

P. LESAIN

**Équation de la chaleur en mailles variables**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-19

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1978\\_\\_S4\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__S4_A6_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EQUATION DE LA CHALEUR EN MAILLES VARIABLES

---

P. LESAIN (\*)

I - Introduction -

On se propose ici d'étudier différentes méthodes continues et discontinues pour résoudre l'équation de la chaleur. Ecrivant cette équation sous forme de système du premier ordre et utilisant des éléments finis du type espace temps comme dans [1], [3], on peut définir grâce à des techniques décrites en particulier dans [6], [7] des méthodes continues et discontinues. Appliquées au cas des mailles rectangulaires, les éléments finis étant construits avec des polynômes de degré  $\leq 1$ , ces méthodes permettent de retrouver certains schémas classiques (implicite pur, Crank Nicolson, box schème) toujours stables dans le cas des mailles rectangulaires. On étudie ici la stabilité de ces schémas pour des mailles quadrilatérales quelconques.

(\*) Laboratoire d'analyse numérique et d'informatique  
Faculté des Sciences et des Techniques  
La Bouloie - Route de Gray

2 - Position du problème et schémas numériques -

Soit le domaine  $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 ; g_1(t) < x < g_2(t), 0 < t < T\}$

On considère l'équation de la chaleur à coefficients variables

$$(2.1.) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + d(x, t) u = f$$

dans  $\Omega$  avec les conditions initiales et aux limites.

$$(2.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad g_1(0) < x < g_2(0)$$

$$(2.3) \quad u(g_1(t), t) = u(g_2(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T$$

On suppose que les fonctions  $a$ ,  $c$  et  $f$  sont continues dans  $\overline{\Omega}$ , avec  $a_1 \geq a(x, t) \geq a_0 > 0$ . En changeant  $u$  en  $u \exp \lambda t$ , on peut toujours supposer que l'on a  $d(x, t) \geq d_0 > 0$ , la constante  $d_0$  étant suffisamment grande.

Si on pose :

$$(2.4) \quad v = a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'équation (2.1) est équivalente au système

$$(2.5) \quad A_1 \frac{\partial U}{\partial t} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x} + A_0 U = F$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_0 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

La relation (2.5) définit un système symétrique positif au sens de Friedrichs [2] et on peut, pour résoudre numériquement ce système, utiliser des techniques inspirées de celles exposées dans [6], [7].

Pour cela, soit à l'instant  $t_n$  une subdivision de l'intervalle  $[g_1(t_n), g_2(t_n)]$  en  $I_n$  intervalles et soient  $x_i^n$  les extrémités de ces intervalles :

$$g_1(t_n) = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{I_n}^n = g_2(t_n).$$

On suppose que l'on connaisse une approximation  $U_h(t_n)$  de la solution exacte à l'instant  $t_n$ , chaque composante  $u_h(t_n)$  et  $v_h(t_n)$  étant polynomiale sur chaque intervalle  $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ . On se propose de calculer une approximation

$u_h(t_{n+1})$  de la solution à l'instant  $t_{n+1}$  (On supposera que  $I_n = I_{n+1} = I$  et que les espaces des polynômes utilisés pour les fonctions  $u_h$  et  $v_h$  sur l'intervalle  $[x_i^{n+1}, x_{i+1}^{n+1}]$  sont les mêmes que ceux utilisés sur l'intervalle  $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ ).

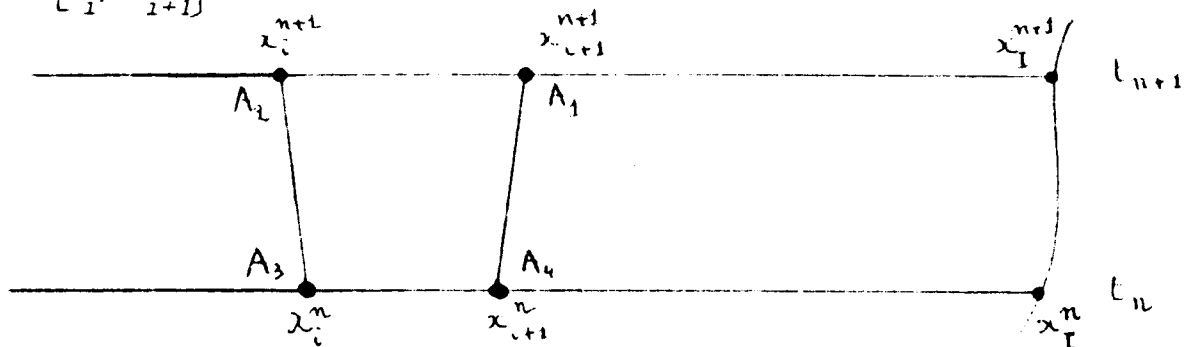
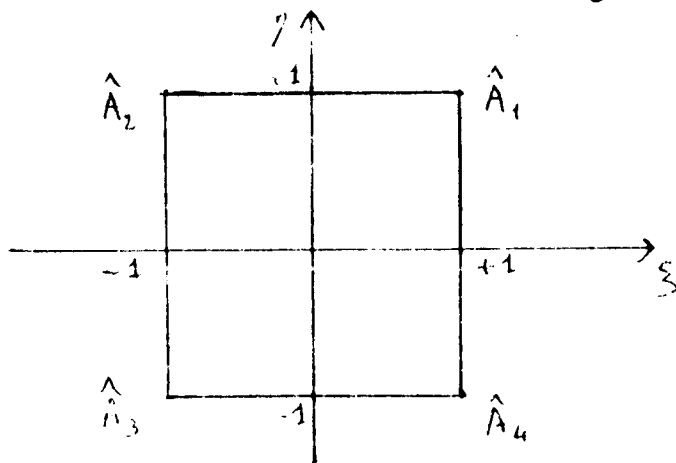


Figure 2.1.

Décrivons d'abord les espaces de fonctions permettant de définir la solution approchée.

Le quadrilatère  $K = A_1 A_2 A_3 A_4$  est l'image du carré de référence  $\hat{K} = [-1, +1] \times [-1, +1]$  par la transformation biofficine  $F_K$  :

$$(2.6) \quad F_K : \begin{cases} x = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4 \\ t = \frac{(1+\eta)}{2} t_1 + \frac{(1-\eta)}{2} t_2 \equiv \frac{1+\eta}{2} t_{n+1} + \frac{1-\eta}{2} t_n \end{cases}$$



On pose :

$$(2.7) \quad P_K^{A, \ell} = \{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} ; \hat{p} \in Q_{k, \ell} \}$$

où  $Q_{k, \ell}$  désigne l'espace des polynômes de la forme  $\hat{p} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} a_{ij} \xi^i \eta^j$ .

