PHILIPPE G. CIARLET
PHILIPPE DESTUYNDER

Une justification d'un modèle non linéaire en théorie des plaques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___S4_A1_0>

UNE JUSTIFICATION D'UN MODELE NON LINÉAIRE EN THÉORIE DES PLAQUES (*)

Philippe G. CIARLET   *Philippe DESTUYNDER*

RESUME : On applique la technique des développements asymptotiques à un modèle non linéaire d'élasticité bidimensionnelle. Sans faire aucune hypothèse à priori (que ce soit de nature géométrique ou mécanique), on montre que le premier terme du développement est solution d'un modèle bidimensionnel connu en théorie non linéaire de plaques. On établit également l'existence de ce premier terme.

ABSTRACT : The asymptotic expansion method is applied to a nonlinear model in three-dimensional elasticity. Without any a priori assumption (either geometrical or mechanical in nature), it is shown that the first term in the expansion is a solution of a known-dimensional model in nonlinear plate theory. The existence of the first term is also established.

1 - LE PROBLEME TRIDIMENSIONNEL

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière suffisamment régulière. On pose $\Omega^\varepsilon = \omega \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times \,]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$. On considère une plaque occupant le volume $\bar{\Omega}^\varepsilon$, soumise à des forces de volume de densité $f = (f_i)$ et à des forces de surfaces de densité $g = (g_i)$ sur les faces $\Gamma_\pm^\varepsilon$(1). On suppose :

(1) $\quad f_\alpha \in W^{1,4}(\Omega^\varepsilon)$, $f_3 \in L^4(\Omega^\varepsilon)$, $g_\alpha \in W^{1,4}(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon)$, $g_3 \in L^4(\Omega^\varepsilon)$.

On introduit les espaces

(2) $\quad V^\varepsilon = \{v = (v_i) \in (W^{1,4}(\Omega^\varepsilon))^3 \; ; \; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}$,

(3) $\quad \Sigma^\varepsilon = \{\tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^9, \tau_{ij} = \tau_{ij}\}$.

(*) Texte d'une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences

Le champ $u = (u_i) \in v^\varepsilon$ des <u>déplacements</u> et le champ $\sigma = (\sigma_{ij}) \in \Sigma^\varepsilon$ des <u>contraintes</u> (de Piola-Kirchhoff) sont solutions des équations variationnelles :-

(4) $$\forall\, \tau \in \Sigma^\varepsilon,\ \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\ell\ell}\,\delta_{ij}\right)\tau_{ij} - \int_{\Omega^\varepsilon}\tau_{ij}\,\gamma_{ij}(u) - \frac{1}{2}\int_{\Omega^\varepsilon}\tau_{ij}\,\partial_i u_\ell \partial_j u_\ell = 0$$

(5) $$\forall\, v \in v^\varepsilon,\ \int_{\Omega^\varepsilon}\sigma_{ij}\,\partial_{ij}(v) + \int_{\Omega^\varepsilon}\sigma_{ij}\,\partial_i u_\ell\,\partial_j v_\ell = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i\, u_i + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_i\, v_i\ .$$

où $2\gamma_{ij}(v) = \partial_i v_j + \partial_j v_i$. Ces équations correspondent au problème aux limites :

(6) $$\begin{cases} -\,\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}\,\partial_k u_i) = f_i \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon\ , \\ \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{\ell\ell}\,\delta_{ij} = \gamma_{ij}(u) + \dfrac{1}{2}\partial_i u_\ell\,\partial_j u_\ell \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon\ , \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon\ , \\ \sigma_{i3} + \sigma_{k3}\,\partial_k u_i = \pm\, g_i \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon\ , \end{cases}$$

qui est un modèle connu en élasticité non linéaire, correspondant à des "grands" déplacements et à des "petites" déformations ([2], (5.6)-(5.8)). On rappelle les inégalités $E > 0$, $0 < 2\nu < 1$.

On suit alors une démarche analogue dans son principe à celle proposée en ([3]) dans le cas linéaire (et qui conduisait au modèle biharmonique).

