

A. Y. LE ROUX

**Problème aux limites pour les équations quasi-linéaires du premier ordre**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-14

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1978\\_\\_S4\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__S4_A5_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME AUX LIMITES POUR LES EQUATIONS QUASI-LINEAIRES  
DU PREMIER ORDRE

---

A.Y. LE ROUX

Cet exposé résume un article (à paraître) de Cl. Bardos, A.Y. Le Roux et J.C. Nédelec en ce qui concerne le théorème d'existence et d'unicité, puis quelques travaux de l'auteur sur l'approximation de la solution.

INTRODUCTION

On veut résoudre, sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$ , de frontière  $\Gamma$  assez régulière, l'équation quasi linéaire du premier ordre

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} f(u) = 0 ,$$

où  $t \in ]0, T[$  avec  $T > 0$  fixé et  $f \in \{C^1(\mathbb{R})\}^p$  ,

avec la condition initiale

$$(2) \quad u(., 0) = u_0 \in C^2(\bar{\Omega}) ,$$

et une condition de type Dirichlet donnée sur  $\Gamma$ . Cette condition aux limites est quelquefois inopérante sur une partie de la frontière qui dépend non linéairement de la solution. De plus (1) admet en général des solutions discontinues, ce qui conduit à concevoir ces solutions dans un sens faible. La définition de cette solution faible devra cependant être assez restrictive pour assurer l'unicité, ce qui n'est pas le cas si on prend les solutions de (1) au sens des distributions sur  $\Omega$  ; elle devra aussi faire apparaître la condition limite.

Ainsi, pour l'équation de Burgers sur  $]0, 1[$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u^2/2] = 0$$

avec les conditions

$$u(x, 0) = 1 ; u(0, t) = -1 ; u(1, t) = + 1 \quad (t < 1) ;$$

on obtient que pour tout  $\alpha \in ]0,1[$ ,  $u_\alpha$  définie par

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} (x + \alpha)/t & \text{si } x < t-\alpha \\ 1 & \text{si } x > t-\alpha \end{cases},$$

est solution au sens des distributions sur  $]0,1[ \times ]0,1[$  et vérifie la condition initiale ainsi que la condition en  $x = 1$ . La condition en  $x = 0$  n'est pas vérifiée. Ceci provient de l'équation des caractéristiques, qui s'écrit dans le cas de (1) sur  $]0,1[$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = f'(u)$$

et exprime la vitesse de propagation des données. Ainsi, dans le cas de l'équation de Burgers où  $f'(u) = u$ , toute donnée négative en  $x = 0$  a tendance à se propager vers les  $x < 0$  et ne peut pas rentrer dans  $\Omega = ]0,1[$ . Inversement une donnée positive va entrer dans  $\Omega$ . A l'instant initial, en  $x = 0$ , les données présentent un saut  $[-1,1]$ , qui se sépare en deux parties : une partie  $[-1,0]$  qui sort et une partie  $[0,1]$  qui entre. Il devient maintenant naturel de sélectionner parmi les solutions  $u_\alpha$  proposées, celle qui correspond à  $\alpha = 0$ . Un autre choix ne tiendrait pas compte des valeurs prises par  $f$  sur l'intervalle  $[-1,\alpha]$ , ce qui viole la condition d'entropie proposée par Oleinik [8]. Tout se passe comme si on avait pris comme condition  $u(0,t) = 0$ .

Le problème est plus simple dans le cas linéaire, car la vitesse de propagation donnée par (3) est constante. Ainsi avec  $f(u) = \lambda u$  et  $\Omega = ]0,1[$  la condition en  $x = 0$  est inopérante pour  $\lambda \leq 0$ , de même que la condition en  $x = 1$  pour  $\lambda \geq 0$ . D'autres exemples illustrant la non unicité sont donnés dans [5] ou [7 bis].

