JEAN NOURRIGAT

# Hypoellipticité et paramétrixes pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques multiples

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A6_0>

# HYPOELLIPTICITE ET PARAMETRIXES

# POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

# A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

---

par Jean NOURRIGAT

INTRODUCTION :

On a construit dans l'article [6] des paramétrixes pour des opérateurs différentiels sur $R^n$ elliptiques hors d'un hyperplan. D'autre part V.V. Grushin a donné dans [4] des conditions suffisantes d'hypoellipticité pour des opérateurs dont la variété caractéristique est un sous-espace vectoriel. Dans le cas d'un hyperplan les conditions suffisantes de [2] et [6] permettent de démontrer l'hypoellipticité de certains opérateurs ne vérifiant pas les conditions de [4]. L'article [2] énonce en particulier des conditions dites d'ellipticité générale, que l'on a traduit dans [6] par des majorations des dérivées du symbole de l'opérateur, analogues à celles qui, dans Hörmander [5], permettent de construire des paramétrixes dans des classes $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho\delta}$.

Nous nous proposons ici d'étendre les résultats de [6] à des opérateurs dégénérant sur un sous-espace vectoriel de codimension quelconque. Nous écrirons l'opérateur selon les notations de Grushin [4]:

$$(0.1) \qquad P(x,D_x) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{M}} a_{\alpha\gamma}(x)x^\gamma D_x^\alpha \quad ,$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble fini de multi-indices $(\alpha,\gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, et où les $a_{\alpha\gamma}$ sont des fonctions $C^\infty$ sur $R^n$, à valeurs complexes.

Le but de cet article est de donner des conditions suffisantes pour que l'opérateur $P(x,D_x)$ admettent une paramétrixe à gauche dans une classe $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}$ où cette fois $\rho$ et $\delta$ sont des vecteurs $\rho = (\rho_1 \ldots \rho_n)$, $\delta = (\delta_1 \ldots \delta_n)$, tels que $0 \leqslant \delta_i \leqslant \rho_i \leqslant$ et $\delta_i < 1$ pour tout $i \leqslant n$, et où $\mu$ est un réel. Les classes $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}$ sont donc définies à l'aide de vecteurs de poids au sens de Beals [1]. On voit que la plus grande valeur de $\mu$ que l'on puisse espérer est :

$$(0.2) \qquad \mu = \sup_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{M}} (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma)$$

La première hypothèse que nous ferons est une majoration des dérivées du symbole $\mathfrak{P}(x,\xi)$. Cette hypothèse suffit à assurer l'hypoellipticité dans tout ouvert cônique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{0\}$ ne coupant pas la surface $\Sigma$ définie par:

$$(0.3) \qquad \Sigma = \left\{ (x,\xi) \in R^n \times R^n - \{0\} \;,\; \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n \text{ tel que } \delta_i > 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n \text{ tel que } \rho_i < 1 \end{array} \right\}$$

Cette première hypothèse généralise donc la notion d'ellipticité transverse à $\Sigma$.

En chaque point $\rho = (x_o,\xi_o)$ de $\Sigma$, on va associer à P un opérateur différentiel $P_\rho$ à coefficients polynômes. Désignons par $\Sigma^\perp$ le sous-espace de $R^n \times R^n$ défini par :

$$(0.4) \qquad \Sigma^\perp = \left\{ (x,\xi) \in R^n \times R^n \;,\; \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n \text{ tel que } \delta_i = 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n \text{ tel que } \rho_i = 1 \end{array} \right\}$$

Pour tout $\rho = (x_o,\xi_o) \in \Sigma$ , pour tout $(x,\xi) \in \Sigma^\perp$, posons :

$$(0.5) \qquad P_\rho(x,\xi) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\mu} P(x_{o1}+\lambda^{-\delta_1}x_1,\ldots,x_{on}+\lambda^{-\delta_n}x_n,\xi_{o1}+\lambda^{\rho_1}\xi_1,\ldots,\xi_{on}+\lambda^{\rho_n}\xi_n)$$

La limite existe, d'après (0.1) et (0.2.). Les indices $i \leqslant n$ pour lesquels $\rho_i = \delta_i$ jouent un rôle particulier. On peut supposer que ces indices sont $i = 1,\ldots k$, où $k \leqslant n$.

