-à-dire que, pour une suite d'entiers $\{\Psi(n)\}_{n\geq 1}$

$$X_{\varphi(n)}(\omega).z \to x(\omega)\ \tau(\omega)\ k(\omega).z\ ,\quad \forall z \in \zeta([k(\omega)]^{-1}\ N).$$

La mesure ν étant irréductible, de (*) il résulte que

$$\forall i \geq 1,\ x(\omega)\ a(\omega)\ \tau(\omega)\ k(\omega)\ \xi_i.\nu = x(\omega)\ a(\omega)\ \tau(\omega)\ k(\omega).\nu = \Theta(\omega).$$

En particulier, nous avons

$$\forall i \geq 1 \qquad \tau(\omega)\ k(\omega)\ \xi_i.\nu = \tau(\omega)\ k(\omega).\nu\ ;$$

ce qui entraîne en passant à la fermeture

$$(**) \qquad \tau(\omega)\ k(\omega)\ \xi.\nu = \tau(\omega)\ k(\omega).\nu\ ,\ \forall \xi \in T_\mu.$$

L'élément ω de Ω' étant toujours fixé, prenons une suite contractante $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ de T_μ. Ecrivons $\xi_n = x_n\ a_n\ \ell_n$ avec x_n, $\ell_n \in K$ et $a_n \in \exp \overline{W}$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que $x_n \to x$ et $\ell_n \to \ell$. D'autre part si $x \notin k^{-1}(\omega)\ N\ \tilde{N}AM$, nous pouvons trouver $\xi \in T_\mu$ tel que $\xi x \in k^{-1}(\omega)\ N\ \tilde{N}AM$. En effet dans le cas contraire, $T_\mu\ x$ serait contenu dans le fermé

$$\bigcup_{m \in M'/M-\{\bar{e}\}} k^{-1}(\omega)\ Nm\ \tilde{N}AM = \complement\, k^{-1}(\omega)\ N\ \tilde{N}AM$$

de B. Il existerait alors une mesure de probabilité μ-invariante portée par ce fermé et donc non irréductible.

Nous avons alors

$$\forall z \in \zeta(\ell^{-1}\ N)\ ,\ k(\omega)\ \xi\ \xi_n.z \to \zeta\,(k(\omega)\xi\ x) \in \zeta(N) \text{ et par suite,}$$

puisque ν est irréductible et $\tau(\omega)$ est une transformation continue de $\zeta\,(N)$,

$$\tau(\omega)\ k(\omega)\ \xi\ \xi_n\ \nu \to \varepsilon_{\tau(\omega)}\ (\ \zeta\,(k(\omega)\ \xi\ x)\ .$$

De l'égalité (**), il résulte alors que $\tau(\omega)\ k(\omega)\ \nu$ et par suite $\Theta(\omega)$ sont des mesures de Dirac. Le lemme est ainsi prouvé.

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème (2.6).

(2.15) <u>Preuve du théorème (2.6)</u>. Sous les hypothèses du théorème (2.6), toute mesure de probabilité μ-invariante ν sur B est irréductible (lemme (2.12)).

D'après le lemme (2.14), $X_n.\nu$ converge alors p.s. vers une mesure de Diract ε_Z. Mais alors, pour tous y, g $\in$ G, la suite y X_n g contracte p.s. la mesure irréductible g^{-1} ν en la mesure de Dirac $\varepsilon_{y.Z}$. D'après le lemme (2.11), y X_n g s'écrit $x_n\, a_n\, k_n$, x_n, $k_n \in K$ et $a_n \in \exp \overline{W}$, avec $\zeta(x_n) \xrightarrow{p.s.} y.Z$ et $\forall\alpha \in \Delta_-$, $\varphi_\alpha(a_n) \xrightarrow{p.s.} 0$.

Pour toute mesure de probabilité irréductible λ sur B nous avons alors (lemme (2.10)) y X_n $g.\lambda \longrightarrow \varepsilon_{y.Z}$.

Enfin la seule mesure de probabilité μ-invariante sur B est évidemment la loi de la v.a. Z.

Notons aussi que des lemmes (2.10) et (2.11) il résulte que l'on a :

(2.16) <u>Corollaire</u>. *Une suite $\{g_n\}$ d'éléments de* G *est contractante si et seulement si pour toute mesure de <u>probabilité</u> quasi-invariante λ d'un espace homogène* G/NAM, *les seules valeurs d'adhérence de la suite de mesures $\{g_n.\lambda\}_{n\geqslant 1}$ sont des mesures de Dirac.*

D) <u>Généralisation du théorème principal</u>.

Dans ce qui précède, nous avons privilégié les sous-groupes paraboliques minimaux de G.

Donnons-nous à présent un sous-groupe parabolique quelconque P de G et considérons "la classe de conjugaison de P" ; c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G qui sont les conjugués de P. Nous notons C(P) cette classe.

Posons la définition :

(2.17) <u>Définition</u>. Nous disons qu'une suite $\{g_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de G est <u>contractante</u> vis à vis de C(P) si pour une (ou toute) mesure de probabilité quasi-invariante λ d'un espace homogène G/P, $P \in C(P)$, les seules valeurs d'adhérence de la suite $\{g_n.\lambda\}_{n\geq 1}$ sont des mesures de Dirac.