2 - PASSAGE A L'OUVERT DE REFERENCE

On définit un problème équivalent au problème (4)-(5), mais posé sur un domaine qui ne dépend pas de ε. On pose, alors les notations précédentes, $\Omega = \Omega^1$, $\Gamma_0 = \Gamma_0^1$, $\Gamma_\pm = \Gamma_\pm^1$, $v = v^1$ et $\Sigma = \Sigma^1$. On définit l'application $F^\varepsilon : X = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \to F^\varepsilon(X) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon$, à laquelle on associe les changements de fonctions $\sigma \in \Sigma^\varepsilon \to \sigma^\varepsilon \in \Sigma$ et $v \in v^\varepsilon \to v^\varepsilon \in v$ définis de la façon suivante :

(7) $$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta}\cdot F^\varepsilon \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\,\sigma_{\alpha 3}\cdot F^\varepsilon\ ,\ \sigma_{33}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\,\sigma_{33}\cdot F^\varepsilon, \\ v_\alpha^\varepsilon = v_\alpha\cdot F^\varepsilon\ ,\ v_3^\varepsilon = \varepsilon v_3\cdot F^\varepsilon\ , \\ f_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^{-2} f_\alpha\cdot F^\varepsilon\ ,\quad f_3^\varepsilon = \varepsilon^{-3}\cdot F^\varepsilon\ , \\ g_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^{-3}\, g_\alpha\cdot F^\varepsilon\ ,\ g_3^\varepsilon = \varepsilon^{-4}\, g_3\cdot F^\varepsilon\ . \end{cases}$$

PROPOSITION 1

L'élément $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma \times V$ *construit à partir d'une solution* $(\sigma,u) \in \Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon$ *du problème* (4)-(5) *à l'aide des transformations* (7) *est solution des équations variationnelles :*

$$(8) \quad \forall \tau \in \Sigma,\ A_0(\sigma^\varepsilon,\tau) + \varepsilon^2 A_2(\sigma^\varepsilon,\tau) + \varepsilon^4 A_4(\sigma^\varepsilon,\tau) + B(\tau,u^\varepsilon) + C_0(\tau,u^\varepsilon,u^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} C_{-2}(\tau,u^\varepsilon,u^\varepsilon) = 0 \ ,$$

$$(9) \quad \forall v \in V,\ B(\sigma^\varepsilon,v) + 2C_0(\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon,v) + 2\varepsilon^{-2} C_{-2}(\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon,v) = \varepsilon^2 F(v),$$

où, pour des éléments quelconques $\sigma, \tau \in \Sigma$ *et* $u, v \in V$,

$$A_0(\sigma,\tau) = \int_\Omega \{\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta}\}\tau_{\alpha\beta} \ ,$$

$$A_2(\sigma,\tau) = \int_\Omega \{\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\alpha 3}\tau_{\alpha 3} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33}\tau_{\mu\mu} + \sigma_{\mu\mu}\tau_{33})\} \ ,$$

$$A_4(\sigma,\tau) = \frac{1}{E}\int_\Omega \sigma_{33}\tau_{33} \ , \qquad B(\tau,v) = -\int_\Omega \tau_{ij}\gamma_{ij}(v) \ ,$$

$$C_0(\tau,u,v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \tau_{ij}\,\partial_i u_\gamma\,\partial_j v_\gamma, \quad C_{-2}(\ ,u,v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \tau_{ij}\,\partial_i u_3\,\partial_j v_3,$$

$$F(v) = \int_\Omega f_i^\varepsilon v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i^\varepsilon v_i \ .$$

3 - DEVELOPPEMENT FORMEL DE $(\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon)$; CALCUL DU PREMIER TERME

La forme des équations (8)-(9) suggère de poser formellement

$$(10) \quad (\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon) = \varepsilon^2(\sigma^2,u^2) + \varepsilon^4(\sigma^4,u^4) + \ldots$$

On reporte ensuite cette expression dans les équations (8)-(9) et, suivant en cela la technique habituelle des développements asymptotiques, on égale à zéro les coefficients de ε^{2q}, $q \geq 1$. On obtient ainsi, d'une part, les équations satisfaites par le terme (σ^2,u^2) et, d'autre part, les relations de récurrence vérifiées par les termes suivants.