On pose alors :

$$X' = \{x \in R^n \;,\; x_i = 0 \text{ pour tout } i > k\}$$
$$X'^* = \{\xi \in R^n \;,\; \xi_i = 0 \text{ pour tout } i > k\}$$
$$Y = \{(x,\xi) \in \Sigma^\perp \;,\; x_i = 0 \text{ si } i \leqslant k,\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant k\}$$

On a $\Sigma^\perp = X' \oplus X'^* \oplus Y$. On note $(x',\xi',y)$ la variable de $\Sigma^\perp$ (avec $x' \in X'$, $\xi' \in X'^*$ , $y \in Y$). La deuxième hypothèse que l'on fait est la suivante : pour tout $\rho \in \Sigma$, pour tout $y \in Y$, l'opérateur différentiel $P_\rho(x',D'_x,y)$ est injectif dans $\mathcal{S}(X')$.

On montre que sous ces deux hypothèses (qui sont explicitées au & I) l'opérateur $P(x,D_x)$ admet une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(R^n)$, donc est hypoelliptique avec perte de $m - \mu$ dérivées.

## I - ENONCE ET NOTATIONS

On considère un opérateur différentiel $P(x,D_x)$ dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Nous l'écrirons, suivant les notations de Grušin [4]:

$$P(x,D_x) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{U}} a_{\alpha\gamma}(x)x^\gamma D_x^\alpha \tag{1.1}$$

où $\mathcal{U}$ est un ensemble fini de multi-indices $(\alpha,\gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, et où les $a_{\alpha\gamma}$ sont des fonctions $C^\infty$ sur $\Omega$, à valeurs complexes.

On considère d'autre part deux vecteurs $\rho = (\rho_1\ldots\rho_n)$ et $\delta = (\delta_1\ldots\delta_n)$ et un réel $\mu$ qui vérifient pour tout $i \leq n$ :

$$0 \leq \delta_i \leq \rho_i \leq 1 \qquad \rho_i > 0 \qquad \delta_i < 1 \tag{1.2}$$

$$\mu = \sup_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{U}} (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) \tag{1.3}$$

où l'on pose $(\rho,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i\alpha_i$

On désignera par $S^{-\mu}_{\rho\delta}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a(x,\xi)$ $C^\infty$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout compact $K$ de $\Omega$ et pour tout multiindice $(\alpha,\beta)$, il existe $C > 0$ tel que :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-(\rho,\beta)+(\delta,\alpha)} \quad \forall (x,\xi) \in K \times R^n$$

On désigne par $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$ l'ensemble des applications linéaires de $C_o^\infty(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$ de la forme $a(x,D_x) + R$, où $a(x,\xi)$ est dans $S^{-\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$ et $R$ est un opérateur à noyau $C^\infty$. Les poids vectoriels définissant cette classe d'opérateurs vérifient toutes les hypothèses de Beals [1].

La première hypothèse que nous ferons sur l'opérateur $P(x,D_x)$ est une majoration des dérivées de son symbole analogue à celle de Hörmander [5].

Nous poserons :

(1.4) $$\psi(x,\xi) = 1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i||\xi|^{\delta_i} + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i||\xi|^{-\rho_i}$$

L'hypothèse portant sur le symbole $P(x,\xi)$ s'énonce ainsi :

(H1) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il exite $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(1.5) $$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} P(x,\xi)| \leqslant C\ |P(x,\xi)|\ (1+|\xi|)^{(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}\ \psi(x,\xi)^{-|\tilde\beta|\varepsilon}$$

(où le multi-indice $\tilde\beta$ est défini par $\tilde\beta_i = \beta_i$ si $\rho_i = \delta_i$ et $\tilde\beta_i = 0$ sinon), et de plus :

(1.6) $$|P(x,\xi)| \geqslant C\ (1 + |\xi|)^{\mu}$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times R^n$ tel que $\psi(x,\xi) \geqslant A$.