(2.18) Il est clair qu'une suite $\{g_n\}$ d'éléments de G est contractante si et seulement si pour une (ou pour toute) décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G elle vérifie la propriété suivante :

Désignons par W (resp. Δ_-) la chambre de Weyl (resp. l'ensemble des racines) ayant servi à définir N ; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_-. Soit Θ le sous-ensemble de Σ tel que le sous-groupe parabolique $\tilde{P}_\Theta$ (voir (1.6)) appartienne à C(P). Alors g_n s'écrit $x_n\, a_n\, k_n$ avec x_n, $k_n \in K$, $a_n \in \exp \overline{W}$ et $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, pour tout $\alpha \in \Theta^c = \Sigma - \Theta$ (et par suite pour tout $\alpha \in \Delta_- \cap \complement[\Theta]$).

Nous avons alors le théorème :

(2.19) <u>Théorème</u>. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* G *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de loi* μ.

Supposons que T_μ *contienne une suite contractante vis à vis de la classe de conjugaison* C(P) *et que* G_μ *et ses sous-groupes d'indice fini ne soient pas contenu dans un sous-groupe parabolique propre de* G.

Soit $G = NAK$ *une quelconque décomposition d'Iwasawa de* G. *Désignons par* W *(resp.* Δ_-*) la chambre de Weyl (resp. l'ensemble des racines) ayant servi à définir* N *; par* Σ *l'ensemble des racines simples de* Δ_-. *Soit* Θ *le sous-ensemble de* Σ *tel que le sous-groupe parabolique* $\tilde{P}_\Theta$ *appartienne à* C(P).

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ*-invariante* ν *sur* $G/\tilde{P}_\Theta$ *et cette mesure est irréductible (i.e.* $g\,\nu(Nm\,\tilde{P}_\Theta) = 0$, $\forall g \in G$, $\forall m \in M'_\Theta/M' - \{\overline{e}\}$). *Pour toute mesure de probabilité irréductible* λ *sur* $G/\tilde{P}_\Theta$ *et pour tous* y, $g \in G$, *la suite de mesures* $\{y\, Y_1 \ldots Y_n\, g.\lambda\}_{n \geqslant 1}$ *converge p.s. vers une mesure de Dirac* $\varepsilon_{y.Z}$ *indépendante de* g. *De plus, si nous écrivons* $y\, Y_1 \ldots Y_n\, g = x_n\, a_n\, k_n$ *avec* x_n, $k_n \in K$ *et* $a_n \in \exp \overline{W}$, *alors : l'image de la suite* x_n *dans* $G/\tilde{P}_\Theta$ *converge p.s. vers* $y.Z$; *la suite* $\varphi_\alpha(a_n)$ *converge p.s. vers zéro, pour tout* $\alpha \in \Sigma - \Theta$; *et l'image de la suite* k_n *dans* ${}_{P_\Theta}\backslash G$ *converge en loi vers l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* ${}_{P_\Theta}\backslash G$.

3.- APPLICATIONS

Nous choisissons une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G. Nous désignons par Δ_- l'ensemble des racines ayant servi à définir N ; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_- et par M le centralisateur de A dans K.

(3.1) Définition ([3]). Soit E un espace sur lequel G opère continûment à droite. On appelle cocycle sur E, toute application continue ρ de $E\times G$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\rho(u,g_1g_2) = \rho(u,g_1) + \rho(u.g_1,g_2) \qquad (u \in E,\ g_1,g_2 \in G).$$

Nous disons qu'un cocycle sur E est K-invariant si, en outre,

$$\rho(u,k) = 0 \qquad (u \in E,\ k \in K).$$

[Nous avons alors $\rho(u,gk) = \rho(u,g) \qquad (u \in E,\ k \in K,\ g \in G)$].

Nous avons évidemment une définition analogue pour un G-espace à gauche.

(3.2) Si (k,g) est un élément de $K\times G$, désignons par $\tilde{H}(k,g)$ la composante sur $\mathfrak{a}$, dans la décomposition d'Iwasawa $N(\exp\mathfrak{a})K$ de l'élément kg de G. On vérifie que :

i) $\tilde{H}(k,g_1g_2) = \tilde{H}(k,g_1) + \tilde{H}(k.g_1,g_2)$, $(k \in K,\ g_1,g_2 \in G)$ où $k.g_1$ désigne la composante sur $K(\sim NA\backslash G)$ de l'élément kg_1 de G.

ii) $\tilde{H}(\gamma k,g) = \tilde{H}(k,g) \qquad (\gamma \in M,\ k \in K,\ g \in G)$.

Pour $u \in B = NAM\backslash G$ et $g \in G$, posons alors

$$H(u,g) = \tilde{H}(k,g)$$

où k est un quelconque des éléments de K dont l'image dans B est u. Nous obtenons alors une fonction de $B(G) \times G$ dans $\mathfrak{a}$ vérifiant

$$* \begin{cases} H(u,g_1g_2) = H(u,g_1) + H(u.g_1,g_2) & (u \in B,\ g_1,g_2 \in G) \\ H(u,k) = 0 & (u \in B,\ k \in K) \end{cases}$$

On montre alors que l'on a ([3]):

(3.3) Lemme : *Tout cocycle* K-*invariant sur* $B = NAM\backslash G$ *est de la forme* $\rho(u,g) = \alpha(H(u,g))$, *pour une certaine forme linéaire réelle* α *sur* $\mathfrak{a}$.

(3.4) L'ensemble des cocycles K-invariant sur B forme un espace vectoriel réel dont la dimension est égale à celle de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}$. Une base de l'espace des cocycles sur B est constituée par $\{\alpha \circ H, \alpha \in \Sigma\}$

(3.5) Théorème. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* G *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de loi* μ *à valeur dans* G.

Supposons que T_μ *contienne une suite contractante (déf. (2.1)) et que* G_μ *et ses sous-groupes d'indice fini ne soient pas contenus dans un sous-groupe parabolique propre de* G.