En notant  $n$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Gamma$ , en prenant pour condition sur cette frontière

$$(4) \quad a \in C^2(\Gamma),$$

donc indépendante de  $t$ , en notant  $\gamma u$  la trace de  $u$  sur  $\Gamma$  (son existence dépend de la régularité de  $u$  qui, on le verra par la suite, est suffisante), on obtient que la relation entre  $u$  et la condition limite est la suivante, presque partout sur  $\Gamma \times ]0, T[$

$$(5) \quad \text{Min}_{k \in I(\gamma u, a)} \{ \text{sg}(\gamma u - a) (f(\gamma u) - f(k)) \cdot n \} = 0 ,$$

où  $I(\gamma u, a)$  désigne l'intervalle fermé limité par  $\gamma u$  et  $a$ , le point représente un produit scalaire, et  $\text{sg}$  est la fonction signe définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 , \\ 0 & \text{si } x = 0 , \\ -1 & \text{si } x < 0 . \end{cases}$$

Cette fonction peut être approchée par

$$\text{sg}_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \eta , \\ x/\eta & \text{si } -\eta < x < \eta , \\ -1 & \text{si } x < -\eta , \end{cases}$$

avec  $\eta > 0$ , destiné à tendre vers zéro. On notera aussi

$$I(\gamma) = \int_0^\gamma \text{sg}_\eta(z) dz.$$

On introduit également pour un ouvert  $Q$  de  $\mathbb{R}^q$  l'espace  $BV(Q)$  des fonctions à variations bornées sur  $Q$  au sens de Tonelli Cesari. Soit  $i \in \{1, \dots, q\}$  ; on se fixe  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q-1}$  et on note  $\Delta_i$  l'intersection de la droite  $\{\bar{x}_i = c^{te}\}$  par  $Q$ . Alors  $u \in BV(Q)$  lorsque  $u$  est mesurable sur  $Q$  et, pour presque tout  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{q-1}$  et tout  $i \leq q$ , la restriction de  $u$  à  $\Delta_i$  est à variation bornée sur  $\Delta_i$ . Il est immédiat que  $BV(Q) \subset L^\infty(Q)$ . De plus, une fonction à variation bornée sur un intervalle réel admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite ; ce résultat peut être généralisé à  $BV(Q)$  et on peut ainsi établir qu'une fonction  $u \in BV(Q)$  admet en presque tout point de  $\partial Q$  (frontière de  $Q$ ) une trace  $\gamma u \in L^\infty(\partial Q)$ . Rappelons également que  $BV(Q)/\mathbb{R}$  s'identifie avec l'espace des mesures de Radon sur  $Q$ , espace dual de  $C^0(Q)$ .

On utilisera aussi le lemme suivant, dû à Saks (cf [9])

Lemme 1

Soit  $Q$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^q$  et  $u \in C^1(Q)$  ;

alors 
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\{x | |u(x)| < \eta\}} |\text{grad } u| dx = 0.$$

EXISTENCE ET UNICITE

Le problème (1), (2), (5) est un problème bien posé. Pour construire une solution  $u$ , on utilise la méthode de pseudo-viscosité, qui consiste à passer à la limite sur  $u_\varepsilon \in C^2(\Omega \times ]0, T[)$ , solution du problème parabolique quasi-linéaire

$$(6) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \text{div } f(u_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon,$$

avec  $\varepsilon > 0$ , sur  $\Omega \times ]0, T[$ , avec les conditions

$$(7) \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) \text{ sur } \Omega;$$

$$(8) \quad u_\varepsilon(s, t) = a(s) \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

Cette méthode offre l'avantage de donner la solution  $u$  qui satisfait au critère d'unicité (condition d'entropie) et le paramètre  $\varepsilon$  correspond physiquement à un coefficient de viscosité dont le caractère positif est essentiel. Le passage à la limite sur  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  est obtenu par une technique de compacité. Les parties de  $\Gamma \times ]0, T[$  où la condition limite est inopérante pour la solution de (1) vont correspondre à des couches limites pour  $u_\varepsilon$ .