On montrera au & III que cette condition suffit pour la construction du symbole de la paramétrixe dans tout ouvert conique de $\Omega \times \mathbb{R}^n - \{0\}$ ne coupant pas la surface $\Sigma$ définie par :

(1.7) $$\Sigma = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n - \{0\}\ ,\ x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i > 0 \quad \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i < 1\}$$

Nous allons donc introduire une condition supplémentaire en tout point $\rho = (x_o,\xi_o)$ de $\Sigma$. Désignons par $\Sigma^{\perp}$ le sous-espace suivant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(1.8) $$\Sigma^{\perp} = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ,\ x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i = 0 \quad \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i = 1\}$$

En tout point $\rho = (x_o,\xi_o)$ de $\Sigma$, définissons un polynôme $P_{\rho}(x,\xi)$ sur $\Sigma^{\perp}$ par :

(1.9) $$P_{\rho}(x,\xi) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\mu}\ p(x_{o1} + \lambda^{-\delta_1} x_1,\ldots x_{on} + \lambda^{-\delta_n} x_n, \xi_{o1} + \lambda^{\rho_1}\xi_1,\ldots \xi_{on} + \lambda^{\rho_n}\xi_n).$$

On peut expliciter ce polynôme en suivant les notations de Grušin. Désignons par $\mathcal{M}_o$ le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M}$ :

(1.10) $$\mathcal{M}_o = \{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{M} \mid (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) = \mu\}$$

Pour simplifier l'écriture, convenons que $\gamma_j = 0$ pour tout indice j tel que $\delta_j = 0$. A tout multi-indice $\alpha$, faisons correspondre les multi-indices $\alpha'$ et $\alpha''$ définis par :

$$\alpha'_i = \alpha_i \text{ si } \rho_i = 1, \quad \alpha'_i = 0 \text{ si } \rho_i < 1, \quad \alpha''_i = \alpha_i - \alpha'_i.$$

On a alors :

(1.11) $$P_\rho(x,\xi) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{M}_o} a_{\alpha\gamma}(x_o)\, x^\gamma \xi^{\alpha'} \xi^{\alpha''}$$

Définissons maintenant une décomposition de $\Sigma^\perp$ en somme directe de trois sous-espaces. Posons :

(1.12) $$X' = \{x \in \mathbb{R}^n \quad x_i = 0 \text{ pour tout i tel que } \delta_i < \rho_i\}$$
$$X'^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad \xi_i = 0 \text{ pour tout i tel que } \delta_i < \rho_i\}$$
$$Y = \{(x,\xi) \in \Sigma^\perp \quad x_i = \xi_i = 0 \text{ pour tout i tel que } \delta_i = \rho_i\}.$$

$X'$ et $X'^*$ sont deux sous-espaces de $\Sigma^\perp$ d'après (1.2) (en identifiant x et (x,o), $\xi$ et (o,$\xi$)), et l'on a :

$$\Sigma^\perp = X' \oplus X'^* \oplus Y$$

La variable de $\Sigma^\perp$ sera notée tantôt $(x,\xi)$, tantôt $(y,x',\xi')$, avec $y \in Y$, $x' \in X'$, $\xi' \in X'^*$. Le polynôme $P_\rho$ sera noté tantôt $P_\rho(x,\xi)$, tantôt $P_\rho(y,x',\xi')$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre seconde hypothèse :

(H2) En tout point $\rho = (x_o,\xi_o)$ de $\Sigma$, en tout point y de $Y$, l'opérateur différentiel $P_\rho(y,x',D'_x)$ est inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$.

En raison de la quasi-homogénéité de l'opérateur $P_\rho$, si l'hypothèse H2 est vérifiée en tout point $(x_o,\xi_o)$ de $\sum$ tel que $|\xi_o| = 1$, elle est vérifiée partout.