Alors pour tout $u \in B$ *et tout* $\alpha \in \Delta_-$

$$\alpha(H(u,Y_1\ldots Y_n)) \xrightarrow{p.s.} (-\infty).$$

Supposons en outre que, pour un certain $\alpha \in \Delta_-$ $\int_G \sup_{u\in B} |\alpha o H(u,g)|\mu(dg) < +\infty$. *Alors, si nous appelons* ν *l'unique mesure de probabilité* μ*-invariante sur* B *(théorème (2.6)), pour tout* $u \in B$, *la suite* $\{\frac{1}{n}\alpha(H(u,Y_1\ldots Y_n))\}_{n\geq 1}$ *converge p.s. vers le réel strictement négatif* $\int_G \int_B \alpha(H(u,g))\ \nu(du)\ \mu(dg)$.

Preuve. La première assertion résulte du corollaire (2.8).

Lorsque $\int_G \sup_{u\in B} |\alpha o H(u,g)|\ \mu(dg) < +\infty$, nous savons ([3], lemme (7.3)) que, pour tout $u \in B$,

$$\frac{1}{n}\alpha o H(u,Y_1\ldots Y_n) \xrightarrow{p.s.} \tau(\mu) = \int_G \int_B \alpha o H(u,g)\ \nu(du)\ \mu(dg).$$

Le théorème (3.5) résulte alors du lemme suivant, bien connu en théorie ergodique.

(3.6) Lemme. *Soit* (X,T,λ) *un système dynamique* ($T\lambda = \lambda$) *et* f *une fonction intégrale à valeurs réelles. Si l'on a p.p.* $\lim_n \sum_0^{n-1} f o T^k = -\infty$, *alors* $\int_X f d\lambda < 0$.

Preuve. Considérons le produit $Y = X \times \mathbb{R}$ et la transformation S de Y définie par $S(x,r) = (Tx, r+f(x))$ qui préserve la mesure $\nu = \lambda \otimes \rho$ où ρ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Comme $S^n(x,r) = (T^n x, r+\sum_0^{n-1} f\ T^k(x)) = (T^n x, s_n(x,r))$, il suffit de voir que si $\int_X f\ d\lambda = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe, pour presque tout $(x,r) \in Y_\varepsilon = X \times [-\varepsilon,\varepsilon]$, une infinité d'entiers n tels que $S^n(x,r) \in Y_\varepsilon$.

Un sous-ensemble A de Y est dit <u>errant pour S</u>, si A est non négligeable et les $S^k A$ sont disjoints relativement à la mesure ν. Montrons que si $\int_X f d\lambda = 0$, il ne peut y avoir de tels sous-ensembles A de Y. Puisque $\lim_n \frac{1}{n} s_n(x,0) = 0$ p.p. on peut trouver une partie $B \subset A$ non négligeable, telle que, uniformément sur B, $\lim_n \frac{1}{n} s_n(x,r) = 0$; par suite, nous avons $\lim_n \frac{1}{n} \nu(\bigcup_{0\leq k<n} S^k B) = 0$

Mais si les $S^k B$ étaient tous ν-disjoints on aurait

$$\nu(\bigcup_{0\leq k<n} S^k B) = n\, \nu(B) ;$$

ce qui contredit la relation précédente.

On en déduit que lorsque $\int f d\lambda = 0$, l'ensemble C des points (x,r) de Y_ε tels que la suite $\{S^n(x,r)\}$ ne revient pas dans Y_ε est négligeable ; car sinon un tel ensemble serait nécessairement errant. Si alors $n(x,r)$ désigne le plus entier positif n tel que $S^n(x,r) \in Y_\varepsilon$, une transformation $\tilde{S}$ se trouve définie sur Y_ε par la formule

$$\tilde{S}(x,r) = S^{n(x,r)}(x,r) .$$

Cette transformation préservant la mesure induite sur Y_ε, l'ensemble des points de Y_ε revenant indéfiniment dans Y_ε est de complémentaire négligeable.

Nous considérons à présent le groupe $G = SL(d,\mathbb{R})$ des matrices réelles de déterminant 1. Nous appelons $\mathbb{P}^{d-1}$ l'espace projectif associé à $\mathbb{R}^d = \{(u_1,\dots,u_d) ; u_i \in \mathbb{R}, 1\leq i\leq d\}$.

(3.7) <u>Théorème</u>. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* $SL(d,\mathbb{R})$ *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de loi* μ . *Supposons que* G_μ *ne soit ni compact, ni contenu, ainsi que ses sous-groupes d'indice fini, dans un sous-groupe parabolique propre de* G.

Alors, pour tout $u = (u_1,\dots,u_d) \in \mathbb{R}^d$, $\|u\, Y_1\dots Y_n\| \xrightarrow{p.s.} (+\infty)$; *pour tous* $u,v \in \mathbb{R}^d$, *il existe des v.a.* $C_1(u,v)$ *et* $C_2(u,v)$

$$0 < C_1 < \frac{\|u\, Y_1\dots Y_n\|}{\|v\, Y_1\dots Y_n\|} < C_2 \qquad \text{p.s.}$$

Si en outre $\int_G \mathrm{Log}\,\|g\|\,\mu(dg) < +\infty$, *alors l'expression* $\int_G \int_{\mathbb{P}^{d-1}} \rho(\bar{u},g)\,\nu(d\bar{u})\,\mu(dg)$, *où* $\rho(\bar{u},g) = \mathrm{Log}\,\frac{\|ug\|}{\|u\|}$ (*u désigne un représentant de* $\bar{u}$ *dans* $\mathbb{R}^d$), *est indépendante de la mesure de probabilité* μ-*invariante* ν *sur* $\mathbb{P}^{d-1}$ *et nous avons, pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,\|u\, Y_1\dots Y_n\| \xrightarrow{p.s.} \int_G \int_{\mathbb{P}^{d-1}} \rho(\bar{u},g)\,\nu(d\bar{u})\,\mu(dg) > 0 \quad .$$

<u>Preuve</u>. Nous pouvons supposer que u est de norme 1 et nous écrivons

$u = (0,\dots,0,1)k$ avec $k \in SO(d)$.

