YVES GUIVARC'H

**Exposants de Liapunoff des marches aléatoires à pas markovien**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1980, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___1_A1_0>

# EXPOSANTS DE LIAPUNOFF DES MARCHES ALEATOIRES

# A PAS MARKOVIEN

Yves GUIVARC'H

On considère un espace probabilisé $(X,\pi)$ et un noyau Markovien $P(x,dy)$ laissant $\pi$ invariante ($\pi P = \pi$). On se donne un espace vectoriel $V$ de dimension finie $d$ sur $\mathbb{R}$, le groupe $G=Sl(V)$ des automorphismes de $V$ de déterminant unité et une fonction $f$ de $X$ dans $Sl(V)$ telle que, une norme sur $V$ étant choisie, la fonction $\|\text{Log}\ f(x)\|$ soit $\pi$-intégrable. On s'intéresse alors à la croissance du vecteur aléatoire $S_n(\omega)v = f(x_n)\ldots f(x_1)v$ où $v \in V$ et $\omega=(x_n)$ est une trajectoire de la chaine de Markov de noyau $P$. Le cas indépendant correspond à $X=G$ , $f=Id$ , $\pi=p$ et le produit $S_n(\omega)$ définit une marche aléatoire sur $G$ de loi $p$. Dans ce cas, envisagé en [3], la croissance exponentielle de $\|S_n(\omega)v\|$ a été obtenue et des résultats plus précis ont été justifiés en [12] et [15], sous l'hypothèse restrictive que la probabilité $p$ admette une densité . On montre ici que l'étude de $S_n(\omega)v$ est liée à celle de la direction de $S_n^{-1}(\omega)v'$ où $v'$ appartient au dual $V^*$ de $V$, question qui a été envisagée en [4] sousla forme ici utilisée. Elle fait l'objet du paragraphe A et la convergence obtenue ne fait pas intervenir la condition d'intégrabilité de $\text{Log}\|f(x)\|$. Ce résultat est appliqué aux exposants de Liapunoff du produit $S_n(\omega)$ [10], exposants que l'on montre être ici au nombre de $d$ et donc en nombre maximum. Le comportement asymptotique de ces produits aléatoires présente des applications à certains modèles physiques [5] ou démographiques [1] et apparaît également dans l'étude des phénomènes de rigidité [2] . En particulier les résultats ici obtenus précisent ceux de [7] , [11] et [16].

## A.- CONVERGENCE EN DIRECTION

On considère ici l'espace projectif $P(V)$, le noyau $\tilde{P}$ sur $X \times P(V)$ défini par

$$\tilde{P}\phi(x,v) = \int \phi[y, f(x)v \quad P^*(x,dy)]$$

où $P^*$ est l'adjoint de $P$ (par rapport à $\pi$). On se propose d'étudier les mesures $\lambda$ $\tilde{P}$-invariantes [$\lambda\tilde{P}=\lambda$] et d'en déduire des convergences en direction. On supposera le noyau $P$ propre au sens suivant : dès que $\pi(A)>0$, on a $P(x,A)>0$ p.p. Cette condition assure l'ergodicité de $P$, c'est-à-dire la constance des fonctions $P$-invariantes. Pour abréger, on dira que $\lambda = \int \delta_x \times \lambda_x \, d\pi(x)$ est de dimension maximum (resp propre) s'il n'existe pas de réunion dénombrable de sous-espaces projectifs $S_x$ (resp sous espace $H_x$) telle que, sur un ensemble non $\pi$-négligeable $\lambda_x(S_x)=1$ [resp $\lambda_x(H_x)>0$] .

On note $S_\pi$ le support de $f(\pi)$, $T_\pi$ le semi-groupe fermé engendré par $S_\pi$, $\Omega$ l'espace produit $X^{\mathbb{Z}}$ muni de la probabilité $P_\pi$ définie à l'aide du noyau $P(x,dy)$ et de la mesure initiale $\pi$, $x_n(\omega)$ les fonctions coordonnées sur $\Omega$ et l'on pose $X_n=f(x_n)$. Enfin $P_x$ désignera la probabilité naturelle sur l'espace des trajectoires partant de $x$. Rappelons qu'un semi-groupe $T \subset Sl(V)$ est dit proximal sur $P(V)$ si pour tout couple $(x,y)$ de $P(V)$, il existe une suite $t_n \in T$ avec $\lim_n t_n(x) = \lim_n t_n(y)$. On dira que $T$ opère de manière "totalement" irréductible sur $V$ ou $P(V)$ s'il n'existe pas de réunion finie de sous-espaces qui soit $T$-invariante. Ces conditions sont réalisées si, par exemple, $T$ contient un réseau de $Sl(V)$ [ 5 ] . Si $u$ est un automorphisme de $V$, il opère sur $P(V)-P(\mathrm{Ker}\,u)$ et cette application, définie en dehors d'un sous-espace projectif, sera dite projective si $\mathrm{Ker}\, u=\{0\}$, quasi projective si $\mathrm{Ker}\, u \neq 0$. On peut alors, de toute suite d'applications projectives, extraire une sous-suite convergeant, en dehors d'un sous-espace projectif, vers une application quasi projective. Ceci permet de montrer que la proximalité de $T$ implique que, pour tout mesure $m$ sur $P(V)$, il existe une suite $t_n$ de $T$ telle que $t_n m$ converge vers une mesure de Dirac [ 4 ] . On a alors la

Proposition :

*Supposons que T opère de manière totalement irréductible et proximale sur P(V) et soit* $\lambda$ *une probabilité* $\tilde{P}$*-invariante de projection* $\pi$*. Alors la suite de mesures* $X_1 \ldots X_n \lambda_{x_n}$ *est une martingale convergeant p.p. vers une mesure de Dirac. De plus* $\lambda$ *est unique.*

Cette proposition résultera de deux lemmes.