On peut énoncer le théorème principal :

Théorème 1 :

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel de la forme (1.1). Soient $\rho,\delta$ et $\mu$ vérifiant (1.2) et (1.3). Si les hypothèses H1 et H2 sont vérifiées, alors $P(x,D_x)$ admet une paramétrixe à gauche $Q \in \mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$. De plus, le symbole $Q(x,\xi)$ de Q vérifie les majorations suivantes. Pour tout compact K de $\Omega$, il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta Q(x,\xi)| \leqslant C\ |P(x,\xi)|^{-1}(1+|\xi|)^{(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}\psi(x,\xi)^{-|\tilde{\beta}|\varepsilon}$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x,\xi) \geqslant A$.

## II - UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

On considère deux vecteurs $\rho = (\rho_1 \ldots \rho_n)$ et $\delta = (\delta_1 \ldots \delta_n)$ vérifiant (1.2) :

$$0 \leq \delta_i \leq \rho_i \leq 1 \qquad \delta_i < 1 \qquad \rho_i > 0 \qquad \forall_i \leq n.$$

Pour tout réel $\mu$, nous allons définir une sous-classe de $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, posons :

$$(\rho,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i .$$

Posons :

$$\psi(x,\xi) = 1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |\xi|^{\delta_i} + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, |\xi|^{-\rho_i} .$$

A tout $\varepsilon > 0$ faisons correspondre le vecteur $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$, encore noté $\varepsilon$, défini par :

(2.1) $\varepsilon_j = \varepsilon$ pour tout indice j tel que $\rho_j = \delta_j$

$\varepsilon_j = 0$ pour tout indice j tel que $\rho_j > \delta_j$

Nous utiliserons, pour démontrer le théorème 1, la classe de symboles suivante :

Définition 2.1.

Soient $\mu$ et k deux nombres réels, et $\varepsilon > 0$. On désigne par $S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a(x,\xi)$ $C^\infty$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout compact K de $\Omega$, et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$, il existe $C > 0$ tel que :

(2.2) $$|D^\alpha_x D^\beta_\xi \, a(x,\xi)| \leq C \, (1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)} \psi(x,\xi)^{k-(\varepsilon,\beta)}$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.

Soit $P(x,D_x)$ l'opérateur différentiel (1.1). Soient $\rho$ et $\delta$ deux vecteurs vérifiant (1.2) et $\mu$ le réel défini par (1.3). Posons :

$$k = \sup_{(\alpha,\gamma)\in \mathcal{U}} (|\alpha|+|\gamma|)$$

On a :

(2.3) $$P(x,\xi) \in S^{\mu,k}_{\rho,\delta,1}(\Omega)$$

Montrons en effet que chaque terme $x^{\gamma}\xi^{\alpha}$ est dans $S^{\mu,k}_{\rho,\delta,1}(\Omega)$. Il suffit pour cela de vérifier que si $(\rho,\ q)$ est un multi-indice vérifiant $0 \leqslant p_i \leqslant \alpha_i$, $0 \leqslant q_i \leqslant \gamma_i$ pour tout i, on a :

(2.4) $$|x^{\gamma-q}|\ |\xi^{\alpha-P}| \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu+(\delta,q)-(\rho,P)}\psi(x,\xi)^{k-|P|-|q|}$$

Or, pour tout $i \leqslant n$, on a :

$$|x_i| \leqslant |\xi|^{-\delta_i}\psi(x,\xi) \qquad \text{et} \qquad |\xi_i| \leqslant |\xi|^{\rho_i}\psi(x,\xi),$$

d'où $$|x^{\gamma-q}\ \xi^{\alpha-P}| \leqslant C\ |\xi|^{(\rho,\alpha-P)-(\delta,\gamma-q)}\psi(x,\xi)^{|\gamma|-|q|+|\alpha|-|P|}.$$

En utilisant $(\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) \leqslant \mu$ et $|\alpha| + |\gamma| \leqslant k$, on obtient bien (2.4).

Exemple 2.2.