Considérons la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ habituelle de $SL(d,\mathbb{R})$ (voir (1.3)). Pour cette décomposition nous avons :

$\mathfrak{a}$ = {matrices diagonales réelles de trace nulle}

$\Sigma = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1}\}$, où $\forall i \in \{1,\dots d-1\}$, α_i est l'homomorphisme d'algèbre de Lie qui à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}$ associe $\lambda_i - \lambda_{i+1}$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \ : \ \lambda_1 < \dots < \lambda_d \right\}.$$

Comme tout semi-groupe compact d'un groupe topologique est un groupe et comme G_μ n'est pas compact, le semi-groupe T_μ n'est pas compact. Nous appelons alors ℓ le plus grand élément de $\{1,\dots,d\}$ tel que T_μ possède une suite $g_n = x_n\, a_n\, k_n$ avec $x_n, k_n \in K$, $a_n \in \exp \overline{W}$ telle que $\phi_{\alpha_\ell}(a_n) \to 0$.

Posons $\theta = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1},\alpha_{\ell+1},\dots,\alpha_d\}$ et considérons le sous-groupe parabolique $\tilde{P}_\theta$ de G ; nous avons

$$\tilde{P}_\theta = \{((a_{ij}))\ SL(d,\mathbb{R}) \ : \ a_{ij}=0 \ , \ \forall (i,j)\ \ \{1,\dots,d-\ell\} \times \{d+1-\ell,\dots,d\}\}.$$

D'après le théorème (2.19), $k\,Y_1\ldots Y_n$ s'écrit alors $x_n\begin{pmatrix}\beta_1(n) & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \beta_d(n)\end{pmatrix}k_n$ avec $x_n, k_n \in K$, $\beta_1(x) \leq \ldots \leq \beta_d(n)$ et $\prod_{i=1}^{d} \beta_i(n) = 1$, tels que :

i) L'image de x_n dans $G/\tilde{P}_\theta$ converge p.s. vers une v.a. Z dont la loi est irréductible

ii) $\frac{\beta_\ell}{\beta_{\ell+1}}(n) \xrightarrow{p.s.} 0$

D'après le choix de l'entier ℓ, il existe une constante $C > 0$ telle que $C \leq \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}(n) \leq 1$, $\forall k \in \{\ell+1,\ldots,d-1\}$.

On en déduit que les suites $\beta_k(n)$, $k \in \{\ell+1,\ldots,d\}$ convergent toutes vers $(+\infty)$.

Nous avons alors,

$$\|u\,Y_1\ldots Y_n\| = \|(0,\ldots,0,1)\,x_n\begin{pmatrix}\beta_1(n) & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \beta_d(n)\end{pmatrix}\| = \left(\sum_{k=1}^{d}(x_n(d,k)\,\beta_k(n)^2\right)^{1/2}$$

D'où : d'une part,

$$\|u\,Y_1\ldots Y_n\| \leq \beta_d(n)\sum_{k=1}^{d}(x_n(d,k))^2 = \beta_d(n)$$

, car $x_n \in SO(d)$; et d'autre part

$$\|u\,Y_1\ldots Y_n\| \geq \beta_d(n)\,C^{d-1}\sum_{k=\ell+1}^{d}(x_n(d,k))^2 .$$

Or nous avons

$$\mathbb{P}[\{\liminf_n \sum_{k=\ell+1}^{d}(x_n(d,k))^2 = 0\}] = 0 .$$

En effet dans le cas contraire la loi de Z chargerait l'image de $\{((a_{ij})) \in SL(d,\mathbb{R}) : a_{d,\ell+1} = \ldots = a_{d,d} = 0\}$ dans $G/\tilde{P}_\theta$. Mais cet ensemble de matrice est contenu dans le complémentaire de $N^{e,\theta}\tilde{P}_\theta$, car toute matrice $((a_{i,j}))$ de $N^{e,\theta}\tilde{P}_\theta$ vérifie

$$\begin{vmatrix} a_{\ell+1,\ell+1} & \ldots & a_{\ell+1,d}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{d,\ell+1} & \ldots & a_{d,d}\end{vmatrix} \neq 0 .$$

Si bien que la loi de Z ne serait pas irréductible.

On en déduit les deux premières assertions du théorème (3.7).

L'application $\rho(\overline{u},g) = \text{Log} \frac{\|ug\|}{\|u\|}$, où u est un quelconque représentant dans $\mathbb{R}^d$ de $\overline{u}$, est un cocycle sur $\mathbb{P}^{d-1} \times G$.