Soit  $\mathcal{D}_n$  la partie de  $\Omega$  comprise entre  $t=t_n$  et  $t=t_{n+1}$ .

Soit  $S_{in}^n$  le côté  $x_i^n x_i^{n+1}$  ( $A_3 A_2$  sur la figure).

Soit  $X_{k,1}$  l'espace des fonctions de  $L^2(\mathcal{D}_n)$  dont la restriction à chaque quadrilatère  $K_{i,n}$  appartient à  $P_K^{k,1}$ .

Soit  $V_{k,1}$  l'espace des fonctions de  $H^1(\mathcal{D}_n) \cap C^0(\mathcal{D}_n)$  dont la restriction à chaque quadrilatère  $K_{i,n}$  appartient à  $P_K^{k,1}$  ( $k \geq 1$ ).

Pour tout quadrilatère  $K \subset \mathcal{D}_n$ , on définit le long de la frontière  $\partial K$ ,

$$B_K = A_1 \nu_{t,K} + A_2 \nu_{x,K} \quad ,$$

où  $\nu_{x,K}$  et  $\nu_{t,K}$  sont les composantes de la normale extérieure à  $\partial K$ .

D'autre part, sur  $\partial K$ , on se donne une matrice  $M_K$  telle que  $M_K + M_K^t \geq 0$ . Sur les frontières  $x=g_1(t)$  et  $x=g_2(t)$ , on a de plus  $\text{KER}(B-M) + \text{KER}(B+M) = \mathbb{R}^2$ , et la relation  $(B-M)u = 0$  est équivalente à  $u=0$ .

#### Méthodes discontinues -

On cherche  $u_h = (u_h, v_h) \in X \times X' = X_{k,1} \times X_{k,1}'$ , tel que, pour tout

$\phi_h \in X \times X'$

$$(2.8) \quad \sum_{K \subset \mathcal{D}_n} \left\{ \int_K (A u_h - F, \phi_h) dx dt - \int_{\partial K} \left( \frac{B_K - M_K}{2} (u_h^{\text{int}} - u_h^{\text{ext}}), \phi_h \right) ds \right\} = 0$$

où  $u_h^{\text{ext}}$  désigne la valeur de la solution le long de  $\partial K$ , à l'extérieur de  $K$ , avec  $u_h^{\text{ext}} = 0$  pour  $x=g_1(t)$  et  $x=g_2(t)$ .

Pour  $t=t_n$ , on a  $B_K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $M_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et pour

$t=t_{n+1}$   $B_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_K = B_K$ .

Le long du côté  $S_{i,n}$ , on définit  $M_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix}$  et on pose :

$a_i = \frac{x_i^n - x_i^{n+1}}{|S_{in}|}$  ,  $b_i = \frac{t_n - t_{n+1}}{|S_{i,n}|}$  , où  $|S_{i,n}|$  désigne la longueur du côté  $S_{i,n}$ .

Pour traduire les conditions aux limites (2.3) on a :

$$M_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_I = \begin{pmatrix} \alpha_I & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_I \geq 0$$

La méthode discontinue s'écrit alors : Trouver  $(u, v) \in X \times X'$  tel que pour tout  $(\varphi, \psi) \in X, X'$

$$(2.9) \quad \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + du - f \right) \varphi \, dx \, dt \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} \left( (a_{i+1} - d_{i+1})(u_{i+1}^- - u_{i+1}^+) + (b_{i+1} + \beta_{i+1})(v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) \right) \varphi_{i+1}^- \, ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} \left( (-a_i - d_i)(u_i^+ - u_i^-) + (-b_i + \beta_i)(v_i^+ - v_i^-) \right) \varphi_i^+ \, ds \right. \\ \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( u(x, t_n+0) - u(x, t_n-0) \right) \varphi(x, t_n+0) \, dx \right\} = 0$$

$$(2.10) \quad \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \right) \psi \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} \left( (b_{i+1} - \beta_{i+1})(u_{i+1}^- - u_{i+1}^+) - \gamma_{i+1}(v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) \right) \psi_{i+1}^- \, ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} \left( (-b_i - \beta_i)(u_i^+ - u_i^-) - \gamma_i(v_i^+ - v_i^-) \right) \psi_i^+ \, ds \right\} = 0$$

où pour toute fonction  $u, v, \varphi$  ou  $\psi$ ,  $u_i^+$  (resp.  $u_i^-$ ) désigne la valeur de  $u$  le long de  $S_{i,n}$ , à droite (resp. à gauche) de  $S_{i,n}$ .

Proposition 2.1. -

On suppose que  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  sont constants et que les intervalles  $x_{i+1} - x_i$  sont égaux à  $h$ . On suppose d'autre part que l'on choisit  $M_1 = 0$ ,

$$1 \leq i \leq I-1, \quad \alpha_0 = \alpha_I = 0.$$

On suppose aussi que  $a(x, t)$  est constante.

Alors pour  $k = l = k' = l' = 0$ , la méthode précédente s'écrit :

$$(2.11) \quad \frac{1}{\Delta t} \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2k} \left( v_{i+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

$$(2.12) \quad -\frac{1}{2k} \left( u_{i+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{a} v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0,$$

où  $u_{i+1/2}^{n+1/2}$  désigne la valeur de  $u_h$  dans la maille  $K_{i,n}$ ,  $\bar{u}_{i+1/2}^{n+1/2}$  et  $\bar{f}_{i+1/2}^{n+1/2}$

désignent les moyennes respectives  $d$  et  $f$  dans la maille  $K_{i,n}$ .

On obtient ainsi le schéma implicite pur et la méthode (2.9), (2.10) est une généralisation de ce schéma au cas des domaines variables et (ou) en utilisant des polynômes de degré plus élevé.

Soit  $V \equiv \overset{\circ}{V}_{kh}$  le sous espace des fonctions de  $V_{kl}$  nulles pour  $x=g_1(t)$  et  $x=g_2(t)$ . On peut définir la méthode discontinue (2.8) en remplaçant l'espace  $X$  par l'espace  $V$  et on obtient.

