B. HELFFER
F. NOURRIGAT

Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 7, p. 1-108
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A7_0>

HYPOELLIPTICITE POUR DES GROUPES NILPOTENTS DE RANG DE NILPOTENCE 3

B. HELFFER et F. NOURRIGAT

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
(France)

Département de Mathématiques
Université de Rennes
35031 Rennes Cedex
(France)

On considère un groupe de Lie G, connexe, simplement connexe, nilpotent, dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet une décomposition de la forme :

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{r} \oplus \mathcal{G}_i$$

avec $[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}$, avec la convention que $\mathcal{G}_{i+j} = 0$ si $i + j > r$. On posera $\mathcal{G}^p = \sum_{j=p}^{r} \mathcal{G}_j$ $(p = 1,\dots,r)$.

On munit l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de la famille de dilatation δ_t définie par : $\delta_t(X) = t^j X$, si X est dans $\mathcal{G}_j$ et t strictement positif.

Le groupe d'isomorphisme δ_t se prolonge à l'algèbre enveloppante universelle (complexifiée) $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$. On désignera, pour tout entier $m \geq 1$, par $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$, l'espace des éléments A de $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ homogènes de degré m, c'est-à-dire tels que $\delta_t(A) = t^m A$, pour tout t strictement positif. On posera :

$$\mathcal{U}^m(\mathfrak{G}) = \sum_{j=o}^{m} \mathcal{U}_j(\mathfrak{G}) .$$

On sait que l'application exponentielle exp définit un difféomorphisme de $\mathfrak{G}$ sur G.

A tout élément a de $\mathfrak{G}$, on fait correspondre un champ de vecteurs réels, invariant à gauche, sur G, noté T(a), défini, pour tout φ dans $C_o^\infty(G)$, par :

$$(T(a)\varphi)(g) = \frac{d}{dt} \varphi(g.\exp(ta))/t=o$$

L'application T se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G.

Soit H un espace de Hilbert et $\pi : G \to \mathcal{L}(H)$, une représentation unitaire fortement continue de G dans $\mathcal{L}(H)$. Désignons par $\mathcal{S}_\pi$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation (c'est-à-dire des vecteurs f de H, tels que l'application $g \to \pi(g)f$ soit C^∞ de G dans H). On associe à tout élément a de $\mathfrak{G}$, un opérateur, encore noté $\pi(a)$, de $\mathcal{S}_\pi$ dans lui-même, défini par :

$$\pi(a)f = \frac{d}{dt}\,\pi(e^{ta})f/_{t=o} \qquad \forall f \in \mathcal{S}_\pi \,.$$

Cette application π se prolonge en un homomorphisme de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}_\pi)$. On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 0.1 : Soit G un groupe nilpotent de rang 3, dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ vérifie les hypothèses ci-dessus. Soit m un entier supérieur ou égal à 1, et P un élément de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Alors l'opérateur différentiel invariant à gauche T(P) est hypoelliptique dans G si, et seulement si, pour toute représentation π, unitaire, irréductible, non triviale de G, l'opérateur $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.
De plus, si T(P) est hypoelliptique, T(P + Q) est hypoelliptique dans G, pour tout Q dans $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$.

La formulation du théorème est due à Rockland [16], qui l'a démontré dans le cas du groupe de Heisenberg H_n. Dans [1], Beals montre que la condition du théorème est nécessaire pour tous les groupes nilpotents (munis d'une dilatation) et il démontre la condition suffisante pour les groupes $H_n \times \mathbb{R}^k$. Dans [8], Helffer démontre le cas général pour les groupes nilpotents de rang 2 ; Beals [2] en donne ultérieurement une démonstration plus directe. Nous n'avons donc ici qu'à montrer la condition suffisante. On pourra, sans restreindre la généralité, supposer que l'ordre de P est un multiple de 6, et que l'opérateur T(P) est formellement autoadjoint. Les techniques de démonstration sont à la fois nouvelles et très classiques. Nous avons dû renoncer à construire des inverses dans des classes d'opérateurs pseudo-différentiels comme dans le cas du rang 2 ([8] , [2]) et sommes revenus à des techniques d'estimation a priori (cf. [11]), dont on déduit des résultats d'hypoellipticité par des méthodes assez classiques. On procède pour démontrer ces inégalités a priori, par des réductions successives du nombre de variables. De telles techniques sont fréquemment utilisées dans les démonstrations concernant les groupes nilpotents : ([12], [15]). Ces réductions sont directement liées au choix d'une chaîne croissante de sous-algèbres isotropes associée à un élément ξ de $\mathfrak{g}^*$, et aux représentations induites associées. Au terme de ces réductions, on est ramené à démontrer des inégalités a priori pour l'opérateur $\pi(P)$, où π est une représentation irréductible fixée. L'injectivité de $\pi(P)$ dans $\mathcal{S}_\pi$ permet alors de démontrer une telle inégalité. L'étape la plus délicate est selon nous le paragraphe 3, où l'on démontre un théorème de perturbation pour des inégalités a priori. Le théorème dit grosso-modo ceci. Si V est un idéal, on sait [12] que, pour tout ξ dans V^* nul sur $[V,V]$, on peut associer une représentation induite π_ξ sur G. Alors, si on a une inégalité a priori "maximale" pour $\pi_\xi(P)$, une inégalité du même type est vraie pour $\pi_{\xi'}(P)$ si les orbites de ξ et de ξ' sont "suffisamment proches".

On peut se demander ce qui nous empèche pour l'instant de traiter le cas général. Si nous savons construire dans le cas général une chaîne croissante de sous-algèbres isotropes, par un procédé généralisant celui utilisé ici ([10]), une des difficultés que nous ne savons pas surmonter est la suivante : dans le cas des groupes nilpotents de rang 3, les sous-algèbres isotropes considérées sont stables par les δ_t, ce qui n'est plus vrai dans le cas général (à partir du rang 4). La démonstration donnée ici utilise cette propriété. Nous avons essayé d'être au maximum self-contained, le cas du rang 2 est redémontré en détail, seul le paragraphe 5.6 fait exception puisqu'il utilise une idée de [16] et les techniques développées dans [3] et [8].

Des problèmes connexes (résolubilité locale, opérateurs non homogènes ou non invariants) sont traités dans [13], [17]. Les résultats démontrés ici sont annoncés dans [9]. Il peut être intéressant de consulter cet exposé pour avoir une idée des grandes lignes de la démonstration. Signalons enfin le livre [7] qui présente un certain nombre de résultats récents sur les opérateurs sur les groupes nilpotents (cf. également les travaux de l'école de Stein [6], [17]). Les techniques de Rotschild-Stein [17] sont utilisées au paragraphe 6.

Nous tenons enfin à remercier G. Lion, N. Lohoué, Y. Guivarch qui nous ont indiqué quelques références utiles dans une branche nouvelle pour nous.

Le plan est le suivant :

§ 1. NOTATIONS. FORMES DES OPERATEURS

Nous utiliserons l'application exponentielle pour étudier des opérateurs différentiels non dans G, mais dans $\mathcal{G}$.

Pour tout f dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$, désignons par $\tilde{f}$ la fonction définie sur G par : $\tilde{f}(e^x) = f(x)$, pour tout x dans $\mathcal{G}$.
Si a est un élément de $\mathcal{G}$, on fait correspondre à l'opérateur T(a) sur G, un opérateur différentiel sur $\mathcal{G}$, noté $\pi_{(o)}(a)$, défini par :

$$(1.1) \qquad \pi_{(o)}(a)f(x) = \frac{d}{dt}\, \tilde{f}(e^x\, e^{ta})/_{t=o}$$

Si a et b sont deux éléments de $\mathcal{G}$, on désigne par c(a,b), l'unique élément de $\mathcal{G}$ tel que : $e^{c(a,b)} = e^a\, e^b$.
Il est défini par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$(1.2) \qquad c(a,b) = a + b + \frac{1}{2}[a,b] + \frac{1}{12}[a,[a,b]] + \frac{1}{12}[[a,b],b] \quad .$$

On a donc :

$$(1.3) \qquad \frac{d}{dt}\, c(x,ta)/_{t=o} = a + \frac{1}{2}[x,a] + \frac{1}{12}[x[x,a]]$$

On déduit de (1.1) et (1.3), que, pour tous a dans $\mathcal{G}$ et f dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$, on a :

$$(1.4) \qquad \pi_{(o)}(a)f(x) = \langle a + \frac{1}{2}[x,a] + \frac{1}{12}[x,[x,a]], d_x f(x)\rangle_{\langle \mathcal{G},\mathcal{G}^*\rangle}$$

où le crochet < , > désigne la dualité entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$.
De même, pour tout P dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, on fait correspondre à T(P) un opérateur différentiel sur $\mathcal{G}$, noté $\pi_{(o)}(P)$. L'opérateur T(P) est hypoelliptique dans G, si et seulement si $\pi_{(o)}(P)$ est hypoelliptique dans $\mathcal{G}$. C'est désormais $\pi_{(o)}(P)$ que nous étudierons.

On peut expliciter sa forme en choisissant une base (X_j) $(j=1,\dots,p_1)$ de $\mathcal{G}_1$, une base (Y_j) $(j=1,\dots,p_2)$ de $\mathcal{G}_2$, et une base (Z_j) $(j=1,\dots,p_3)$ de $\mathcal{G}_3$.

Alors, si P est dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, l'opérateur $\pi_{(o)}(P)$ est de la forme :

$$\pi_o(P) =$$

$$\sum_{|\alpha|+2|\beta|+3|\gamma|=m} a_{\alpha\beta\gamma}\, \pi_o(X_1)^{\alpha_1}\dots\pi_o(X_{p_1})^{\alpha_{p_1}}\pi_o(Y_1)^{\beta_1}\dots$$
$$\dots\pi_o(Y_{p_2})^{\beta_{p_2}}\pi_o(Z_1)^{\gamma_1}\dots\pi_o(Z_{p_3})^{\gamma_{p_3}}$$

où les $a_{\alpha\beta\gamma}$ sont des constantes complexes, et $\pi_{(o)}(X_j)$ est donné en (1.4) .

$\pi_{(o)}$ est en fait la représentation de $\mathcal{G}$ associée à la représentation unitaire de G dans $L^2(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ est muni de la mesure de Lebesgue) définie par :

$$\forall a \in \mathcal{G},\ \forall f \in L^2(\mathcal{G}),\ \forall x \in \mathcal{G},\ \pi_{(o)}(e^a)f(x) = f(c(x,a))$$

Cette dernière représentation est unitairement équivalente à la représentation π de G dans $L^2(G)$ (munie de sa mesure de Haar invariante), définie par :

$$\forall g \in G,\ \forall f \in L^2(G),\ \forall g_1 \in G \ :\ (\tilde{\pi}(g)f)(g_1) = f(g_1 g)$$

Définition 1.1 : Pour tout entier m positif, on désigne par $H^m(\mathcal{G})$, l'espace des fonctions f dans $L^2(\mathcal{G})$, telles que, pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, on ait $\pi_{(o)}(A)f$ dans $L^2(\mathcal{G})$. Désignons par (A_j) une base de $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. Si m = 0, on prend : $A_o = 1$, et par convention $\pi_{(o)}(1)$ est égal à 1. On munit $H^m(\mathcal{G})$ de la norme définie par :

(1.5) $$\|f\|^2_{H^m(\mathcal{G})} = \sum_j \|\pi_{(o)}(A_j)f\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$

$\mathcal{S}(\mathcal{G})$ est dense dans $H^m(\mathcal{G})$. Une étape essentielle dans la démonstration du théorème (0.1) est de montrer la proposition suivante.

Proposition 1.2 : Si P appartient à $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ et vérifie les hypothèses du théorème (0.1), alors il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$, on ait :

(1.6) $$\|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})} \leq C(\|\pi_o(P)u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} + \|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})})$$

Si on désigne par $x = (x_1 + x_2 + x_3)$ (avec x_i dans $\mathcal{G}_i$), la variable de $\mathcal{G}$, on vérifie facilement que, pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, l'opérateur différentiel $\pi_{(o)}(A)$ a ses coefficients indépendants de x_3. Il suffit de le vérifier pour tout $a = (a_1 + a_2 + a_3)$, de

$\mathcal{G}$ (avec a_i dans $\mathcal{G}_i$). Or, on a, pour tout f dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$:

$$(1.7)\qquad \pi_o(a)f(x) = \sum_{i=1}^{3} \langle a_i, d_{x_i} f(x)\rangle + \langle \tfrac{1}{2}[x_1,a_1], d_{x_2} f(x)\rangle$$
$$+ \langle \tfrac{1}{2}[x_1,a_2] + \tfrac{1}{2}[x_2,a_1] + \tfrac{1}{12}[x_1,[x_1,a_1]], d_{x_3} f(x)\rangle$$

On peut donc faire une transformation de Fourier partielle en x_3. On est alors ramené à démontrer une estimation analogue à (1.6) pour des opérateurs non-bornés dans $L^2(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)$ dépendant d'un paramètre ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$. Ces opérateurs sont de la forme $\pi_{\xi_3}(P)$, où π_{ξ_3} est la représentation de $\mathcal{G}$, associée à la représentation de G induite à partir de $G_3 = \exp \mathcal{G}_3$, par le caractère : $\chi_{\xi_3}(\exp x_3) = e^{i\langle x_3,\xi_3\rangle}$.

Nous aurons dans la suite, à étudier d'autres représentations du même type, unitaires, de G dans $L^2(S)$ (où S est un sous-espace de $\mathcal{G}$), dépendant d'un paramètre ξ dans V^* [où V est un idéal (plus généralement une sous-algèbre), tel que V et S soient supplémentaires], qui vérifie : $\xi/_{[V,V]} = 0$.

Pour la théorie générale des représentations induites, nous renvoyons à [12] et [15] ; nous rappellerons, ce dont nous aurons besoin, dans le cas particulier où V est un idéal, au paragraphe suivant .

§ 2. REPRESENTATIONS INDUITES A PARTIR D'UN IDEAL

Dans ce paragraphe, $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie admettant une décomposition :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r ,$$

avec $[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}$, et $\mathcal{G}_{i+j} = 0$, si $i+j > r$.

Pour toute algèbre de Lie $\mathcal{G}$, on désignera par $H(\mathcal{G})$ l'espace des homomorphismes de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{G}$ s'annulant sur $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$).

§. 2.1 Une définition des représentations induites

Soit $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathcal{G}$, et S un sous-espace supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$. On suppose $\mathcal{V}$ et S stables par les dilatations δ_t. Soit ξ dans $H(\mathcal{V})$. Nous allons définir une représentation unitaire $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$ de G dans $L^2(S)$ (où S est muni de la mesure de Lebesgue). Pour cela nous utiliserons la remarque suivante :

Remarque 2.1.1 : Pour tout x dans $\mathcal{G}$, il existe v dans $\mathcal{V}$ et σ dans S uniques, tels que $e^x = e^v . e^\sigma$. On a de plus : $\sigma = p_S(x)$, où p_S (resp. $p_\mathcal{V}$) désigne le projecteur sur S (resp. sur $\mathcal{V}$) associé à la décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{V} \oplus S$. L'application $x \to (v,\sigma)$ définit un difféomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $(\mathcal{V} \times S)$. En particulier, pour tous x,y dans $\mathcal{G}$, il existe v(x,y) dans $\mathcal{V}$

et $\sigma(x,y)$ dans S uniques, tels que :

(2.1.1) $$e^x e^y = e^{v(x,y)} e^{\sigma(x,y)}$$

De plus, pour tout a dans $\mathcal{G}$, les jacobiens des applications de S dans S : $x \to \sigma(x,a)$ et $x \to \sigma(a,x)$, sont égaux à 1.

Nous pouvons définir, pour tous a dans $\mathcal{G}$ et f dans $L^2(S)$, une fonction $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}(e^a)f$ dans $L^2(S)$, par :

(2.1.2) $$\pi_{(\xi,\mathcal{V})}(e^a)f(x) = e^{i<\xi,v(x,a)>} f(\sigma(x,a))$$

Si l'on choisit deux supplémentaires S_1 et S_2 de l'idéal $\mathcal{V}$, les deux représentations ainsi définies dans $L^2(S_1)$ et $L^2(S_2)$ sont équivalentes (c'est-à-dire conjugués par une isométrie, à une constante multiplicative près, de $L^2(S_1)$ sur $L^2(S_2)$). S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira π_ξ au lieu de $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$. La différentielle de π_ξ, notée encore π_ξ, est un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans une algèbre d'opérateurs antiauto-adjoints non-bornés dans $L^2(S)$. On a, pour tous a dans $\mathcal{G}$ et f dans $C_o^\infty(S)$

(2.1.3) $$\pi_\xi(a)f(x) = \frac{d}{dt}\pi_\xi(e^{ta})f(x)\Big|_{t=o}$$

Posons :

$$\sigma'(x,a) = \frac{d}{dt}\,\sigma(x,ta)/_{t=o}$$

$$v'(x,a) = \frac{d}{dt}\,v(x,ta)/_{t=o}$$

Les dérivées existent, car les coordonnées de v et σ sont des polynômes par rapport aux coordonnées de x et a.

On a d'après (2.1.2) et (2.1.3) :

$$(2.1.4) \qquad \pi_\xi(a)f(x) = i\langle v'(x,a),\xi\rangle f + \langle \sigma'(x,a), d_x f(x)\rangle$$

<u>Remarque 2.1.2</u> : On peut expliciter (2.1.4), lorsque a est un élément de $\mathcal{V}$. On a en effet, si x est dans S et a est dans $\mathcal{V}$:

$$e^x.e^a = e^{\exp(\mathrm{ad}x)a}.e^x$$

Rappelons que $(\mathrm{ad}\,x)$ est l'élement de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ défini par :

$$(\mathrm{ad}x)y = [x,y] \quad , \text{ pour tout } y \text{ dans } \mathcal{G}.$$

On a donc, d'après la définition (2.1.1), pour x dans S et a dans $\mathcal{V}$:

$$v'(x,a) = v(x,a) = \exp(\mathrm{ad}x).a = a + [x,a] + \frac{1}{2}[x,[x,a]] + \ldots$$

$$\sigma(x,a) = x \quad ; \ \sigma'(x,a) = 0$$

On en déduit que, si a est dans $\mathcal{V}$, on a, pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$

$$(2.1.5) \qquad \pi_\xi(a)f(x) = i\langle \exp(\operatorname{ad} x)a,\xi\rangle\, f(x)$$

<u>Exemples</u> (cas r = 3)

1) Si $\mathcal{V} = \{0\}$ et $S = \mathfrak{g}$, on retrouve la représentation $\pi_{(o)}$ du paragraphe 1.

2) Si $\mathcal{V} = \mathfrak{g}_3$ et $S = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, on a pour tout ξ_3 dans $H(\mathfrak{g}_3)$ (et dans ce cas $H(\mathfrak{g}_3) = \mathfrak{g}_3^*$), pour tout a dans $\mathfrak{g}$ ($a = \sum_{i=1}^{3} a_i$ avec a_i dans $\mathfrak{g}_i$), et pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$:

$$(2.1.6) \quad \pi_{\xi_3} f(x) = \sum_{i=1}^{2} \langle a_i, d_{x_i} f(x)\rangle + \langle \tfrac{1}{2}[x_1,a_1], d_{x_2} f(x)\rangle$$

$$+\ i\langle a_3 + \tfrac{1}{2}[x_1,a_2] + \tfrac{1}{2}[x_2,a_1] + \tfrac{1}{12}[x_1[x_1,a_1]],\xi_3\rangle f(x)$$

Désignons par $\mathfrak{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier partielle en x_3 dans $\mathfrak{g}$. On déduit de (1.7) et (2.1.6) que l'on a, pour tout $f(x_1,x_2,\xi_3)$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3^*)$:

$$(2.1.7) \qquad \mathfrak{F}\,\pi_{(o)}(a)\,\mathfrak{F}^{-1} f(x_1,x_2,\xi_3) = \pi_{\xi_3}(a).f(x_1,x_2,\xi_3)$$

Nous verrons au paragraphe suivant, comment on peut généraliser cette formule.