LEMME 1 :

*Supposons le noyau P propre et soient f et g deux fonctions mesurables telles que :* $\pi(dx)\ P(x,dy)$ pp $\quad f(y) = g(x)$

*Alors* $\quad f=g=cte \quad \pi$-pp

En particulier P est ergodique

Preuve : Posons $B_x = \{f=g(x)\}$ et, pour un intervalle I fixé $A_I = \{f \in I\}$ , ce qui donne $P(x,B_x) = 1$ $\pi$-pp. Si $\pi(A_I) > 0$, le fait que P est propre donne $P(x,A_I)>0$ et donc $B_x \cap A_I \neq \phi$ $\pi$-pp. On en déduit $g(x) \in I$ $\pi$-pp soit $g=f=cte$ $\pi$-pp.

LEMME 2 :

*Supposons le noyau P propre, le semi-groupe* $T_\pi$ *totalement irréductible et soit* $\lambda$ *une probabilité de projection* $\pi$ $\tilde{P}$*-invariante. Alors* $\lambda$ *est propre.*

Preuve : Remarquons que, $\mu$ étant une mesure bornée positive sur P(V) on peut définir par récurrence sa partie k-dimensionnelle $\mu^k$ qui est la plus grande mesure majorée par $\mu$ et portée par une réunion de sous-espaces de dimension $\leq k$, réunion qui est alors dénombrable. Observons de plus que pour les sous-espaces H de dimension k, $(\mu^k-\mu^{k-1})(H)$ atteint sa borne supérieure sur un nombre fini de sous-espaces H seulement. Posons alors $\lambda^k = \int \delta_x \times \lambda_x^k\, d\pi(x)$ et notons que l'équation d'invariance de $\lambda$: $\lambda_x = \int f(y)\ \lambda_y\ P(x,dy)$ entraine $\lambda_x^k \leq \int f(y)\ \lambda_y^k\ P(x,dy)$. Cette relation conduit en passant aux masses et en tenant compte de l'ergodicité de P à $\lambda_x^k = \int f(y)\ \lambda_y^k\ P(x,dy)$ et $\lambda_x^k(1) = cte$. Donc $\lambda^k$ est une nouvelle probabilité $\tilde{P}$-invariante de projection $\pi$ et, en prenant k minimum on peut supposer $\lambda=\lambda^k$ , $\lambda^{k-r}=0$ $(r>0)$. Soit m(x) la borne supérieure des nombres $\lambda_x(H)$ pour H de dimension k et $c(x)$ le nombre de sous-espaces où $\lambda_x(H)$ atteint son maximum. L'équation d'invariance donne $m(x) \leq \int m(y)\, P(x,dy)$ $(cm)(x) \leq \int (cm)(y) P(x,dy)$. On en tire $m(x)=cte=m$ et $c(x)=cte=c$. Si maintenant $S_x$ désigne la réunion des c sous-espaces correspondants on a

$cm = \lambda_x(S_x) = \int f(y)\, \lambda_y(S_x)\, P(x,dy)$ et donc $f(y) S_y = S_x$ $\pi(x)\, P(x,dy)$ p.p. Le lemme 1 donne alors $f(y)\, S_x = cte = S_y = S$ pp. La propriété d'irréductibilité de $T_\pi$ donne alors $k = \dim P(V)$, ce qui montre que $\lambda$ est propre.

Preuve de la proposition : L'équation d'invariance de $\lambda$ sous $\tilde{P}$ s'écrit

$$\int \delta_x \times \lambda_x \, d\pi(x) = \int \delta_y \times f(x)\, \lambda_x\, P^*(x,dy)\, d\pi(x)$$

$$\int \delta_x \times \lambda_x \, d\pi(x) = \int \delta_y \times f(x)\, \lambda_x\, P(y,dx)\, d\pi(y)$$

Soit $\pi$-pp $\lambda_x = \int f(y)\, \lambda_y\, P(x,dy)$.

La suite $X_1 \dots X_n \lambda_{x_n}$ est bien une martingale car $E_\pi(X_1 \dots X_{n-1} X_n \lambda_{x_n} / X_k ; k \leq n-1)$ n'est autre que $\int X_1 \dots X_{n-1}\, f(y) \lambda_y P(x_{n-1},dy)$ par définition de $P_\pi$. En tenant compte de l'équation d'invariance, cette intégrale devient $X_1 \dots X_{n-1} \lambda_{x_{n-1}}$.

Si alors d est une distance sur le compact des mesures de probabilité on a, en raison de la convergence de cette martingale vers la probabilité $\alpha_{x_0}$ :

$$\text{p.p} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq 0} d[X_1 \dots X_n \lambda_{x_n}, X_1 \dots X_n \dots X_{n+p} \lambda_{x_{n+p}}] = 0 .$$

Ceci fournit, par stationnarité, une sous-suite m d'entiers prositifs telle que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{p\geq 0} d[X_{-m} \dots X_0 \lambda_{x_0}, X_{-m} \dots X_0\, X_1 \dots X_p \lambda_{x_p}] = 0$$

Si alors les parties $A_1 \dots A_{p-1}, A_p$ de X vérifient $\pi(A_i) > 0$, le fait que P soit propre implique $\pi$-p.p $P_{x_0}\{x_1 \in A_1, \dots, x_p \in A_p\} > 0$ et ceci montre p.p l'existence de $y_1, \dots, y_p$ dans $A_x, \dots, A_p$ avec, en posant $f(y_i) = g_i$ :

$$\lim_{m\to\infty} d[X_{-m} \dots X_0 \lambda_{x_0}, X_{-m} \dots X_0 g_1 \dots g_{p-1}\, g_p\, \lambda_{g_p}] = 0 .$$