Trouver  $u, v \in V_X X'$  tel que pour tout  $(\varphi, \psi) \in V_X X'$  :

$$(2.13) \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + du - f \right) \varphi \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} b_{i+1} (v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) \varphi_{i+1} \, ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} -b_i (v_i^+ - v_i^-) \varphi_i \, ds + \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} (u(x, t_{n+0}) - u(x, t_{n-0})) \varphi(x, t_{n+0}) \, dx \right\} = 0$$

$$(2.14) \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \right) \psi \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} -\gamma_{i+1} (v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) \psi_{i+1}^- \, ds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} -\gamma_i (v_i^+ - v_i^-) \psi_i^+ \, ds \right\} = 0$$

L'équation (2.13) peut encore s'écrire :

$$(2.15) \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} + du - f \right) \varphi + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \, dx \, dt \right. \\ \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x, t_{n+0}) - u(x, t_{n-0})) \varphi(x, t_{n+0}) \, dx \right\} = 0$$

Proposition 2.2. - On fait les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.1., avec cette fois-ci  $k=1, k'=l=l'=0$ . On suppose d'autre part qu'on utilise la formule des trapèzes pour calculer les intégrales  $\int (du-f) \, dx \, dt$ . Alors l'équation (2.14) s'écrit :  $-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} = 0$  et on a :

$$\frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{a}{\rho \Delta z} (u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_i^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}) + du_i^{n+\frac{1}{2}} = f_i^{n+\frac{1}{2}} \\ u_0^{n+\frac{1}{2}} = u_I^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

La méthode (2.14), (2.15) est donc une autre généralisation du schéma implicite pur.

Remarque 2.1. - On suppose que  $M_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq I-1$ ,  $\alpha_0 = \alpha_I = 0$ , alors pour  $k' = k-1$ ,  $l = l'$ , on peut éliminer  $v$  entre les relations (2.14) et (2.15), à condition de modifier la relation (2.14) comme suit :

$$(2.16) \quad \int_{K_{i,n}} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \right) \varphi \frac{J_{i,n}(x,t)}{J_{i,n}(\xi,\eta)} dx dt = 0$$

où  $J_{i,n}$  désigne le Jacobien de la transformation  $F_{K_{i,n}}$ . On obtient alors l'équation :

$$(2.17) \quad \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + du - f \right) \varphi + a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx dt + \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} (u(x, t_n + 0) - u(x, t_n - 0)) \varphi(x, t_n + 0) dx \Big\} = 0$$

Méthodes continues -

On cherche  $U_h = (u, v) \in \overset{\circ}{V}_{k,l} \times X_{k',l'}$ , tel que pour tout  $(\varphi, \psi) \in \overset{\circ}{V}_{k,l-1} \times X_{k',l'}$ .

$$(2.18) \quad \sum_i \int_{K_{i,n}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} + du - f \right) \varphi + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

$$(2.19) \quad \sum_i \left\{ \int_{K_{i,n}} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \right) \psi dx dt + \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} \gamma_{i+1} (v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) \psi_{i+1}^- ds + \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} \gamma_i (v_i^+ - v_i^-) \psi_i^+ ds \right\} = 0$$

Dans le cas où  $\gamma_i = 0$  et avec des intervalles  $x_i^n - x_{i+1}^n = h$ , la relation (2.19) s'écrit (pour  $k = k'$ ,  $l' = 1$ )

$$-\frac{\partial u}{\partial x} + v = 0 \quad \text{sur chaque maille ;}$$

la fonction  $v$  étant alors continue par rapport à la variable  $t$ . La relation (2.18) s'écrit alors :

$$(2.20) \quad \sum_i \int_{K_{i,n}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} + du - f \right) \varphi + a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

Si de plus  $k=1$ ,  $l=1$  et si on utilise la formule des trapèzes pour calculer les intégrales  $\int (du-f) \varphi dx dt$  et  $\int \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx$ , on obtient le schéma de Crank Nicolson.



Remarque 2.3. -

Dans le cas où  $i = 0$  et pour  $k'=k-1$ ,  $l'=1$  on peut éliminer  $v$  entre les relations (2.18) et (2.19), à condition de modifier la relation (2.19) comme en (2.16). On obtient alors, pour des polynômes de degré quelconque, la méthode décrite dans [1], [3].

Remarque 2.4. -

Un cas particulier important intervient lorsque  $k=k'=l=l' \geq 1$ . En effet,  $J_K \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}$  est alors un polynôme de  $Q_k$  et  $J_K \frac{\partial u}{\partial t} \varphi$  est un polynôme de  $Q_{2k-1}$ . Soient maintenant  $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k$  les  $k$  abscisses de Gauss Legendre sur le segment  $[-1, +1]$  et soient  $\hat{\omega}_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  les poids tels que la formule de quadrature  $\int_{-1}^{+1} \hat{\varphi} d\xi \sim \sum_{i=1}^k \hat{\omega}_i \hat{\varphi}(\hat{g}_i)$  soit exacte pour les polynômes de degré  $\leq 2k-1$ .

On a :

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx dt &= \int_K \left( -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \hat{\varphi} d\xi d\eta = \\ &= \sum_{j,r=1}^k \hat{\omega}_j \hat{\omega}_r \left( \left( -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \hat{\varphi} \right) (\hat{g}_j, \hat{g}_r). \end{aligned}$$

D'autre part, si on utilise pour calculer les termes  $\int_K du \varphi dx dt$  et

$\int_K \frac{v}{a} \psi dx dt$  la formule de quadrature :

$$(2.21) \quad \int_K f dx dt = \int_K J_K \hat{f} d\xi d\eta \sim \sum_{j,r=1}^k \hat{\omega}_j \hat{\omega}_r (J_K \hat{f}) (\hat{g}_j, \hat{g}_r),$$

on obtient pour résoudre les problèmes (2.18), (2.19) la méthode de collocation [8] suivante :

$$(2.22) \quad \left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + du - f \right) (g_j, g_r) &= 0 \\ \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} + v \right) (g_j, g_r) &= 0 \end{aligned} \right\} 1 \leq j, r \leq k,$$

où le point  $G_{jr} = (g_j, g_r)$  est l'image par la transformation  $F_K$  du point  $(\hat{g}_j, \hat{g}_r)$ .

Dans le cas de mailles rectangulaires, et pour des polynômes de degré  $k=1$ , on retrouve le Box-Scheme de Keller [4].

### 3 - Résultats de stabilité -

On se propose dans ce paragraphe de montrer certaines propriétés de stabilité des schémas ((2.9), (2.10)), ((2.14), (2.15)), ((2.18), (2.19)) et (2.22), (2.23).