Théorème 1

La famille  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $W^{1,1}(\Omega \times ]0, T[)$  et donc compacte dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$ . Toute valeur d'adhérence  $u$  de  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  appartient à  $BV(\Omega \times ]0, T[)$  et admet une trace  $\gamma u$  qui vérifie

$$\gamma u(x, 0) = u_0(x) \text{ pp}(\Omega).$$

Démonstration

Une première estimation est donnée par le principe du maximum

$$(9) \quad |u_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega \times ]0, T[)} \leq \text{Max}(|u_0|_{L^\infty(\Omega)} |a|_{L^\infty(\Gamma)})$$

On établit maintenant des estimations dans  $L^1$  des dérivées de  $u_\varepsilon$ . Pour simplifier cette démonstration on se limitera à  $a = 0$  et on n'en donnera que les étapes essentielles. Les détails sont donnés dans [2] pour le cas général.

On dérive (5) par rapport à  $t$ , on multiplie par  $sg(\partial u_\varepsilon / \partial t)$ , et on intègre par parties sur  $\Omega$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} I_\eta \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) dx = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Omega} f'_j(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} sg'_\eta \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) dx \\ - \varepsilon \int_{\Omega} \left| \text{grad} \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 sg'_\eta \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) dx . \end{aligned}$$

Dans le second membre le premier terme tend vers zéro (Lemme 1) et le second est négatif ( $\varepsilon > 0$ ). On conclue en intégrant en  $t$  et en passant à la limite en  $\eta$

$$(10) \quad \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} (\cdot, t) \right|_{L^1(\Omega)} \leq \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} (\cdot, 0) \right|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 |u_0|_{W^{2,1}(\Omega)} ,$$

où la dernière inégalité est donnée par l'équation (1), avec

$$C_1 = \text{Sup}_{\substack{i \leq p \\ |k| \leq |u_0|_{L^\infty(\Omega)}}} |f'_i(k)| ,$$

et  $\varepsilon \leq C_1$  (pour  $C_1 \neq 0$ , sinon  $\varepsilon \leq 1$ ).

On introduit maintenant la fonction réelle  $J_\eta$  définie sur  $\mathbb{R}^p$  par

$$J_\eta(\xi) = I_\eta(|\xi|) \quad \text{où} \quad |\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_p^2)^{1/2} ,$$

et on prend le gradient de (5), qu'on multiplie scalairement par le gradient de  $J_\eta$  au point  $u = \text{grad } u_\varepsilon$ , puis on intègre par parties sur  $\Omega$  pour obtenir pour tout  $t \in ]0, T[$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J_\eta(\text{grad } u_\varepsilon) dx = \\ & \int_{\Omega} \text{div } f'(u_\varepsilon) \left\{ J_\eta(\text{grad } u_\varepsilon) - |\text{grad } u_\varepsilon| \text{sg}_\eta(|\text{grad } u_\varepsilon|) \right\} dx \\ & - \varepsilon \sum_{j=1}^p \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^p \frac{\partial^2 J_\eta}{\partial \xi_i \partial \xi_k} (\text{grad } u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_j} dx \\ & + \int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} \left[ J_\eta \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right) \right] - f'(u_\varepsilon) \cdot n J_\eta \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right) dx \end{aligned}$$

Dans le second membre, il est immédiat que le premier terme tend vers zéro avec  $\eta$ , et que le second est négatif car  $J_\eta$  est convexe. L'équation (5) sur  $\Gamma$  donne

$$f'(u_\varepsilon) \cdot n \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon \Delta u_\varepsilon,$$

ce qui permet d'obtenir à la limite en  $\eta$  sur le dernier terme

$$\varepsilon \int_{\Gamma} \left( \Delta u_\varepsilon - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial n^2} \right) \text{sg} \left( \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right| \right) ds,$$

qu'on peut majorer par  $\varepsilon C_0 \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right|_{L^1(\Gamma)}$  où  $C_0$  est une constante dépendant de la courbure de  $\Gamma$ . Or d'après un résultat de Bardos et des frères Brezis [1], puisque  $u_\varepsilon$  est nul sur  $\Gamma$ , on a

$$\left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right|_{L^1(\Gamma)} \leq \left| \Delta u_\varepsilon \right|_{L^1(\Omega)}$$