Soit $\Omega = R^n$. Tout élément $(x,\xi)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique $(x,\xi) = (x_o,\xi_o) + (x_1,\xi_1)$, avec $\rho = (x_o,\xi_o)$ dans $\Sigma$, et $(x_1,\xi_1)$ dans $\Sigma^{\perp}$. On définit alors un symbole $p_o(x,\xi)$ en posant :

$$P_o(x,\xi) = P_{(x_o,\xi_o)}(x_1,\xi_1)$$

où $P_{\rho}(x_1,\xi_1)$ est le symbole défini en (1.9) correspondant au point $\rho = (x_o,\xi_o)$ de $\Sigma$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $k' \geqslant 0$ tels que :

(2.5) $$P - P_o \in S^{\mu-\varepsilon,k'}_{\rho,\delta,1}$$

On peut écrire en effet $P - P_o = P_1 + P_2$, avec :

$$P_1(x,\xi) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_o} a_{\alpha\gamma}(x)x^{\gamma}\xi^{\alpha}$$

$$P_2(x,\xi) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in \mathcal{M}_o} \left[a_{\alpha\gamma}(x) - a_{\alpha\gamma}(x_o)\right]x^{\gamma}\xi^{\alpha}$$

Pour le symbole $P_1$, on remarque qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$(\alpha,\gamma) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_o \Rightarrow (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) \leqslant \mu - \varepsilon_1$$

et le calcul de l'exemple 1 montre que $P_1 \in S_{\rho,\delta,1}^{\mu-\varepsilon_1,k}$. Pour le symbole $P_2$, on remarque qu'il existe des fonctions $a_{\alpha\gamma,j}(x)$ telles que :

$$a_{\alpha\gamma}(x) - a_{\alpha\gamma}(x_o) = \sum_i a_{\alpha\gamma,i}(x)\ (x_i - x_{i_o}).$$

Comme $(x-x_o,\ \xi-\xi_o)$ est dans $\sum^{\perp}$, la somme ne porte que sur les indices i pour lesquels $\delta_i > 0$. Pour tout $i \leqslant n$, désignons par (i) le multi-indice $(0,\ldots 1,\ldots 0)$, où le 1 occupe la $i^{\text{ème}}$ place. Définissons un nouvel ensemble $\mathcal{U}_1$ de multi-indices par :

$$\mathcal{U}_1 = \{(\alpha,\gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \exists_i \text{ tel que } \delta_i > 0 \text{ et } (\alpha,\gamma - (i)) \in \mathcal{U}\}.$$

Pour tout $(\alpha,\gamma)$ dans $\mathcal{U}_1$, posons :

$$b_{\alpha\gamma}(x) = a_{\alpha,\gamma,i}(x)$$

où l'indice i est tel que $(\alpha,\gamma-(i)) \in \mathcal{U}$. On peut alors écrire :

$$P_2(x,\xi) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{U}_1} b_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma \xi^\alpha$$

Désignons par $\varepsilon_2$ le plus petit des $\delta_i$ qui sont $> 0$. On a ; d'après la définition de $\mathcal{U}_1$ :

$$(\alpha,\gamma) \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) \leqslant \mu - \varepsilon_2$$

Le calcul de l'exemple 1 montre que $P_2 \in S_{\rho,\delta,1}^{\mu-\varepsilon_2,k+1}$.

On voit que les inégalités $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ et $k \leqslant k'$ impliquent

(2.6) $$S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) \subset S^{\mu^*,k'}_{\rho,\delta,\varepsilon'}(\Omega).$$

Le symbole $P(x,\xi)$ de l'exemple 1 est donc dans $S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon \leqslant 1$. On pourra donc sans restreindre la généralité supposer désormais que :

(2.7) $$0 < \varepsilon < \rho_i - \delta_i \qquad \text{pour tout indice i tel que } \rho_i > \delta_i$$

Des inégalités :

(2.8) $\quad 1 \leqslant \psi(x,\xi) \leqslant C(1+|\xi|)$

On déduit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inclusion :

(2.9) $\quad S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) \subset S^{\mu+k^+}_{\rho,\delta}(\Omega)$

où $k^+ = \sup\,(k,0)$ et $S^{\mu+k^+}_{\rho,\delta}$ est définie au & I.