#### Théorème 3.1. -

Le schéma (2.9), (2.10), est toujours stable. Soit

$U_h = (u_h, v_h)$  la solution du problème (2.9), (2.10), on a l'inégalité

$$(3.1) \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u_R^2(x, t_{n+1}-0) dx - \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u_R^2(x, t_n-0) dx + \|U_h\|_{L^2(\mathcal{D}_n)}^2 \leq C \|f\|_{L^4(\mathcal{D}_n)}^2$$

où  $C$  désigne une constante  $> 0$  indépendante de  $h$ .

#### Démonstration -

Dans la relation (2.8), on remplace  $\phi_h$  par  $U_h$ . Sur chaque élément  $K$ , on a d'après la formule de Green :

$$(3.2) \int_K (A U_R, U_R) dx dt - \frac{1}{2} \int_{\partial K} (B_K U_R, U_R) ds = \frac{1}{2} \int_K ((A+A^*) U_R, U_R) dx dt$$

où  $A^*$  désigne l'opérateur (adjoint de  $A$ ) :

$$A^* U = -A_1 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A_2 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Puisque  $A + A^* = A_0$ , on a donc :

$$(3.3) \int_K ((A+A^*) U_R, U_R) dx dt \geq \inf(d_0, \frac{1}{a_1}) \|U_R\|_{L^2(K)}^2$$

La restriction de la somme  $\sum_K \int_{\partial K} (B_K U_R^{int}, U_R^{ext}) dx dt$

à l'ensemble des côtés  $S_{i,n}$ ,  $0 \leq i \leq I$  donne une contribution nulle.

La contribution des faces  $S_{i,n}$  à la somme :  $\sum_K \int_{\partial K} (M_K (U_R^{int} - U_R^{ext}), U_R^{int}) ds$  peut encore s'écrire :

$$(3.4) \sum_{i=0}^I \int_{S_{i,n}} (M_i (U_R^{int} - U_R^{ext}), U_R^{int} - U_R^{ext}) ds \geq 0$$

Il reste à considérer la contribution des côtés appartenant aux droites  $t=t_n$  et  $t=t_{n+1}$  à la somme :

$$\frac{1}{2} \sum_K \int_{\partial K} (B_K \mathbb{U}_K^{\text{ext}}, \mathbb{U}_K^{\text{int}}) ds + \int_{\partial K} (M_K (\mathbb{U}_K^{\text{ext}} - \mathbb{U}_K^{\text{int}}), \mathbb{U}_K^{\text{int}}) ds$$

on obtient :

$$(3.5) \frac{1}{2} \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u_h^2(x, t_{n+1}-0) dx - \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u_h^2(x, t_n-0) dx + \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} (u_h(x, t_n+0) - u_h(x, t_n-0))^2 dx$$

En combinant (3.2) à (3.5), on obtient l'inégalité :

$$(3.6) \frac{1}{2} \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u_h^2(x, t_{n+1}-0) dx - \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u_h^2(x, t_n-0) dx + \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} (u_h(x, t_n+0) - u_h(x, t_n-0))^2 dx + \\ + \inf(d_0, \frac{1}{a_1}) \|\mathbb{U}_h\|_{(L^2(\mathcal{Q}_n))}^2 \leq \int_{\mathcal{Q}_n} f u_h dx dt$$

On en déduit immédiatement l'inégalité (3.1) •

Remarque 3.1. -

Le terme explicite en (3.4) et le terme

$(u_h(x, t_n+0) - u_h(x, t_n-0))^2 dx$  sont toujours  $\geq 0$  et jouent un rôle stabilisateur.

Théorème 3.2. -

Le schéma (2.14), (2.15) est toujours stable. Soit  $\mathbb{U}_h = (u, v)$

la solution du problème (2.14), (2.15), on a l'inégalité :

$$(3.7) \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2(x, t_{n+1}-0) dx - \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2(x, t_n-0) dx + \|\mathbb{U}_h\|_{(L^2(\mathcal{Q}_n))}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{Q}_n)}^2$$

où  $C$  est une constante  $> 0$  indépendante de  $h$ .

Démonstration - Dans (2.14) et (2.15), on remplace  $\Psi$  et  $\varphi$  respectivement par  $v$  et  $u$ , et on ajoute membre à membre. Il vient :

$$\sum_i \int_{K_{i,n}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} + du - f \right) u + \frac{v^2}{a} \right) dx dt + \frac{1}{2} \int_{S_{i+1,n}} \gamma_{i+1} (v_{i+1}^- - v_{i+1}^+) v_{i+1}^- ds \\ + \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} \gamma_i (v_i^+ - v_i^-) v_i^+ ds + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x, t_n+0) - u(x, t_n-0)) u(x, t_n+0) dx = i$$

On en déduit :

$$(3.8) \frac{1}{2} \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2(x, t_{n+1}-0) dx - \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} (u^2(x, t_n-0) - (u(x, t_n+0) - u(x, t_n-0))^2) dx \\ + \sum_i \frac{1}{2} \int_{S_{i,n}} \gamma_i (v_i^+ - v_i^-)^2 ds + \inf(d_0, \frac{1}{a_1}) \|\mathbb{U}_h\|_{(L^2(\mathcal{Q}_n))}^2 \leq \int_{\mathcal{Q}_n} f u dx dt$$

On en déduit immédiatement l'inégalité (3.7).

Remarque 3.2. -

On note encore pour ce schéma la présence de termes stabilisateurs, comme à la remarque 3.1., mais le long des côtés  $S_{i,n}$ , seuls les termes en  $v_i^+$  sont présents.

On considère maintenant les méthodes continues.

Définition 3.1. - Pour tout  $u \in L^2(\mathcal{D}_n)$ , on définit  $\Pi u \in V_{k,1-1}$  de la façon suivante : pour tout  $K \subset \mathcal{D}_n$ , la restriction  $\Pi_K u$  de  $\Pi u$  au quadrilatère  $K$  s'écrit (en utilisant les notations isoparamétriques) :

$$\widehat{\Pi_K u} = \widehat{\Pi} \widehat{u} \quad , \quad \text{avec } \widehat{u}(\xi, \eta) = u(x, t), \quad \text{et}$$

$$\int_K (\widehat{\Pi} \widehat{u} - \widehat{u}) \widehat{\Psi}_h \, d\xi \, d\eta = 0 \quad \text{pour tout } \widehat{\Psi}_h \in Q_{k,1-1}$$

On a les lemmes suivants :

Lemme 3.1. - On suppose que  $u$  est de degré  $k$  par rapport à  $\xi$ . On a alors, pour tout  $\widehat{v} \in Q_{k,1-1}$

$$(3.9) \quad \int_K \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (\widehat{\Pi} \widehat{u}) \right) \widehat{v} \, d\xi \, d\eta = \int_K \left( \widehat{\Pi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \widehat{v} \, d\xi \, d\eta$$