Introduisons maintenant les espaces fonctionnels utilisés dans la suite.

<u>Définition 2.1.3</u> : Soit $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathcal{G}$ et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$, tous deux stables par les δ_t. Pour tout entier m positif et tout ξ dans $H(\mathcal{V})$, on désignera par $H_\xi^m(S)$ l'espace des fonctions f dans $L^2(S)$ telles que, pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, on ait $\pi_\xi(A)f$ dans $L^2(S)$. Soit (A_j) une base de $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. On munit $H_\xi^m(S)$ de la norme définie par :

$$\|f\|^2_{H_\xi^m(S)} = \sum_j \|\pi_\xi(A_j)f\|^2_{L^2(S)}$$

<u>Remarque 2.1.4</u> : (cf. [12]) On pourrait bien entendu définir ces espaces, dans le cadre plus général où $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre, et pour toute représentation induite à partir d'une représentation scalaire sur exp $\mathcal{V}$.

Nous démontrerons au paragraphe 5 la proposition suivante :

<u>Proposition 2.1.5</u> : Si r est égal à 3, si P est dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ et vérifie les hypothèses du théorème 0.1, alors il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$ et pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)$, on ait :

$$\|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2)} \leq C[\|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2)} + \|u\|^2_{L^2(\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2)}]$$

La proposition 1.2 résultera immédiatement de la proposition (2.1.5) et de (2.1.7). On peut poursuivre cette réduction du nombre de variables en trouvant une transformation unitaire T de $L^2(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)$ telle que $T^{-1}\pi_{(\xi_3, \mathcal{G}_3)}(A)T$ soit, pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, un opérateur différentiel à coefficients indépendants de x_2. Nous allons généraliser ce procédé dans le prochain paragraphe.

§ 2.2 Réduction du nombre de variables

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 : Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$ deux idéaux de $\mathcal{G}$, tels que :

(2.2.1) $$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1 \quad \text{et} \quad [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] \subset \mathcal{V}$$

Soient X_1 un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}_1$ et X_2 un supplémentaire de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{G}$. Notons $(x = x_1 + x_2)$ la variable de $(X = X_1 \oplus X_2)$. On suppose que $\mathcal{V}$, X_1 et X_2 sont stables par les δ_t. Soit ξ dans $H(\mathcal{V})$ tel que :

(2.2.2) $$\xi \text{ s'annule sur } [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] \quad ;$$

Alors il existe une représentation unitaire $\tilde{\pi}_{(\xi, \mathcal{V})}$ de G dans

$L^2(X_1 \oplus X_2)$ telle que :

1) La représentation $\tilde{\pi}_{(\xi,\mathcal{V})}$ est équivalente à $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$

2) Pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, l'opérateur différentiel $\tilde{\pi}_{(\xi,\mathcal{V})}(A)$ a ses coefficients indépendants de x_1.

3) En désignant par $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier partielle en x_1, on a, pour tout f dans $\mathcal{S}(X_1 \oplus X_2)$:

$\forall\, \xi_1 \in X_1^*$, $\forall\, x_2 \in X_2$,

$$(2.2.3) \qquad [\mathcal{F}\tilde{\pi}_{(\xi,\mathcal{V})}(A)f](\xi_1,x_2) = \pi_{(\xi+\xi_1,\, \mathcal{V}_1)}(A)\mathcal{F}f(\xi_1,x_2)$$

(2.2.3) a bien un sens, car, si ξ est dans $\mathcal{V}^*$ et s'annule sur $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$, et si ξ_1 est dans X_1^*, on a bien $\xi + \xi_1$ dans $H(\mathcal{V}_1)$ (en identifiant $\mathcal{V}_1^*$ et $X_1^* \oplus \mathcal{V}^*$).

<u>Démonstration</u> : La démonstration résulterait aisément de théorèmes généraux sur les représentations induites (cf. [12]; nous donnons ici une démonstration à la main.

1) <u>Définition de</u> $\tilde{\pi}_\xi$: Soit a dans $\mathcal{G}$. Nous allons définir un opérateur unitaire $\tilde{\pi}_\xi(e^a)$ dans $L^2(X_1 \oplus X_2)$. D'après la remarque 2.1.1, pour tout x_2 dans X_2, il existe $v_1(x_2,a)$ dans V_1 et $\tau_2(x_2,a)$ dans X_2 uniques tels que :

$$(2.2.4) \qquad e^{x_2}e^a = e^{v_1(x_2,a)}e^{\tau_2(x_2,a)}$$

Composons à gauche par e^{x_1} et appliquons de nouveau la remarque 2.1.1. : il existe $w(x_1,x_2,a)$ dans V et $\tau_1(x_1,x_2,a)$ dans X_1 uniques tels que :

$$e^{x_1} e^{v_1(x_2,a)} = e^{w(x_1,x_2,a)} e^{\tau_1(x_1,x_2,a)}$$

et, par conséquent :

$$(2.2.5) \qquad e^{x_1} e^{x_2} e^{a} = e^{w(x_1,x_2,a)} e^{\tau_1(x_1,x_2,a)} e^{\tau_2(x_2,a)}$$

Posons, pour tout f dans $L^2(X_1 \oplus X_2)$:

$$(2.2.6) \tilde{\pi}_\xi(e^a) f(x_1,x_2) = e^{i\langle \xi, w(x_1,x_2,a)\rangle} f(\tau_1(x_1,x_2,a), \tau_2(x_2,a))$$

$\tilde{\pi}_\xi(e^a)$ est unitaire (cf. remarque 2.1.1).

2) <u>Vérification de</u> 1) : Dans le langage des représentations induites, $\tilde{\pi}_\xi$ est la représentation sur $\mathcal{G}$ induite à partir de la représentation T_ξ sur $(\exp \mathcal{V}_1)$, où T_ξ est la représentation induite à partir de la représentation associée à ξ sur $\exp \mathcal{V}$. π_ξ est la représentation sur $\mathcal{G}$ induite à partir de la représention associée à ξ sur $(\exp \mathcal{V})$. Il est classique, que ces deux représentations sont équivalentes. Montrons le dans notre cas particulier. Il faut montrer qu'il existe un isomorphisme unitaire T_ξ de $L^2(X_1 \oplus X_2)$ tel que, pour tout a dans $\mathcal{G}$:

$$(2.2.7) \qquad T_\xi \cdot \tilde{\pi}_\xi(e^a) = \pi_\xi(e^a) T_\xi$$

D'après la remarque 2.1.1., pour tout x dans X, il existe $\varphi(x)$ dans V, $y_i(x)$ dans X_i $(i = 1,2)$, tels que :

$$(2.2.8) \qquad e^x = e^{\varphi(x)}\, e^{y_1(x)}\, e^{y_2(x)}$$

On vérifie que l'application : $x \to y_1 + y_2 = y$, est un bijection de X sur lui-même, dont le jacobien est 1. L'opérateur T_ξ défini pour tout f dans $L^2(X)$ par :

$$(2.2.9) \qquad T_\xi f(x) = e^{i<\xi, \varphi(x)>} f(y_1(x), y_2(x))$$

est donc un isomorphisme unitaire de $L^2(X)$.

Vérifions maintenant (2.2.7). On a, pour tout f dans $L^2(X_1 \oplus X_2)$:

$$T_\xi \cdot \tilde{\pi}_\xi(e^a) f(x) = e^{i<\xi, \varphi(x) + w(y(x),a)>} f(y(\sigma(x,a)))$$

$$\pi_\xi(e^a)\, T_\xi f(x) = e^{i<\xi, v(x,a) + \varphi(\sigma(x,a))>} f(y(\sigma(x,a)))$$

Comme ξ s'annule sur $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$, il suffit de montrer que :

$$(2.2.10) \qquad \tau(y(x),a) = y(\sigma(x,a))$$

$$\varphi(x) + w(y(x),a) = v(x) + \varphi(\sigma(x,a)) \text{ modulo } [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$$

Cela se vérifie facilement en calculant de 2 manières $e^x e^a$, et en utilisant (2.2.5) et (2.2.8). On a en effet :

$$e^x e^a = e^{v(x,a)} e^{\sigma(x,a)} = e^{v(x,a)} e^{\varphi(\sigma(x,a))} e^{y_1(\sigma(x,a))} e^{y_2(\sigma(x,a))}$$

$$e^x e^a = e^{\varphi(x)} e^{y_1(x)} e^{y_2(x)} e^a = e^{\varphi(x)} e^{w(y(x),a)} e^{\tau_1(y(x),a)} e^{\tau_2(y(x),a)}$$

On utilise alors l'unicité de la décomposition.

3) <u>Vérification de</u> 2) : 2) résulte essentiellement du fait que $\mathcal{V}_1$ est une sous-algèbre isotrope. On va vérifier que, pour tout a dans $\mathfrak{G}$, les coefficients de l'opérateur différentiel $\tilde{\pi}_\xi(a)$ sont indépendants de x_1. On a, pour toute f dans $\mathcal{S}(S)$,

$$\tilde{\pi}_\xi(a)\, f(x) = \frac{d}{dt}\ \tilde{\pi}_\xi(e^{ta})\, f(x)\,/_{t=o}$$

Posons :

$$w'(x,a) = \frac{d}{dt}\ w(x,ta)/_{t=o}$$

$$(j = 1,2)$$

$$\tau_j'(x,a) = \frac{d}{dt}\tau_j(x,ta)/_{t=o}$$

L'opérateur différentiel $\tilde{\pi}_\xi(a)$ est alors défini par :

(2.2.11)

$$\tilde{\pi}_\xi(a)f(x) = i\langle w'(x,a),\xi\rangle f + \sum_{i=1}^{2} \langle\tau_i'(x,a), d_{x_i} f(x)\rangle$$

Il suffit donc de vérifier que $\tau'_j(x,a)(j=1,2)$ et $\langle w'(x,a),\xi\rangle$ sont indépendants de x_1. D'après (2.2.5), τ_2 est bien indépendant de x_1. D'après la remarque 2.1.1, et en tenant compte de l'inclusion $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] \subset \mathcal{V}$, on a :

$$(2.2.12) \qquad \tau_1(x,a) = x_1 + p_{X_1} v_1(x_2,a)$$

Le coefficient de $\tau'_1(x,a)$ est donc lui aussi indépendant de x_1. Enfin, on a :

$$e^{w(x,a)} = e^{x_1} e^{v_1(x_2,a)} e^{-x_1 - p_{X_1} v_1(x_2,a)}$$

d'où l'on déduit, d'après la formule de Campbell Hausdorff :

$$(2.2.13) \qquad w(x,a) = p_{\mathcal{V}} v_1(x_2,a) \quad \text{modulo} \, [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$$

Comme ξ s'annule sur $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$, on a $\langle \xi, w'(x,a)\rangle = \langle \xi, p_{\mathcal{V}} v'_1(x_2,a)\rangle$; ce coefficient est bien indépendant de x_1.

4) <u>Vérification de</u> 3) : Il suffit de vérifier (2.2.3) pour les opérateurs $\tilde{\pi}_\xi(a)$, pour tout a dans $\mathfrak{G}$. D'après (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13), on a :

$$[\mathfrak{F}\, \tilde{\pi}_\xi(a) f](\xi_1, x_2) = i[\langle p_{\mathcal{V}} v'_1(x_2,a),\xi\rangle + \langle p_{X_1} v'_1(x_2,a),\xi_1\rangle]\, \mathfrak{F}f$$
$$+ \langle \tau'_2(x_2,a), d_{x_2} \mathfrak{F}f(\xi_1,x_2)\rangle$$

On reconnait la représentation induite $\pi_{(\xi+\xi_1,\mathcal{V}_1)}$.
La démonstration est ainsi terminée.

On déduit immédiatement de cette proposition le :

<u>Corollaire 2.2.2</u> : Soient A et B dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On suppose qu'il existe une constante C positive telle que, pour tout ξ_1 dans X_1^*, tout f dans $\mathcal{S}(X_2)$, on ait :

$$\|\pi_{(\xi+\xi_1,\ \mathcal{V}_1)}(A)f\|^2_{L^2(X_2)} \leq C\|\pi_{(\xi+\xi_1,\mathcal{V}_1)}(B)f\|_{L^2(X_2)}$$

Alors on a, avec la même constante C, pour tout f dans $\mathcal{S}(X_1\oplus X_2)$:

$$\|\pi_{(\xi,\mathcal{V})}(A)f\|_{L^2(X_1\oplus X_2)} \leq C\|\pi_{(\xi,\mathcal{V})}(B)f\|_{L^2(X_1\oplus X_2)} .$$

<u>Remarque 2.2.3</u> : Dans le cas $r = 3$, $\mathcal{V} = \mathfrak{g}_3$, $\mathcal{V}_1 = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$, $X_1 = \mathfrak{g}_2$ et $X_2 = \mathfrak{g}_1$; on peut expliciter facilement la transformation T_{ξ_3} définie en (2.2.9), pour tout ξ_3 dans $\mathfrak{g}_3^*$.
En notant x_i la variable de $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1,2)$, on a :

$$T_{\xi_3} f(x_1,x_2) = e^{i<\xi_3,\frac{1}{2}[x_1,x_2]} f(x_1,x_2)$$

pour tout f dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$.

<u>Remarque 2.2.4</u> : On peut écrire les hypothèses de la proposition 2.2.1 avec d'autres notations. Puisque $\mathcal{V}$ est un idéal de $\mathcal{G}$, on peut associer à tout ξ dans $\mathcal{V}^*$ une forme bilinéaire B_ξ définie sur $\mathcal{V}\times \mathcal{G}$ par : $\forall x \in \mathcal{V}$, $\forall y \in \mathcal{G}$

$$B_\xi(x,y) = \langle \xi, [x,y] \rangle$$

Dire que ξ est dans $H(\mathcal{V})$ est équivalent à dire que $\mathcal{V}$, muni de la forme bilinéaire antisymétrique B_ξ est isotrope. Posons :

$$\mathcal{V}^\perp = \{ y \in \mathcal{G} , \forall x \in \mathcal{V} \quad , B_\xi(x,y) = 0 \}$$

Si $\mathcal{V}$ est isotrope, on a : $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\perp$. Les hypothèses de la proposition 2.2.1 impliquent donc : $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}^\perp$. Le processus de réduction du nombre de variables indiqué dans cette proposition ne pourra donc plus s'appliquer lorsque $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\perp$. On dit alors que $\mathcal{V}$ est isotrope maximal pour B_ξ, et l'on démontre que la représentation induite $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$ est irréductible.

§ 2.3 <u>Translations sur le groupe quotient</u>

$\mathcal{V}$ désigne toujours un idéal de $\mathcal{G}$, et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$. On suppose $\mathcal{V}$ et S stables par les δ_t. Etant donnés ξ et ξ' dans $H(\mathcal{V})$, on va donner une condition suffisante pour que les représentations $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$ et $\pi_{(\xi',\mathcal{V})}$

dans $L^2(S)$ soient équivalentes. Pour tout h dans $\mathcal{G}$, on désigne par adh l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ défini pour tout x dans $\mathcal{G}$ par :

$$adh(x) = [h,x]$$

On désigne par $(adh)^*$, l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$ défini pour tous ξ dans $\mathcal{G}^*$ et x dans $\mathcal{G}$ par :

$$<(adh)^*\xi, x> = <\xi,(adh)x> = <\xi,[h,x]>$$

On désigne alors par $\exp(adh)^*\xi$, l'élément de $\mathcal{G}^*$ défini pour tout x dans $\mathcal{G}$ par :

$$\begin{aligned} <\exp(adh)^*\xi, x> &= <\xi, \exp(adh)x> \\ &= <\xi, x + [h,x] + \frac{1}{2}[h[h,x]] + \dots> \end{aligned}$$

Etant donné un élément ξ de $\mathcal{V}^*$, on appellera orbite de ξ dans $\mathcal{V}^*$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'application : $h \to \exp(adh)^*\xi/_{\mathcal{V}^*}$. Si ξ est dans $H(\mathcal{V})$, il est facile de vérifier que toute l'orbite est dans $H(\mathcal{V})$ (car $\mathcal{V}$ est un idéal).

On va montrer que si ξ est dans $H(\mathcal{V})$, et si ξ' est dans l'orbite de ξ, alors les représentations $\pi_{(\xi,\mathcal{V})}$ et $\pi_{(\xi',\mathcal{V})}$ sont unitairement équivalentes, et l'on va préciser la nature de cette équivalence.

La loi de composition: $\{(a,b) \to \sigma(a,b)\}$ définie en (2.1.1) munit S d'une structure de groupe de Lie, isomorphe à G/V (où V est le sous-groupe normal, image de $\mathcal{V}$ par l'application exponentielle).

Pour tout f dans $L^2(S)$ et tout h dans $\mathfrak{G}$, on définit $T_h f$ par :

(2.3.1) $\quad T_h f(x) = f(\sigma(h,x))$, pour tout x dans S

La fonction $(a,b) \to v(a,b)$ de $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ dans $\mathcal{V}$ étant définie en (2.1.1), on pose :

(2.3.2) $$\varphi(h,x,\xi) = \langle\xi, v(h,x)\rangle$$

On va démontrer :

<u>Proposition 2.3.1</u> : Avec les notations ci-dessus, on a, pour tout a dans $\mathfrak{G}$ et h dans S

(2.3.3) $$e^{i\varphi} T_h \pi_\xi(e^a) = \pi_{\xi'}(e^a) e^{i\varphi} T_h$$

où $\xi' = \exp(\mathrm{ad}h)^* \xi$ et par conséquent :

(2.3.4) $$e^{i\varphi} T_h \pi_\xi(a) = \pi_{\xi'}(a) e^{i\varphi} T_h$$

La relation (2.3.4) s'étend à toute l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$.

<u>Démonstration</u> : On va d'abord prouver que :

$$\sigma(h,\sigma(x,a)) = \sigma(\sigma(h,x),a)$$

(2.3.5)

$$v(h,x) + v(\sigma(h,x),a) = v(h,\sigma(x,a)) + \exp(\operatorname{ad}h)\ v(x,a) \quad \mathrm{mod.}[\mathcal{V},\mathcal{V}]$$

Pour cela, calculons de 2 manières le produit $e^h e^x e^a$. On a :

(2.3.6)

$$(e^h e^x)e^a = e^{v(h,x)}e^{\sigma(h,x)}e^a = e^{v(h,x)}e^{v(\sigma(h,x),a)}e^{\sigma(\sigma(h,x),a)}$$

$$e^h(e^x . e^a) = e^h e^{v(x,a)}e^{\sigma(x,a)} = e^{\exp(\operatorname{ad}h)v(x,a)} . e^h e^{\sigma(x,a)}$$

$$(2.3.7)\quad e^h(e^x e^a) = e^{\exp(\operatorname{ad}h)v(x,a)}e^{v(h,\sigma(x,a))}e^{\sigma(h,\sigma(x,a))}$$

En comparant (2.3.6) et (2.3.7) et en remarquant que $\mathcal{V}$ est un idéal de $\mathcal{G}$, on en déduit aisément (2.3.5).