Dans cette note on se bornera au calcul du premier terme (σ^2,u^2), qui, d'après ce qui précède, est solution des équations variationnelles :

$$(11) \quad \forall \tau \in \Sigma,\ A_0(\sigma^2,\tau) + B(\tau,u^2) + C_{-2}(\tau,u^2,u^2) = 0,$$

$$(12) \quad \forall v \in V,\ B(\sigma^2,v) + 2C_{-2}(\sigma^2,u^2,v) = F(v).$$

THEOREME 1

Si les forces g_α *et* f_α *sont suffisamment petites* (au sens du Théorème 2 ci-dessous), *le problème* (11)-(12) *a au moins une solution dans l'espace* $\Sigma \times V$.

Indiquons le principe de la démonstration de ce théorème. Pour alléger l'écriture, on notera $(\sigma, u) = (\sigma^2, u^2)$ une solution éventuelle de (11)-(12).

Etape 1 : Si la fonction u_3 est dans l'espace $W^{2,4}(\Omega)$, alors le champ u des déplacements est nécessairement un champ de Kirchhoff-Love, i.e.,

(13) $\quad u_3 \in W_0^{2,4}(\omega),\ \exists\ u_\alpha^0 \in W_0^{1,4}(\omega),\ u_\alpha = u_\alpha^0 - x_3\,\partial_\alpha u_3$ (4).

Etape 2 : Calcul des fonctions u_α^0 et u_3 apparaissant en (13) : En prenant des fonctions τ_{ij} et v_i de forme particulières dans les équations (11)-(12), on trouve, tout calcul fait (et après élimination des autres inconnues), que le triplet $(u_1^0, u_2^0, u_3) \in (W_0^{1,4}(\omega))^2 \times W_0^{2,4}(\omega)$ doit vérifier les équations variationnelles suivantes :

(14) $$\forall\, v_\alpha^0 \in W_0^{1,4}(\omega),\ \frac{2E}{(1-\nu^2)}\int_\omega \{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^0)\gamma_{\alpha\beta}(v^0)+\nu\gamma_{\lambda\lambda}(u^0)\gamma_{\mu\mu}(v^0)\}+$$

$$+\ \frac{E}{(1-\nu^2)}\int_\omega \{(1-\nu)\partial_\alpha u_3\partial_\beta u_3\gamma_{\alpha\beta}(v^0)+\nu\partial_\lambda u_3\partial_\lambda u_3\gamma_{\mu\mu}(v^0)\} = \int_\omega \{g_\alpha^+ + g_\alpha^- + \int_{-1}^{1} f_\alpha^\varepsilon dx_3\} v_\alpha^0\ ,$$

(15) $$\forall\, v \in W_0^{2,4}(\omega),\ \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\int_\omega \{\Delta u_3\Delta v + \frac{3}{2}\partial_\alpha u_3\partial_\beta u_3\partial_\alpha u_3\partial_\beta v\}+$$

$$+\frac{2E}{(1-\nu^2)}\int_\omega \{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^0)\partial_\alpha u_3\partial_\beta v + \nu\gamma_{\mu\mu}(u^0)\partial_\alpha u_3\partial_\alpha v\}=$$

$$= \int_\omega \{g_3^+ + g_3^- + \int_{-1}^{1} f_3^\varepsilon dx_3\} v - \int_\omega \{g_\alpha^+ - g_\alpha^- + \int_{-1}^{1} x_3 f_\alpha^\varepsilon dx_3\}\partial_\alpha v\ ,$$

où l'on a posé $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$, $g_i^\pm = g_i^\varepsilon\big|_{\Gamma_\pm}$.

THEOREME 2

Si les normes $\|g_\alpha\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)}$ *et* $\|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}$ *sont suffisamment petites, le problème* (14)-(15) *a au moins une solution.*

Pour démontrer le théorème 2, on remarque que les équations (14)-(15) équivalent à la recherche des zéros de la dérivée d'une fonctionnelle particulière définie sur l'espace $W = (H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega)$. Avec les hypothèses de l'énoncé, on montre alors que $J(.) \to +\infty$ lorsque $\|.\|_W \to \infty$. Enfin, bien que la fonctionnelle J ne soit pas convexe, on montre qu'elle est faiblement s.c.i. sur W (cette dernière propriété résultant, entre autres, de l'injection compacte de $H_0^2(\omega)$ dans $W^{1,4}(\omega)$).