Démonstration -

Ecrivons  $\widehat{u}(\xi, \eta)$  sous la forme :

$$\widehat{u}(\xi, \eta) = \sum_{r=0}^k \widehat{u}_r(\eta) \xi^r \quad , \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi} = \sum_{r=1}^k r \widehat{u}_r(\eta) \xi^{r-1}$$

$$\int_K \left( \widehat{\Pi} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi} \right) \right) \widehat{v} \, d\xi \, d\eta = \sum_{r=1}^k r \int_K \widehat{\Pi} (\widehat{u}_r(\eta) \xi^{r-1}) \widehat{v} \, d\xi \, d\eta$$

$$= \sum_{r=1}^k r \int_K \xi^{r-1} (\widehat{\Pi} \widehat{u}_r(\eta)) \widehat{v} \, d\xi \, d\eta$$

Or on peut écrire :

$$\widehat{\Pi} \widehat{u} = \sum_{r=0}^k \xi^r \widehat{\Pi} \widehat{u}_r(\eta).$$

Des deux premières égalités, on déduit le lemme 3.1.

Lemme 3.2. -

Soient  $\widehat{g}_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , les  $l$  abscisses de Gauss Legendre introduites à la remarque 2.4., et soient  $\widehat{\omega}_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , les poids tels que la formule  $\int_{-1}^{+1} \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta \sim \sum_{i=1}^l \widehat{\omega}_i \widehat{\varphi}(\widehat{g}_i)$  soit exacte pour les polynômes

de  $P_{2l-1}$ . Alors pour tout  $\hat{u} \in Q_{k,l}$ , on a

$$(3.10) \quad (\hat{\Pi} \hat{u} - \hat{u})(\xi, \hat{g}_i) = 0, \quad \xi \in [-1, +1], \quad 1 \leq i \leq l$$

Démonstration - Pour  $\hat{\psi} \in Q_{k,l-1}$ , on a :

$$\int_{\hat{K}} \hat{u} \hat{\psi} d\xi dy = \sum_{j=1}^l \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} (\hat{u} \hat{\psi})(\xi, \hat{g}_j) d\xi$$

D'autre part :

$$\int_{\hat{K}} \hat{u} \hat{\psi} d\xi dy = \int_{\hat{K}} (\hat{\Pi} \hat{u}) \hat{\psi} d\xi dy = \sum_{j=1}^l \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} (\hat{\Pi} \hat{u}) \hat{\psi}(\xi, \hat{g}_j) d\xi$$

Choisissons pour  $\hat{\psi}$  le produit d'un polynôme quelconque  $q_k(\xi)$  de degré  $\leq k$  par le polynôme  $\prod_{i+j} \frac{\eta - \hat{g}_i}{\hat{g}_j - \hat{g}_i}$ , de degré  $\leq l-1$ .

On a alors :

$$(3.11) \quad \int_{\hat{K}} \hat{u} \hat{\psi} d\xi dy = \int_{\hat{K}} (\hat{\Pi} \hat{u}) \hat{\psi} d\xi dy = \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} \hat{u}(\xi, \hat{g}_j) q_k(\xi) d\xi = \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} (\hat{\Pi} \hat{u})(\xi, \hat{g}_j) q_k(\xi) d\xi$$

Puisque  $\hat{u}$  est de degré  $\leq k$  en  $\xi$ , on en déduit (3.10).

Lemme 3.3. - Soit  $v \in P_K^{k,l}$  et soit  $K = A_1 A_2 A_3 A_4$  le quadrilatère quelconque de la figure 2.1. On a

$$(3.12) \quad \int_K \frac{\partial v}{\partial t} \Pi_K v dx dt = -\frac{1}{4}(x_1 - x_4) \sum_{j=1}^l \hat{\omega}_j \hat{v}^2(\xi, \hat{g}_j) + \frac{1}{4}(x_2 - x_3) \sum_{j=1}^l \hat{\omega}_j \hat{v}^2(-1, \hat{g}_j) \\ + \frac{1}{4}(x_1 - x_2) \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, 1) d\xi - \frac{1}{4}(x_4 - x_3) \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, -1) d\xi \\ + \alpha \left( l + \frac{1}{2} \right) \int_{\hat{K}} \left( (\hat{\Pi} \hat{v})^2 - (\hat{v})^2 \right) d\xi dy$$

$$\text{où } \alpha = \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + x_3 - x_4).$$

Démonstration - On a :

$$(3.13) \quad \int_K \frac{\partial v}{\partial t} \Pi_K v dx dt = \int_{\hat{K}} \left( -\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) \hat{\Pi} \hat{v} d\xi dy$$

Le premier terme de cette somme s'écrit encore :

$$(3.14) \quad \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \hat{\Pi} \hat{v} d\xi dy = \frac{\partial x}{\partial \eta}(0,0) \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\Pi} \hat{v} d\xi dy + \alpha \int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\Pi} \hat{v} d\xi dy$$

Puisque  $\hat{v}$  est de degré  $\leq k$  par rapport à  $\xi$ , on a en utilisant le lemme 3.1.

$$(3.15) \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \int_{\hat{K}} \left( \hat{\pi} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\pi} \hat{v}) \right) \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \frac{1}{2} \left( (\hat{\pi} \hat{v})^2(\pm 1, \gamma) - (\hat{\pi} \hat{v})^2(-1, \gamma) \right) d\gamma$$

Or  $(\hat{\pi} \hat{v})^2(\pm 1, \gamma)$  est de degré  $\leq 2(1-1)$  en  $\gamma$ . Donc :

$$\int_{-1}^{+1} (\hat{\pi} \hat{v})^2(\pm 1, \gamma) d\gamma = \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{\pi} \hat{v}(\pm 1, \hat{g}_j)$$

et en appliquant le lemme 3.2., on obtient :

$$(3.16) \int_{-1}^{+1} (\hat{\pi} \hat{v})^2(\pm 1, \gamma) d\gamma = \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{v}^2(\pm 1, \hat{g}_j)$$

D'autre part :

$$(3.17) \frac{\partial x}{\partial \gamma}(0, c) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_4) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(x_1 - x_4) - \alpha \\ = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) + \alpha$$

On en déduit des relations (3.1) à (3.17) :

$$(3.18) \int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \frac{1}{4}(x_1 - x_4) \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{v}^4(1, \hat{g}_j) - \frac{1}{4}(x_2 - x_3) \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{v}^4(-1, \hat{g}_j) + \\ + \alpha \left( \int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j (\hat{v}^2(1, \hat{g}_j) + \hat{v}^2(-1, \hat{g}_j)) \right)$$