Démontrons maintenant l'égalité (2.3.4) ; on a :

$$\pi_\xi(e^a)f = e^{i<\xi, v(x,a)>}f(\sigma(x,a))$$

$$T_h \pi_\xi(e^a)f(x) = e^{i<\xi, v(\sigma(h,x),a)>}f(\sigma(\sigma(h,x),a))$$

$$(2.3.8)\quad e^{i\varphi}T_h \pi_\xi(e^a)f(x) = e^{i<\xi, v(h,x)+v(\sigma(h,x),a)>}f(\sigma(\sigma(h,x),a))$$

D'autre part :

$$e^{i\varphi}T_h\, f(x) = e^{i<\xi, v(h,x)>}f(\sigma(h,x))$$

$$\pi_{\xi'}(e^a)e^{i\varphi}T_h f(x) = e^{i<\xi, v(h,\sigma(x,a))> + i<\xi', v(x,a)>}f(\sigma(h,\sigma(x,a)))$$

(2.3.9)

$$\pi_{\xi'}(e^a)e^{i\varphi}T_h f = e^{i\langle\xi, v(h,\sigma(x,a)) + \exp(\mathrm{ad}h)v(x,a)\rangle} f(\sigma(h,\sigma(x,a)))$$

Les expressions (2.3.8) et (2.3.9) sont bien égales d'après (2.3.5).

§ 3. PROLONGEMENT PAR CONTINUITE D'INEGALITES

Dans ce paragraphe, $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie nilpotente de rang r. $\mathcal{V}$ désigne toujours un idéal de $\mathcal{G}$ et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$, tous deux stables par les δ_t. Soient A et P dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. On suppose qu'il existe un sous-ensemble Ω de $H(\mathcal{V})$ tel qu'il existe une constante C_o strictement positive, telle que :

$$\forall \xi \in \Omega\ , \quad \forall u \in \mathcal{S}(S),$$

$$(3.1) \qquad \|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C_o \|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

et l'on va définir des sous-ensembles Ω_ε de $H(\mathcal{V})$, contenant Ω, tels qu'une inégalité voisine de (3.1) soit vérifiée pour tout ξ dans Ω_ε. Remarquons tout d'abord, qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que Ω a la propriété suivante :

(3.2) Pour tout ξ dans Ω, toute l'orbite de ξ dans $\mathcal{V}^*$ est dans Ω.

En effet, si l'estimation (3.1) est vérifiée au point ξ, elle est aussi vérifiée en remplaçant ξ par $\exp(\mathrm{ad}\, h)^* \xi$, pour tout h dans $\mathcal{G}$, d'après la proposition (2.3.1).

Dire que V est stable par les δ_t équivaut à dire que $\mathcal{V}$ est somme directe de sous-espaces inclus dans les $\mathcal{G}_i$.

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{V} \cap \mathcal{G}_i$$

Pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*$, on désignera par ξ_i sa restriction à $\mathcal{V} \cap \mathcal{G}_i$, par $|\xi_i|$ la norme de cette restriction dans le dual de $(\mathcal{V} \cap \mathcal{G}_i)$, et l'on posera :

$$(3.3) \qquad \|\xi\| = \sum_{i=1}^{r} |\xi_i|^{1/i}$$

On a donc, pour tout t strictement positif, $\|\delta_t(\xi)\| = t\|\xi\|$. On définit pour tout ε strictement positif, Ω_ε comme l'ensemble des ξ dans $H(\mathcal{V})$ tels que, pour tout h dans $\mathcal{G}$, il existe ξ' dans Ω tel que :

$$(3.4) \qquad \|\xi' - \exp(\operatorname{ad} h)^* \xi\| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, ξ est dans Ω_ε, si et seulement si, toute son orbite est à une distance de Ω moindre que ε.

<u>Proposition 3.1</u> : Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une constante C strictement positive, telle que :

$$\forall\, \varepsilon \in\,]0,1], \quad \forall u \in \mathcal{S}(S), \quad \forall \xi \in \Omega_\varepsilon \;;$$

$$(3.5) \qquad \|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \varepsilon\|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)})$$

§ 3.1 Démonstration de lemmes préliminaires

Pour tout p dans $\mathbb{C}$, on désigne par H_p l'ensemble des polynômes $f(x,\xi)$ sur $S\times V^*$ tels que, pour toutt strictement positif :

$$f(\delta_t(x),\delta_{t^{-1}}(\xi)) = t^{-p}f(x,\xi) \tag{3.1.1}$$

La démonstration de la proposition (3.1) nécéssite la démonstration de trois lemmes préliminaires.

Lemme 3.1.1 : Soit A dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ $(m\geq 1)$. Il existe un nombre fini d'éléments A_j^ℓ et B_j^ℓ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})(j = 1,\dots,m,$ ℓ décrit un ensemble fini L), où B_j^ℓ est dans $\mathcal{U}_j$ $(j\geq 1)$ et A_j^ℓ est dans $\mathcal{U}_{m-j}$, tels que, pour tout ψ dans $C_o^\infty(S)$ et tout ξ dans $H(\mathcal{V})$, on ait :

$$[\pi_\xi(A),\psi] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell\in L} (\pi_o(B_j^\ell)\psi)\pi_\xi(A_j^\ell) \tag{3.1.2}$$

Démonstration du lemme 3.1.1 : On vérifie d'abord i) pour A dans $\mathfrak{g}$. On a alors :

$$[\pi_\xi(A),\psi] = (\pi_o(A)\psi)$$

Cela résulte immédiatement de la forme de l'opérateur différentiel du 1er ordre $\pi_\xi(A)$.

Supposons i) vérifiée pour tout B dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$ homogène de degré inférieur ou égal à m-1. Démontrons i) pour un terme de la forme A∘B, lorsque A est dans $\mathfrak{G}_j$ et B dans $\mathcal{U}_{m-j}$. On suppose donc qu'il existe un nombre fini d'éléments B_k^ℓ dans $\mathcal{U}_k$ $(k \geq 1)$ et A_k^ℓ dans $\mathcal{U}_{m-j-k}$, tels que :

$$[\pi_\xi(B),\psi] = \sum_k \sum_{\ell \in L} (\pi_o(B_k^\ell)\psi)\, \pi_\xi(A_k^\ell)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
[\pi_\xi(A\circ B),\psi] &= [\pi_\xi(A),\psi]\pi_\xi(B) + \pi_\xi(A)[\pi_\xi(B),\psi] \\
&= (\pi_o(A)\psi)\pi_\xi(B) + \sum_k \sum_\ell \pi_\xi(A)(\pi_o(B_k^\ell)\psi).\pi_\xi(A_k^\ell) \\
&= (\pi_o(A)\,\psi)\pi_\xi(B) + \sum_{k,\ell} \pi_o(B_k^\ell)\psi\ \pi_\xi(A\circ A_k^\ell) \\
&\quad + \sum_{k,\ell} (\pi_o(A\circ B_k^\ell)\,\psi)\,\pi_\xi(A_k^\ell)
\end{aligned}$$

Le commutateur admet bien la décomposition annoncée.

<u>Lemme 3.1.2</u> : Soit A dans $\mathcal{U}_m$, il existe un nombre fini d'opérateurs A_k^ℓ dans $\mathcal{U}_{m-k}$ $(1 \leq k \leq m$, ℓ décrit un ensemble fini L) et de fonctions g_k^ℓ dans H_k, tels que, pour tous ξ et ξ' dans $H(\mathcal{V})$, on ait :

(3.1.3) $$\pi_\xi(A) - \pi_{\xi'}(A) = \sum_{k,\ell} g_k^\ell(x,\xi-\xi')\pi_\xi(A_k^\ell)$$

<u>Démonstration du lemme 3.1.2</u> : On montre d'abord le lemme pour A dans $\mathcal{G}_j$. D'après (2.1.4), on a :

$$\pi_\xi(A) - \pi_{\xi'}(A) = i\langle \xi - \xi', v'(x,A)\rangle \tag{3.1.4}$$

Si on désigne par g_A le second membre de (3.1.5), on peut montrer que, si A dans $\mathcal{G}_j$, g_A est dans H_j. On note désormais A = a. En effet, si V et S sont gradués ; on a pour tous x dans S et a dans $\mathcal{G}$:

$$\delta_t\, v(x,a) = v(\delta_t(x), \delta_t(a)) \tag{3.1.5}$$

Posons $e^y = e^x e^a$.

On a :

$$e^y = e^{v(x,a)} e^{\sigma(x,a)}$$

$$e^{\delta_t(y)} = e^{\delta_t v(x,a)} e^{\delta_t \sigma(x,a)}$$

$$e^{\delta_t(y)} = e^{\delta_t(x)} e^{\delta_t(a)} = e^{v(\delta_t(x),\delta_t(a))} e^{\sigma(\delta_t(x),\delta_t(a))}$$

Ceci prouve (3.1.5).

Si a est dans $\mathcal{G}_j$, on a : $\delta_t(a) = t^j a$. Pour tout t dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\langle \xi, v(x,a)\rangle = \langle \delta_{t^{-1}}(\xi), \delta_t\, v(x,a)\rangle = \langle \delta_{t^{-1}}(\xi), v(\delta_t(x), t^j a)\rangle$$

En différentiant par rapport à a, on obtient :

$$<\xi, v'(x,a)> = <\delta_{t^{-1}}(\xi), v'(\delta_t(x), t^j a)>$$

Comme la différentielle v'(x,a) est linéaire en a, on en déduit :

$$<\xi, v'(x,a)> = t^j <\delta_{t^{-1}}(\xi), v'(\delta_t(x), a)>$$

c'est-à-dire que $g_A(x,\xi)$ est dans H_j .

Supposons maintenant le lemme 3.1.2 vérifié pour tout B homogène de degré inférieur ou égal à m-1, et démontrons-le pour $A \circ B$ avec A dans $\mathcal{G}_j$ et B dans $\mathcal{U}_{m-j}$. On suppose donc qu'il existe un nombre fini de fonctions g_k^ℓ dans H_k $(1 \leq k \leq m)$ et d'élements B_k^ℓ dans $\mathcal{U}_{m-j-k}$, tels que :

$$\pi_\xi(B) - \pi_{\xi'}(B) = \sum_{k,\ell} g_k^\ell(x, \xi - \xi')\pi_\xi(B_k^\ell)$$

on a :

$$\pi_\xi(A \circ B) - \pi_{\xi'}(A \circ B) = [\pi_\xi(A) - \pi_{\xi'}(A)][\pi_\xi(B) + (\pi_{\xi'}(B) - \pi_\xi(B))]$$

$$+ \pi_\xi(A)[\pi_\xi(B) - \pi_{\xi'}(B)]$$

$$= g_A(x, \xi - \xi')[\pi_\xi(B) + \sum_{k,\ell} g_k^\ell(x, \xi - \xi')\pi_\xi(B_k^\ell)]$$

$$+ \sum_{k,\ell} g_k^\ell(x,\xi-\xi')\pi_\xi(A\circ B_k^\ell)$$

$$+ \sum_{k,\ell} [\pi_o(A)g_k^\ell(x,\xi-\xi')]\pi_\xi(B_k^\ell)$$

le lemme (3.1.2) en résulte facilement, si l'on montre, que pour a dans $\mathcal{G}_j$ et g_k dans H_k, $\pi_o(a)g_k(x,\xi)$ est dans H_{j+k}. De même qu'on a démontré (3.1.5), on peut démontrer :

(3.1.6) $$\delta_t\sigma(x,a) = \sigma(\delta_t(x),\delta_t(a))$$

$\pi_o(a)g_k(x,\xi)$ est égal à :

$$<\sigma'(x,a),d_x g_k(x,\xi)>_{S\times S^*}$$

qu'on écrit sous la forme :

$$\pi_o(a)g_k(x,\xi) = \sum_i <\sigma_i'(x,a),d_{x_i} g_k(x,\xi)>_{(S\cap\mathcal{G}_i)\times(S\cap\mathcal{G}_i)^*}$$

On a :

$$d_{x_i}g_k(\delta_t(x),\delta_{t^{-1}}(\xi)) = t^{-i-k}(d_{x_i}g_k)(x,\xi)$$

$$t^i\sigma_i(x,a) = \delta_t(\sigma_i'(x,a)) = \sigma_i'(\delta_t(x),\delta_t(a))$$

$$t^i\sigma_i'(x,a) = t^j\sigma_i'(\delta_t(x),a)$$

On en déduit que :

$$\langle \sigma_i^!(\delta_t(x),a),(d_{x_i} g_k)(\delta_t(x),\delta_{t^{-1}}(\xi))\rangle = t^{-k-j} \langle \sigma_i^!(x,a),(d_{x_i} g_k)(x,\xi)\rangle$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

<u>Lemme 3.1.3</u> : Soit A dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ $(m \geq 1)$, alors il existe un nombre fini de fonctions g_j^ℓ dans H_j, des éléments B_k^ℓ dans $\mathcal{U}_k$, A_i^ℓ dans $\mathcal{U}_i$, tels que ($j+k+i = m$, $j \geq 1$, ℓ décrit un ensemble fini L) et tels que, pour tout ψ dans $C_o^\infty(S)$, tous ξ et ξ' dans $H(\mathcal{V})$, on ait :

$$(3.1.7)\quad (\pi_\xi(A) - \pi_{\xi'}(A))\psi = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}\\ i\in\mathbb{N}\\ j+k+i=m\\ j\geq 1}} \sum_{\ell\in L} g_j^\ell(x,\xi-\xi')(\pi_o(B_k^\ell)\psi)\pi_\xi(A_i^\ell)$$

<u>Démonstration du lemme 3.1.3</u> : D'après (3.1.3), on peut écrire, pour tous ξ et ξ' dans $H(\mathcal{V})$, la décomposition :

$$\begin{aligned}(\pi_\xi(A) - \pi_{\xi'}(A))\psi &= \sum_{j,\ell} g_j^\ell(x,\xi-\xi')\ \pi_\xi(A_j^\ell)\psi \\ &= \sum_{j,\ell} g_j^\ell(x,\xi-\xi')[\psi\cdot\pi_\xi(A_j^\ell) + [\pi_\xi(A_j^\ell),\psi]]\end{aligned}$$

Le lemme (3.1.3) se déduit aisément de cette décomposition en utilisant (3.1.2).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3.1.

§ 3.2 Démonstration de la proposition 3.1

Elle se fera en deux étapes.

1ère étape : Soit ψ dans $C_o^\infty(S)$. On posera, pour tout t dans $\mathbb{R}^+$: $\psi_t = \psi \cdot \delta_t$. Pour tout ξ_1 dans Ω, on peut appliquer (3.1) à $(\psi_t u)$. On obtient :

$$(3.2.1) \quad \exists C_o \ , \ \forall t > 0, \ \forall \xi_1 \in \Omega, \forall u \in C_o^\infty(S) \ ,$$

$$\|\pi_{\xi_1}(A)\psi_t u\| \leq C_o \|\pi_{\xi_1}(P)\psi_t u\|^2$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que pour tout ξ_1 dans Ω, ξ_2 dans $H(\mathcal{V})$, t dans $\mathbb{R}^+$, et toute u dans $C_o^\infty(S)$:

$$(3.2.2) \quad \|\psi_t \pi_{\xi_2}(A)u\|^2 \leq C(\|\psi_t \ \pi_{\xi_2}(P)u\|^2 + \|[\psi_t, \pi_{\xi_2}(A)]u\|^2 +$$

$$+ \|[\psi_t, \pi_{\xi_2}(P)]u\|^2 + \|[\pi_{\xi_1}(A) - \pi_{\xi_2}(A)]\psi_t u\|^2$$

$$+ \|[\pi_{\xi_1}(P) - \pi_{\xi_2}(P)]\psi_t u\|^2 \ )$$

Nous allons montrer qu'il existe pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$ une constante C strictement positive, et un nombre fini d'éléments A_j dans $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$ et B_j dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, tels que l'on ait, pour tout t dans $]0,1]$, pour tous ξ_1, ξ_2 dans $H(\mathcal{V})$ tels que $\{\|\xi_1 - \xi_2\| \leq t\}$, et pour toute u dans $C_o^\infty(S)$:

$$(3.2.3)\quad \|[\psi_t, \pi_{\xi_2}(A)]u\|_o^2 + \|[\pi_{\xi_1}(A) - \pi_{\xi_2}(A)]\psi_t u\|_o^2 \leq$$

$$Ct^2 \sum_j \|(\pi_o(B_j)\psi)_t \, \pi_{\xi_2}(A_j)\, u\|_o^2 \;.$$

On peut toujours supposer A homogène. Pour le 1er terme de (3.2.3), on utilise le lemme (3.1.1) :

$$(3.2.4)\quad \|[\psi_t, \pi_{\xi_2}(A)]u\|^2 \leq C \sum_{j,\ell} \|(\pi_o(B_j^\ell)\psi_t)\pi_{\xi_2}(A_j^\ell)u\|^2$$

où les B_j^ℓ sont homogènes de degré $j \geq 1$, et les A_j^ℓ sont dans $\mathcal{U}^{m-1}$. Maintenant, observons que :

$$(3.2.5)\qquad \pi_o(B_j^\ell)(\psi\circ\delta_t) = t^j(\pi_o(B_j^\ell)\psi)\circ\delta_t$$

j étant supérieur ou égal à 1, et t restant dans l'intervalle $]0,1]$, le premier membre de (3.2.4) est bien majoré par le second membre de (3.2.3).

Pour le deuxième terme de (3.2.3), on utilise le lemme (3.1.3), ce qui donne :

$$\|[\pi_{\xi_1}(A) - \pi_{\xi_2}(A)]\psi_t u\|_o^2 \leq$$

$$C \sum_{\substack{j+k+i \leq m \\ j \geq 1}} \sum_{\ell \in L} t^{2k} \|g_j^\ell(x, \xi_1 - \xi_2)(\pi_o(B_k^\ell)\psi)_t \pi_{\xi_2}(A_i^\ell)u\|_o^2$$

où les fonctions g_j^ℓ sont dans H_j $(j \geq 1)$.

Montrons maintenant qu'il existe une constante C positive telle que, pour tout t dans $]0,1]$, tout x dans le support de ψ_t, tout ξ dans $\mathcal{V}^*$, vérifiant : $\{\|\xi\| \leq t\}$, on ait :

$$(3.2.7) \qquad |g_j^\ell(x,\xi)| \leq C\, t^j$$

cela résulte immédiatement de l'identité

$$g_j^\ell(x,\xi) = t^j g_j^\ell(\delta_t(x),\delta_{t^{-1}}(\xi))$$

En effet, sous les hypothèses formulées, $(\delta_t(x),\delta_{t^{-1}}(\xi))$ décrit un compact fixe, indépendant de t, sur lequel le polynôme g_j^ℓ est borné, ce qui démontre (3.2.7).

(3.2.3) se déduit alors aisément de (3.2.6) et (3.2.7).