Lorsque T_μ contient une suite contractante vis-à-vis de la classe de conjugaison de $\tilde{P}_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-2}\}}$, nous avons $\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)} \xrightarrow{p.s.} 0$ et il existe sur $\mathbb{P}^{d-1}$ ($\simeq P_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-2}\}}\backslash G$) une unique mesure de probabilité ν μ-invariante (théorème (2.19))

Dans ce cas, nous savons ([3], lemme (7.3)) que

$$\forall \overline{u} \in \mathbb{P}^{d-1} \quad , \quad \frac{1}{n}\, \rho(\overline{u},Y_1\dots Y_n) \xrightarrow{p.s.} \int_G \int_{\mathbb{P}^{d-1}} \rho(\overline{u},g)\, \mu(dg)\, \nu(d\overline{u}).$$

Comme $\{\rho(\overline{u},Y_1\dots Y_n)\}$ converge vers $(+\infty)$, cette intégrale est > 0 (lemme (3.6)). D'où le résultat.

Dans le cas général, soit π une mesure de probabilité μ-invariante extrémale sur $\mathbb{P}^{d-1}$. D'après le théorème ergodique, pour $\mathbb{P} \otimes \pi$ -presque tout $(\omega,\overline{u}) \in \Omega \times \mathbb{P}^{d-1}$, la suite $\{\frac{1}{n}\, \rho(\overline{u},Y_1(\omega)\dots Y_n(\omega))\}$ converge vers $\iint \rho(\overline{u},g)\mu(dg)\pi(d\overline{u})$.

D'après la deuxième assertion du théorème (3.7) nous avons alors

$$\forall \overline{u} \in \mathbb{P}^{d-1} \quad , \quad \frac{1}{n}\, \rho(\overline{u},Y_1\dots Y_n) \xrightarrow{p.s.} \iint \rho(\overline{u},g)\mu(dg)\pi(d\overline{u}).$$

On en déduit que cette intégrale est indépendante de la mesure μ-invariante π. D'autre part, le lemme (3.6), nous dit que cette intégrale est strictement positive. Le théorème est donc prouvé.

Le théorème (3.7) améliore le théorème (8.6) de [3] qui suppose que G_μ n'est pas compact et que tout sous-groupe d'indice fini de G_μ agit de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$.

Considérons l'espace projectif ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ associé à ${}^t\mathbb{R}^d = \{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} : u_i \in \mathbb{R}, (i \leq d)\}$. Cet espace s'identifie au quotient (à droite) de G par l'un quelconque des sous-groupes conjugués du sous-groupe parabolique $\tilde{P}_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-2}\}} = \{((a_{ij})) \in SL(d,\mathbb{R}) :$ $a_{i,d} = 0 \;,\quad \forall i \in \{1,\dots,d-1\}\}$.

Nous disons qu'une suite g_n est contractante vis-à-vis de l'espace ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ si elle est contractante vis-à-vis de la classe de conjugaison de $\tilde{P}_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-2}}$

(3.8) THEOREME. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* $SL(d,\mathbb{R})$ *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de loi* μ. *Supposons que* G_μ *et ses sous-groupes d'indice fini ne soient pas contenus dans un sous-groupe parabolique propre de* $SL(d,\mathbb{R})$ *et que* T_μ *contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace projectif* ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$.

Alors : pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$,

$d_n(u,v) = \dfrac{\|u\, Y_1\ldots Y_n \wedge v\, Y_1\ldots Y_n\|}{\|u\, Y_1\ldots Y_n\|\,\|v\, Y_1\ldots Y_n\|} \xrightarrow{p.s.} 0$; *pour tous* $u_1,u_2,v_1,v_2\, \mathbb{R}^d$, u_1 *et* v_1 *ainsi que* u_2 *et* v_2, *non colinéaires, il existe des v.a.* $C_1(u_1,u_2,v_1,v_2)$ *et* $C_2(u_1,u_2,v_1,v_2)$ *telles que*

$$0 < C_1 < \frac{d_n(u_1,v_1)}{d_N(u_2,v_2)} < C_2 \qquad \text{p.s.}$$

Si en outre $\int_G \operatorname{Log}\|g\|\mu(dg) < +\infty$, *alors, pour tout* $u,v \in \mathbb{R}^d$,

$\frac{1}{n}\operatorname{Log} d_n(u,v) \xrightarrow{p.s.} \tau > 0$.

Preuve du théorème (3.8) . Nous pouvons supposer que les deux vecteurs u et v sont orthogonaux et normés ; nous écrivons alors $u = e_d k$, $v = e_{d-1} k$ avec $e_d = (0,\ldots,0,1)$ et $e_{d-1} = (0,\ldots,0,1,0)$.

D'après le théorème (2.19), le produit $k\, Y_1\ldots Y_n$ s'écrit $x_n\, a_n\, k_n$ avec $x_n, k_n \in SO(d)$,

$a_n = \begin{pmatrix} \beta_1(n) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \beta_d(n) \end{pmatrix}$, $\beta_1(n) \leq \ldots \leq \beta_d(n)$, $\prod_{i=1}^{d} \beta_i(n) = 1$, tels que :

i) $\dfrac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)} \xrightarrow{p.s.} 0$

ii) L'image de x_n dans $G/\tilde{P}_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-2}\}}$ converge p.s. vers une v.a. Z dont la loi est irréductible. On vérifie facilement que ceci signifie que les suites de v.a. $\{\dfrac{x_n(i,d)}{x_n(d,d)}\}$, $1\leq i\leq d-1$, converge p.s. vers des v.a. $x(i,d)$ presque sûrement non nulle ; par suite puisque $x_n \in SO(d)$, nous avons

$$|x_n(d,d)| \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}(x(i,d))^2}} > 0$$