Puisque  $\xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v}$  est de degré  $\leq 2(1-1)$  en  $\gamma$ , on a :

$$\int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} \left( \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v} \right) (\xi, \hat{g}_j) d\xi$$

et en appliquant le lemme 3.2. :

$$(3.19) \int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} \left( \xi \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) (\xi, \hat{g}_j) d\xi = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j (\hat{v}^2(1, \hat{g}_j) - \hat{v}^2(-1, \hat{g}_j)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, \hat{g}_j) d\xi$$

En utilisant encore une fois le lemme 3.2., on a :

$$(3.20) \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, \hat{g}_j) d\xi = \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \int_{-1}^{+1} (\hat{\pi} \hat{v})^2(\xi, \hat{g}_j) d\xi = \int_{\hat{K}} (\hat{\pi} \hat{v})^2 d\xi d\gamma$$

En combinant les relations (3.18) à (3.20), on obtient :

$$(3.21) \int_{\hat{K}} \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \hat{\pi} \hat{v} d\xi d\gamma = \frac{1}{4}(x_1 - x_4) \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{v}^4(1, \hat{g}_j) - \frac{1}{4}(x_2 - x_3) \sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{v}^4(-1, \hat{g}_j) - \frac{\alpha}{2} \int_{\hat{K}} (\hat{\pi} \hat{v})^2 d\xi d\gamma$$

De la même manière, on peut écrire :

$$(3.22) \int_{\hat{K}} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \hat{\Pi} \hat{v} \, d\xi dy = \frac{1}{4} (x_4 - x_2) \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, 1) \, d\xi - \frac{1}{4} (x_4 - x_2) \int_{-1}^{+1} \hat{v}^2(\xi, -1) \, d\xi \\ + \alpha \left( \int_{\hat{K}} \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \hat{\Pi} \hat{v} \, d\xi dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\hat{v}^2(\xi, 1) + \hat{v}^2(\xi, -1)) \, d\xi \right)$$

On peut montrer (voir Lemme 3.4. ci-dessous) que le coefficient de  $\alpha$  est égal à :

$$-\frac{1}{2} \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 \, d\xi dy + \ell \int_{\hat{K}} ((\hat{\Pi} \hat{v})^2 - \hat{v}^2) \, d\xi dy$$

En combinant les égalités (3.13), (3.21) et (3.22), on obtient la relation (3.12).

Lemme 3.4. - Pour tout  $\hat{v} \in Q_{k,1}$ , on a :

$$(3.23) \int_{\hat{K}} \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \hat{\Pi} \hat{v} \, d\xi dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\hat{v}^2(\xi, 1) + \hat{v}^2(\xi, -1)) \, d\xi = \ell \int_{\hat{K}} ((\hat{\Pi} \hat{v})^2 - \hat{v}^2) \, d\xi dy$$

Démonstration - On peut écrire  $\hat{v}$  sous la forme :

$$\hat{v} = \sum_{r=0}^{\ell} a_r(\xi) \eta^r, \text{ où } a_r(\xi) \text{ est un polynôme de degré } \leq k. \text{ On a :}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\hat{v}^2(\xi, 1) + \hat{v}^2(\xi, -1)) \, d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \hat{v}^2) \, d\xi dy = \frac{1}{2} \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 \, d\xi dy + \int_{\hat{K}} \eta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \, d\xi dy$$

D'autre part :

$$\int_{\hat{K}} \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} (\hat{\Pi} \hat{v} - \hat{v}) \, d\xi dy = \int_{\hat{K}} \left( \sum_{r=1}^{\ell} r a_r(\xi) \eta^r \right) (\hat{\Pi} (a_r(\xi) \eta^r) - a_r(\xi) \eta^r) \, d\xi dy \\ = \int_{\hat{K}} \ell (a_{\ell}(\xi))^2 \eta^{\ell} (\hat{\Pi}(\eta^{\ell}) - \eta^{\ell}) \, d\xi dy = \int_{\hat{K}} \ell (a_{\ell}(\xi))^2 ((\hat{\Pi} \eta^{\ell})^2 - \eta^{2\ell}) \, d\xi dy$$

de même :

$$\int_{\hat{K}} ((\hat{\Pi} \hat{v})^2 - \hat{v}^2) \, d\xi dy = \int_{\hat{K}} (a_{\ell}(\xi))^2 ((\hat{\Pi} \eta^{\ell})^2 - \eta^{2\ell}) \, d\xi dy$$

Des trois dernières relations, on déduit le Lemme 3.4. -

Théorème 3.3. - A chaque maille  $K_{i,n}$ , on associe le scalaire

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{4} (x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} + x_i^n - x_{i+1}^n). \text{ On fait l'hypothèse suivante :}$$

$$(3.24) \begin{cases} \alpha_{i,n} \leq 0 \\ 0 < \alpha_{i,n} \leq c \Delta t (x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} - x_i^n + x_{i+1}^n) \end{cases} \quad \text{ou bien}$$

où  $C$  est une constante  $> 0$ . Alors le schéma (2.18), (2.19) est stable et on a l'inégalité :

$$(3.25) \frac{1}{2}(1-c\Delta t) \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2 dx - \frac{1}{2}(1+c\Delta t) \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2 dx + c \int_{\mathcal{D}_n} ((\Pi u)^2 + v^2) dx dt \leq c \int_{\mathcal{D}_n} g^2 dx dt$$

où les symboles  $C$  désignent diverses constantes  $> 0$  indépendantes de  $h$  et  $t$ .

Démonstration -

Dans les relations (2.18) et (2.19) on remplace  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement par  $\Pi u$  et  $v$  et ajoute membre à membre. On a :

$$\begin{aligned} \int_K \left( v \frac{\partial}{\partial x} (\Pi u) - \frac{\partial u}{\partial x} v \right) dx dt &= \int_K \hat{v} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\Pi} \hat{u}) - \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \\ &= \int_K \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \left( \Pi \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta = 0 \quad \forall K \subset \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $K \subset \mathcal{D}_n$ , on a :

$$(3.26) \int_K (\hat{\Pi} \hat{u})^2 d\xi d\eta \leq \int_K \hat{u}^2 d\xi d\eta \leq e^{\alpha} \left( \int_K (\hat{\Pi} \hat{u})^2 d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} (\hat{u}^2(\xi, s) + \hat{u}^2(-\xi, s)) d\xi \right)$$

Si  $\alpha_{i,n} < 0$ , le terme  $\alpha_{i,n} (t + \frac{1}{2}) \int_K ((\hat{\Pi} \hat{u})^2 - \hat{u}^2) d\xi d\eta$  (Lemme 3.3.) est minoré par zéro.