On peut ainsi réutiliser l'équation (5) et on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\text{grad } u_\varepsilon| dx \leq C_1 C_0 \left| \text{grad } u_\varepsilon \right|_{L^1(\Omega)} + C_0 \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right|_{L^1(\Omega)}.$$

On conclue en utilisant (10) et le lemme de Gronvall, qu'il existe une constance  $C \geq 0$  telle que

$$(11) \quad \left| u_\varepsilon \right|_{W^{1,1}(\Omega \times ]0, T[)} \leq C \left| u_0 \right|_{W^{2,1}(\Omega)},$$

et donc que  $u_\varepsilon$  est séquentiellement compacte dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$ , d'après le théorème de Riesz-Tamarkin. De plus (11) exprime que  $u_\varepsilon$  est dans un borné de  $BV(\Omega \times ]0, T[)$ , et il en est de même pour toute valeur d'adhérence  $u$ . De plus  $u$  admet une trace  $\gamma u$  telle que  $u(\cdot, t)$  converge vers  $u(\cdot, 0)$  lorsque  $t$  tend vers zéro dans  $L^1(\Omega)$ .

D'après le théorème de Fubini, puis le théorème de Lebesgue, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,  $|u_\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)|_{L^1(\Omega)}$  tend vers zéro.

En écrivant pour tout  $\varepsilon > 0$  et presque tout  $t \in ]0, T[$

$$|\gamma u - u_0|_{L^1(\Omega)} \leq |\gamma u - u(\cdot, t)|_{L^1(\Omega)} + |u(\cdot, t) - u_\varepsilon(\cdot, t)|_{L^1(\Omega)} + |u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0|_{L^1(\Omega)},$$

on établit, en passant à la limite en  $\varepsilon$  et en  $t$ , que

$$\gamma u = u_0 \quad \text{pp}(\Omega),$$

puisque  $|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0|_{L^1(\Omega)} \leq C_2 t |u_0|_{W^{2,1}(\Omega)}$ .

Le théorème 1 est démontré.

Il reste à établir que  $u$ , valeur d'adhérence dans  $L^1$  des  $u_\varepsilon$ , est une solution du problème (1), (2), (5) et que cette solution est unique. Il est alors immédiat que toute la famille  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  converge vers  $u$ . Il faut auparavant définir cette solution, ce qui est l'objet de la définition suivante, qui s'inspire de celle donnée par Kruzkov [4] dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^p$ .

Définition

Une fonction  $u \in BV(\Omega \times ]0, T[)$  est solution du problème (1) (2) (5) lorsque pour tout  $k \in \mathbb{R}$  et tout  $\phi \in C^2_0(\bar{\Omega} \times ]0, T[)$  et non négative, elle vérifie

$$\int_{\Omega} \int_0^T (|u-k| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sg}(u-k) (f(u)-f(k)) \cdot \text{grad } \phi) dx dt \geq \int_{\Gamma} \int_0^T \text{sg}(a-k) (f(\gamma u)-f(k)) \cdot n \phi ds dt,$$

et  $\gamma u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pp}(\Omega)$ .

Théorème 2

Le problème (1) (2) (5) admet une solution unique.

Démonstration

Existence

On reprend la suite  $\{u_{\varepsilon_m}\}$  du théorème précédent, convergente vers  $u \in BV(\Omega \times ]0, T[)$  dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$ , et qui vérifie (2). Il reste à montrer (12). Soit  $\varepsilon \in \{\varepsilon_m\}_m$ ,  $\phi \in C^2_0(\bar{\Omega} \times ]0, T[)$  ( $\phi \geq 0$ ) et  $k \in \mathbb{R}$ . On multiplie l'équation (6) par  $sg_\eta(u_\varepsilon - k)\phi$  et on intègre par parties sur  $\Omega \times ]0, T[$ , pour obtenir, après avoir défini  $g_\eta \in [C^0(\mathbb{R}^2)]^p$  par ses composantes