Cette propriété est d'ailleurs vraie pour tout p et lorsque chacun des $A_i$ décrit un ensemble dénombrable. En particulier fixons $A_p = A$ de façon que l'adhérence C de l'ensemble des mesures de la forme $f(a)\lambda_a$ ($a \in A$) ne contienne que des mesures propres, ce qui est possible d'après le lemme 2, et prenons les $A_i$ de la forme $f^{-1}(U)$ où U décrit une base dénombrable d'ouverts du support $S_\pi$ de $f(\pi)$. Si alors $\tau$ est une application quasi-projective adhérente à la suite $X_{-m} \ldots X_0$ on obtient, pour $\gamma \in (S_\pi)^{p-1}$ un $\eta$ voisin de $\gamma$ et un $\lambda$ de C avec $\tau\eta\lambda = \tau\lambda_{x_0}$ donc aussi un $\lambda'$ de C avec $\tau\lambda_{x_0} = \tau\gamma\lambda'$. Les propriétés de proximalité et d'irréductibilité de $T_\pi = \bigcup_{p \geq 0} (S_\pi)^p$ permettent de faire converger $\tau\lambda'$ vers une mesure de Dirac $\delta_z$ telle que $\tau(z)$ soit défini. Ceci montre que $\tau\lambda_{x_0}$ est une mesure de Dirac et donc, puisque $\lambda_{x_0}$ est propre, que $\tau$ est constante. La suite $X_{-m} \ldots X_0 \lambda_{x_0}$ n'a donc comme valeurs d'adhérence que des mesures de Dirac ; on a aussi pour toute mesure propre $\lambda$ : $\lim_m d[X_{-m} \ldots X_0 \lambda_{x_0}, X_{-m} \ldots X_0 \lambda] = 0$ . Par stationnarité on obtient une nouvelle sous-suite notée encore m telle que pour $\mu$ variant dans un ensemble dénombrable dense formé de mesures propres : $\lim_m d[X_1 \ldots X_m \lambda_{x_m}, X_1 \ldots X_m \lambda] = 0$ . Ceci donne $\alpha_\omega = \lim_n X_1 \ldots X_m \lambda$ et l'arbitraire de $\lambda$ permet de conclure que $\alpha_\omega$ est une mesure de Dirac.

Pour obtenir l'unicité de $\lambda$ observons que $E_\pi(\alpha_\omega / X_k ; k \leq 0) = \lambda_{x_0}$ . Observons également que, la détermination des sous-suites étant basées sur le théorème de Beppo-Levi, on peut, si $\nu$ est une probabilité $\tilde{P}$-invariante, choisir une sous-suite commune m telle que

$$\alpha_\omega = \lim_n X_1 \ldots X_m \mu$$

$$\beta_\omega = \lim_n X_1 \ldots X_m \mu$$

On en déduit $P_\pi$ p.p $\alpha_\omega = \beta_\omega$ et $\lambda_{x_0} = \nu_{x_0}$ soit $\lambda = \nu$

En renforçant la condition sur le noyau P on obtient le

<u>THEOREME</u> :

*Supposons P propre et quasi-compact dans* $\mathbb{L}^1(\pi)$. *Alors, pour toute mesure propre* $\mu$ *sur* $P(V)$ *la suite* $X_1 \ldots X_n \mu$ *converge p.p. vers une mesure de Dirac dès que* $T_\pi$ *opère de manière proximale et totalement irréductible.*

Montrons d'abord le lemme

LEMME 3 :

*Supposons P quasi-compact dans $\mathbb{L}^1(\pi)$ et soit $\pi$ une mesure $\tilde{P}$-invariante propre. Alors l'image essentielle de $x \to \lambda_x$ est formée de mesures de dimension maximum.*

Preuve : Ecrivons $P = K+R$ où K est un opérateur compact et R un contraction stricte de $\mathbb{L}^1(\pi)$ et $\mathbb{L}^\infty(\pi)$. Soit $\alpha_x (x \in X)$ la mesure sur $P(V)$ définie par $\alpha_x(\phi) = K\psi(x)$ où $\phi$ est continu et $\psi(y) = f(y)\ \lambda_y(\phi)$. On a alors, avec $\rho>0$ :
$\lambda_x = \int f(y)\ \lambda_y P(x,dy)$, $|(\lambda_x-\alpha_x)(\phi)| = |R\psi(x)| \leq (1-\rho)\ \|\psi\|_\infty \leq (1-\rho)\ \|\phi\|_\infty$
et donc, en variation : $\|\alpha_x-\lambda_x\| \leq 1-\rho$

Si la conclusion du lemme n'était pas vraie, il existerait une suite de fonctions continues $\phi_n$ sur $P(V)$ avec $\|\phi_n\| = 1$ et de supports convergeant vers un fermé contenu dans une réunion dénombrable de sous-espaces projectifs et une suite $\varepsilon_n$ de limite zéro avec $\forall n \quad \pi\{x \in X\ ;\ \lambda_x(\phi_n) \geq 1-\varepsilon_n\} > 0$ .
On aurait donc, à partir d'un certain rang : $\alpha_x(\phi_n) > \frac{\rho}{2}$ sur un ensemble non négligeable.

D'autre part, $\lambda_y$ étant propre $\pi$-pp, on aurait pp $\lim_n y\ \lambda_y(\phi_n) = 0$ et donc, par compacité de K dans $\mathbb{L}^\infty(\pi)$, la suite $\alpha_x(\phi_n) = K\psi_n(x)$ convergerait en norme essentielle vers zéro. Ceci contredit : $\forall n$, $\pi\{x \in X\ ;\ \alpha_x(\phi_n) > \frac{\rho}{2}\} > 0$.

Preuve du théorème : Soit $\tau$ une application quasi projective adhérente à la suite $X_1 \ldots X_n$ et soit $\mu_n$ une suite de mesures bornées par $\lambda_{X_n}$ telle que, le long de la sous-suite $n_k$ définissant $\tau$, $\mu_{n_k}$ admette comme valeur d'adhérence une mesure $\eta$ non nulle propre, ce qui est possible d'après le lemme. On a à la limite $\tau\eta = \|\eta\|\ \alpha_\omega$ puisque $\eta$ est propre et on en déduit que $\tau$ est constante avec $\tau\delta z = \alpha_\omega$ dès que z est défini. D'où, pour toute mesure propre $\mu$ : $\tau\mu = \alpha_\omega$, $\lim_n X_1 \cdot X_n \mu = \alpha_\omega$.