Si  $\alpha_{i,n} \geq 0$ , et en utilisant l'hypothèse (3.24), on minore le terme

$$\frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2) \int_{-1}^{+1} \hat{u}^2(\xi, 1) d\xi - \frac{1}{4}(\alpha_4 - \alpha_3) \int_{-1}^{+1} \hat{u}^2(\xi, -1) d\xi - \alpha_{i,n} (t + \frac{1}{2}) \int_K \hat{u}^2 d\xi d\eta$$

par

$$\frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - c\Delta t) \int_{-1}^{+1} \hat{u}^2(\xi, 1) d\xi - \frac{1}{4}(\alpha_4 - \alpha_3)(1 + c\Delta t) \int_{-1}^{+1} \hat{u}^2(\xi, -1) d\xi - c \alpha_{i,n} \int_K (\hat{\Pi} \hat{u})^2 d\xi d\eta$$

Enfin, lorsqu'on somme sur tous les éléments  $K \subset \mathcal{D}_n$ , les termes du type

$\sum_{j=1}^p \hat{\omega}_j \hat{u}^2(1, \hat{g}_j)$  (intervenant dans le lemme 3.3.) s'annulent deux à deux grâce à la continuité de  $u$  le long des faces  $S_{i,n}$ . On en déduit l'inégalité

$$(3.27) \frac{1}{2}(1-c\Delta t) \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2 dx - \frac{1}{2}(1+c\Delta t) \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2 dx + (d_0 - c) \int_{\mathcal{D}_n} (\Pi u)^2 dx dt + \\ + \sum_{i=0}^I \int_{S_{i,n}} \gamma_i (v_i^+ - v_i^-)^2 ds + \int_{\mathcal{D}_n} \frac{v^2}{a} dx dt \leq \int_{\mathcal{D}_n} g \Pi u dx dt$$

et l'inégalité (3.25) en découle immédiatement, pour  $d_0$  assez grand.



Remarque 3.3. -

Lorsque  $\alpha_{i,n}$  est  $\leq 0$ ,  $\forall i,n$ , on n'a plus besoin de supposer  $d_0$  assez grand, car l'inégalité (3.27) peut être remplacée par :

$$(3.28) \quad \frac{1}{2} \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2 dx - \frac{1}{2} \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2 dx + d_0 \int_{\mathcal{D}_n} (\nabla u)^2 dx dt + \int_{\mathcal{D}_n} \frac{v^2}{\alpha} dx dt \leq \int_{\mathcal{D}_n} \Pi u dx dt$$

et il suffit de supposer  $d_0 > 0$  pour obtenir la stabilité.

Remarque 3.4. -

Lorsque  $l=1$ , on peut écrire :

$$(3.29) \quad \int_{\mathcal{D}_n} u^2 dx dt \leq \Delta t \left( \int_{g_1(t_{n+1})}^{g_2(t_{n+1})} u^2 dx + \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2 dx \right) \leq c \int_{\mathcal{D}_n} u^2 dx dt$$

On n'a plus alors besoin de faire d'hypothèse sur  $d_0$ , la stabilité résultant des inégalités (3.27) et (3.29) et d'un lemme de Gronwall discret.

On rappelle maintenant un théorème de stabilité pour le schéma (2.22), (2.23), déjà étudié dans [8].

Théorème -

On suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite

$$0 \leq \alpha_{i,n} \leq c h \Delta t \quad , \quad \text{pour tout } i,n.$$

On suppose d'autre part que  $d_0$  est une constante  $> 0$  assez grande. Alors le schéma (2.22), (2.23), est stable et on a l'inégalité :

$$(3.30) \quad \frac{1}{2} (1 - c \Delta t) \sum_{i=0}^{I-1} \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j u^2(g_j^{i,n+1}, t_{n+1}) \\ - \frac{1}{2} (1 + c \Delta t) \sum_{i=0}^{I-1} \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j u^2(g_j^{i,n}, t_n) + c \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j,r=1}^k \omega_{j,r}^{i,n} u^2(G_{j,r}^{i,n}) \leq \\ \leq c \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j,r=1}^k \omega_{j,r}^{i,n} (f u)(G_{j,r}^{i,n}) \quad ,$$

où les  $g_j^{i,n}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , désignent les  $k$  abscisses de Gauss Legendre du segment  $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ , où  $G_{j,r}^{i,n}$  est l'image par la transformation  $F_{K_{i,n}}$  du point de coordonnées  $(\hat{g}_j, \hat{g}_r)$ , et où  $\omega_{j,r}^{i,n} = J_{K_{i,n}}(\hat{g}_j, \hat{g}_r) \hat{\omega}_j \hat{\omega}_r$ .

Démonstration -

On multiplie les relations (2.22) et (2.23) par  $\omega_{j,r} u(G_{j,r})$

et  $\omega_{j,r} v(G_{j,r})$  respectivement (on omet ici les indices  $i$  et  $n$ ) et on ajoute membre à membre. On obtient, pour les termes faisant intervenir

l'expression :

$$(3.31) \quad E = \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \left( \hat{u} \left( -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{u} v) \right) (\hat{g}_j, \hat{g}_r)$$

En raisonnant comme dans le Théorème 3.3., on obtient après transformation .

$$\begin{aligned} E = & -\frac{1}{4} \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \hat{u}^2(1, \hat{g}_r) + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \hat{u}^2(-1, \hat{g}_r) \\ & + \frac{1}{4} (x_1 - x_2) \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \hat{u}^2(\hat{g}_j, 1) - \frac{1}{4} (x_4 - x_3) \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \hat{u}^2(\hat{g}_j, -1) \\ & + \frac{d}{2} \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \left( \hat{u}^2(1, \hat{g}_r) + \hat{u}^2(-1, \hat{g}_r) - \varepsilon \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \left( \xi \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) (\hat{g}_j, \hat{g}_r) \right) \\ & - \frac{d}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \left( \hat{u}^2(\hat{g}_j, 1) + \hat{u}^2(\hat{g}_j, -1) \right) - \varepsilon \sum_{r=2}^k \hat{\omega}_r \left( \eta \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) (\hat{g}_j, \hat{g}_r) \end{aligned}$$

On peut montrer que pour  $\hat{g}_r$  fixé :

$$\hat{u}^2(1, \cdot) + \hat{u}^2(-1, \cdot) - \varepsilon \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \left( \xi \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) (\hat{g}_j, \cdot) \geq 0$$

car  $u$  est de degré  $\leq k$  par rapport à la variable  $\xi$  .