Des inégalités (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.3), on déduit l'existence d'une constante C strictement positive, et d'un nombre fini d'éléments A_j dans $\mathcal{U}^{m-1}$ et B_j dans $\mathcal{U}^m$, tels que l'on ait, pour tout t dans $]0,1]$, tous ξ_1 dans Ω et ξ_2 dans $H(\mathcal{V})$, vérifiant $\|\xi_1 - \xi_2\| \leq t$, et toute fonction v dans $\mathcal{S}(S)$:

$$(3.2.8) \quad \|\psi_t\, \pi_{\xi_2}(A)v\|^2 \leq C(\|\psi_t\, \pi_{\xi_2}(P)v\|_o^2 + t^2 \sum_j \|(\pi_o(B_j)\psi)_t\, \pi_{\xi_2}(A_j)v\|_o^2)$$

<u>Remarque 3.2.1</u> : Si C_o est la constante apparaissant dans (3.2.1), on peut montrer plus précisément :

$$(3.2.9) \quad \|\psi_t \pi_{\xi_2}(A)v\|^2 \leq \mathcal{K}_o \|\psi_t \pi_{\xi_2}(P)v\|_o^2 + $$

$$+ C\,t^2 (\sum_j \|(\pi_o(B_j)\psi)_t \pi_{\xi_2}(A_j)\mathcal{V}\|_o^2)$$

<u>2ème étape</u> : On utilise maintenant le fait que S, muni de la loi de composition : $(a,b) \to \sigma(a,b)$, est un groupe nilpotent (isomorphe à $G/\exp\mathcal{V}$). On pose, pour tout h dans S et f dans $L^2(S)$:

$$T_h f(x) = f(\sigma(h,x))$$

Comme la mesure de Lebesgue sur S est invariante par le groupe des T_h, on a, pour tout ψ dans $C_o^\infty(S)$ et f dans $L^2(S)$:

$$\|\psi(T_h f)\|_{L^2(S)} = \|(T_{-h}\psi)f\|_{L^2(S)}$$

Si S est gradué, on peut choisir ψ dans $C_o^\infty(S)$ et un sous-groupe discret Z de S, tel que l'on ait :

i) $\sum_{h\in\mathbb{Z}} T_{-h}\psi(x)^2 \equiv 1$

ii) Pour tout opérateur différentiel B invariant à gauche sur S, il existe une constante C strictement positive, telle que: $\forall\ x \in S$

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}} |B\,T_{-h}\psi(x)|^2 \leq C$$

La construction d'une telle partition de l'unité est analogue à celle que l'on fait classiquement sur $\mathbb{R}^n$.

Posons, pour h dans $\mathbb{Z}$ et t dans $]0,1]$: $h_t = \delta_{t^{-1}}(h)$. Soit ξ dans Ω_t, on veut appliquer l'inégalité (3.2.9), en choisissant $\xi_2 = \exp(\mathrm{ad}\, h_t)^* \xi$, pour ξ_1 un élément de $\bar{\Omega}$ tel que :

$$\|\xi_1 - \exp(\mathrm{ad}\, h_t)^* \xi\| \leq t$$

(ξ_1 existe, car ξ est dans Ω_t (cf. 3.4)), et pour fonction v :

$$v(x) = e^{i\varphi(h_t, x, \xi)} \, T_{h_t} u(x)$$

où u est dans $\mathcal{S}(S)$ et $\varphi(h_t, x, \xi)$ est la fonction introduite en 2.3.2 (voir proposition 2.3.1).

On a :

$$\|\psi_t \cdot \pi_{\xi_2}(A)\, v\| = \|\psi_t \cdot e^{i\varphi} \cdot T_{h_t} \pi_\xi(A) u\| = \|\psi_t \, T_{h_t} \pi_\xi(A) u\| =$$

$$\|(T_{-h_t} \psi_t)\, \pi_\xi(A) u\|$$

On a $T_{-h_t} \psi_t = \psi_t((-h_t) \circ x) = \psi(\delta_t(\delta_{t^{-1}}(-h) \circ x))$

$$= \psi((-h) \circ \delta_t(x))$$

$$= (T_{-h} \psi) \circ \delta_t$$

$$= (T_{-h} \psi)_t$$

L'application de (3.2.9) donne :

$$\|(T_{-h}\psi)_t \pi_\xi(A)u\|^2 \leq$$

$$9\,C_o [\|(T_{-h}\psi_t)\pi_\xi(P)u\|_o^2] + \bar{C}\,t^2 \sum_j \|(\pi_o(B_j)T_{-h}\psi)_t\, \pi_\xi(A_j)u\|_o^2$$

Comme $\pi_o(B_j)$ est un opérateur invariant à gauche sur S, on obtient, pour tout f dans $L^2(S)$:

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}} \|(T_{-h}\psi)_t\, f\|^2 = \|f\|^2$$

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}} \|(\pi_o(B_j)T_{-h}\psi)_t\, f\|^2 \leq C\|f\|^2$$

On en déduit que, pour tout ξ dans Ω_t et toute u dans $C_o^\infty(S)$:

$$\|\pi_\xi(A)u\|^2 \leq 9\,C_o\,\|\pi_\xi(P)u\|^2 + C\,t^2 \sum_j \|\pi_\xi(A_j)u\|_o^2$$

$$\leq 9\,C_o\,\|\pi_\xi(P)u\|^2 + C\,t^2\,\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)}$$

Ceci démontre la proposition 3.1.

Remarque 3.2.2 : La proposition (3.1) admet la généralisation suivante :

Soient A_j, P_j $(j = 1,\ldots,J)$ des éléments de $\mathcal{U}^m(\mathfrak{G})$. On suppose qu'il existe une constante C_o telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(S)$, tout ξ dans Ω, on ait :

$$\sum_j \|\pi_\xi(A_j)u\|_o^2 \leq C_o \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 \;.$$

Alors il existe une constante C(J) strictement positive (ne dépendant que de J) et une constante C strictement positive (dépendant aussi des opérateurs) telles que, pour tout ε dans $]0,1]$, tout ξ dans $\dot{\Omega}_\varepsilon$, toute u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$\sum_j \|\pi_\xi(A_j)u\|_o^2 \leq C(J).C_o \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 + C\varepsilon\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}}$$

§ 3.3 <u>Application</u> : <u>un théorème des dérivées intermédiaires</u>

<u>Proposition 3.3.1</u> : Soit G un groupe de Lie nilpotent de rang r, dont l'algèbre de Lie a les propriétés définies au § 0. Soit $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathfrak{G}$, et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathfrak{G}$, $\mathcal{V}$ et S étant stables par δ_t. Soit m un entier multiple commun de 2,3,...,r. On désigne par (P_j) une base de l'espace vectoriel $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$.
Alors pour tout α dans $]0,1]$, il existe une constante strictement positive $C(\alpha)$ telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ et tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(3.3.1) \quad \|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)} \leq \alpha \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|^2_{L^2(S)} + C(\alpha)\|u\|^2_{L^2(S)}$$

<u>Démonstration</u> : Nous procèdons par récurrence sur r. Si r est égal à 1, les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ s'identifie à des polynômes sur

$\mathbb{R}^n$, où n est la dimension de $\mathcal{G}$. On peut prendre pour $\mathcal{V}$ et S deux sous-espaces supplémentaires quelconques de $\mathcal{G}$. On notera x_2 la variable de S et ξ_1 la variable de $\mathcal{V}^*$. Pour tous A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$ et ξ_1 dans V^*, on a :

$$\pi_{\xi_1}(A) = A(\xi_1, D_{x_2})$$

Si (P_j) est une base de l'espace des polynômes homogènes de degré m, et si A est un polynôme de degré inférieur ou égal à (m-1), alors, pour tout α dans $]0,1]$, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que, pour tout ξ dans $\mathbb{R}^r$, on ait :

$$|A(\xi)|^2 \leq \alpha \sum_j |P_j(\xi)|^2 + C(\alpha)$$

Au moyen d'une transformation de Fourier partielle, on en déduit 3.3.1. Supposons maintenant (3.3.1) démontrée pour tous les groupes nilpotents de rang inférieur ou égal à (r-1), et démontrons-le pour un groupe nilpotent de rang r.

Nous traitons d'abord le cas où l'idéal $\mathcal{V}$ contient $\mathcal{G}_r$. Dans ce cas, pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*$, on désigne par ξ_r la restriction de ξ à $\mathcal{G}_r$. Posons :

$$\Omega = \{\xi \in H(\mathcal{V}), \xi_r = 0\}$$

On utilise le lemme classique suivant:

<u>Lemme 3.3.2</u> : Soient $\widetilde{G}$ le groupe quotient G/G_r, Φ l'homomorphisme surjectif $\Phi : G \to \widetilde{G}$, et φ sa différentielle $\{\varphi : \mathcal{G} \to \widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_r\}$, qui se prolonge en un homomorphisme des algèbres enveloppantes $\varphi : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \to \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{G}})$. Si $\mathcal{V}$ est un idéal de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{G}_r$, et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$, alors $\varphi(\mathcal{V})$ est un idéal $\widetilde{\mathcal{V}}$ de $\widetilde{\mathcal{G}}$, et $\varphi(S)$ un supplémentaire de $\widetilde{\mathcal{V}}$. La transposée de φ définit un isomorphisme de $H(\widetilde{\mathcal{V}})$ sur l'espace Ω (on notera $\widetilde{\xi}$ et ξ les éléments correspondants). Pour tout u dans $C_o^\infty(S)$, on note $\widetilde{u}$ l'élément correspondant dans $C_o^\infty(\varphi(S))$. Alors, pour tous A dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, toute u dans $C_o^\infty(S)$, on a :

$$\widetilde{\pi_{(\xi,\mathcal{V})}}(A)u = \pi_{(\widetilde{\xi},\widetilde{\mathcal{V}})}(\varphi(A)).\widetilde{u}$$

et l'on a :

$$\|\pi_{(\xi,\mathcal{V})}(A)u\|_{L^2(S)} = \|\pi_{(\widetilde{\xi},\widetilde{\mathcal{V}})}(\varphi(A))\widetilde{u}\|_{L^2(\varphi(S))}$$

De l'hypothèse de récurrence, on déduit immédiatement que (3.3.1) est vérifiée par ξ dans Ω. Si $\Omega = H(\mathcal{V})$, on a fini. On suppose donc $\Omega \subset H(\mathcal{V})$ strict. Soit J, la dimension de l'espace $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, soient (A_j) une base de $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$ et (P_k) une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. On applique la remarque (3.2.2), en partant de l'estimation (3.3.1). On obtient qu'il existe une constante $C_1(\alpha)$ strictement positive telle que, pour tout ε dans $]0,1]$, tout ξ dans Ω_ε et tout u dans $C_o^\infty(S)$, on ait :

$$\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)} \leq C(J).\alpha \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 + C(J)C(\alpha)\|u\|_o^2 + C_1(\alpha)\varepsilon\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)}$$

Posons $\varepsilon(\alpha) = \dfrac{1}{2\,C_1(\alpha)}$. On vérifie que :

$$\Omega_{\varepsilon(\alpha)} = \{\xi \in H(\mathcal{V}), \|\xi_r\| \leq \varepsilon(\alpha)\}$$

où $\|\xi_r\|$ désigne la "norme homogène" reliée à la norme usuelle par :

$$\|\xi_r\| = |\xi_r|^{1/r} \ .$$

Pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ tel que $(\|\xi_r\| \leq \varepsilon(\alpha))$, et pour tout u dans $C_o^\infty(S)$, on a donc :

$$(3.3.2) \quad \|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)} \leq 2C(J)[\alpha \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 + C(\alpha)\|u\|_o^2]$$

(3.3.1) est donc démontrée pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ tel que $\|\xi_r\| \leq \varepsilon(\alpha)$. Soit ξ tel que : $\|\xi_r\| \geq \varepsilon(\alpha)$. On pose :

$$t = \frac{\varepsilon(\alpha)}{\|\xi_r\|} \qquad \text{et} \qquad \eta = \delta_t(\xi)$$

On a alors :

$$\|\eta_r\| = \varepsilon(\alpha) \quad , \qquad t \in [0,1[$$

On peut appliquer l'estimation (3.3.2) au point η et à la fonction $u \circ \delta_t$. Pour tout A dans $\mathcal{U}_p(\mathfrak{G})$ et pour tout t strictement positif, on a :

$$\pi_\eta(A)(u \circ \delta_t) = t^p[\pi_{\delta_t^{-1}(\eta)}(A)u] \circ \delta_t$$

Puisque S est invariant par les δ_t, il existe un entier q tel que, pour tout f dans $L^2(S)$:

$$\|f \circ \delta_t\|_{L^2(S)} = t^{q/2}\|f\|_{L^2(S)}$$

On a donc, si t est dans $]0,1]$:

$$\|u \circ \delta_t\|_{H_\eta^{m-1}} \geq |t|^{m-1+q/2}\|u\|_{H_\xi^{m-1}}$$

L'estimation (3.3.2), appliquée au point η et à la fonction $u \circ \delta_t$ donne donc :

$$t^{2(m-1)}\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)} \leq 2C(J)[\alpha\, t^{2m} \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|^2_{L^2(S)} + C(\alpha)\|u\|^2_{L^2(S)}]$$

Comme ici : $t = \dfrac{\varepsilon(\alpha)}{\|\xi_r\|} \leq 1$, on en déduit :

$$(3.3.3) \qquad \|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)} \leq$$

$$\leq 2C(J)\left[\alpha \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 + C(\alpha)\left(\frac{\|\xi_r\|}{\varepsilon(\alpha)}\right)^{2(m-1)} \|u\|_o^2\right]$$

Soit m un multiple de r, il existe une constante C_2 strictement positive telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ et u dans $C_o^\infty(S)$, on ait :

$$\sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2 \geq C_2 \|\xi_r\|^{2m} \|u\|_o^2 = C_2 |\xi_r|^{2m/r} \|u\|_o^2$$

En effet, tout polynôme en ξ_r homogène de degré m/r s'identifie à un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. On peut choisir une base de l'espace des polynômes en ξ_r homogènes de degré m/r, dont la somme des carrés des modules majore $|\xi_r|^{2m/r}$. Il existe donc $R(\alpha)$, tel que, si $\|\xi_r\|$ est supérieur à $R(\alpha)$ on ait :

$$C(\alpha)\left(\frac{\|\xi_r\|}{\varepsilon(\alpha)}\right)^{2(m-1)}\|u\|_o^2 \leq C_2\, \alpha \|\xi_r\|^{2m} \|u\|_o^2$$

$$\leq \alpha\left(\sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2\right)$$

Pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$, tel que $\|\xi_r\|$ soit supérieur à $R(\alpha)$, on a donc, pour tout u dans $C_o^\infty(S)$:

$$(3.3.4) \quad \|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)} \leq 4\, C(J)\, \alpha \sum_j \|\pi_\xi(P_j)u\|_o^2$$

(3.3.1) est donc démontrée si $\|\xi_r\|$ est supérieur à $R(\alpha)$.

Dans la zone intermédiaire où : $\varepsilon(\alpha) \leq \|\xi_r\| \leq R(\alpha)$, (3.3.1) résulte facilement de (3.3.3).

On a donc démontré la proposition lorsque l'idéal contient $\mathfrak{G}_r$.

Dans le cas général, soit X_1 un supplémentaire de $\mathcal{V} \cap \mathfrak{G}_r$ dans $\mathfrak{G}_r$. Posons $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \oplus X_1$. Alors $\mathcal{V}_1$ est un idéal de $\mathfrak{G}$, et l'on a : $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] = [\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$.

Soit X_2 un supplémentaire de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathfrak{G}$. On a l'isomorphisme : $H(\mathcal{V}_1) = H(\mathcal{V}) \oplus X_1^*$. On peut appliquer l'estimation ci-dessus aux espaces : $H^m_{\xi + \xi_1}(X_2)$, pour ξ dans $H(\mathcal{V})$, ξ_1 dans X_1^*.

D'après le corollaire (2.2.2), cette estimation est aussi valable pour les espaces $H^m_{(\xi,V)}(X_1 \oplus X_2)$, ce qui démontre la proposition.

§ 4. RAPPELS SUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS DE RANG INFERIEUR OU EGAL A 2.

§ 4.1 Groupes nilpotents de rang 1

Les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ s'identifient à des polynômes sur $\mathbb{R}^n$, où n est la dimension de $\mathfrak{g}$. La condition de Rockland dit simplement que P homogène de degré m est hypoelliptique, si et seulement si $\pi_\xi(P) = P(\xi)$ est elliptique.

La proposition suivante est évidente :

Proposition 4.1.1 : Soient $\mathcal{V}$ et S deux sous-espaces supplémentaires de $\mathfrak{g}$. Alors si P est homogène de degré m et elliptique, pour tout A dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, il existe une constante C telle que pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*$ et tout u dans $C_0^\infty(S)$, on ait :

(4.1.1) $$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

§ 4.2 Groupes nilpotents de rang 2

On suppose maintenant que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ avec $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ et $\mathfrak{g}_{i+j} = 0$ si $(i+j)$ est supérieur à 2.

On veut démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 : Soit $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathfrak{g}$. On suppose que $\mathcal{V}$ et S sont stables par les δ_t. Soient P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ vérifiant l'hypothèse suivante (cf. Théorème 0.1) :

(Ro) Pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale de G, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_{\pi}$.

Alors pour tout A dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ et toute u dans $C_o^{\infty}(S)$, on ait :

$$\|\pi_{\xi}(A)u\|_o^2 \leq C\|\pi_{\xi}(P)u\|_o^2 \tag{4.2.1}$$

Remarque 4.2.2 : L'application de (4.2.1) avec $\mathcal{V} = \{0\}$ et $S = \mathfrak{g}$, donne l'hypoellipticité (cf. par exemple Beals [1]).

Remarque 4.2.3 : La démonstration résulterait aisément de [8], mais nous préfèrons donner ici une preuve "presque" self-contained.

Démonstration : Comme au § 3.3, on peut se ramener au cas où $\mathcal{V}$ contient $\mathfrak{g}_2$. On désigne par ξ_2 la restriction de ξ à $\mathfrak{g}_2$. En raison de l'homogénéité de A et P, il suffit de montrer (4.2.1) lorsque $\xi_2 = 0$ ou $|\xi_2| = 1$. Lorsque ξ_2 est égal à zéro, le résultat découle aisément de la proposition (4.1.1).

1ère étape : Nous allons démontrer que pour tout ξ_2 tel que $|\xi_2| = 1$, et $\xi_2/[\mathcal{V},\mathcal{V}] = 0$, il existe une constante $C(\xi_2)$

strictement positive telle que, pour tout ξ dont la restriction à $\mathcal{G}_2$ est ξ_2, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(4.2.2) $$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C(\xi_2)\ \|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

On définit une forme bilinéaire antisymétrique B_{ξ_2} sur $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ par :

$$B_{\xi_2}(x,y) = \langle\xi_2,[x,y]\rangle \quad \text{pour x et y dans } \mathcal{G}.$$

Soit $\mathcal{V}_{(\xi_2)}$ un sous-espace isotrope maximal pour B_{ξ_2}, contenant $\mathcal{V}$. $\mathcal{V}_{(\xi_2)}$ est nécessairement un idéal de $\mathcal{G}$ et vérifie :

$$[\mathcal{V}_{\xi_2},\mathcal{V}_{\xi_2}] \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{\xi_2}$$

Il est clair que tout ξ dont la restriction à $\mathcal{G}_2$ est ξ_2 s'annule sur $[\mathcal{V}_{\xi_2},\mathcal{V}_{\xi_2}]$.

Les hypothèses de la proposition (2.2.1) sont vérifiées. Pour obtenir (4.2.2) en appliquant le corollaire (2.2.2), il suffit de démontrer l'estimation :

Il existe une constante $C(\xi_2)$ telle que, pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*_{(\xi_2)}$ dont la restriction à $\mathcal{G}_2$ est ξ_2, pour tout u dans $\mathcal{S}(S_{\xi_2})$ (où S_{ξ_2} désigne un supplémentaire de $\mathcal{V}_{\xi_2}$ dans $\mathcal{G}$), on ait :

(4.2.3) $$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S_{\xi_2})} \leq C(\xi_2)\ \|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S_{\xi_2})}$$

D'après Kirillov[12], $\mathcal{V}_{\xi_2}$ étant isotrope maximale, π_ξ est irréductible pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*_{(\xi_2)}$.