## B.- PROPRIETES DE CROISSANCE EXPONENTIELLE

On reprend les notations introduites au début et l'on notera par B l'espace des drapeaux sur P(V), c'est-à-dire l'espace des suites de d-1 sous-espaces projectifs strictement emboités et distincts de P(V). Deux quotients de B joueront un rôle important, l'espace des hyperplans de P(V) qui s'identifie à $P(V^*)$ et l'espace des éléments de contacts, c'est-à-dire des couples formés d'un point de P(V) et d'une droite passant par ce point. On note par $S_n(\omega)$ le produit $X_n \dots X_1 = f(x_n)\dots f(x_1)$ où $x_n(\omega)$ est une trajectoire de la chaine de Markov sur X de noyau P(x,dy). Pour un élément de contact $\xi = (\overline{v}, \overline{v\wedge w})$ défini par le vecteur v et le bivecteur $v\wedge w$ on pose $\sigma(g,\xi) = \frac{\|gv\wedge gw\|}{\|gv\|^2}$ où $g \in Sl(v)$ et l'on observera que $\sigma(gh,\xi) = \sigma(g,h.\xi)\,\sigma(h,\xi)$. Il y a une relation entre les comportements asymptotiques de $S_n(\omega)v$ et $S_n^{-1}(\omega)v'$ en direction $(v \in V, v' \in V^*)$ en raison de la proposition

<u>Proposition</u>.-

Soit $u_n$ une mesure de probabilité propre sur $P(V^*)$ et $u_n$ une suite d'applications projectives telle que $u_n^{-1}m$ converge vers une mesure de Dirac $\delta_s$. Alors si l'origine de l'élément de contact $\xi$ n'est pas dans l'hyperplan s on a

$$\lim_n \sigma(u_n,\xi) = 0$$

<u>Preuve</u> : On peut choisir une norme qui soit euclidienne et telle que v soit orthogonal à s. Prenons alors une base orthonormée avec $e_1 = v$ et donc $(e_1,\dots,e_d)$ dans s et écrivons $g \in Sl(V)$ sous forme polaire $g = kak'$ où k,k' sont orthogonales et a diagonale, de coefficients vérifiant $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d$.

Ceci implique que si $u_n = k^n a^n k'^n$, la mesure $(a^n)^{-1}m$ ne peut converger vers une mesure de Dirac que si $a_j = o(a_1)$ $(j>1)$, cette mesure de Dirac étant alors $\delta_s$. La convergence de $u_n^{-1}m$ vers $\delta_s$ donne alors $\lim_n (k'^n)^{-1}s = s$, $\lim_n k'^n e_1 = e_1$ puisque $k'^n$ est orthogonale. Supposant $\xi$ défini par $(e_1,e_2)$ ce qui est possible par le choix de $(e_2,\dots,e_d)$ on a la majoration

$$\sigma(u_n,\xi) = \frac{\|a^n k'^n e_1 \wedge a^n k'^n e_2\|}{\|a^n k'^n e_1\|^2} \leq \frac{\|a^n k'^n e_2\|}{\|a^n k'^n e_1\|}$$

Or $\|a^n k'^n e_2\| \leq a_1^n|<k'^n e_2,e_1>| + |a_2^n| = o(a_1^n)$ et
$\|a^n k'^n e_1\| \geq |a_1^n| \; |<k'_n e_1,e_1>| \sim |a_1^n|$

D'où $\lim\limits_n \sigma(u_n,\xi) = 0$

Les divers résultats vont se déduire du théorème fondamental suivant

THEOREME 1 :

*Supposons que le noyau* P *soit propre et quasi-compact dans* $\mathbb{L}^1(\pi)$, *que le semi-groupe* $T_\pi^{-1}$ *opère de manière proximale et totalement irréductible sur le dual de* P(V). *Alors pour tout élément de contact* $\xi$ *à* P(V), *la suite* $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma[S_n(\omega),\xi]$ *converge pp vers une fonction* $C(\xi)$ *strictement négative et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.*

On a d'abord le lemme suivant, bien connu en théorie ergodique [1-4].

LEMME 1 :

*Soit* $(E,\tau,\mu)$ *un système dynamique où* $\mu$ *est une mesure* $\tau$*-invariante finie ;* h *une fonction* $\mu$*-intégrable telle que* $\sum\limits_0^{n-1} h(\tau^k e)$ *converge pp vers* $-\infty$. *Alors* $\int h_E d\mu < 0$.

*Introduisons le noyau* $P^1$ *sur* $X \times B^1$ *défini par la formule*

$$P^1\psi(x,\xi) = \int\psi[y,f(x)\xi] \; P(x,dy)$$

*considérons les mesures* $\lambda^1$ *sur* $X \times B^1$ *de projection* $\pi$ *qui sont* $P^1$*-invariantes et désignons leur ensemble par* C .