Nous avons alors,

$$\|e_d\, x_n\, a_n\| = [\sum_{i=1}^{d} x_n^2(d,i)\ \beta_i^2(n)]^{1/2}$$

$$= |x_n(d,d)|\,\beta_d(n)\ \left(1+0\left(\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\right)\right)$$

$$\sim \frac{\beta_d(n)}{(1+\sum_{i=1}^{d-1} x^2(i,d))^{1/2}}$$

De même, $\|e_{d-1}\, x_n\, a_n\| = |x_n(d-1,d)|\ \beta_d(n)\ [1+0(\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)})]$

$$\sim \frac{|x(d-1,d)|}{(1+\sum_{i=1}^{d-1} x^2(i,d))^{1/2}}\ \beta_d(n) \quad .$$

D'autre part, nous avons

$$\|e_d\, x_n\, a_n \wedge e_{d-1}\, x_n\, a_n\| = \beta_d^2(n)\ |x_n(d,d)\ x_n(d-1,d)|\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\ \|y_n \wedge z_n\| \ ,$$

où $y_n = \left(\frac{x_n(d,1)}{x_n(d,d)}\,\frac{\beta_1(n)}{\beta_d(n)},\ldots,\frac{x_n(d,d-1)}{x_n(d,d)}\,\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\ ,\ 1\right) = e_d + 0\left(\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\right)$,

$z_n = (\alpha_n(d,1),\ldots,\alpha_n(d,d-1),0)$ avec

$$\alpha_n(d,i) = \left(\frac{x_n(d-1,i)}{x_n(d-1,d)} - \frac{x_n(d,i)}{x_n(d,d)}\right)\frac{\beta_i(n)}{\beta_{d-1}(n)}\ ,\quad 1\le i\le d-1 \ .$$

d'où

$$d_n(u,v) = \frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\ \frac{\|e_d \wedge z_n\| + 0\left(\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\right)}{|x_n(d,d)|\ |x_n(d-1,d)| + 0\left(\frac{\beta_{d-1}(n)}{\beta_d(n)}\right)} \xrightarrow{p.s.} 0$$

La première assertion du théorème est donc prouvée. Pour prouver la seconde nous montrons que $\mathbb{P}[\liminf_n \|z_n\| = 0] = 0$.

Appelons F l'espace des plans vectoriels de ${}^t\mathbb{R}^d$. Pour tout couple (u,v) de vecteurs non colinéaires de ${}^t\mathbb{R}^d$, nous notons $[\bar{u},\bar{v}]$ le plan de ${}^t\mathbb{R}^d$ défini par ces deux vecteurs. Le groupe $G=SL(d,\mathbb{R})$ opère de façon transitive sur F ; le sous-groupe de G laissant invariant l'élément $[\bar{f}_{d-1}\ ,\ \bar{f}_d]$ de F , où $f_{d-1} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ et $f_d = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ est

$\tilde{P}_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-3},\alpha_{d-1}\}} = \{((a_{ij})) \in SL(d,\mathbb{R}) : a_{i,j} = 0, \forall i,j \in \{1,\ldots,d-2\}$;

F s'identifie donc à l'espace homogène $G/\tilde{P}_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-3},\alpha_{d-1}\}}$

Soit ν une mesure de probabilité μ-invariante sur F. Puisque G_μ et ses sous-groupes d'indice fini ne sont pas contenus dans un sous-groupe parabolique propre de G, nous savons que ν est irréductible. La mesure ν est donc portée par $F' = \{[\bar{u},\bar{v}] \in F : u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \\ 1 \end{bmatrix} , \quad = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. D'autre part, la suite de mesures $\{kY_1\ldots Y_n\nu = x_n\, a_n\, k_n\nu\}$ converge p.s. vers une mesure de probabilité θ.

Soit $D = \{\omega\in\Omega : \lim_n\inf\|z_n(\omega)\| = 0\}$. Pour $\omega\in D$, choisissons une suite d'entiers $\phi(n)$ telle que $k_{\phi(n)}(\omega) \to$, $x_{\phi(n)}(\omega)\to$, $\frac{\beta_i(\phi(n))}{\beta_{i+1}(\phi(n))}(\omega) \to \alpha_i \in [0,1]$, et $\|z_{\phi(n)}(\omega)\| \to 0$.

On vérifie aisément que pour tout élément $[\bar{u},\bar{v}] \in F'$, la suite $\{x_{\phi(n)}(\omega)\, a_{\phi(n)}(\omega)\,.\,[\bar{u},\bar{v}]\}$ converge vers un élément de $F'' = \{[\bar{u},\bar{v}] \in F : (e_d u)(e_{d-1} v) - (e_{d-1} u)(e_d v) = 0\}$.

On en déduit que pour tout $\omega \in D$, la mesure $\theta(\omega)$ est portée par F". Si D était de mesure strictement positive, la mesure $\nu = \mathbb{E}[\theta]$ chargerait $F'' \subset \complement F'$, ce qui contredirait l'irréductibilité de ν. D est donc de mesure nulle et la deuxième assertion du théorème s'en déduit immédiatement.

Pour prouver la dernière assertion, considérons l'espace $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2 ; c'est-à-dire l'espace des couples (E_1,E_2) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tels que $E_1 \subset E_2$ et $\dim E_i = i$, $i=1,2$. L'espace $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ s'identifie au quotient de G par l'un quelconque des sous-groupes conjugés de $P_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-3}\}} = \{((a_{ij})) \in SL(d,\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \quad , \forall i\in\{d-1,d\} \; , \forall j \in \{1,\ldots,i-1\}\}$.