On montre d'abord, que pour tout ξ dans $\mathcal{V}^*_{(\xi_2)}$ dont la restriction à $\mathfrak{g}_2$ est ξ_2, il existe une constante $C(\xi)$, telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S_{\xi_2})$, on ait :

(4.2.4) $$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S_{\xi_2})} \leq C(\xi)\ \|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S_{\xi_2})}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 4.2.4</u> : Soit $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathfrak{g}$. On suppose $\mathcal{V}$ et S stables par les δ_t.
Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ vérifiant l'hypothèse suivante :
Pour toute représentation π unitaire, irréductible non triviale, de G, égale à l'identité sur G_2, $\pi(P)$ est non nul.
(π est scalaire !)
Alors il existe une constante C_o strictement positive, telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ tel que $|\xi_2| \leq 1$, et pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(4.2.5) $$\|u\|^2_{H^m_\xi} \leq C_o(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)})$$

En utilisant la proposition (4.1.1), le lemme (3.3.2), la remarque (3.2.2) et la proposition (3.3.1), on obtient aisément le lemme (4.2.4).

On aura besoin du lemme classique suivant de Peetre [14] (p. 171).

<u>Lemme 4.2.5</u> : Soient E,F,G trois espaces de Banach réflexifs, tels que $E \subset F$ avec injection compacte et soit $\mathcal{C}$ un opérateur linéaire continu de E dans G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L'image de $\mathcal{C}$ dans G est fermée et le noyau de $\mathcal{C}$ est de dimension finie

ii) Il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_E \leq C(\|\mathcal{C}u\|_G + \|u\|_F) \quad \forall u \in E$$

On applique le lemme (4.2.4) avec $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{(\xi_2)}$. On peut montrer que $\mathcal{S}(S_{\xi_2})$ est dense dans $H^m_\xi(S_{\xi_2})$, de sorte que (4.2.5) est vérifié pour u dans H^m_ξ. Si m est supérieur à 2, il résulte de l'irréductibilité de π_ξ, que l'injection de $H^m_\xi(S_{\xi_2})$ dans $L^2(S_{\xi_2})$ est compacte. Il résulte alors du lemme (4.2.5) que (4.2.4) sera vérifiée si : $\operatorname{Ker} \pi_\xi(P) \cap H^m_\xi(S_{\xi_2}) = 0$.

On vérifie (cf. par exemple [1]) que :

$$\operatorname{Ker} \pi_\xi(P) \cap H^m_\xi(S_{\xi_2}) = \operatorname{Ker} \pi_\xi(P) \cap \mathcal{S}(S_{\xi_2})$$

(cela résulte des hypothèses du lemme 4.2.4).

Or l'hypothèse de la proposition (4.2.1) est justement que :

$$\operatorname{Ker} \pi_\xi(P) \cap \mathcal{G}(S_{\xi_2}) = 0.$$

(4.2.4) est ainsi démontré .

Il reste à passer de (4.2.4) à (4.2.3).

Soit $W_{\xi_2} = \mathcal{V}_{\xi_2} \cap \mathcal{G}_1$. On a $W_{\xi_2} \oplus \mathcal{G}_2 = \mathcal{V}_{\xi_2}$.

Soit R_{ξ_2}, le sous espace de $\mathcal{G}_1$, défini par :

$$\forall x \in R_{\xi_2} \ , \ \forall y \in \mathcal{G}_1 \ , \ B_{\xi_2}(x,y) = 0$$

R_{ξ_2} est contenu dans W_{ξ_2}, et soit S'_{ξ_2} un supplémentaire de R_{ξ_2} dans W_{ξ_2}. Un élément ξ de $H(\mathcal{V}_{\xi_2})$ dont la restriction à $\mathcal{G}_2$ est ξ_2, s'écrit :

$$\xi = (\xi_2, \xi_R, \xi_{S'})$$

avec ξ_R dans $R^*_{\xi_2}$, $\xi_{S'}$ dans $S'^*_{\xi_2}$. Il n'est pas difficile de voir que l'orbite de ξ est le sous-espace affine :

$$\xi = (\xi_2, \xi_R, \eta) \qquad \text{avec } \eta \text{ variant dans } S'^*_{\xi_2}$$

Il suffit de démontrer (4.2.3) pour $\xi = (\xi_2, \xi_R, 0)$ en vertu de la proposition 2.3.1 ; $C(\xi_R)$ peut être choisi localement borné en vertu de la proposition (3.1).

On remarque alors que, pour a dans R, $\pi_\xi(a) = i\langle\xi_R, a\rangle$. Par conséquent, il existe une constante C, telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$,

$$|\xi_R|^m \|u\|_{L^2(S_{\xi_2})} \leq C \|u\|_{H^m_\xi(S_{\xi_2})}$$

Il résulte alors de (4.2.5) qu'il existe N, tel que, pour tout ξ_R vérifiant $|\xi_R| \geq N$, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(4.2.6) \qquad \|u\|^2_{H^m_\xi} \leq 2\,C_o(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2})$$

(4.2.3) s'en déduit alors aisément, et par conséquent (4.2.2).

<u>2ème étape</u> : Montrons maintenant que la constante $C(\xi_2)$ peut être choisie indépendante de ξ_2 sur la sphère unité.

Nous appliquons la proposition (3.1), en choisissant comme ensemble Ω dans $H(\mathcal{V})$ l'ensemble des ξ dans $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ dont la restriction à $\mathcal{G}_2$ est un point de la sphère unité $\xi_2^{(o)}$.

(4.2.2) s'écrit simplement : pour tout A dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, $\exists\, C(\xi_2^o)$, $\forall\, \xi \in \Omega$

$$\|\pi_\xi(A)u\|_{L^2(S)} \leq C(\xi_2^o)\|\pi_\xi(P)u\|_{L^2(S)} \quad .$$

Alors Ω_ε est l'ensemble des ξ dans $H(\mathcal{V})$ dont la restriction ξ_2 à $\mathcal{G}_2$ vérifie

$$\|\xi_2 - \xi_2^{(o)}\| = |\xi_2 - \xi_2^{(o)}|^{1/2} \leq \varepsilon$$

D'après la proposition 3.1, pour tout A dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, il existe une constante C, telle que, pour tout ε, pour tout ξ dans Ω_ε, on ait :

$$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C \left[\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \varepsilon\|u\|^2_{H_\xi^{m-1}(S)}\right]$$

Si m est pair, on peut choisir une base (A_j) de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ telle que, sur la sphère unité, il existe une constante C strictement positive, telle que :

$$C\|u\|^2_{H_\xi^m(S)} \leq \sum_j \|\pi_\xi(A_j)u\|^2_o .$$

Il existe alors C et ε_o, tel que si $\|\xi_2 - \xi_2^{(o)}\| \leq \varepsilon$, on ait, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$:

$$\|\pi_\xi(A)u\|^2_o \leq C\|\pi_\xi(P)u\|^2_o$$

où A parcourt une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$.

Chaque point de la sphère unité de $\mathcal{G}_2^*$ contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ admet donc un voisinage où l'estimation (4.2.1) est vérifiée. La proposition 4.2.1 est donc démontrée.

§ 4.3 Généralisation du lemme 4.2.4 : groupes nilpotents de rang supérieur à 2 .

On reprend dans ce paragraphe, les notations du § 3.3.

Proposition 4.3.1 : Soient $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathcal{G}$, et S un supplémentaire de $\mathcal{G}$, $\mathcal{V}$ et S étant stables par δ_t. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, $\tilde{P}$ son image dans $\mathcal{U}_m(\tilde{\mathcal{G}})$. Soient $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{S}$ les images de $\mathcal{V}$ et S dans $\tilde{\mathcal{G}}$, pour tout $\tilde{A}$ dans $\mathcal{U}_m(\tilde{\mathcal{G}})$, il existe une constante C, telle que, pour tout $\tilde{\xi}$ dans $H(\tilde{\mathcal{V}})$, tout u dans $\mathcal{S}(S)$

$$(4.3.1) \qquad \|\pi_{\tilde{\xi}}(\tilde{A})u\|^2_{L^2(\tilde{S})} \leq C(\|\pi_{\tilde{\xi}}(\tilde{P})u\|^2_{L^2(\tilde{S})})$$

Alors, il existe une constante C, strictement positive telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ vérifiant $|\xi_r| \leq 1$, et pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(4.3.2) \qquad \|u\|^2_{H^m_\xi(S)} \leq C(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}$$

Démonstration : On suppose tout d'abord que l'idéal contient $\mathcal{G}_r$. Posons $\Omega = \{\xi \in H(\mathcal{V}), \xi_r = 0\}$. On vérifie que

(4.3.2) est vérifiée pour tout ξ dans Ω, en utilisant (4.3.1) et le lemme (3.2.2). On applique ensuite la proposition (3.1) avec $\varepsilon = 1$. On a $\Omega_1 = \{\xi \in H(\mathcal{V}), |\xi_r| \leq 1\}$. On en déduit aisément qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout ξ dans Ω_1 et tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$\|u\|^2_{H^m_\xi(S)} \leq C[\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)}]$$

La proposition (4.3.1) se déduit alors de la proposition (3.3.1). Dans le cas où $\mathcal{V}$ ne contient pas $\mathcal{G}_r$, on utilise le même argument qu'à la fin du § 3.3.

<u>Corollaire 4.3.2</u> : Soient $\mathcal{V}$ un idéal de $\mathcal{G}$, et S un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{V}$ et S étant stables par δ_t. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifiant :

(Ro) Pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale de G, égale à l'identité sur G_3, l'opérateur $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$. Alors il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout ξ dans $H(\mathcal{V})$ tel que $|\xi_3| \leq 1$, et pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait ;

$$(4.3.2) \qquad \|u\|^2_{H^m_\xi(S)} \leq C(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)})$$

Le corollaire (4.3.2) est une conséquence immédiate de la proposition (4.3.1) et de la proposition (4.2.1).

§ 5. DEMONSTRATION DES ESTIMATIONS A PRIORI

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.1 : Soit $\tilde{P}$ dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ vérifiant les hypothèses du théorème (0.1), alors il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(\mathfrak{g})$, on ait :

$$(5.1) \qquad \|u\|^2_{H^m(\mathfrak{g})} \leq C(\|\pi_{(o)}(P)u\|^2_{L^2(\mathfrak{g})} + \|u\|^2_{L^2(\mathfrak{g})})$$

Rappelons que $\pi_{(o)}$ est la représentation induite à partir de l'idéal $\{0\}$ dans $L^2(\mathfrak{g})$. Nous utiliserons à trois reprises la proposition (2.2.1) et son corollaire, pour réduire la démonstration de (5.1) à celle d'estimations du même type pour des représentations à partir d'idéaux $\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_1$ tels que :

$$(5.2) \qquad \mathcal{V}_3 = \mathfrak{g}_3 \ , \ \mathcal{V}_2 = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3, \ \ \mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$$

Enfin les représentations induites à partir de $\mathcal{V}_1$ seront irréductibles et nous utiliserons alors l'hypothèse du théorème (0.1).

§ 5.1 Première réduction : idéal $\mathfrak{g}_3$

On pose $\mathcal{V}_3 = \mathfrak{g}_3$; on choisit comme supplémentaire $S = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. L'objet de ce paragraphe et de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.1.1. : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ ayant la propriété suivante : pour tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$ de norme 1, il existe une constante $C(\xi_3)$ strictement positive, telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$

$$(5.1.1) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(S)} \leq C(\xi_3)\, \|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

Alors :

i) La constante $C(\xi_3)$ peut être choisie indépendante de ξ_3 sur la sphère unité de $\mathcal{G}_3^*$.

ii) Pour tout Q dans $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$, l'opérateur $P+Q$ vérifie l'estimation (5.1).

Démonstration de i) : Soit $\xi_3^{(o)}$ un point de $\mathcal{G}_3^*$, de norme 1. Nous appliquons la proposition (3.1), en choisissant $\mathcal{V} = \mathcal{G}_3$, $S = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, et $\Omega = \{\xi_3^{(o)}\}$. On a pour tout ε dans $]0,1]$:

$$\Omega_\varepsilon = \{\xi_3 \in \mathcal{G}_3^* \quad , \quad \|\xi_3 - \xi_3^{(o)}\| \leq \varepsilon\}$$

En effet, l'orbite de ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$ se réduit au point ξ_3. Nous choisissons comme opérateurs A, une base de $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, et nous ajoutons les inégalités obtenues. Il existe donc une constante C_1 strictement positive, telle que pour tout ε dans

$]0,1[$, pour tout ξ_3 dans Ω_ε, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$ on ait :

$$\|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(S)} \leq C_1 [\|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)} + \varepsilon \|u\|^2_{H^{m-1}_{\xi_3}(S)}]$$

Si $\|\xi_3 - \xi_3^{(o)}\| \leq \frac{1}{2C_1}$, on a donc :

$$\|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(S)} \leq 2C_1 \|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

Chaque point $\xi_3^{(o)}$ de la sphère unité de $\mathcal{G}_3^*$ possède donc un voisinage où l'estimation (5.1.1) est vérifiée avec une constante indépendante de ξ_3. En recouvrant la sphère unité avec un nombre fini de ces voisinages, on obtient bien i).

<u>Démonstration de ii)</u> : Soit (A_j) une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$ de norme 1, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$\sum_j \|\pi_{\xi_3}(A_j)u\|^2_{L^2(S)} \leq C\|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

En raison de l'homogénéité de A_j et P, cette estimation s'étend à tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^* \setminus \{0\}$. On a alors, pour tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^* \setminus \{0\}$:

$$\|u\|^2_{H^m_{\xi}(S)} \leq (\sum_j \|\pi_{\xi_3}(A_j)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{H^{m-1}_{\xi_3}(S)})$$

$$\leq C[\|\pi_{\xi_3}(P+Q)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{H^{m-1}_{\xi_3}(S)}]$$

Il résulte alors de la proposition (3.3.1) que :

$$(5.1.2) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(S)} \leq C[\|\pi_{\xi_3}(P+Q)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}]$$

Désignons par $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier partielle en x_3 dans $\mathcal{G}$. On a vu en (2.1.7), que, pour toute f dans $\mathcal{S}(\mathcal{G})$:

$$\mathcal{F}\pi_{(o)}(P)\mathcal{F}^{-1} f(\xi_3,x) = \pi_{(\xi_3,\mathcal{V}_3)}(P)f(\xi_3,x)$$

pour tout ξ_3 dans $\mathcal{G}_3^*$ et x dans S.
L'estimation (5.1) résulte donc immédiatement de (5.1.2).

§ 5.2 <u>Deuxième réduction</u> : <u>idéal</u> $\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$

On pose maintenant $\mathcal{V}_2 = \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$, et l'on choisit comme supplémentaire $S = \mathcal{G}_1$. Les hypothèses de la proposition 2.2.1 sont satisfaites, car $\mathcal{V}_2$ est ùn idéal de $\mathcal{G}$, $[\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_2]$ est inclus dans $\mathcal{V}_3$, et tout élément ξ_3 de $\mathcal{G}_3^*$ s'annule sur $[\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_2]$. Dans tout ce paragraphe, ξ_3 est <u>fixé</u> et de norme 1
On va démontrer la proposition :

<u>Proposition 5.2.1</u> : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. On suppose qu'il

vérifie les hypothèses du corollaire (4.3.2), et qu'il a la propriété suivante : pour tout ξ_2 dans $\mathfrak{g}_2^*$, il existe une constante $C(\xi_2)$ strictement positive, telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(5.2.1) $$\|u\|^2_{H^m_{\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C(\xi_2)\|\pi_{\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

Alors i) la constante $C(\xi_2)$ peut être choisie indépendante de ξ_2 dans $\mathfrak{g}_2^*$.

ii) l'estimation (5.1.1) est vérifiée au point ξ_3.

<u>Démonstration de i)</u> : Soit E' le sous-espace de $\mathfrak{g}_2^*$ image de $\mathfrak{g}$ par l'application : $x \to (\mathrm{ad}x)^*\xi_3$, et désignons par E'' un sous-espace supplémentaire de E' dans $\mathfrak{g}_2^*$. Pour tout ξ_2 dans $\mathfrak{g}_2^*$, on notera ξ_2' et ξ_2'' ses projections sur E' et E''.
Montrons d'abord que l'on peut choisir la constante $C(\xi_2)$ dans (5.2.1) indépendante de ξ_2 dans E''.
Appliquant le corollaire (4.3.2), on obtient qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout ξ_2 dans $\mathfrak{g}_2^*$, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(5.2.2) $$\|u\|^2_{H^m_{\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C[\|\pi_{\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}]$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2.2 : Il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout ξ_2 dans $\mathfrak{G}_2^*$, tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.2.3) \qquad \|u\|^2_{H^2_{\xi_2+\xi_3}(S)} \geq C|\xi_2''|^2\|u\|^2_{L^2(S)}$$

Démonstration : D'après la remarque (2.1.2), on a pour tout ξ_2 dans $\mathfrak{G}_2^*$, tout a_2 dans $\mathfrak{G}_2$ et toute u dans $\mathcal{S}(S)$:

$$\pi_{\xi_2+\xi_3}(a_2)u(x) = i\langle\xi_2 + (\mathrm{ad}\,x)^*\,\xi_3, a_2\rangle u(x)$$

Soit a_2^j une base du noyau dans $\mathfrak{G}_2$ de E', duale de E". Alors $i\langle\xi_2 + (\mathrm{ad}x)^*\xi_3, a_2^j\rangle = i\,\xi_2''^j$. On a alors facilement l'estimation :

$$|\xi_2''|^2\|u\|^2_{L^2(S)} \leq C \sum_j \|\pi_{\xi_2+\xi_3}(a_2^j)u\|^2_{L^2(S)}$$

Le lemme en résulte. ∎

On déduit de (5.2.2) et (5.3.3) qu'il existe R positif et une constante C tels que pour tout ξ_2 dans E", tel que $|\xi_2| \geq R$, et pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.2.4) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C\|\pi_{\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

Montrons maintenant que la constante de l'inégalité (5.2.1) peut être choisie indépendante de ξ_2 lorsque ξ_2 est dans E", et vérifie : $|\xi_2| \leq R$. Pour cela, il suffit de montrer que tout point $\xi_2^{(o)}$ de $\mathcal{G}_2^*$ possède un voisinage où l'inégalité (5.2.1) est vérifiée avec une constante indépendante de ξ_2 dans ce voisinage. Nous appliquons la proposition (3.1) en choisissant cette fois pour ensemble Ω l'orbite du point $\xi_2^{(o)} + \xi_3$ dans $\mathcal{V}_2^*$.

Pour tout ε dans $]0,1]$, on a l'inclusion :

$$(5.2.5) \qquad \|\xi_2 - \xi_2^{(o)}\| \leq \varepsilon \Rightarrow \xi_2 + \xi_3 \in \Omega_\varepsilon$$

L'orbite d'un point $\xi_3 + \xi_2$ est en effet donnée par :

$$(5.2.6) \qquad \xi_3 + \xi_2 + (\mathrm{ad}\, x)^* \xi_3$$

où x parcourt $\mathcal{G}_1$.

Les orbites associées aux points $(\xi_2 + \xi_3)$ et $(\xi_2^o + \xi_3)$ sont des sous-espaces affines parallèles dans $\mathcal{G}^{2*}$; (5.2.5) est donc bien vérifiée. La proposition 3.1 montre que la constante $C(\xi_2)$ dans l'inégalité (5.2.1) est localement bornée, elle est donc bornée pour ξ_2 dans E", vérifiant $|\xi_2| \leq R$, et donc, en utilisant (5.2.4), dans tout E".

Soit maintenant $\xi_2 = \xi_2' + \xi_2''$ quelconque dans $\mathcal{G}_2^*$. Les représentations $\pi_{\xi_2+\xi_3}$ et $\pi_{\xi_2''+\xi_3}$ sont équivalentes d'après la proposition 2.3.1 , car $(\xi_2 + \xi_3)$ et $(\xi_2'' + \xi_3)$ sont sur la même orbite. Cela résulte de (5.2.6) et de la définition de E'.