LEMME 2 :

*Supposons que pour tout* $\lambda^1$ *de* C , *l'intégrale* $\int \operatorname{Log}\sigma[f(x),\xi] \; d\underline{\lambda}^1(x,\xi)$ *soit négative. Alors, pour tout* $\xi$, *la suite* $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma[S_n(\omega),\xi]$ *converge pp vers une fonction* $c(\xi)$ *strictement négative et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.*

Preuve : La suite $X_k(\omega)$ étant stationnaire, on sait déjà d'après [10], que $P_\pi$-pp la suite $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma[S_n(\omega),\xi]$ converge pour tout $\xi$ vers $C(\xi)$ dont les valeurs en nombre fini sont des quotients d'exposants de Liapunoff ; on a aussi, cette convergence ayant lieu dans $\mathbb{L}^1(P_\pi)$ :

$$C(\xi) = \lim_n \frac{1}{n} \int \mathrm{Log}\, \sigma [S_n(\omega),\xi] \; dP_\pi(\omega)$$

Mais la propriété de multiplicativité de $\sigma$ donne :

$$\mathrm{Log}\, \sigma[ S_n(\omega),\xi] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Log}\, \sigma[ X_{k+1},S_k.\xi] = \sum_0^{n-1} F(x_{k+1},S_k.\xi)$$

avec $F(x,\xi) = \mathrm{Log}\, \sigma[ f(x),\xi]$

soit $\frac{1}{n} \int \mathrm{Log}\, \sigma [S_n(\omega),\xi] \, dP_\pi(\omega) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \langle (P^1)^k F, \pi \times \delta_\xi \rangle$

L'ensemble des mesures sur $X \times B^1$ de projection $\pi$ est compact pour la topologie de la convergence sur les fonction $F(x,\xi)$ continues en $\xi$ et $\pi$-intégrables en x et l'on peut donc extraire de la suite $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (\pi \times \delta_\xi)(P^1)^k$ une sous-suite convergente vers une mesure $\lambda^1$ vérifiant $\lambda^1 P = \lambda^1$ et de projection $\pi$ : à la limite on a

$$C(\xi) = \lim_n \frac{1}{n} \int \mathrm{Log}\, \sigma[ S_n(\omega),\xi] \; dP_\pi(\omega) = \lambda^1(F)$$

Preuve du théorème : Pour démontrer l'inégalité $0 > \int \mathrm{Log}\, \sigma[ f(x),\xi] \; d\lambda^1(x,\xi)$ à laquelle on est ramené par lemme 2, on considère l'espace $E = X^{\mathbb{N}} \times B^1$ muni de la mesure $\mu = \int P_n \times \lambda^1_x \, d\pi(x)$ et la transformation $\overline{\theta}$ définie par

$$\overline{\theta}[ \omega,\xi] = [ \theta\omega, f(x_0).\xi]$$

où $x_0(\omega)$ est la première coordonnée de $\omega$ et $\theta$ la translation sur $X^{\mathbb{N}}$

La mesure $\overline{\mu}$ est $\overline{\theta}$-invariante car

$$\mu\overline{\theta} = \int P_x \theta \times f(x)\lambda^1_x d\pi(x) = \int P_y \times f(x)\lambda^1_x \, P(x,dy) \; d\pi(x)$$

Mais l'équation $\lambda^1 P^1 = \lambda^1$ permet d'écrire

$$\int \delta_z \times \lambda^1_z \; d\pi(z) = \int \delta_y \times f(x)\lambda^1_x \; P(x,dy) \; d\pi(x)$$

et donc $\mu\overline{\theta} = \int P_z \times \lambda^1_z \; d\pi(z) = \mu$

Enfin, posant $h(\omega,\xi) = \mathrm{Log}\, \sigma[ f(x_0),\xi]$ on a

$$\int \mathrm{Log}\sigma[ f(x),\xi] \, d\lambda^1(x,\xi) = \int h(\omega,\xi) \; dP_x(\omega) \; d\lambda^1_x \; (\xi,d\pi(x)) = \int h d\mu$$

Ayant observé que $\sum_{0}^{n-1} h_\circ \theta^{-k}(\omega,\xi) = \text{Log}\ \sigma[S_n(\omega),\xi]$ , il suffit donc de voir, en raison du lemme 1 que $\lim_n \sigma[S_n(\omega),\xi] = 0$ $\mu$-pp .

Les hypothèses du théorème permettent d'appliquer le théorème de A) à la suite de mesures sur $P(V^*)$ $\alpha_n = X_1^{-1}\ldots X_n^{-1}\lambda'$ où $\lambda'$ est propre et celui-ci donne $\lim_n \alpha_n(\omega) = \delta_{Z(\omega)}$ où $Z(\omega)$ est un élément de $P(V^*)$ et il suffit donc de voir, en raison de la proposition, que, pour $\omega$ fixé, l'ensemble des $\xi$ dont l'origine $\bar{\xi}$ appartient à l'hyperplan $Z(\omega)$ de $P(V)$ est $\lambda^1_{x_0}$-négligeable, ce qui signifie que la projection $\bar{\lambda}^1_{x_0}$ de $\lambda^1_{x_0}$ sur $P(V)$ ne charge pas l'hyperplan $Z(\omega)$. Mais l'invariance de $\lambda^1$ sous $P^1$ donne l'invariance de $\bar{\lambda}^1 = \int \delta_x \times \bar{\lambda}^1_x\, d\pi(x)$ et l'irréductibilité de $T_\pi^{-1}$ sur $P(V^*)$ donne l'irréductibilité de $T_\pi$ et $T_\pi^{-1}$ sur $P(V)$ ; d'après le lemme 2A, $\bar{\lambda}^1_x$ est propre $\pi$-pp ce qui donne bien $\bar{\lambda}^1_{x_0}[Z(\omega)] = 0$ $\mu$-pp

<u>REMARQUE</u>.- $C(\xi)$ est une constante $C$ dès que $\lambda^1$ est unique, ce qui est assuré, d'après la proposition de A dès que $T_\pi$ agit de manière proximale et totalement irréductible sur $P(V)$ et $P(\Lambda^2 V)$. Mais la constance de $C(\xi)$ résulte de l'irréductibilité seule car pour $\alpha$ donné l'ensemble des $v \in V$ tels que $\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\ \text{Log}\ \|S_n(\omega)\ v\| \leq \alpha$ est un sous-espace qui est $T_\pi$-invariant en raison de la définition de $P_\pi$ les limites possibles sont donc imposées par l'une d'entre elles. Alors, en particulier, en raison de l'égalité des limites de $\frac{1}{n}\ \text{Log}\ \|S_n(\omega)v\|$ et $\frac{1}{n}\ \text{Log}\ \|S_n(\omega)\ w\|$ on a

$$\text{Lim}_n \frac{1}{n} \int \text{Log} \frac{\|S_n v \wedge S_n w\|}{\|S_n v\|\,\|S_n w\|}\, dP_\pi(\omega) = C < 0$$

ce qui s'interprète géométriquement comme une décroissance exponentielle vers zéro de l'angle de $S_n v$ et $S_n w$. En particulier, dans le cas indépendant [ $f=Id$ , $\pi=p$] , ceci permet de montrer [ $\mathcal{S}$ ] que l'opérateur sur $P(V)$ défini par convolution avec $p$ se comporte essentiellement comme un barycentre de contractions, situation que l'on rencontre dans l'étude de modèles d'apprentissage.