$S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ est un cas particulier des classes de symboles étudiées par Beals [1].
On sait qu'à tout symbole $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ on peut associer un opérateur $a(x,D) = C^\infty_o(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ défini par :

(2.10) $\quad a(x,D) f(x) = \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, \dfrac{d\xi}{(2\pi)^n}$

Si $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ on a : $\quad a(x,D) : H^s_{coup}(\Omega) \to H^{s-m}_{loc}(\Omega)$

Désignons donc par $OPS^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ l'ensemble des opérateurs de la forme $a(x,D) + R$ où $a \in S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ et $R$ est à noyau $C^\infty$. On obtient donc, si $A \in OPS^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ :

(2.11) $\quad A : H^s_{loc}(\Omega) \to H^{s-\mu-k^+}_{loc}(\Omega)$ (si A est proprement supporté)

On a le résultat suivant sur la composition des opérateurs ; si $\varepsilon$ vérifie (2.7).

Proposition 2.1.

Soients $a \in S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ et $b \in S^{\mu',k'}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ $(\mu,\mu',k,k'$ réels). Alors il existe $C \in S^{\mu+\mu',k+k'}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ tel que $a(x,D)\, b(x,D) = C(x,D)$. (Si $a(x,D_x)$ est proprement supporté). Pour tout entier $N \geqslant 0$, on a :

(2.12) $\quad r_N(a,b)(x,\xi) = C(x,\xi) - \sum\limits_{|\alpha|<N} \dfrac{1}{\alpha!} (D^\alpha_\xi a)\ (\partial^\alpha_\xi b) \in S^{\mu+\mu';k+k'-N\varepsilon}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$

Démonstration :

On a classiquement, si $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ et $b \in S^{m'}_{\rho,\delta}(\Omega)$, $b$ vérifiant l'hypothèse de la proposition, $a(x,D)_o b(x,D) = C(x,D)$, ou $C(x,\xi) \in S^{m+m'}_{\rho,\delta}(\Omega)$ est donné par :

$$(2.13) \qquad C(x,\xi) = \int e^{-i(x-y).(\xi-\eta)}\, a(x,\eta)b(y,\xi)\, \frac{dyd\eta}{(2\pi)^n}\ .$$

l'intégrale étant prise au sens des intégrales oscillantes. Nous poserons

$$h = -(x-y).(\xi-\eta)$$

et, pour toute fonction $f(x,y,\xi,\eta)$ telle que l'intégrale oscillante ait un sens :

$$(2.14) \qquad I(f)(x,\xi) = \int e^{-ih} f(x,y,\xi,\eta)\, \frac{dyd\eta}{(2\pi)^n}$$

Pour tout N on peut écrire, en utilisant la formule de Taylor :

$$(2.15) \qquad r_N(a,b)(x,\xi) = \sum_{|\gamma|=N} \frac{1}{\gamma !} \int_0^1 I(f_{\gamma,\lambda})d\lambda\ .$$

où l'on pose :

$$(2.16) \qquad f_{\gamma,\lambda} = D_\xi^\gamma\, a(x,\xi_\lambda)\ \partial_y^\gamma b(y,\xi)$$

$$\xi_\lambda = \xi + \lambda(\eta-\xi) \qquad \forall\ \lambda \in [0,1]$$

Examinons les majorations vérifiées par les $f_{\gamma,\lambda}$. Pour cela, nous utilisons les notations suivantes :

$$\delta' = \sup_j \delta_j \qquad\qquad r = |\xi|$$

$$(2.17) \qquad g(x,\xi,y,\eta) = 1 + \sum_i |x_i-y_i|\ |\xi|^{\delta_i} + |\xi_i-\eta_i|\ |\xi|^{-\rho_i}\ .$$