La constante $C(\xi_2)$ dans (5.2.1) peut donc être choisie de telle sorte que :

$$C(\xi_2' + \xi_2'') = C(\xi_2'').$$

La constante $C(\xi_2)$ peut donc être choisie bornée pour ξ_2 dans $\mathcal{G}_2^*$. Cela démontre le point i) ; le point ii) de la proposition (5.2.1) se déduit alors du corollaire 2.2.2.

§ 5.3 Troisième réduction

Dans ce paragraphe, ξ_2 et ξ_3 sont maintenant fixés. Nous allons définir maintenant un idéal $\mathcal{V}_1$ (sous-algèbre isotrope maximale). On désigne par $\mathcal{V}_2^\perp$ l'espace des x dans $\mathcal{G}$ tels que, pour tout y dans $\mathcal{V}_2$, on ait :

$$(5.3.1) \qquad \langle \xi_2 + \xi_3, [x,y] \rangle = 0$$

Cet espace ne dépend que de ξ_3. Nous désignerons par S_2 un supplémentaire de $\mathcal{V}_2^\perp$ dans $\mathcal{G}$ (S_2 est inclus dans $\mathcal{G}_1$, car $\mathcal{V}_2^\perp$ contient $\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$). On munit $\mathcal{V}_2^\perp \cap \mathcal{G}_1$ de la forme bilinéaire antisymétrique B_{ξ_2} définie par :

$$B_{\xi_2}(x,y) = \langle \xi_2, [x,y] \rangle , \forall\, x,y \in \mathcal{V}_2^\perp \cap \mathcal{G}_1$$

Soit I un sous-espace isotrope maximal de $\mathcal{V}_2 \cap \mathfrak{g}_1$. Nous définissons l'idéal $\mathcal{V}_1$ par :

(5.3.2) $$\mathcal{V}_1 = I \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$$

et nous identifions son dual avec $I^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \oplus \mathfrak{g}_3^*$. Les hypothèses de la proposition 2.2.1 sont satisfaites pour tout ξ de la forme $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, où ξ_1 est arbitraire dans I^*. Soit S_1 un supplémentaire de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{V}_2^{\perp}$ (qu'on choisit dans $\mathfrak{g}_1$). On prend comme supplémentaire S de $\mathcal{V}_1$:

(5.3.3) $$S = S_1 \oplus S_2$$

et on notera $\{x = x_1 + x_2\}$, la variable de S ($x_i \in S_i$). On veut démontrer la proposition suivante :

<u>Proposition 5.3.1</u> : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, vérifiant l'hypothèse (Ro) de la proposition 4.2.1. On suppose que P a la propriété suivante : pour tout ξ_1 dans I^*, il existe une constante $C(\xi_1)$ strictement positive telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(5.3.4) $$\|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)} \le C(\xi_1)\, \|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

Alors :

i) La constante $C(\xi_1)$ peut être choisie indépendante de ξ_1 dans I^*.

ii) L'hypothèse (5.2.1) de la proposition (5.2.1) est vérifiée au point $\xi_2 + \xi_3$.

Démonstration de i) : Désignons maintenant par E' le sous-espace de I^* image de $\mathcal{V}_2^\perp \cap \mathcal{G}_1$ par l'application $x \to (\mathrm{ad}\, x)^* \xi_2$. Désignons par E" un supplémentaire de E' dans I^*. Pour tout ξ_1 dans I^*, on notera ξ_1' et ξ_1'' ses projections sur E' et E". Montrons d'abord qu'on peut choisir la constante $C(\xi_1)$ dans (5.3.4) indépendante de ξ_1, quand ξ_1 parcourt E".
Il résulte du corollaire (4.3.2), qu'il existe une constante C positive, telle que pour tout ξ_1 dans I^* et tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.3.5) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C\left[\|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}\right]$$

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.3.2 : Il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout ξ_1 dans I^*, et tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.3.6) \qquad \|u\|_{H^4_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)} \geq C|\xi_1''|\, \|u\|_{L^2(S)}$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit x_{1j} $(j=1,\dots,p_1)$ (resp. x_{2j}, $(j=1,\dots,p_2)$) un système de coordonnées de S_1, (resp. de S_2).

<u>1ère étape</u> : On va montrer que, pour tout j inférieur à p_2, il existe a_j dans $\mathcal{G}_2$ et c_j dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$ et tout ξ_1 dans I^*, on ait :

$$(5.3.7) \qquad \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(a_j)\ f(x) = i(x_{2j} + c_j)f(x)$$

On sait que, pour tout a dans $\mathcal{V}_1$, on a (remarque 2.1.2) :

$$(5.3.8) \qquad \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(a)f(x) = i\langle\xi_1+\xi_2+\xi_3,\ \exp(adx)\,a\rangle f(x)$$

Si a est dans $\mathcal{G}_2$, on a pour tout x dans S :

$$\langle\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \exp(ad\,x)a\rangle = \langle\xi_2 + (adx)^*\xi_3, a\rangle$$

Pour démontrer (5.3.7), il suffit de montrer que, pour tout j inférieur ou égal à p_2, il existe a_j dans $\mathcal{G}_2$, tel que pour tout x dans S, on ait :

$$(5.3.9) \qquad \langle(adx)^*\xi_3, a_j\rangle = x_{2j}$$

Comme x_1 appartient à $\mathcal{V}_2^{\perp}$, on a, pour tout a dans $\mathcal{G}_2$,

$$<(\mathrm{ad}\, x_1)^* \xi_3, a> = 0$$

L'application $x \to (\mathrm{ad}\, x)^* \xi_3$ de S_2 dans $\mathcal{G}_2^*$ étant injective, d'après la définition de $\mathcal{V}_2^{\perp}$, sa transposée est bien surjective, ce qui démontre (5.3.9), et donc (5.3.7).

2ème étape : Pour tout a dans I, il existe un polynôme de degré 2 en x_2 : $\varphi(x_2)$, tel que pour tout ξ_1 dans I^*, et pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

(5.3.10) $\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(a) f(x) =$

$$i[<\xi_1 + (\mathrm{ad}\, x_1)^* \xi_2, a> + \varphi(x_2)] f(x),$$

Cela résulte de (5.3.8). On a en effet si x est dans S, et a est dans I,

$$<\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \exp(\mathrm{ad}\, x) a> = <\xi_1, a> + <\xi_2, [x, a]>$$

$$+ \frac{1}{2} <\xi_3, [x, [x, a]]>$$

On vérifie facilement, en utilisant l'identité de Jacobi, que :

$$<\xi_3, [x, [x, a]]> = <\xi_3, [x_2, [x_2, a]]>$$

ce qui démontre (5.3.10).

<u>3ème étape</u> : Soit (a_j) une base de I. On déduit de (5.3.10) et (5.3.7) que, pour tout j, il existe A_j dans $\mathcal{U}^4(\mathcal{G})$ tel que, pour tout ξ_1 dans I^* et f dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.3.11)\quad i<\xi_1 + (\mathrm{ad}\, x_1)^* \xi_2 , a_j > f(x) = \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(A_j).f(x)$$

Soit $(\tilde{a}_j)$ une base de l'annulateur dans I de E', duale de E''. Alors :

$$(5.3.12)\qquad \sum_j |<\xi_1 + (\mathrm{ad} x_1)^* \xi_2, \tilde{a}_j>|^2 = |\xi_1''|^2$$

On déduit (5.3.6) de (5.3.11) et (5.3.12). Le lemme est ainsi démontré.

<u>Fin de la démonstration de la proposition 5.3.1</u>

On déduit de (5.3.5) et (5.3.6) qu'il existe des constantes R et C, telles que, pour tout ξ_1 dans E'' de norme plus grande que R, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$(5.3.13)\quad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C \|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)}$$

On montre que la constante $C(\xi_1)$ dans (5.3.4) est localement bornée dans I^*, en appliquant de nouveau la proposition (3.1) et en remarquant que si ξ_1 et $\xi_1^{(o)}$ sont dans I^*, les orbites des points $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ et $\xi_1^{(o)}+\xi_2+\xi_3$ sont deux variétés "parallèles" de $\mathcal{V}_1^*$ (se déduisant l'une de l'autre par translation).

La constante $C(\xi_1)$ dans (5.3.4) peut donc être choisie, en vertu de (5.3.13), indépendamment de ξ_1 dans E".

Soit maintenant $\xi_1 = \xi_1' + \xi_1''$ quelconque dans I^*. On vérifie que le point $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ est dans l'orbite du point $\xi_1'' + \xi_2 + \xi_3$.

La constante C peut alors être choisie indépendamment de ξ_1 dans I^*. Le point ii) se déduit du corollaire 2.2.2..

c.q.f.d.

§ 5.4. Etude de l'estimation (5.3.4)

Dans ce paragraphe, nous supposons (ξ_1,ξ_2,ξ_3) fixés. La démonstration de (5.1) a été ramenée dans les paragraphes précédents à l'étude de l'estimation (5.3.4). Remarquons que nous n'avons jusqu'ici utilisé que l'hypothèse suivante :

(Ro) Pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale de G, égale à l'identité sur G_3, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 5.4.1 : La représentation $\pi = \pi_{(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\ \mathcal{V}_1)}$ est irréductible. On a $\mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}(S)$. Si m est supérieur ou ou égal à 4, l'injection de $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)$ dans $L^2(S)$ est compacte.

<u>Démonstration</u> : Les deux premières assertions sont classiques [12], si on se rappelle que $\mathcal{V}_1$ est une sous-algèbre isotrope maximale. Si π est irréductible, l'image de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par π est $A^{\dim(S)}(\mathbb{C})$. On en déduit que, pour m suffisamment grand, l'injection de $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)$ dans $L^2(S)$ est compacte. Donnons une démonstration plus directe. On va montrer que pour tout $j \leq p_1$ (resp. $j \leq p_2$), il existe A_{1j} et B_{1j} dans $\mathcal{U}^4(\mathfrak{g})$ (resp. A_{2j} et B_{2j} dans $\mathcal{U}^4(\mathfrak{g})$) tels que pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$:

(5.4.1) $\quad \pi(A_{1j})f(x) = x_{1j}\, f(x) \; ; \; \pi(A_{2j})f(x) = x_{2j}.f(x)$

(5.4.2) $\quad \pi(A_{2j})f(x) = \partial_{x_{1j}} f(x) \; ; \; \pi(B_{2j})f(x) = \partial_{x_{2j}} f(x)$

La proposition 5.4.1 résulte aisément de (5.4.1) et (5.4.2). Le deuxième point de (5.4.1) résulte de (5.3.7). Pour démontrer le 1er point, on utilise (5.3.10). L'application : $x_1 \to (\mathrm{ad}\, x_1)^* \xi_2$ est injective de S_1 dans I^*, car I est isotrope maximal. Sa transposée est surjective de I sur S_1^*. Pour tout j inférieur ou égal à p_1, il existe donc a_j dans I tel que, pour tout x dans S on ait :

(5.4.3) $\quad \langle (\mathrm{ad}\, x_1)^* \xi_2, a_j \rangle = x_{1j}$

(5.4.1) résulte alors de (5.4.3) et (5.3.10).

Pour démontrer (5.4.2), on remarque que, pour tout a dans S, pour tout f dans $\mathcal{S}(S)$, on a :

$$(5.4.4) \qquad \pi(a)f(x) = \langle a, d_x f(x)\rangle_{S\times S^*} + \psi(x_1,x_2)f(x)$$

où ψ est un polynôme de degré au plus 2 en x_2, au plus 1 en x_1.

Pour démontrer (5.3.4), on va appliquer le lemme (4.2.5), mais il nous faut démontrer les deux lemmes suivants.

<u>Lemme 5.4.2</u> : $\mathcal{S}(S)$ est dense dans $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)$.

<u>Lemme 5.4.3</u> : Si P vérifie (Ro),

$$\operatorname{Ker}\pi(P) \cap H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S) = \operatorname{Ker}\pi(P) \cap \mathcal{S}(S).$$

Admettons un instant ces lemmes, et démontrons (5.3.4). Il résulte de l'estimation (5.3.5) et du lemme (5.4.2) qu'il existe une constante C, telle que, pour tout u dans $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)$, on ait :

$$(5.4.5) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)} \leq C\left[\|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}\right]$$

On applique le lemme 4.2.5 avec :

$$E = H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S)$$

$$F = G = L^2(S)$$

Si m est plus grand que 4, l'injection de F dans E est bien compacte. Il suffit donc pour démontrer (5.3.4) de vérifier la condition :

$$\mathrm{Ker}\ \pi(P) \cap H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S) = 0$$

D'après le lemme (5.4.3), il suffit d'avoir l'injectivité de $\pi(P)$ dans $\mathcal{S}(S)$ qui n'est autre que l'espace $\mathcal{S}_\pi$ de la représentation. C'est justement l'hypothèse de la proposition 1.2 et du théorème (0.1).

§ 5.5 Démonstration du lemme 5.4.2

On garde les notations de la définition (2.1.3). $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie nilpotente de rang quelconque.

Lemme 5.5.1 : Pour tout m, $H^m_\xi \cap \mathcal{E}'$ est dense dans H^m_ξ .

Démonstration : Elle se fait par troncature . Soit φ une fonction à support compact, égale à un dans un voisinage de l'origine. On pose $\varphi_t = \varphi \circ \delta_t$. Il est classique que, pour u dans $L^2(S)$, $\varphi_t u$ tend vers u dans L^2, lorsque t tend vers zéro. On doit montrer que $\varphi_t u$ tend vers u dans H^m_ξ. On utilise le lemme (3.1.1). Si A est dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, il existe un nombre fini d'éléments A^ℓ_j et B^ℓ_j dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, où B^ℓ_j est dans $\mathcal{U}_j$ $(j \geq 1)$ et A^ℓ_j dans $\mathcal{U}_{m-j}$, tels que l'on ait, pour tout ψ dans $C^\infty_o(S)$:

$$[\pi_\xi(A),\psi] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell \in L} (\pi_o(B^\ell_j)\psi) . \pi_\xi(A^\ell_j)$$

On prend $\psi = \varphi_t$.

Alors :

$$(\pi_o(B^\ell_j)\varphi_t) = t^j(\pi_o(B^\ell_j)\varphi)_t$$

On en déduit que si u est dans H^m_ξ , $\pi_\xi(A)\varphi_t u$ tend vers $\pi_\xi(A)u$ dans L^2 lorsque t tend vers zéro pour tout A dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$; en effet, $[\pi_\xi(A),\varphi_t]u$ tend vers 0 dans L^2, lorsque t tend vers 0.

<u>Lemme 5.5.2</u> : Pour tout m, pour tout compact K, $C^\infty_o(S)$ est dense dans $H^m_\xi \cap \mathcal{E}'(K)$.

Le lemme (5.4.2) se déduit aisément des lemmes (5.5.1) et (5.5.2). Le lemme (5.5.2) résulte d'une extension du lemme de Friedrichs, qu'on peut trouver dans un article de A et J. Unterberger (théorème 1.1 et 1.2 de [9]) et que nous énonçons sous une forme légèrement différente. Soit δ strictement positif, φ une fonction C^∞ à support compact (par exemple $|x| \leq 1$), positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. On pose : $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(x/\delta)$. On a le lemme suivant :

<u>Lemme 5.5.3</u> : Soient $X_1,\ldots,X_p$, p champs de vecteurs à coefficients C^∞ dans $\mathbb{R}^n$. Pour u dans $L^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(K)$ (où K est un compact fixe), on définit $C_\delta^{(1)}u$ par :

$$C_\delta^{(1)} u = X_1(\varphi_\delta * u) - \varphi_\delta * X_1 u = [X_1, \varphi_\delta *]\, u$$

et par récurrence :

$$C_\delta^{(j)} = [X_j, C_\delta^{(j-1)}] \quad \text{pour } j = 2,\ldots,p.$$

Alors nous avons les propriétés suivantes pour $C_\delta^{(p)}$:

i) $\exists C$, $\forall u \in C_0^\infty(K)$, $\forall \delta \in]0,1]$,

$$\|C_\delta^{(p)}u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2} \tag{5.5.1}$$

ii) Pour tout u dans $C_0^\infty(K)$, $C_\delta^{(p)}u$ tend vers 0 dans L^2, lorsque δ tend vers 0.

$C_\delta^{(p)}$ se prolonge donc en une famille équicontinue d'opérateurs de $L^2 \cap \mathcal{E}'(K)$ dans L^2, et pour tout u dans $L^2 \cap \mathcal{E}'(K)$, $C_\delta^{(p)}u$ tend vers 0 dans L^2 lorsque δ tend vers 0.

On déduit immédiatement du lemme 5.5.3 que si, u est dans $H_\xi^m \cap \mathcal{E}'(K)$, $\varphi_\delta * u$ tend vers u dans H_ξ^m, lorsque δ tend vers 0. Le lemme 5.5.2 est ainsi démontré.

§ 5.6 Une première démonstration du lemme 5.4.3

On prend les notations du § 5.4. La démonstration que nous allons donner est particulière aux groupes nilpotents de rang 3. Pour montrer le lemme (5.4.3), on va construire un opérateur Q continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, et un opérateur R régularisant de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, tel que :

(5.6.1) $$Q.\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P) = I + R \quad \text{dans } \mathcal{S} \text{ ou } \mathcal{S}'.$$

On en déduit aisément que :

(5.6.2) $$\operatorname{Ker} \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P) \cap \mathcal{S}' = \operatorname{Ker} \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P) \cap \mathcal{S} ,$$

ce qui en particulier démontre le lemme (5.4.3).

Cette construction est faite sous l'hypothèse suivante :

(Ro) Pour toute représentation π unitaire, irréductible non triviale de G, égale à l'identité sur G_3, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

Cette construction suit une idée de Rockland [16], et utilise la caractérisation des opérateurs hypoelliptiques avec perte de m/2 dérivées donnée dans [3]. C'est dire qu'elle sort du cadre "self contained" que nous nous étions imposés jusqu'à présent. On suppose que l'ordre de P m est pair et on considère l'opérateur

$$\mathcal{P} = P^* P + \left(\sum_{i=1}^{p_3} Z_i^* Z_i \right)^{m/2} + c$$

où c est un nombre réel que nous déterminons ultérieurement. $\mathcal{P}$ est un opérateur différentiel sur G, invariant à gauche, mais <u>non-homogène</u>. $\mathcal{P}$ étant invariant à gauche, il suffit de montrer que $\mathcal{P}$ est hypoelliptique au voisinage de 0 dans G, avec perte de m dérivées. On utilise les résultats de [3], en faisant exactement les mêmes calculs que dans [8]. La condition d'ellipticité transversale de $\mathcal{P}$ est vérifiée. Elle résulte en effet de la condition :

($Ro^{dég}$) Pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale de G égale à l'identité sur ($G^2 = \exp \mathcal{G}^2$), $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

La deuxième condition est que, pour tout (ξ_3, ξ_2) dans $\mathcal{G}_3^* \oplus \mathcal{G}_2^*$, tel que $|\xi_3| + |\xi_2|$ soit non nul :

$$\pi_{\xi_3=0,\xi_2}(P^*) . \pi_{\xi_3=0,\xi_2}(P) + |\xi_3|^m$$

soit inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{p_1})$.