Considérons l'espace $B$ des drapeaux sur $P(V)$, le noyau $\dot{P}$ sur $X \times B$ défini par

$$\dot{P}\psi(x,b) = \int \psi\ [y, f(x)b]\ P(x,dy)$$

et les mesures $\lambda$ sur X x B de projection $\pi$ qui sont $\dot{P}$-invariantes. Décomposons $g \in Sl(v)$ en produit d'une matrice orthogonale $k \in K$ et d'une matrice triangulaire supérieure t et désignons par $a_i(g,k)$ les coefficients diagonaux de la partie triangulaire de gk. En fait $a_i(g,k)$ ne dépend que de g et de l'image canonique de k dans B et il sera donc également noté $a_i(g,b)$. On vérifie également la relation de cocycle

$$a_i(gg',b) = a_i(g,g'.b)\ a_i(g',b)$$

Rappelons [10] que , $P_\pi$-pp, les suites $\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\|S_n(\omega)v\|$ convergent pour tout $v \in V$ et que les limites possibles prennent d valeurs au plus, de somme nulle, appelées exposants de Liapunoff du produit de matrices aléatoires $S_n(\omega)$. On peut calculer [10] , ces exposants en introduisant la transformation $\dot{\theta}$ sur $\Omega$ x B définie par $\dot{\theta}(\omega,b) = [\theta\omega, X_0(\omega)\ b]$ où $\Omega = X^Z$ et $X_0(\omega) = f[x_0(\omega)]$ et en choisissant une mesure $\dot{\mu}$ de projection $P_\pi$ sur $\Omega$ qui soit $\dot{\theta}$-invariante ; ces exposants avec leurs multiplicités sont alors donnés par les intégrales $\iint \mathrm{Log}\ a_i[X_0(\omega),b]\, d\,\dot{\mu}(\omega,b)$. Dans le cas présent, celles-ci se réduisent à

$$\gamma_i = \iint_{X\times B} \mathrm{Log}\ a_i[f(x),b]\, d\,\dot{\lambda}(x,b)$$

On posera enfin $\sigma_i(g,b) = \dfrac{a_{i+1}(g,b)}{a_i(g,b)}$

<u>THEOREME 2</u> :

*Supposons que le noyau P soit propre et quasi-compact dans $\mathbb{L}^1(\pi)$, que le semi-groupe $T_\pi^{-1}$ opère de manière proximale et totalement irréductible sur les espaces projectifs associés aux puissances extérieures de V et soit $\dot{\lambda}$ une mesure $\dot{P}$-invariante sur X x B de projection $\pi$. Alors, pour tout $b \in B$, la suite $\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\ \sigma_i[S_n(\omega);b]$ converge $P_\pi$-pp vers le nombre strictement négatif $\iint \mathrm{Log}\ \sigma_i[f(x),b]\, d\lambda(x,b)$ . En particulier, les exposants de Liapunoff de $S_n(\omega)$ prennent d = dim V valeurs distinctes.*

<u>Preuve</u> : Si k est une rotation transformant le drapeau défini par la base canonique $(e_i)$ en b on a $(a_1 \ldots a_i)(g,b) = \|gk(e_1 \wedge \ldots \wedge e_i)\|$ et ceci fournit, par les

mêmes considérations qu'au théorème 1, et en raison de la remarque suivant ce théorème, que, pour tout $b \in B$, la suite considérée ici converge bien vers une constante égale à l'intégrale $\iint \mathrm{Log}\ \sigma_i[f(x),b]\ d\lambda'(x,b)$. Pour voir que cette intégrale est négative il suffit donc de voir que $\lim\limits_n \frac{1}{n} \mathrm{Log}\ \sigma_i[S_n(\omega),e] < 0$. Or $\sigma_i(g,e) = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \|gE_i \wedge gF_i\| \, \|gE_i\|^{-2}$ où $E_i = e_1\wedge\ldots\wedge e_i$ et $F_i = e_1\wedge\ldots\wedge e_{i-1}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 1 en remplaçant $V$ par $\Lambda^i V$, $\xi$ par $(E_i, E_i\wedge F_i)$, puisque le dual de $\Lambda^i V$ n'est autre que $\Lambda^{d-i} V$.

Les intégrales $\gamma_i = \iint_{X\times B} \mathrm{Log}\ a_i[f(x),b]\, d\lambda(x,b)$ vérifient donc $\gamma_i > \gamma_{i+1}$, ce qui justifie l'assertion relative aux exposants de Liapunoff.