$$g_{\eta,i}(u,k) = \int_k^u sg_\eta(v-k) f_i(v) dv \quad 1 \leq i \leq p \quad ,$$

l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^T (I_\eta(u_\varepsilon - k) \frac{\partial \phi}{\partial t} + g_\eta(u_\varepsilon, k) \cdot \text{grad } \phi) dx dt = \\ & \int_{\Gamma} \int_0^T (g_\eta(a, k) \cdot n - \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} sg_\eta(a-k)) \phi ds dt \\ (13) \quad & + \int_{\Gamma} \int_0^T \varepsilon I_\eta(a-k) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds dt - \int_{\Omega} \int_0^T \varepsilon I_\eta(u_\varepsilon - k) \Delta \phi dx dt \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} \int_0^T sg'_\eta(u_\varepsilon - k) |\text{grad } u_\varepsilon|^2 \phi dx dt . \end{aligned}$$

On fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro ; le dernier terme est non négatif et le passage à la limite est immédiat sur chaque terme, sauf sur le terme en  $\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}$ . Pour ce terme, comme dans Kruzkov [4], on introduit pour  $\delta > 0$  une fonction  $\rho_\delta \in C^2_0(\bar{\Omega})$  vérifiant  $\rho_\delta = 1$  sur  $\Gamma$ ,  $\rho_\delta = 0$  sur  $\{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) > \delta\}$   $0 \leq \rho_\delta \leq 1$  et  $|\text{grad } \rho_\delta| \leq C/\delta$ . En notant  $\phi_1$  un prolongement à  $\Omega$  de  $sg_\eta(a-k)\phi$  qui appartienne à  $W^{1,1}(\Omega \times ]0, T[)$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_0^T \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} sg_\eta(a-k) \phi ds dt = \int_{\Gamma} \int_0^T n \cdot f(a) sg_\eta(a-k) \phi ds dt \\ & - \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ u_\varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \rho_\delta + (f(u_\varepsilon) - \varepsilon \text{grad } u_\varepsilon) \cdot \text{grad}(\phi_1 \rho_\delta) \right\} dx dt . \end{aligned}$$

On fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro, puis  $\delta$  vers zéro pour obtenir

$$(14) \quad \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \int_0^T \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \operatorname{sg}_{\eta}(a-k) \phi \, ds \, dt \\ & = \int_{\Gamma} \int_0^T n \cdot (f(a) - f(\gamma u)) \operatorname{sg}_{\eta}(a-k) \phi \, ds \, dt, \end{aligned}$$

et le passage à la limite en  $\varepsilon$  sur (13) est maintenant acquis. Il reste à passer à la limite en  $\eta$ , ce qui est immédiat en remarquant que  $g_{\eta}(u, k)$  converge vers  $\operatorname{sg}(u-k) (f(u)-f(k))$  et on obtient (12).

### Unicité

Soit  $\psi \in C_0^2(]0, T[)$ ,  $\psi \geq 0$ . On reprend (12) avec  $\phi = \psi \rho_{\delta}$  et on fait tendre  $\delta$  vers zéro, ce qui permet d'obtenir pour tout  $k \in \mathbb{R}$

$$n \cdot (f(\gamma u) - f(k)) [\operatorname{sg}(\gamma u - k) - \operatorname{sg}(a - k)] \geq 0 \quad \text{pp}(\Gamma \times ]0, T[),$$

inégalité qui se réduit à (5) en prenant  $k \in I(\gamma u, a)$ . On prend ensuite, dans (12),  $\phi$  nulle sur  $\Gamma \times ]0, T[$  et on introduit deux fonctions  $u$  et  $v$  solutions du problème (1) (2) (5); en procédant comme dans [4] on obtient

$$(15) \quad \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ |u-v| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{sg}(u-v) (f(u)-f(v)) \cdot \operatorname{grad} \phi \right\} dx \, dt \geq 0.$$

En passant à la limite en  $\delta$  avec une fonction test de la forme  $\phi(x, t) = \psi(t) (1 - \rho_{\delta}(x))$ .