En se ramenant à la forme réduite (cf. [3],[8]), la condition s'écrit :

pour tout (ξ_3,ξ_2) dans $\mathcal{G}_3^* \oplus \mathcal{G}_2^*$, tel que $|\xi_3| + |\xi_2|$ est non nul, pour toute représentation π_{ξ_2} unitaire, irréductible, de G dont la restriction à $\exp(\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3)$ est donnée par :

$\pi_{\xi_2}(\exp(x_2 + x_3)) = e^{i<\xi_2,x_2>}$,

$$\mathrm{Ker}(\pi_{\xi_2}(P)^* \pi_{\xi_2}(P) + |\xi_3|^m) \cap \mathcal{S}_{\pi_{\xi_2}} = 0$$

Montrons que cette condition est vérifiée, sous l'hypothèse (Ro).

Soit u dans $\mathcal{S}_\pi$, tel que :

$$\mathcal{P}_{\xi_2} u = (\pi_{\xi_2}(P)^* \pi_{\xi_2}(P) + |\xi_3|^m)u = 0$$

Alors $(\mathcal{P}_{\xi_2} u,u) = \|\pi_{\xi_2}(P)u\|_o^2 + |\xi_3|^m \|u\|_o^2$.

Si ξ_3 est non nul, cela entraîne u = 0.

Si ξ_3 est nul, ξ_2 est non nul, et π_{ξ_2} est une représentation non triviale de G, donc d'après (R_o) :

$$u \in \mathcal{S}_\pi \ , \ \pi_{\xi_2}(P)u = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$$

Par conséquent, $\mathcal{P}$ est bien hypoelliptique avec perte de m

dérivées , et admet une paramétrixe bilatère. Nous allons utiliser cette information sous la forme suivante :
Il existe une distribution u_1 dans $\mathcal{E}'(G)$, et une fonction φ dans $C_0^\infty(G)$ telle que :

$$(5.6.3) \qquad \bar{\mathcal{P}}\, u_1 = \delta + \varphi$$

où $\bar{\mathcal{P}}$ est défini par $\bar{\mathcal{P}}u = \overline{\mathcal{P}\bar{u}}$ pour u dans $\mathcal{S}$.
On veut construire un inverse pour $\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P)$;
$(\xi_3+\xi_2+\xi_1)$ est fixé. On choisit maintenant $c = -|\xi_3|^m$, de sorte que :

$$(5.6.4) \quad \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\mathcal{P}) = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P^*).\ \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P)$$

On applique $\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}$ à (5.6.3) :

$$\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\bar{\mathcal{P}}\, u_1) = I + \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\varphi)$$

On suit ici de très près les paragraphes 2 et 6 de [16].
On a :

$$\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\bar{\mathcal{P}}\, u_1) = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(u_1)\,\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}({}^t\bar{\mathcal{P}})$$

$$\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\bar{\mathcal{P}}\, u_1) = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(u_1)\ \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\mathcal{P})$$

Utilisant (5.6.4), on obtient :

$$\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\bar{P}\,u_1) = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\bar{P}\,u_1)\,\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(P)$$

Soit $u_2 = \bar{P}\,u_1$.

(5.6.1) est vérifiée en prenant :

$$Q = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(u_2)$$

$$R = \pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\varphi)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que Q et R ont bien les propriétés annoncées.

<u>Lemme 5.6.1</u> : Pour toute fonction φ dans $C_o^\infty(G)$, $\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(\varphi)$ envoie $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$.

π étant irréductible, il suffit de montrer que, pour tous A et B dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\pi(A)\pi(\varphi)\pi(B)$ envoie L^2 dans L^2. Or il existe ψ dans C_o^∞ tel que :

$$\pi(\psi) = \pi(A).\pi(\varphi).\pi(B)$$

et il est bien connu que $\pi(\psi)$ est continu de L^2 dans L^2 pour ψ dans $L^1(G)$.

<u>Lemme 5.6.2</u> : Pour toute distribution u dans $\mathcal{E}'(G)$,

$\left[\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(u)\right.$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

Rappelons tout d'abord la définition de $\pi(u)$ comme opérateur de $\mathcal{S}$ dans L^2. Pour f dans $\mathcal{S}$ et g dans L^2, $\pi(u)$ est défini par :

$$\langle\pi(u)f,g\rangle = \langle u,\langle\pi(g)f,g\rangle_{L^2}\rangle$$

Il suffit de montrer que $\pi_{\xi_3+\xi_2+\xi_1}(u)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans L^2, en effet, si cette propriété est vérifiée, pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\pi(A)\pi(u) = \pi(v)$ où v est dans $\mathcal{E}'(G)$. Par conséquent, $\pi(A)\pi(u)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans L^2 pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
$\dot{\pi}$ étant irréductible, cela implique que $\pi(u)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.
Si u est dans L^1, le résultat est classique. On se ramène à ce cas en utilisant que u est d'ordre fini, donc obtenue comme dérivée d'un certain ordre d'une fonction de L^1.
On a ainsi montré que $\pi(u)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Montrons qu'il se prolonge en un opérateur continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.
Pour φ dans $C^\infty(G)$, on définit $\varphi^\#$ par :

$$\varphi^\#(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$$

Pour u dans $\mathcal{E}'(G)$, on définit $u^\#$ par, pour tout φ dans $C^\infty(G)$:

$$(u^\#,\varphi) = \overline{(u,\varphi^\#)}$$

Pour f et g dans $\mathcal{S}_\pi$, on vérifie que :

$$<\pi(u)\,f,g> = <f,\pi(u^{\#})g>$$

Soit $(\pi(u^{\#}))^*$ l'adjoint de $\pi(u^{\#})$, c'est un opérateur continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, qui coïncide avec $\pi(u)$ sur $\mathcal{S}$. $\pi(u)$ se prolonge donc en un opérateur continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.
En particulier, l'opérateur Q possède les propriétés annoncées.

§ 5.7 La méthode des quotients différentiels
(une deuxième démonstration du lemme 5.4.3).

Soit π une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert H (on peut supposer que $H = L^2(\mathbb{R}^q)$). Pour tout A dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, on peut définir $\pi(A)$ de H dans $\mathcal{S}'_\pi$ ($\mathcal{S}'_\pi = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$). On désigne par H^m_π l'espace des u dans H tels que, pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, on ait $\pi(A)u$ dans H. On munit H^m_π de la norme :

$$(5.7.1) \qquad \|u\|^2_{H^m_\pi} = \sum_j \|\pi(A_j)u\|^2_H ,$$

où (A_j) désigne une base de $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. On suppose que $\mathcal{S}_\pi$ est dense dans H^m_π (cf. lemme 5.4.2 dans le cas des nilpotents de rang 3). Cette propriété est vraie en général, mais sera démontrée dans un article ultérieur.

Soit φ_k la projection $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{G}^{k+1}$, $(k=1,\dots,r-1)$, et on définit pour tous entiers $(m_r,\dots,m_1)$

$$\mathcal{U}^{m_r,m_{r-1},\dots,m_1} = \{A \in \mathcal{U}^{m_r}(\mathcal{G}), \varphi_i(A) \in \mathcal{U}^{m_i}(\mathcal{G}/\mathcal{G}^{i+1}),\ i = 1,\dots,r-1\}$$

Cette définition n'a d'intérêt que si :

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r .$$

Si $m_r = m_{r-1} = \dots = m_1 = m$, $\mathcal{U}^{m_r,\dots,m_1} = \mathcal{U}^m$.

A ces sous-espaces de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, on associe des espaces de Hilbert (ou de Fréchet, si certains des m_j sont infinis)
$H_\pi^{m_r,m_{r-1},\dots,m_1}$.

On suppose que $\mathcal{S}_\pi$ est dense dans ces espaces. La propriété est vraie dans le cas général et résulte clairement du paragraphe 5.4 dans le cas des nilpotents de rang 3. Par ailleurs, on a :

$$\bigcap_{m_r,\dots,m_1} H_\pi^{m_r,\dots,m_1} = \mathcal{S}_\pi$$

On se propose de démontrer la proposition suivante :

<u>Proposition 5.7.1</u> : Soit P dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. (On suppose $m \geq r$).
On suppose qu'il existe une constante C strictement positive

telle que, pour tout u dans H_π^m, on ait :

(5.7.2) $$\|u\|^2_{H_\pi^m} \leq C[\|\pi(P)u\|^2_{H} + \|u\|^2_{H}]$$

Soit E l'espace des u dans H_π^m, tels que $\pi(P)u$ soit dans $\mathcal{S}_\pi$, muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet. Alors E et $\mathcal{S}_\pi$ sont isomorphes.

Remarquons que $H_\pi^{m_r,m_{r-1},\ldots,m_1} = H_\pi^{m_{r-1},m_{r-1},\ldots,m_1}$ (car π est irréductible, non trivial). Nous aurons besoin du lemme facile suivant :

<u>Lemme 5.7.2</u> : Soient $m_r \geq \ldots \geq m_i \geq \ldots \geq m_1$ donnés. Soit i un entier ($1 \leq i \leq r$). On suppose que $m_i \geq m_{i-1} + i$. Alors si X_i^j ($j = 1,\ldots,p_i$) désigne une base de $\mathfrak{g}_i$, pour tout A dans $\mathcal{U}^{m_r,m_{r-1},\ldots,m_1}$, il existe C dans $\mathcal{U}^{m_r,m_{r-1},\ldots,m_i-i,m_{i-1},\ldots,m_1}$ et B_j ($j = 1,\ldots,p_i$) dans $\mathcal{U}^{m_r-i,m_{r-1}-i,\ldots,m_i-i,m_{i-1},\ldots,m_1}$ tels que :

$$A = \sum_{j=1}^{p_i} B_j X_i^j + C$$

On a une propriété analogue en mettant les X_i^j à gauche.

On déduit de ce lemme et de (5.7.2) la proposition suivante :

Proposition 5.7.3 : On prend les hypothèses de la proposition 5.7.1. Soit P dans $\mathcal{U}^m(\mathfrak{G})$, i un entier $(1 \leq i \leq r)$. Soient $m_{i+1}, \ldots, m_r$, k des entiers vérifiant : $m + ki \leq m_{i+1} \leq \ldots \leq m_r$. Alors il existe des entiers $m'_{i+1}, \ldots, m'_r$ et une constante C telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}_\pi$, on ait :

$$(5.7.3) \qquad \|u\|^2_{H_\pi^{m_r, \ldots, m_{i+1}, m+ki, m, m, \ldots, m}} \leq$$

$$C(\|\pi(P)u\|^2_{H_\pi^{m'_r, \ldots, m'_{i+1}, ki, 0, \ldots, 0}} + \|u\|^2_H)$$

Démonstration : Pour $i = r$, la proposition résulte trivialement de (5.7.2), si on remarque que pour tout $m_r \geq m$, $H_\pi^{m_r, m, \ldots, m}$ est égal à $H_\pi^{m, m, \ldots, m}$. On raisonne par récurrence sur i et sur k.

On suppose que (5.7.3) est vérifiée pour $i = i_o+1$, tout k, et toute famille $(m_{i_o+2}, \ldots, m_r)$ vérifiant : $m+k(i_o+1) \leq m_{i_o+2} \leq \ldots \leq m_r$. On en déduit immédiatement que (5.7.3) est vérifiée pour $i = i_o$, $k = 0$, et toute famille $(m_{i_o+1}, \ldots, m_r)$ vérifiant : $m \leq m_{i_o+1} \leq \ldots \leq m_r$. On suppose que (5.7.3) est vérifiée pour $i = i_o$, $k \leq k_o$, et on va montrer la proposition pour (k_o+1).

Soient donc $(m_{i_o+1}, \ldots, m_r)$ une suite vérifiant :

$$m + (k_o+1)i_o \leq m_{i_o+1} \leq \ldots \leq m_r .$$

On va montrer qu'il existe une suite $(m'_{i_o+1},\dots,m'_r)$ telle que (5.7.3) soit vérifiée.

Il résulte du lemme (5.7.2) que les deux normes suivantes :

$$\|v\|_{H_\pi^{m_r,\dots,m_{i+1},m+(k_o+1)i,m,\dots,m}}$$

et

$$\Big(\|v\|^2_{H_\pi^{m_r,\dots,m_{i+1},m+k_oi,m,\dots,m}} + \sum_{j=1}^{p_i} \|\pi(X_i^j)v\|^2_{H_\pi^{m_r-i,\dots,m_{i+1}-i,m+k_oi,m,\dots,m}}\Big)^{1/2}$$

sont équivalentes.

On applique l'hypothèse de récurrence à v et $\pi(X_i^j)v$. Il existe des entiers $m'_r,\dots,m'_{i+1}$ et une constante C telle que :

$$\|\pi(X_i^j)v\|^2_{H_\pi^{m_r-i,\dots,m_{i+1}-i,m+k_oi,m,\dots,m}} \leq \tag{5.7.4}$$
$$C\Big(\|\pi(P)\pi(X_i^j)v\|^2_{H_\pi^{m'_r,\dots,m'_{i+1},k_oi,0,\dots,0}} + \|\pi(X_i^j)v\|^2_H\Big)$$

$$\|v\|^2_{H_\pi^{m_r-i,\dots,m_{i+1}-i,m+k_o i,m,\dots,m}} \leq$$

(5.7.5)
$$\leq C(\|\pi(P)v\|^2_{H_\pi^{m'_r,\dots,m'_{i+1},k_o i,0,\dots,0}} + \|v\|^2_H)$$

Le second membre de (5.7.5) ne pose pas de problèmes. Regardons de plus près le second membre de (5.7.4).

$\|\pi(X_1^j)v\|^2_H$ est majoré par (5.7.2). Il nous reste à contrôler :

$$\|\pi(P)\,\pi(X_i^j)v\|^2_{H_\pi^{m'_r,\dots,m'_{i+1},k_o i,0,\dots,0}}$$

On utilise l'identité :

(5.7.6) $\pi(P)\pi(X_i^j) = \pi(X_i^j)\pi(P) + \pi([X_i^j,P])$

$[X_i^j,P]$ appartient à $\mathcal{U}^{\widetilde{m}_r,\dots,\widetilde{m}_i,\dots,\widetilde{m}_1}$ avec

$$\widetilde{m}_r = \dots = \widetilde{m}_{i+1} = m+i$$

$$\widetilde{m}_i = \dots = \widetilde{m}_1 = m$$

On en déduit que :

(5.7.7)
$$\|\pi([X_i^j,P])v\|^2_{H_\pi^{m'_r,\dots,m'_{i+1},k_o i,0,\dots,0}}$$
$$\leq C(\|v\|^2_{H_\pi^{m'_r+m+i,\dots,m'_{i+1}+m+i,m+k_o i,m,\dots,m}})$$

De par l'hypothèse de récurrence, il existe une famille $(m''_r,\dots,m''_{i+1})$, et une constante C telle que, pour tout v dans $\mathcal{S}_\pi$:

$$\|v\|^2_{H_\pi^{m'_r+m+i,\dots,m'_{i+1}+m+i,m+k_o i,m,\dots,m}}$$

(5.7.8)

$$\leq C(\|\pi(P)v\|^2_{H_\pi^{m''_r,\dots,m''_{i+1},k_o i,0,\dots,0}} + \|v\|^2_H)$$

(5.7.3) pour (k_o+1) se déduit alors aisément des points (5.7.4) à (5.7.8).

Remarque 5.7.4 : Par densité, l'inégalité (5.7.3) est vérifiée pour u dans $H_\pi^{\infty,\dots,\infty,m+ki,m,\dots,m}$.

On va utiliser l'inégalité (5.7.3) pour démontrer de la régularité par la méthode des quotients différentiels. Nous utiliserons l'identité classique suivante :
Pour tous Y, Z dans $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ nilpotent) on a :

(5.7.9) $$[\pi(Y),\pi(e^{tZ})] = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} t^k \pi(e^{tZ})\pi((\mathrm{ad}\,Z)^k Y)$$

On déduit de (5.7.9) que si u est dans $H_\pi^{\infty,\dots,\infty,m_i,\dots,m_1}$ et X dans $\mathfrak{g}_i$, $\pi(e^{tX})u$ est dans $H_\pi^{\infty,\dots,\infty,m_i,\dots,m_1}$. Plus précisément on peut faire la remarque suivante :

<u>Remarque 5.7.5</u> : Pour toute famille $(m_r,\ldots,m_i,\ldots,m_1)$, il existe une famille $(m'_r,\ldots,m'_{i+1},m_i,\ldots,m_1)$ telle que, pour tout u dans $H_\pi^{m_r,\ldots,m_i,\ldots,m_1}$, tout X dans $\mathfrak{G}_i$, tout t dans $\mathbb{R}$, $\pi(e^{tX})u$ soit dans $H_\pi^{m'_r,\ldots,m'_{i+1},m_i,\ldots,m_1}$.

La proposition (5.7.1) sera un corollaire de la :

<u>Proposition 5.7.6</u> : Pour tout k dans $\mathbb{N}$, si u appartient à $H_\pi^{\infty,\ldots,\infty,m_i,m,\ldots,m}$ (avec $m_i = m+ki$) et $\pi(P)u$ appartient à $H_\pi^{\infty,\ldots,\infty,m_i-m+i,0,0,\ldots,0}$, alors u appartient à $H_\pi^{\infty,\ldots,\infty,m_i+i,m,\ldots,m}$.

Il résulte du lemme 5.7.2 qu'il suffit de montrer que, pour tout X dans $\mathfrak{G}_i$, $\pi(X)u$ appartient à $H_\pi^{\infty,\ldots,\infty,m_i,m,\ldots,m}$.

Posons $v_t = \dfrac{\pi(e^{tX}) - I}{t}\,u$. Pour tout t non nul, v_t est dans $H_\pi^{\infty,\ldots,\infty,m_i,m,\ldots,m}$ (remarque 5.7.5). On applique l'inégalité (5.7.3) à v_t. $(m_r,\ldots,m_{i+1})$ étant donnés, vérifiant, $m_r \geq \ldots \geq m_{i+1} \geq (k+1)i + m$, il existe $(m'_r,\ldots,m'_{i+1})$ et une constante C telle que :

$$(5.7.10)\quad \|v_t\|^2_{H_\pi^{m_r,\ldots,m_{i+1},m+ki,m,\ldots,m}} \leq$$

$$\leq C\left(\|\pi(P)v_t\|^2_{H^{m'_r,\ldots,m'_{i+1},ki,0,\ldots,0}} + \|v_t\|^2_H\right)$$

Il résulte de (5.7.9) que, si $\pi(P)u$ appartient à

$H_\pi^{\infty,\dots,\infty,(k+1)i,0,\dots,0}$ et u appartient à

$H_\pi^{\infty,\dots,\infty,m+ki,0,\dots,0}$, le second membre de (5.7.10) est bornée indépendamment de t non nul.

On en déduit alors classiquement, qu'il existe une suite t_n tendant vers 0, telle que, pour tout A dans $\mathcal{U}^{m_r,\dots,m_{i+1},m+ki,m,\dots,m}$, $\pi(A)v_{t_n}$ tende faiblement dans L^2 vers $\pi(A)Xu$. La proposition s'en déduit aisément.

§ 6. DEMONSTRATION DE L'HYPOELLIPTICITE

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cadre général des groupes nilpotents de rang r.

§ 6.1 Introduction : un critère d'hypoellipticité

On suppose que l'on a démontré la proposition suivante :

Propriété 6.1.1 : Soit G un groupe nilpotent de rang r, dont l'algèbre de Lie vérifie les hypothèses de l'introduction (§ 0). Soit μ le p.p.c.m. de $(1,\dots,r)$ et P un élément de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ avec m entier, $m = k\mu$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$, k_o assez grand). Alors si, pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale de G, l'opérateur $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$, on a l'inégalité :

(6.1.1) Il existe une constante C telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$,

$$\|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})} \leq C(\|\pi_o(P)u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} + \|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})})$$

Cette propriété a été démontrée pour les groupes nilpotents de rang inférieur ou égal à 3, avec k_o égal à 1, dans le présent travail. On va montrer dans ce paragraphe que si la propriété 6.1.1 est vérifiée , P est hypoelliptique si (6.1.1) est vérifiée (on identifie désormais P et $\pi_o(P)$).