D'autre part on a :

$$\left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} (\cdot, \hat{g}_r) \right|^2 \leq \hat{c} \left( \hat{u}^2(\cdot, 1) + \hat{u}^2(\cdot, -1) + \sum_{j=1}^k \hat{u}^2(\cdot, \hat{g}_j) \right)$$

On en déduit la majoration, pour tout  $j=1, \dots, k$

$$\left| \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \eta \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} (\hat{g}_j, \hat{g}_r) \right| \leq \hat{c} \left( \hat{u}^2(\hat{g}_j, 1) + \hat{u}^2(\hat{g}_j, -1) + \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \hat{u}^2(\hat{g}_j, \hat{g}_r) \right)$$

On a donc :

$$(3.32) \quad E \geq -\frac{1}{4} (x_1 - x_4) \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \hat{u}^2(1, \hat{g}_r) + \frac{1}{4} (x_2 - x_3) \sum_{r=1}^k \hat{\omega}_r \hat{u}^2(-1, \hat{g}_r) \\ + \left( \frac{1}{4} (x_1 - x_2) - \hat{c} d \right) \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \hat{u}^2(\hat{g}_j, 1) - \left( \frac{1}{4} (x_4 - x_3) + \hat{c} d \right) \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \hat{u}^2(\hat{g}_j, -1)$$

Lorsqu'on somme sur tous les éléments  $K_{i,n}$   $0 \leq i \leq I-1$ , les termes en  $u^2(\pm 1, g_r)$  se suppriment deux à deux (grâce à la continuité de  $u$  le long des faces  $S_{i,n}$ ) et le théorème 3.4. est alors une conséquence immédiate de l'inégalité (3.32).

4. Remarques diverses -

Le dernier schéma étudié est seulement conditionnellement stable ( $\alpha_{i,n} \geq 0$ ) mais il est plus précis que le schéma (2.18), (2.19) (analogue de Crank Nicolson). En effet pour ce dernier l'erreur est en général en  $O(h^k + \Delta t^1)$  et lorsque  $k=1$ , on ne peut obtenir une erreur sur la variable d'espace en  $O(h^2)$  que si les mailles sont deux à deux égales. Par contre le schéma (2.22), (2.23) possède des propriétés de superconvergence et l'erreur est en  $O(h^{k+1} + \Delta t^{1+1})$  lorsque les mailles sont peu déformées ( $0 \leq \alpha_{i,n} \leq Ch^2$ ) donc en particulier si elles sont rectangulaires.

Pour les méthodes discontinues (2.9), (2.10) et (2.14), (2.15), le découpage spatiale peut être choisi différent aux instants  $t_n^-$  et  $t_n^+$ , sans que les propriétés de stabilité ne soient détériorées. Ceci permet en particulier de rajouter (ou de retirer) des mailles lorsque celles-ci deviennent trop grandes (trop étroites). Pour les méthodes continues, il faut prendre plus de précautions : pour le schéma Crank Nicolson, il faut vérifier la condition :

$$(4.1) \quad \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2(x, t_n + 0) dx \leq \int_{g_1(t_n)}^{g_2(t_n)} u^2(x, t_n - 0) dx$$

et pour le schéma box scheme, il faut vérifier :

$$(4.2) \quad \sum_{i=0}^{I^+-1} \frac{x_{i+1}^+ - x_i^+}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j u^2(g_j^+, t_n + 0) \leq \sum_{i=0}^{I^--1} \frac{x_{i+1}^- - x_i^-}{2} \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j u^2(g_j^-, t_n - 0)$$

où les indices + et - désignent respectivement les instants  $t_n^+$  et  $t_n^-$ .

En particulier lorsque  $k=1$ , la condition (4.1) est satisfaite si on divise une ou plusieurs mailles par deux, en imposant la continuité aux extrémités  $x_i^-$  des intervalles de l'instant  $t_n^-$  et aux points  $1/2(x_i^- + x_{i+1}^-)$  lorsqu'on divise l'intervalle  $[x_i^-, x_{i+1}^-]$  par deux, car on peut vérifier que :

$$\frac{h}{6}(u_i^2 + u_i u_{i+1/2} + u_{i+1/2}^2) + \frac{h}{6}(u_{i+1/2}^2 + u_{i+1/2} u_{i+1} + u_{i+1}^2) = \frac{h}{3}(u_i^2 + u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2)$$

lorsque  $u_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})$ .

Pour le schéma box scheme, un tel choix ne garantit pas la stabilité car la condition (4.2) n'est pas en général satisfaite. En utilisant à l'instant  $t_n^+$  les intervalles  $[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]$ , et en écrivant  $u(x_{i+1/2}, t_n^+) = \frac{1}{2}(u(x_i, t_n^-) + u(x_{i+1}, t_n^-))$ , la condition (4.2.) est satisfaite, et ceci permet d'ajouter un intervalle à chaque extrémité ( $x=g_1(t_n)$  et  $x=g_2(t_n)$ ).

- REFERENCES -

- [1] BONNEROT R. et P. JAMET - A second order finite element method for the one dimensional stefan problem.  
Inst. Journ. Numer. Meth. Eng., 8, pp. 811-820, 1974.
- [2] FRIEDRICHS K.O. - Symmetric positive differential equations.  
Comm. Pure Appl. Math. II, pp. 333-418, 1958.
- [3] JEMET P. - Estimations d'erreur pour l'approximation de l'équation de la chaleur dans un domaine variable par des méthodes d'éléments finis espace-temps.  
Journées éléments finis. RENNES, mai 1977.
- [4] KELLER H.B. - A new difference scheme for parabolic problems,  
Numerical Solution of Partial Differential Equations II.  
(B. Hubbard Ed.), pp. 327-350, Academic Press, New-York, 1971
- [5] LESAINT P. - Finite element methods for symmetric hyperbolic equations.  
Numer. Math. 31, pp. 244-255, 1973.
- [6] LESAINT P. - Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis.  
Thèse, PARIS 1975.
- [7] LESAINT P. et RAVIART P.A. - On a finite element method for solving the neutron transport equation.  
Mathematical aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C. de BOOR Ed.), pp. 89-123, Academic Press, New-York, 1974.
- [8] LESAINT P. et RAVIART P.A. - Finite element collocation methods for first order systems.  
A paraître.