Appelons M l'espace constitué par l'espace produit $\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{P}^{d-1}$ auquel on a retiré sa diagonale. Nous compactifions M en lui adjoignant l'espace des drapeaux $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ de dimension 2 ; nous disons qu'une suite $\{(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\}$ d'éléments de M converge vers l'élément $(\bar{u},[\bar{u},\bar{v}])$ de $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ si la suite $\{(\bar{u}_n,[\bar{u}_n,\bar{v}_n])\}$ de

$\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$ associée à la suite $\{(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\}$ converge vers $(\bar{u},[\bar{u},\bar{v}])$. Nous notons $\overline{M}$ ce compactifié de M.

Posons alors :

$\sigma((\bar{u},\bar{v}),g) = \mathrm{Log}\, \dfrac{\|ug \wedge vg\|}{\|ug\|\,\|vg\|}\, \dfrac{1}{\|u\wedge v\|}$ $(g \in G,\ (\bar{u},\bar{v}) \in M)$ où u(resp. v) est un représentant dans $\mathbb{R}^d$, de norme 1, de $\bar{u}$(resp. $\bar{v}$) ; et

$\sigma((\bar{u},[\bar{u},\bar{v}]),g) = \mathrm{Log}\, \dfrac{\|ug \wedge vg\|}{\|ug\|^2\, \|u\wedge v\|}$ $(g \in G,\ (\bar{u},[\bar{u},\bar{v}]) \in \mathbb{P}^{d-1}_{1,2})$, où u(resp. v) est un représentant dans $\mathbb{R}^d$, de norme 1, de $\bar{u}$(resp. $\bar{v}$).

L'application σ est alors un cocycle sur $\overline{M} \times G$.

Toute mesure de probabilité μ-invariante ν sur $\overline{M}$ est portée par $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$. En effet d'après la première assertion du théorème, nous savons que pour tout $\xi \in M$, la suite $\{\xi Y_1 \ldots Y_n\}$ prend presque sûrement ses valeurs d'adhérence dans $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$. Les égalités

$$\nu = \mathbb{E}[\nu Y_1 \ldots Y_n] \quad , \forall n \geq 1 ,$$

nous montrent alors que ν est portée par $\mathbb{P}^{d-1}_{1,2}$.

Pour achever la démonstration du théorème (3.8), on procède alors comme nous l'avons fait pour le théorème (3.7).

(3.9) <u>Proposition</u>. *Avec les notations et les hypothèses du théorème (3.8), la suite* $\{\sup_{u,v} (\mathbb{E}[d_n(u,v)]) : n \geq 1\}$ *décroit vers zéro.*

<u>Preuve</u> : Il est clair que la suite $\delta_n = \sup_{u,v} \mathbb{E}[d_n(u,v)]$ est décroissante et que pour tout entier n, $\delta_n = E[d_n(u_n,v_n)]$, pour un certain couple (u_n,v_n) de vecteurs normés de $\mathbb{R}^d$.

Soit $\{\phi(n)\}$ une suite strictement croissante d'entiers. Quitte à prendre une sous-suite nous pouvons supposer que $u_{\phi(n)} \to u$ et $v_{\phi(n)} \to v$. Mais alors en reprenant le début de la preuve du théorème (3.8), on montre que

$$d_{\phi(n)}\, (u_{\phi(n)}, v_{\phi(n)}) \xrightarrow{p.s.} 0 ;$$

ce qui implique (théorème de convergence dominée) que la suite $\{\delta_{\phi(n)}\}$ converge vers zéro. D'où le résultat.

(3.10) <u>Corollaire</u>. *Reprenons les notations et les hypothèses du théorème (3.8). Nous savons (théorème (2.19)) qu'il existe sur* ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ *une unique mesure de probabilité* ν μ*-invariante et que la suite* $\{Y_1 \dots Y_n \nu\}$ *converge p.s. vers une mesure de Dirac* ε_Z.

Alors, si δ *désigne la distance sur* ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$ *définie par*

$\delta(\bar{u},\bar{v}) = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \, \|v\|}$, (u *et* v *représentants de* $\bar{u}$ *et* $\bar{v}$), *la suite* $\{\sup_{u \in {}^t\mathbb{P}^{d-1}} \mathbb{E}[\delta(Y_1 \dots Y_n \cdot \bar{u}, Z)]\}_{n \geq 1}$ *converge vers zéro. En particulier, on en déduit que : pour tout* $\bar{u} \in {}^t\mathbb{P}^{d-1}$, $Y_1 \dots Y_n \cdot \bar{u}$ *converge vers* Z <u>*en probabilité*</u> *; et, pour toute fonction* f *continue sur* ${}^t\mathbb{P}^{d-1}$,

$$\lim_n \sup_{u \in {}^t\mathbb{P}^{d-1}} \left| \int f(g.u)\, \mu^n(dg) - \int f(u)\, \nu(du) \right| = 0 .$$

4.- REMARQUE SUR LA NEGATIVITE DES A-COCYCLES

La propriété de négativité de la limite de la variable aléatoire $\alpha[H(u,Y_1\ldots Y_n)]$ pour $u \in B = {}_{NAM}\backslash^{G}$ et $\alpha \in \Delta_-$ peut être reliée à la négativité de certaines intégrales par rapport à la mesure K-invariante m sur B.