On obtient ainsi l'existence d'(au moins) une solution des équations (14)-(15) dans l'espace W.

Adaptant ensuite à ce problème le raisonnement de ([5], page 56), on déduit, sous les hypothèses de régularité (1), que

$$(16) \qquad (u_1^0,u_2^0,u_3) \in (W_0^{1,4}(\omega) \cap W^{3,4}(\omega))^2 \times (W_0^{2,4}(\omega) \cap W^{4,4}(\omega)).$$

<u>Etape 3</u> : <u>Calcul des contraintes</u> : Toutes les contraintes σ_{ij} peuvent être calculées en fonction des données et de

$$(17) \qquad n_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{2E}{(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^0)+\nu\gamma_{\mu\mu}(u^0)\delta_{\alpha\beta}\} +$$

$$+ \frac{E}{(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\partial_\alpha u_3 \partial_\beta u_3 + \nu \partial_\mu u_3 \partial_\mu u_3 \delta_{\alpha\beta}\} \quad ,$$

$$(18) \qquad m_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{1} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = - \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\partial_{\alpha\beta}u_3 + \nu\Delta u_3 \delta_{\alpha\beta}\} .$$

On trouve de cette façon (l'expression complète de $\sigma_{33} \in L^4(\Omega)$ est trop longue pour être reproduite ici) :

$$(19) \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{n_{\alpha\beta}}{2} + \frac{3}{2} x_3 \, m_{\alpha\beta} \ (\in W^{2,4}(\Omega)),$$

$$(20) \qquad \sigma_{3\beta} = \frac{g_\beta^+ - g_\beta^-}{2} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_\beta^\varepsilon \, dx_3 - \int_{-1}^{x_3} f_\beta^\varepsilon \, dx_3 - \frac{x_3}{2} \partial_\alpha n_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}(1-x_3^2)\partial_\alpha m_{\alpha\beta} ,$$

$$(\sigma_{3\beta} \in W^{1,4}(\Omega)).$$

4 - <u>CONCLUSIONS</u>

Revenant à l'ouvert Ω^ε, on constate que, sans avoir eu recours à aucune hypothèse <u>a priori</u> (que ce soit de nature géométrique ou de nature mécanique), on a retrouvé en (14)-(15) un modèle connu en théorie non linéaire bidimensionnelle de plaques, considéré d'ailleurs le plus souvent sous les hypothèses simplificatrices $g_\alpha = f_\alpha = 0$ ([6]). Signalons aussi que le Théorème 2 est une généralisation d'un résultat de ([6]).

On montrera dans une note ultérieure qu'une méthode analogue permet de justifier pareillement le <u>modèle de von Karman</u> qui correspond à des conditions aux limites différentes le long de la frontière latérale Γ_0^ε .

([1]) Les indices latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$, et les indices grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2\}$. Les notations $\partial_i v$, $\partial_{ij} v$, etc.., désignent les dérivées partielles $\partial v/\partial x_i$, $\partial^2 v/\partial x_i \partial x_j$, etc. Enfin la convention d'Einstein est utilisée pour la sommation des indices.

([2]) R. VALID, La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures, Eyrolles, Paris, 1977.

([3]) P.G. CIARLET et Ph. DESTUYNDER, une justification du modèle biharmonique en théorie linéaire des plaques, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 285, (1977), 851-854.

([4]) Toutes les fois qu'une fonction f est définie pour presque tout $(x_1, x_2) \in \omega$, on l'identifie à une fonction définie presque partout sur Ω en posant $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$, $x_3 \in [-1,1]$.

([5]) LIONS, J.L., Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

([6]) J. NEČAS et J. NAUMANN, On a boundary value problem in nonlinear theory of thin elastic plates, Aplikace Matematiky 19 (1974), 7-16.

P.G.C.
Analyse Numérique, Tour 55-65
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

Ph. D
Centre de Mathématiques Appliquées
Ecole Polytechnique
Route de Saclay
91128 PALAISEAU CEDEX