On introduit pour tout  $(x, t) \in \Gamma \times ]0, T[$  la quantité

$$k = \begin{cases} \gamma u(x, t) & \text{si } \gamma u \in I(a, \gamma v) \quad , \\ a(x) & \text{si } a \in I(u, \gamma v) \quad , \\ \gamma v(x, t) & \text{si } \gamma v \in I(a, \gamma u) \quad , \end{cases}$$

et il vient

$$\operatorname{sg}(\gamma u - \gamma v) (f(\gamma u) - f(\gamma v)) = \operatorname{sg}(\gamma u - k) (f(\gamma u) - f(k)) + \operatorname{sg}(\gamma v - k) (f(\gamma v) - f(k)).$$

Il suffit de multiplier scalairement par  $n$  pour obtenir une quantité non négative; en effet  $k \in I(\gamma u, a) \cap I(\gamma v, a)$  et on peut minorer en utilisant (5). Pour  $]t_0, t_1[ \subset ]0, T[$ , on prend dans (15) une fonction  $\psi$

approchant la caractéristique de  $]t_0, t_1[$  et on obtient, puisque le second membre est positif

$$(16) \quad |u(\cdot, t_1) - v(\cdot, t_1)|_{L^1(\Omega)} \leq |u(\cdot, t_0) - v(\cdot, t_0)|_{L^1(\Omega)},$$

et l'unicité est maintenant évidente. Le théorème 2 est démontré.

Remarquons que (16) exprime que l'opérateur de semi-groupe associé à l'équation (1) et à la condition aux limites (5) est un semi-groupe de contraction dans  $L^1(\Omega)$ . Notons également que (14) a permis le traitement de la couche limite éventuelle.

#### APPROXIMATION

On prend  $\Omega = ]0, 1[$  et on introduit  $I \in \mathbb{N}$  et un pas de discrétisation en espace  $h = 1/I$ . Le pas de discrétisation en temps est égal à  $qh$  où  $q$  est une constante réelle strictement positive et fixe. On note également

$$I_i = ](i-1/2)h, (i+1/2)h[ \cap ]0, 1[, \quad J_n = ](n-1/2)qh, (n+1/2)qh[ \cap ]0, T[,$$

pour  $i \in \{0, 1, \dots, I\}$  et  $n \in \{0, \dots, N\}$ , avec  $N = \lfloor T/qh \rfloor$ .

La solution  $u$  est approchée par une fonction  $u_h$ , constante sur chaque  $I_i \times J_n$ , où sa valeur est notée  $u_i^n$ . Les conditions initiales et aux limites sont introduites par

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{I_i} u_0(x) dx, \quad u_0^n = a(0), \quad u_I^n = a(1).$$

Connaissant tous les  $u_i^n$  pour  $n$  fixé, on construit les  $u_i^{n+1}$  en utilisant le schéma de Godounov

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1/2}^n \in I(u_i^n, u_{i+1}^n) \quad \text{réalise} \\ \text{Min}_{k \in I(u_i^n, u_{i+1}^n)} \{sg(u_{i+1}^n - u_i^n) f(k)\} \end{array} \right.$$

$$(18) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - q(f(u_{i+1/2}^n) - f(u_{i-1/2}^n))$$

Ce schéma généralise le schéma décentré au cas où  $f$  n'est pas monotone. Il donne des profils "assez raides" au niveau des discontinuités de la solution (voir [5], [7 bis]) sans être coûteux ; il suffit en effet dans (17) de tester les extrémités de l'intervalle  $I(u_i^n, u_{i+1}^n)$  et les racines de  $f'$  situées dans cet intervalle.