Afin d'énoncer un résultat général pour les groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts, précisons quelques notations empruntées à [ 9 ]. Si G est un tel groupe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, on peut le faire opérer par l'action adjointe sur $\mathcal{G}$ et on a alors $G \subset Sl(\mathcal{G})$. Ayant fixé un sous-groupe compact maximal K de G et un produit scalaire sur $\mathcal{G}$ K-invariant, on désigne par A un sous-groupe connexe abélien formé d'éléments auto-adjoints et qui est maximal. Un tel sous-groupe appelé polaire est isomorphe à $\mathbb{R}^t$ et formé de matrices diagonales. Si $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Lie de A on désigne par $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ un système fondamental de racines simples de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}$ et toute racine $\alpha$ est alors conbinaison linéaire à coefficients entiers de même signe des $\alpha_i$ , ce qui précise la notion de racine positive.
Posons alors $\mathcal{G}_\alpha = \{x \in \mathcal{G},\ [a,x] = \alpha(a)X\ \forall a \in \mathcal{A}\}$

$$\mathcal{N} = \underset{\alpha<0}{\oplus} \mathcal{G} \quad , \quad \tilde{\mathcal{N}} = \underset{\alpha<0}{\oplus} \mathcal{G} \quad , \quad \mathcal{M} + \mathcal{A} = \mathcal{G}$$

et désignons par N, $\tilde{N}$ les sous groupes [nilpotents] de G correspondants. Si M est le centralisateur de A dans K, la frontière de Furstenberg de G [ 4 ] est alors $B = {}^G/_{MAN}$ . Soit a(g) la composante sur A de g dans la décomposition de g sous forme d'Iwasawa $G = KAN$ et pour $\alpha$ forme linéaire sur $\mathcal{A}$, posons $\sigma_\alpha = e^\alpha[a(gk)]$ pour $g \in G$, $k \in K$, expression dépendant de k seulement par l'image $\bar{k}$ dans B. Dans les notations introduites précédemment le rôle de Sl(V) est joué par $G \subset Sl(\mathcal{G})$ et leur traduction est immédiate ; en particulier l'espace des drapeaux de V a été noté B, ce qui est compatible avec la définition ici posée. Les propriétés d'irréductibilité doivent être ici renforcées : une partie U de $G \subset Sl(\mathcal{G})$ sera dite algébriquement dense si les polynomes nuls sur U s'annullent sur G. Enfin on note $G_\pi$ le sous-groupe fermé engendré par $T_\pi$. On a alors le

<u>THEOREME 3</u> :

*Supposons que le noyau P soit propre et quasi-compact dans $\mathbb{L}^1(\pi)$, que $G_\pi$ soit algébriquement dense, que $T_\pi$ opère de manière proximale sur B et soit $\dot{\lambda}$ une mesure $\dot{P}$-invariante de projection $\pi$. Si $\alpha$ est une forme linéaire négative sur $\mathcal{A}$, alors pour tout $b \in B$, la suite $\frac{1}{n} \operatorname{Log} \sigma_\alpha[S_n(\omega),b]$ converge $P_\pi$-pp vers le nombre strictement négatif $\iint \operatorname{Log} \sigma_\alpha[f(x),b]\, d\dot{\lambda}(x,b)$.*

*Enfin $\lambda$ est unique si $T_\pi$ est proximal sur* B.

<u>Preuve</u> : On va appliquer le théorème 1 à l'action de G sur un espace projectif P(V) où V est l'espace d'une représentation irréductible de G telle que le sous-groupe MAN soit le stabilisateur d'un point e de P(V) [9], ce qui identifie B à une sous-variété compacte de P(V). Pour un élément de contact $\xi$ tangent en e à B, on a alors $\sigma(g,\xi) = \sigma(kt,\xi) = \sigma(t,\xi)$ où $k\in K$ et $t\in AN$ ; d'autre part $\sigma(g,\xi)$ ou $\sigma(t,\xi)$ n'est autre que le coefficient de multiplication des distances dans la direction de $\xi$, lorsqu'on effectue l'application t laquelle conserve le point e et donc l'espace tangent à B en e. Mais l'action de $t \in MAN$ sur l'espace tangent en e à B s'identifie à celle de Adt sur $\tilde{\mathcal{N}}$, action définie par passage au quotient suivant l'algèbre de Lie de MAN. Comme, pour les racines simples $\alpha_i$ : $[\mathcal{A}+\mathcal{N}, \mathcal{G}_{-\alpha_i}] \subset \mathcal{M}+\mathcal{A}+\mathcal{N}$ on a, pour $\xi_i \in \mathcal{G}_{-\alpha_i}$ et $t\in MAN$ :
$\mathrm{Adt}(\xi_i) = e^{-\alpha_i}[a(t)]\,\xi_i \pmod{\mathcal{M}+\mathcal{A}+\mathcal{N}}$

D'où $\sigma(g,\xi_i) = e^{-\alpha_i}[a(g)] = \sigma_{-\alpha_i}(g,e)$ et $\sigma(g,k\xi_i) = \sigma_{-\alpha_i}(g,k)$ $(k\in K)$ d'après les propriétés multiplicateurs de $\sigma$ et $\sigma_{\alpha_i}$.

Il est clair, d'après la densité de $G_\pi$, que $T_\pi^{-1}$ opère de manière totalement irréductible sur le dual de P(V). D'autre part par construction de V, il existe un point $e^*$ de $P(V^*)$ dont le stabilisateur est MAN et B s'identifie aussi à une sous-variété de $P(V^*)$ non contenue dans un sous-espace projectif. La proximalité de l'action de $T_\pi^{-1}$ sur B fournit alors la proximalité sur $P(V^*)$ tout entier, et les hypothèses du théorème 1 sont donc satisfaites. On en déduit la convergence de la suite $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_{-\alpha_i}[S_n(\omega),k]$ vers un nombre strictement négatif C(k) qui est aussi la limite de $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma[S_n(\omega),k\xi_i]$. Ce nombre est indépendant de k en raison de la remarque suivante : si $\rho$ est une représentation de G dans un espace W, elle se décompose en représentations irréductibles $\rho_i$, pour lesquelles la limite de $\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\rho_i[S_n(\omega),w_i]\|$ est indépendante de $w_i\neq 0$, propriété qui se transmet à $\rho$ et $w\in W$ dont les composantes $w_i$ sont non nulles à cause de la relation

$$\|\rho[S_n(\omega)w]\|^2 = \sum_i \|\rho_i\, S_n(\omega)w_i\|^2$$

Enfin, en raison de l'invariance de $\dot{\lambda}$ et de la propriété de multiplicateur de $\sigma_{\alpha_i}$, on a

$$\frac{1}{n}\iint \mathrm{Log}\ \sigma_{-\alpha_i}[S_n(\omega),k]\,dP_x(\omega)\ d\dot{\lambda}(x,\bar{k}) = \iint \mathrm{Log}\sigma_{-\alpha_i}[f(x),k]\,d\dot{\lambda}(x,\bar{k})$$

ce qui fournit le résultat voulu dans le cas particulier où $\alpha = -\alpha_i$. Dans le cas général, la forme linéaire $\alpha$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des $\alpha_i$ et le résultat s'étend donc à ce cas. L'unicité de $\dot{\lambda}$ découle directement de A).