On déduit aisément de (6.1.1) l'inégalité suivante :

Pour tout compact K de $\mathcal{G}$, il existe une constante C_K, telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$, on ait :

$$(6.1.2) \qquad \|u\|^2_{m/r} + \|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})} \leq C_K(\|Pu\|^2_o + \|u\|^2_o)$$

où $\| \quad \|^2_s$ désigne la norme de Sobolev (classique).

On va utiliser un critère d'hypoellipticité classique (F. Trèves [18]) dans la présentation qu'en donnent A. et J. Unterberger (théorème 2.2, [19]).

Soit P dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. Soit Q_s $(s = 0,\dots,I)$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{U}^{m-1}$ de $\mathcal{G}$ possédant la propriété suivante. Si R désigne P ou un élément de la famille des Q_s, il existe des coefficients complexes $a^s_{i_1,\dots,i_r}$ tels que, pour tout φ dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$, on ait l'identité :

$$(6.1.3) \qquad [R,\varphi] = \Sigma\, a^s_{\{i\}} [X_{i_1}[X_{i_r},\dots,[X_{i_r},\varphi]\dots] Q_s$$

On a ici identifié l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et les opérateurs invariants à gauche sur $\mathcal{G}$. X_i désigne un élément de $\mathcal{G}$. On peut particulariser le théorème 2.2 de [19] sous la forme suivante :

<u>Proposition 6.1.2</u> : Soit P un opérateur dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, et Q_s une famille vérifiant la propriété (6.1.3). On suppose que,

pour tout compact K de $\mathcal{G}$, il existe ε_1 et ε_2 strictement positifs, et une constante C_K, tels que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$, on ait :

$$(6.1.4) \qquad \|u\|^2_{\varepsilon_1} + \sum_s \|Q_s u\|^2_{\varepsilon_2} \leq C_K (\|Pu\|^2_o + \|u\|^2_o)$$

Alors P est hypoelliptique dans $\mathcal{G}$.

On veut montrer que (6.1.2) implique (6.1.4). On prend comme famille Q_s une base de $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$. ε_1 est choisi égal à m/r. Cette implication résultera alors aisément du lemme suivant .

Lemme 6.1.3 : Soit $m = k\mu$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq k_o,\ \mu = \text{p.p.c.m}(1,\dots,r))$. Pour tout compact K, tout A dans $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$, il existe une constante C_K, telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$, on ait :

$$(6.1.5) \qquad \|Au\|^2_{1/r} \leq C_K \|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})}$$

Remarquons que la condition $m = k\mu$ n'est pas gratuite. Si en effet $\mathcal{G}_1$ n'engendre pas $\mathcal{G}$ (cas non stratifié au sens de [5]), l'inégalité (6.1.5) n'est pas satisfaite pour $m = 1$, $A = 1$. Le lemme 6.1.3 ne peut pas être amélioré en général. Dans le cas du rang 3, une démonstration directe du lemme (6.1.3) est possible (en utilisant les techniques de Kohn) donnant l'existence d'un ε strictement positif et d'une constante C telle que :

$$(6.1.5)' \qquad \|Au\|_{\varepsilon}^{2} \leq C_K \|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})}$$

Dans le cas général, il nous semble plus aisé de construire une famille particulière d'opérateurs hypoelliptiques jouant le rôle des ($\sum_{i=1}^{p_1} X_i^2$) dans le cas stratifié , et de suivre une approche semblable à la démonstration du théorème 17 de [17]. Cette méthode a également l'avantage de montrer l'existence d'opérateurs hypoelliptiques homogènes sur des groupes nilpotents gradués généraux (en admettant bien entendu que la propriété 6.1.1 a été démontrée).

§ 6.2 Une classe particulière d'opérateurs invariants, homogènes .

Soit p_j la dimension de $\mathcal{G}_j$ $(j=1,\dots,r)$. On désigne par $X_{i,j}$ une base de $\mathcal{G}_j$ $(i=1,\dots,p_j)$. Soit $m=k\mu$. Considérons

$$(6.2.1) \qquad P_k = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{p_j} (-1)^{\frac{k\mu}{j}} X_{i,j}^{\frac{2k\mu}{j}}$$

P_k est un opérateur invariant à gauche sur G, homogène de degré $2m=2k\mu$, autoadjoint (on a en effet $X^*_{i,j} = -X_{i,j}$). Montrons d'abord le lemme suivant (cf Prop. 7.1 de [16]).

<u>Lemme 6.2.1</u> : Pour toute représentation π, unitaire, irréductible, non triviale de G, $\pi\,(P_k)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

<u>**Démonstration**</u> : Soit u dans $\mathcal{S}_\pi$, vérifiant $\pi(P_k)u = 0$.
On en déduit en considérant $(\pi(P_k)u,u)$ que :

$$\pi(X_{i,j})^{k\mu/j}u = 0 \qquad , \forall j \in 1,\ldots,r$$
$$\forall i \in 1,\ldots,p_j$$

d'où l'on déduit aisément :

$$\pi(X_{i,j})u = 0$$

On déduit alors aisément de l'irréductibilité de π que $u = 0$.

c.q.f.d.

Si on admet la propriété 6.1.1, on en déduit l'inégalité (6.1.1) pour (P_k), si $k \geq k_o$. On va montrer que P_k est hypoelliptique.
On veut appliquer la proposition 6.1.2. On prend comme famille Q_s la famille $A_{i,j,\ell} = (X_{i,j})^\ell$ avec $0 \leq \ell < \frac{2k\mu}{j}$.
(6.1.4) résultera de (6.1.1) si on démontre le <u>cas particulier</u> du lemme 6.1.3 suivant :

<u>Lemme 6.2.2</u> : Soit $m = k\mu$. Pour tout compact K, tout $A_{i,j,\ell}$

$(j=1,\dots,r,\ i=1,\dots,p_j,\ \ell=0,\dots,\frac{2k\mu}{j}-1)$, il existe $\varepsilon>0$ et C_K telles que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$:

(6.2.2) $$\|A_{i,j,\ell}u\|_\varepsilon^2 \leq C_K\|u\|^2_{H^{2m}(\mathcal{G})}$$

Démonstration : Les indices i et j étant fixés, le lemme se démontre par récurrence sur ℓ. On suppose le lemme vérifié pour $\ell \leq \ell_o$, $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, montrons-le pour (ℓ_o+1), avec $\ell_o+1 < \frac{2k\mu}{j}$. Pour s dans $\mathbb{R}$, on désigne par Λ^s un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre s proprement supporté. On désigne par M^s un opérateur pseudodifférentiel proprement supporté, classique, d'ordre s quelconque. Considérons alors :

$$A_\varepsilon = (\Lambda^\varepsilon X_{i,j}^{\ell_o+1}u, \Lambda^\varepsilon X_{i,j}^{\ell_o+1}u)$$

On a :

$$A_\varepsilon = (\Lambda^{\varepsilon^*}\Lambda^\varepsilon X_{i,j}X_{i,j}^{\ell_o}u, X_{i,j}^{\ell_o+1}u)$$

$$= (M^{2\varepsilon}X_{i,j}^{\ell_o}u, X_{i,j}^{\ell_o+1}u) + (M'^{2\varepsilon}X_{i,j}^{\ell_o}u, X_{i,j}^{\ell_o+2}u)$$

On en déduit, qu'il existe C_K, telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$

$$A_\varepsilon \leq C_K(\|X_{i,j}^{\ell_o}u\|^2_{2\varepsilon} + \|u\|^2_{H^{2m}(\mathcal{G})})$$

Si on choisit $2\varepsilon \leq \varepsilon_o$, on obtient :

$$A_\varepsilon \leq C_K(\|u\|^2_{H^{2m}(\mathcal{G})}) .$$

Ceci démontre le lemme .

Cette démonstration donne $\varepsilon = 2^{-r}$, ce qui est nettement moins bon que $\frac{1}{r}$.

On a ainsi montré que, si on admet la propriété (6.1.1) ,

l'opérateur P_k est hypoelliptique pour $k \geq k_o$.

§ 6.3 Démonstration du lemme 6.1.3

Dans ce paragraphe, on suppose connu les techniques de [17] (cf. également [6] et [7]). On suppose d'abord que la dimension homogène du groupe G est supérieure strictement à 2m. P_k étant hypoelliptique, ainsi que son adjoint formel, il existe (proposition A, § 4.5 de [17]) une distribution homogène de type 2m T telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(\mathcal{G})$,

$$P_k u * T = u$$

On en déduit l'existence de distributions homogènes $\tilde{k}_{i,j}$ de type m telles que :

$$\sum_{i,j} X_{i,j}^{k\mu/j} u * \tilde{k}_{i,j} = u$$

Soit A_s dans $\mathcal{U}_s(\mathfrak{G})$ avec $s \leq m-1$, alors :

(6.3.1) $$A_s u = \sum_{i,j} X_{i,j}^{k\mu/j} u * (A_s \widetilde{k}_{i,j})$$

$(A_s \widetilde{k}_{i,j})$ de type homogène de type supérieur ou égal à 1.
Il résulte du lemme 18.2 de [17]♦ que si k est une distribution homogène de type supérieur ou égal à 1, il existe pour tout compact K, tout $u \in C_o^\infty(K)$, une constante C_K, telle que, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$, on ait :

(6.3.2) $$\|a(k*u)\|^2_{1/r} \leq C_K \|u\|^2_o$$

Le lemme (6.1.3) résulte de (6.3.1) et (6.3.2).
Affranchissons-nous maintenant de la condition homogène du groupe G. On utilise la méthode d'addition de variables utilisée (pour une autre raison) dans [17]. Soit p un entier, on considère le groupe $G \times \mathbb{R}^p$ muni de la dilatation :

$$\delta_t(g,x) = (\delta_t(g), tx) \quad \text{pour} \quad (g,x) \text{ dans } G \times \mathbb{R}^p .$$

♦ Dans [17], le lemme 18.2 est énoncé sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$ engendre $\mathfrak{G}$. Mais un examen de la démonstration (qui est détaillée dans le cas de Heisenberg dans [7] p.507-515) montre que la seule propriété utilisée est l'injection continue de $H^r(\mathfrak{G})$ dans $H_{1,loc}$ ($H_{1,loc}$ est l'espace de Sobolev usuel).

On a : $\dim_{\text{homogène}}(G\times \mathbb{R}^p) = p + \dim_{\text{homogène}} G$. On choisit p de telle sorte que la dimension homogène de $G\times \mathbb{R}^p$ soit supérieure à 2m.On pose

$$\widetilde{P}_k = P_k + \sum_{\ell=1}^{p} D_{x_i}^{2k\mu}$$

Pour toute représentation irréductible, non triviale π, de $G\times \mathbb{R}^k$, $\pi(\widetilde{P}_k)$ est injective dans $\mathcal{S}_\pi$. Si on admet la propriété 6.1.1, $\widetilde{P}_k$ est hypoelliptique. On utilise alors les mêmes arguments que dans [17] pour obtenir le lemme.

§ 7. QUELQUES EXEMPLES

§ 7.1 L'algèbre de Lie $\mathcal{G}^{(4)}$

$\mathcal{G}^{(4)}$ est définie par la loi suivante : $[X_1,X_2] = Y$, $[X_1,Y] = Z$. Les autres crochets sont nuls.

$\mathcal{G}_1$ est engendré par X_1 et X_2, $\mathcal{G}_2$ par Y et $\mathcal{G}_3$ par Z. la représentation régulière dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ est donnée par :

$$\left[\begin{array}{ll} \pi_{(o)}(X_1) & = \frac{d}{dx_1} - \frac{x_2}{2}\frac{d}{dy} - \frac{1}{3}x_1 . x_2 \frac{d}{dz} \\ \pi_{(o)}(X_2) & = \frac{d}{dx_2} + \frac{x_1}{2}\frac{d}{dy} + \frac{1}{3}x_1^2 \frac{d}{dz} \\ \pi_{(o)}(Y) & = \frac{d}{dy} + x_1 \frac{d}{dz} \\ \pi_{(o)}(Z) & = \frac{d}{dz} \end{array}\right.$$

Pour (ζ,η) dans $\mathcal{G}_3^* \oplus \mathcal{G}_2^*$, la représentation $\pi_{(\zeta,\eta)}$ est alors définie par :

$$\left[\begin{array}{ll} \pi_{(\zeta,\eta)}(X_1) & = \frac{d}{dx_1} \\ \pi_{(\zeta,\eta)}(X_2) & = \frac{d}{dx_2} + i(x_1\eta + \frac{x_1^2}{2}\zeta) \\ \pi_{(\zeta,\eta)}(Y) & = i(\eta + x_1 . \zeta) \\ \pi_{(\zeta,\eta)}(Z) & = i\,\zeta . \end{array}\right.$$

On peut enfin définir la représentation $\pi_{\zeta,\eta,\lambda}$ par :

$$\begin{cases} \pi_{(\zeta,\eta,\lambda)}(X_1 = \dfrac{d}{dx_1} \\ \pi_{(\zeta,\eta,\lambda)}(X_2) = i[\lambda + x_1\eta + \dfrac{x_1^2}{2}\zeta) \\ \pi_{(\zeta,\eta,\lambda)}(Y) = i(\eta + x_1\zeta) \\ \pi_{(\zeta,\eta,\lambda)}(Z) = i\,\zeta \end{cases}$$

Pour ζ non nul, les représentations $\pi_{\zeta,\eta,\lambda}$ sont irréductibles et équivalentes à $\pi_{\zeta,0,\lambda}$.

Pour ζ nul, η non nul, les représentations $\pi_{o,\eta,\lambda}$ sont irréductibles et équivalentes à $\pi_{o,\eta,o}$.

Enfin pour ζ et η nuls, $\pi_{o,o,\lambda}$ n'est pas irréductible et se décompose en une intégrale hilbertienne de représentations scalaires nulles sur $\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$.

<u>Exemple</u> : Soit $P = \alpha X_1^2 + \beta X_2^2 + \gamma Y$, avec α, β, γ dans $\mathbb{C}$. Alors P est hypoelliptique, si et seulement si :

(7.1.1) $\alpha\xi_1^2 + \beta\xi_2^2 \neq 0, \ \forall (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$

(7.1.2) $\operatorname{Ker}(\alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \beta\, x_1^2 \pm i\gamma) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$

(7.1.3) $\operatorname{Ker}(\alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \beta(\lambda \pm \dfrac{x_1^2}{2})^2 \pm i\gamma x_1) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

§ 7.2 L'algèbre de Lie $\mathcal{G}^{5,3}$

$\mathcal{G}^{5,3}$ est définie par la loi suivante :

$$[X_1,X_2] = Y_2 \; ; \; [X_2,Y_1] = Z \; ; \; [X_1,Y_2] = Z$$

Les autres crochets sont nuls.

$\mathcal{G}_1$ est engendré par X_1 et X_2, $\mathcal{G}_2$ par Y_1 et Y_2 et $\mathcal{G}_3$ par Z. La représentation régulière dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l}
\pi_{(o)}(X_1) = \frac{d}{dx_1} - \frac{1}{2}x_2 \frac{d}{dy_2} - \frac{1}{3}x_1x_2 \frac{d}{dz} \\[2ex]
\pi_{(o)}(X_2) = \frac{d}{dx_2} + \frac{1}{2}x_1 \frac{d}{dy_2} + \frac{1}{3}x_1^2 \frac{d}{dz} \\[2ex]
\pi_{(o)}(Y_1) = \frac{d}{dy_1} + x_2 \frac{d}{dz} \\[2ex]
\pi_{(o)}(Y_2) = \frac{d}{dy_2} + x_1 \frac{d}{dz} \\[2ex]
\pi_{(o)}(Z) = \frac{d}{dz}
\end{array}\right.$$

Pour (ζ,η) dans $\mathcal{G}_3^* \oplus \mathcal{G}_2^*$, $\pi_{(\zeta,\eta)}$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{l}
\pi_{\zeta,\eta}(X_1) = \frac{d}{dx_1} - i[\frac{1}{2}x_2\eta_2 + \frac{1}{3}x_1x_2\zeta] \\[2ex]
\pi_{\zeta,\eta}(X_2) = \frac{d}{dx_2} + i[\frac{1}{2}x_1\eta_2 + \frac{1}{3}x_1^2\zeta] \\[2ex]
\pi_{\zeta,\eta}(Y_1) = i(\eta_1 + x_2\zeta)
\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\pi_{\zeta,\eta}(Y_2) = i(\eta_2 + x_1\,\zeta)\\[2ex] \pi_{\zeta,\eta}(Z) = i\,\zeta\end{array}\right.$$

Pour ζ non nul, $\pi_{\zeta,\eta}$ est équivalente à $\pi_{\zeta,0}$ et est irréductible.

Pour ζ nul, η_2 non nul, $\pi_{(o,\eta)}$ est irréductible.

Pour ζ et η_2 nuls, $\pi_{(o,o,\eta_1)}$ se décompose en une intégrale hilbertienne des représentations $\pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}$ définies par :

$$\left[\begin{array}{l}\pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}(X_1) = i\,\xi_1\\[2ex] \pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}(X_2) = i\,\xi_2\\[2ex] \pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}(Y_1) = i\,\eta_1\\[2ex] \pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}(Y_2) = 0\\[2ex] \pi_{(o,o,\eta_1,\xi_1,\xi_2)}(Z) = 0\ .\end{array}\right.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77 exposé 19.

[2] R. Beals : Exposé aux Journées d'Equations aux Dérivées Partielles de St. Jean de Monts (Juin 1977).

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 43-45 (1976), p.93-121.

[4] P. Cartier : Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie. Séminaire Bourbaki 1974-75, n°454.

[5] G. B. Folland : Subelliptic estimates and function spaces in nilpotent Lie groups. Arkiv f. Mat. 13, 1975, p.161-207.

[6] G. B. Folland, E. M. Stein : Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. c.p.a.m. vol. XXVII, p.429-522 (1974).

[7] R. W. Goodmann, Nilpotent Lie groups, Lecture notes in Mathematics n° 562.

[8] B. Helffer : Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur les groupes de Lie nilpotents. (A paraître : publications du C.I.M.E. (1977).

[9] B. Helffer, F. Nourrigat : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78.

[10] B. Helffer, F. Nourrigat : Construction de sous-algèbres isotropes dans une algèbre de Lie nilpotente graduée (preprint).

[11] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119, (1967), p.147-171.

[12] A. A. Kirillov : Unitary representations of nilpotent Lie groups. Uspehi Mat. Nauk 17 (1962), p.57-110. (Russian Math. Surveys 17 (1962), p.53-104).

[13] G. Lion : Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels invariants sur un groupe nilpotent. Résolubilité de l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg (A paraître).

[14] J. L. Lions, E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes Vol. I. Dunod, Paris (68).

[15] L. Pukanszky : Leçon sur les représentations des groupes. Dunod (1967).

[16] C. Rockland : Hypoellipticity on the Heisenberg group Representation Theoretic criteria (preprint).

[17] L. P. Rotschild, E. M. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Mathematica 137 p.248-315.

[18] F. Trèves : An invariant criterion of hypoellipticity (Amer. J. Math., vol. 83, 1961, p.645-668).

[19] A.et J. Unterberger : Commuting with mollifiers without error terms. Ann. Inst. Fourier (Grenoble)26 (1976) n°2 p.35-54.