Le calcul de  $u_{i+1/2}^n$  par (17) provient de la résolution du problème de Riemann, c'est-à-dire de (1) avec une condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } x < (i+1/2)h \\ u_{i+1}^n & \text{si } x > (i+1/2)h \end{cases}$$

sur la demi droite  $\{x = (i+1/2)h, t > 0\}$ . La solution du problème de Riemann ne peut être prise en compte que pour les petites valeurs de  $t$ , puisqu'on ne fait pas intervenir les  $u_j^n$  pour  $j \neq i$  ou  $i + 1$ , et ceci se traduit par une condition de stabilité. La valeur  $u_{i+1/2}^n$  correspond à une valeur stationnaire de la solution du problème de Riemann. En effet, la condition d'entropie revient à remplacer  $f$  par son enveloppe convexe ou concave selon le signe de  $(u_{i+1}^n - u_i^n)$  sur l'intervalle  $I(u_i^n, u_{i+1}^n)$ , et en écrivant (3) pour cette enveloppe, il est immédiat que les valeurs comprises entre  $u_i^n$  et  $u_{i+1/2}^n$  vont se déplacer vers la gauche, celles comprises entre  $u_{i+1/2}^n$  et  $u_{i+1}^n$  dans l'autre sens, et ainsi la valeur de la solution en  $x = (i+1/2)h$  ne peut être que  $u_{i+1/2}^n$ .

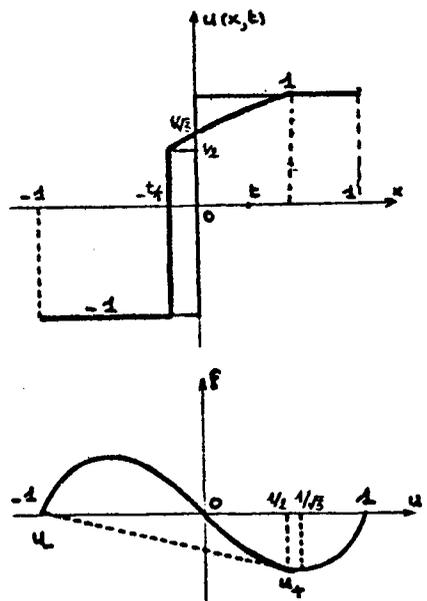
On peut illustrer cette remarque par l'exemple suivant, sur  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [u(u^2 - 1)] = 0 \quad ; \quad u(x, 0) = \text{sg}(x)$$

dont la solution est

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > t \\ \sqrt{\frac{2x+t}{3t}} & \text{si } -\frac{t}{8} < x < t \\ -1 & \text{si } x < -\frac{t}{8} \end{cases}$$

On vérifie que pour  $x = 0$ ,  $u$  admet une valeur stationnaire  $1/\sqrt{3}$ , indépendante de  $t$ , et qui réalise (17) pour  $u_i^0 = -u_{i+1}^0 = 1$ .



On peut remarquer également que la solution présente une discontinuité le long de la droite  $x + t/8 = 0$ , qui correspond à la partie rectiligne du graphe de l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $[-1,1]$  tandis que la partie strictement convexe correspond aux valeurs pour lesquelles la solution est régulière.

Dans (18),  $u_i^{n+1}$  est obtenu comme projection dans  $L^2(I_i)$  de la solution, calculée à partir d'une formule de Green sur le pavé  $I_i \times J_n$ , dont les valeurs aux limites sont données par (17) et dont la condition initiale (en fait pour  $t = nqh$ ) est constante et égale à  $u_i^n$ . On a le théorème de convergence suivant, où  $M = \text{Sup} \left( |u_0|_{L^\infty(O,1)}, |a(0)|, |a(1)| \right)$

Théorème 3

Si la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

$$(19) \quad q \sup_{|k| \leq M} |f'(k)| \leq 1$$

est vérifiée, alors  $u_n$ , solution approchée construite par le schéma de Godounov, converge dans  $L^1([0,1] \times [0,T])$  vers la solution du problème (1), (2), (5).