Décrivons enfin un type de situation, considéré de manière générale en [7], où s'introduisent des marches aléatoires à pas markovien sur des groupes discrets non nécessairement représentés matriciellement. Soit $V$ une variété riémanienne $\Gamma$ un groupe d'isométries de $V$ tel que le quotient $V/_\Gamma$ soit une variété compacte et fixons un domaine fondamental $D$ de $\Gamma$ dans $V$, domaine que l'on identifie à $V/_\Gamma$. Considérons le mouvement brownien sur $V/_\Gamma$ et munissons l'espace $\Omega$ de ses trajectoires $\omega$ de la mesure canonique définie à l'aide de la mesure riémanienne $m$ comme mesure initiale ; cette mesure est alors invariante par le semi-groupe $\theta^t$ de translation. On peut relever ce mouvement brownien dans le revêtement $V$ et l'on note alors $S_t(\omega)$ la position atteinte dans $V$, à l'instant $t$, en suivant la trajectoire sur $V$ définie par $\omega$ et partant d'un point de $D \sim V/_\Gamma$. Notons alors, pour $v \in V$, $\bar{v}$ l'image de $v$ dans $V/_\Gamma \sim D$ et $\gamma(v)$ l'isométrie de $V$ définie par $\gamma(\bar{v}) = v$. Si l'on pose $\sigma(t,\omega) = \gamma[S_t(\omega)]$, on a la relation de cocycle sur $\mathbb{R}\times\Omega$ à valeur dans $\Gamma$:

$$t+t'\,\sigma(t \in t',\omega) = \sigma(t,\theta^{t'}\omega)\ \sigma(t',\omega)$$

et ce cocycle s'identifie à une marche aléatoire à pas markovien. En effet, notons $Q^t$ le noyau de transition du mouvement brownien sur $V$, prenons $X = V$ et soit $P$ le noyau sur $X$ défini par $P(v,dv') = Q[v,dv']$, noyau qui admet $\pi = mQ$ comme mesure invariante et qui vérifie les conditions de régularité introduites en A. Si l'on choisit la fonction $f$ par $f(v) = \gamma(v)$, on obtient, en désignant par $x_k(\omega)$ la position de la chaine de noyau $P$ à l'instant $k$ :

$$\sigma(n,\omega) = f(x_n)\ f(x_{n-1})\dots f(x_1)$$

Dans le cas particulier où V est elle-même un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à droite et $\Gamma$ un sous-groupe discret, la quantité $\sigma(t,\omega)$ s'écrit à l'aide d'un cocycle $\eta$ sur $G\times{}^{G}/_{\Gamma}$ à valeurs dans $\Gamma$ . En effet, posons pour $g\in G$ et $\bar{x} \in {}^{G}/_{\Gamma} \sim D$ : $\eta(g,x) = \gamma(\overline{gx})$ ce qui implique :

$\eta(gh,x) = \eta(g,h\,x)\,\eta(h,x)$ où $(g,h) \in G\times G$ et permet d'écrire $\sigma(n,\omega) = \gamma[S_n(\omega)] = \eta[S_n(\omega),e]$ . Dans ce cas particulier des informations sur le cocycle $\eta(g,x)$ et par conséquent sur $\Gamma$, peuvent être obtenues à l'aide de la marche aléatoire $\sigma(n,\omega)$ qui a été envisagée sous une forme voisine en [ 2 ]. Dans la situation générale ici envisagée, le cocycle $\eta$ n'est pas défini mais on peut lui substituer la marche aléatoire $\sigma(n,\omega)$ dont l'étude présente un intérêt pour la structure de $\Gamma$ et le mouvement brownien sur V lui-même.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN : Ergodic theorems in demography - B.A.M.S., juin 1979.

[2] FURSTENBERG : Séminaire Bourbaki, 1979-1980, n° 559.

[3] FURSTENBERG : Non commuting random products - T.A.M.S. 108, 1963, p.377-428.

[4] FURSTENBERG : Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces - Proc. Symp. Pure Math vol 26, 1972, p.193-229.

[5] GOL'DSEID, MOLCHANOV, PASTUR : A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator. Funct. Anal. Appl. 11-1 (1977), p.1-10.

[6] GUIVARC'H : Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires - Lecture Notes In Math 774 (1980), p.176-250.

[7] GUIVARC'H : Marches aléatoires à pas markovien - C.R.A.S. Paris t.289, 1979.

[8] LE PAGE : Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires - C.R.A.S. 1981 (à paraître).

[9] MOSTOW : Strong rigidity of locally symmetric spaces - Annals of Math Annals of Math Studies 78 (1973).

[10] OSEDELETS : Trans Moscow Math Soc 19, 1968, p. 197-231.

[11] ROYER : Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires - Université P. et M. Curie, mai 1979.

[12] RAUGI : Fonctions harmoniques et théorèmes limites sur les groupes de Lie - Bul S.M.F. mémoire 54, 1977.

[13] SCHMIDT : Lecture on cocycles of ergodic transformations groups ; Tata Institute 1977.

[14] TUTUBALIN : Some theorems of the type of laws of large numbers - Theory of Proba. 1969, p.313-319.

[15] TUTUBALIN : The central limit theorem for products of matrices - Symposias math. 1977, p.101-116.

[16] VIRTSER : Theory of Proba 24 B 1979, p.361-370.