(4.1) Théorème. *Les formes linéaires* α *sur* $\mathfrak{a}$ *telles que l'intégrale* $\int_B \alpha[H(u,g)]\,m(du)$ *soit négative pour tout* g *forment un cône convexe dont les génératrices extrémales sont engendrées par les racines simples négatives (i.e. par* Σ*).*

Avant de justifier cet énoncé, montrons deux lemmes, pour $G = Sl(d,\mathbb{R})$. Soit $\delta(g)$ la borne inférieure des modules des mineurs de la matrice de g et fixons une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

(4.2) Lemme 1 : *Il existe un entier* $p > 0$ *et une constante* $C > 0$ *tels que pour tout* $b \in \mathrm{Exp}W$ *on ait, en posant* $\overline{H} = e^{H}$

$$\|\overline{H}(k,b)\ b^{-1}\| \le C\ \delta^{-p}(k)$$

Preuve. On décompose $k \in K$ sous la forme de Bruhat (si $\delta(k) > 0$) : $k = nan'$ $n \in N$, $n' \in \tilde{N}$, $a \in A$ ce qui donne $kb = nab(b^{-1}n'b)$ et $\overline{H}(k,b)b^{-1} = a\overline{H}(e,b^{-1}n'b)$ $\|\overline{H}(k,b)b^{-1}\| \le \|a\|\,\|\overline{H}(e,b^{-1}n'b)\|$.

Comme $\overline{H}(e,g)$ correspond aux valeurs propres de gg^t , $\|\overline{H}(e,g)\| \le \|g\|$.

De plus, il existe une constante D telle que $\sup_{b\in \mathrm{Exp}W} \|b_{n'}b^{-1}\| \le D\|n'\|$

et donc $\sup_{b\in \mathrm{Exp}W} \|\overline{H}(k,b)b^{-1}\| \le D\|a\|\|n'\|$.

Or les coefficients de a et n' sont donnés par des polynomes en les coefficients et les inverses des mineurs de k. Ceci donne, avec un entier p et une constante C' : $\|a\|\|n'\| \le c'(\delta(k))^{-p}$ et donc l'inégalité voulue avec $C = C'D$

(4.3) Lemme 2. *Si* α *est une forme linéaire sur* $\mathfrak{a}$, *la fonction de* k

$$\sup_{b\in \mathrm{Exp}W} |\alpha[\overline{H}(k,b)] - \alpha(\mathrm{Log}\ b)|$$

est majorée par une fonction intégrable.

Preuve. L'inégalité du lemme 1 donne avec des constantes A et B :

$$|\alpha[\bar{H}(k,b)] - \alpha(\text{Log } b) \leq A \text{ Log } C\delta^{-p}(k) = -Ap \text{ Log } \delta(k) + B$$

et il suffit donc de voir l'intégrabilité de $|\text{Log } \delta(k)|$. Celle-ci découle de l'inégalité justifiée en [8] :

$$m \ \{k \ ; \ |\delta(k)| \leq \varepsilon^d\} \leq C \ \varepsilon$$

avec une constante C.

Preuve du théorème (4.1). Montrons d'abord la négativité de $\int_K [\tilde{H}(k,g)] \, dk$ pour $\alpha \in \Delta_-$. Comme cette fonction de g est K-bi-invariante elle est aussi égale à $\int \alpha[H(u,h)] \, du \, d\mu(h)$ où μ est la probabilité K-bi-invariante (du) $*$ δ_g $*$ (du) ; si l'on remplace δ_g par une mesure ayant une densité et concentrée au voisinage de g, μ est remplacée par μ' et les intégrales correspondant à μ et μ' sont voisines. Comme μ' est bi-invariante et admet une densité, sa mesure stationnaire sur B est la mesure K-invariante et la loi des grands nombres justifiée pour $\alpha(H(u,Y_1 \, Y_n))$ nous dit que $\iint \alpha[H(u,h)] \, du \, d\mu'(h) < 0$.
Il en découle $\int \alpha[H(u,b)] \, du \leq 0$.

Inversement, supposons $\int \alpha[H(u,g)] \, du \leq 0$ et montrons que α est combinaison linéaire à coefficients positifs des racines négatives.

D'après le lemme 2, on a, avec une fonction intégrable u_α et $b \in \text{Exp}X$, $n>0$, $n\alpha(\text{Log } b) \leq \alpha[\tilde{H}(k,b^n)] + u_\alpha(k) \leq \int \alpha[\tilde{H}(k,b^n)] \, dk + \int u_\alpha(k) dk$.

Donc, d'après l'hypothèse

$$n\alpha(\text{Log } b) \leq \int u_\alpha(k) \, dk$$

et faisant tendre n vers l'infini : $\alpha(\text{Log } b) \leq 0$. Ceci permet d'écrire de manière unique $\alpha = \Sigma \, \lambda_i \, \alpha_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et α_i racines simples négatives.

L'ensemble des formes linéaires considérées dans l'énoncé est évidemment un cône convexe et d'après ce qui précède ses génératrices extrémales sont engendrées par les $\{\alpha, \alpha \in \Sigma\}$; Σ racines simples de Δ_- .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL A. : Introduction aux groupes arithmétiques ; Hermann Paris, 1969.

[2] FURSTENBERG H. : A Poisson for semi-simple Lie groups. Ann. of Math., 77, 1963, 335-386.

[3] FURSTENBERG H. : Non commuting randoms products. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.108, 1963, 377-428.

[4] GUIVARC'H : Sur les exposants de Liapounoff des marches aléatoires à pas markoviens. Séminaire de Rennes, 1981.

[5] HELGASON S. : Differential geometry and symetrie spaces. New York, Acad.Press.1962.

[6] RAUGI A. : Périodes des fonctions harmoniques bornées. Séminaire de Probabilités de Rennes, 1978.

[7] VIRTSER A.D. : Central limit theorem for semi-simple Lie groups. Theory of probability and its applications, 1970, vol. XV, 667-687.

[8] TUTUBALIN V.N. : Some theorems of the type of the strong law of large numbers. Theory Prob. Applications, 14, 2, (1969), pp. 313-319.