Démonstration

On commence par démontrer un résultat analogue à (11), ce qui permet d'avoir la même conclusion que celle du théorème 1. On montre aussi (cf. [6], [7]) que pour tout réel  $k$

$$|u_i^{n+1} - k| \leq |u_i^n - k| - q \left\{ \text{sg}(u_{i+1/2}^n - k) (f(u_{i+1/2}^n) - f(k)) - \text{sg}(u_{i-1/2}^n - k) (f(u_{i-1/2}^n) - f(k)) \right\}.$$

En introduisant une fonction test  $\phi \geq 0$ , appartenant à  $C_0^2([0,1] \times [0,T])$ , on pose  $\phi_i^n = \phi(ih, nqh)$  et on obtient en sommant (20) en  $i$  et  $n$ , après regroupement

$$\sum_{i,n} |u_i^n - k| \frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{qh} qh^2 + \text{sg}(u_{i+1/2}^n - k) (f(u_{i+1/2}^n) - f(k)) \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{h} qh^2 \geq \sum_n \left\{ \text{sg}(u_{I-1/2}^n - k) (f(u_{I-1/2}^n) - f(k)) \phi_{I-1/2}^n - \text{sg}(u_{1/2}^n - k) (f(u_{1/2}^n) - f(k)) \phi_{1/2}^n \right\} qh$$

Or pour le dernier terme, d'après (17)

$$\forall n \in \{0, \dots, N\} \quad \text{sg}(u_{1/2}^n - k) (f(u_{1/2}^n) - f(k)) \leq \text{sg}(u_0^n - k) (f(u_0^n) - f(k)) ,$$

et un résultat analogue a aussi lieu en  $x = 1$ , et donc on obtient l'inégalité (12) après passage à la limite en  $h$ . Le théorème 3 est démontré.

Dans [7] le théorème 3 est établi avec des conditions aux limites dépendantes de  $t$  et des hypothèses plus faibles sur la régularité de  $a$  et de  $u_0$ . Le schéma de Godounov est seulement d'ordre 1, comme le schéma de Lax

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) / 2 - q(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) / 2 ;$$

pour lequel on peut également établir le même résultat. On peut aussi prolonger le résultat de convergence du schéma de Lax au problème à plusieurs dimensions, avec une condition aux limites nulle par exemple, en reprenant les estimations de [3] et une inégalité analogue à (20). On a le même résultat de convergence pour le schéma de Godounov appliqué à une équation de type (1) sur un intervalle réel, avec  $f$  dépendant de  $u$ ,  $x$  et  $t$  et un second membre dépendant aussi de  $u$ ,  $x$  et  $t$  ; voir [7 bis].

REFERENCES

- [1] C. BARDOS, D. BREZIS, H. BREZIS. Perturbations Singulières et Prolongements Maximaux d'Opérateurs Positifs. Arch. Rat. Mech. An. 53-1, pp. 69-100 (1973).
- [2] C. BARDOS, A.Y. LE ROUX, J.C. NEDELEC. A paraître (1978).
- [3] E. CONWAY, A. SMOLLER. Global solutions of the Cauchy problem for quasi linear first order equations in several space variables. Comm. Pure Appl. Math. 19, pp. 95-105 (1966).
- [4] S.N. KRUKOV. First order quasi linear equations with several independent variables. Mat. Sb. 81 (123), pp. 228-255 - Math USSR Sbornik (10), pp. 217-243 (1970).
- [5] A.Y. LE ROUX. A Numerical Conception of Entropy for Quasi linear Equations. Math. Comp. 31 (10), pp. 848-872 (1977).
- [6] A.Y. LE ROUX. Convergence of the Godunov scheme for first order quasi linear equations. Proc. Japan Acad. 52 (9), pp. 488-491 (1976).
- [7] A.Y. LE ROUX. Etude du problème mixte pour une équation quasi linéaire du premier ordre. C.R.A.S. 285, pp. 351-354 (1977).
- [7bis] A.Y. LE ROUX. Problème mixte pour une équation quasi linéaire du premier ordre. Publications des laboratoires d'Analyse Numérique et Mécanique. Rennes 1977.
- [8] O.A. OLEINIK. Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi linear equation. AMS Transl. Ser. 2, 33, pp. 285-290 (1963).
- [9] S. SAKS. Theory of the Integral. Warsaw. 1937.