<u>Lemme 2.1.</u>

Pour tout compact $K \subset \Omega$, et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,P,q)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait, (en écrivant f au lieu de $f_{\gamma,\lambda}$) :

$$(2.18) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_y^P \partial_\eta^q\, f| \leq C\ (1+|\xi|+|\eta|)^{\mu+\mu'+k^+ +k'^+} + \delta'(|\alpha|+|p|)$$

pour tout $(x,y,\xi,\eta) \in K \times K \times R^n \times R^n$. De plus, pour tout $C_1 > 0$, il existe $C > 0$ et $\ell \geq 0$ tels que, pour tout $(x,y,\xi,\eta) \in K \times K \times R^n \times R^n$ vérifiant :

$$(2.19) \qquad C_1^{-1}|\xi| \leq |\eta| \leq C_1\ |\xi| \qquad \text{et } |\xi| \geq 1,$$

on ait :

(2.20) $$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_y^P \partial_\eta^q f| \leqslant C\ (1+|\xi|)^{\mu+\mu'+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}$$
$$\times\ \psi(x,\xi)^{k+k'-(\varepsilon,\beta)-\varepsilon N}(1+|\xi|)^{(\delta,P)-(\rho,q)}g^{\ell}.$$

<u>Démonstration</u> :

L'estimation (2.18) est vérifiée pour tous symboles a et b tels que $a \in S^{\mu+k^+}_{o,\delta'}(\Omega)$ et $b \in S^{\mu'+k'^+}_{o,\delta'}(\Omega)$ et $0 \leqslant \delta' < 1$.

Pour vérifier (2.20) majorons d'abord le second facteur $\partial_y^\gamma b(y,\xi)$ (avec $|\gamma| = N$) et ses dérivées. D'après la définition 2.1, on a :

$$|\partial_\xi^\beta \partial_y^{P+\gamma} b(y,\xi)| \leqslant C\ (1+|\xi|)^{\mu'-(\rho,\beta)+(\delta,\gamma)}\psi(y,\xi)^{k'-(\varepsilon,\beta)}(1+|\xi|)^{(\delta,P)}.$$

Or il existe C > 0 tel que :

$$C^{-1}\ g^{-1} \leqslant \frac{\psi(y,\xi)}{\psi(x,\xi)} \leqslant C\ g$$

On peut donc écrire ;

$$\psi(y,\xi)^{k'-(\varepsilon,\beta)} \leqslant C\ \psi(x,\xi)^{-(\varepsilon,\beta)}\ g^{\ (\varepsilon,\beta)+k'}$$

Majorons maintenant le facteur $D_\xi^\gamma\ a(x,\xi_\lambda)$ (avec $|\gamma| = N$) dans une région où l'inégalité (2.19) est vérifiée. Dans une telle région, il existe C > 0 tel que :

$$C^{-1}\ g^{-1} \leqslant \frac{\psi(x,\xi_\lambda)}{\psi(x,\xi)} \leqslant C\ g.$$

On en déduit :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_\eta^q a(x,\xi_\lambda)| \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta+\gamma+q)}\psi(x,\xi_\lambda)^{k-(\varepsilon,\beta+\gamma)}$$
$$\leqslant C\ \psi(x,\xi)^{k-\varepsilon(\beta+\gamma)}(1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta+\gamma+q)}g^{|k|+(\varepsilon,\beta+\gamma)}.$$

Posons : $\ell = |k|+(\varepsilon,\beta+\gamma)$. On déduit de l'inégalité (2.7) :

$$(\delta-\rho,\gamma) \leqslant -(\varepsilon,\gamma).$$

On a donc :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_y^P \partial_\eta^q f| \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu+\mu'+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)+(\delta-\rho,\gamma)+(\delta,P)-(\rho,q)}$$
$$\times\ \psi(x,\xi)^{k+k'-(\varepsilon,\beta+\gamma)}\ g^{\ell}$$

En utilisant l'inégalité :

$$(1+|\xi|)^{(\delta-\rho,\gamma)}\psi(x,\xi)^{-(\varepsilon,\gamma)} \leqslant C\ \psi(x,\xi)^{-(\varepsilon,\gamma)} \leqslant C\ \psi(x,\xi)^{-N} ,$$

on en déduit (2.20).

Il nous reste à démontrer que, si une fonction $f(x,y,\xi,\eta)$, vérifie les inégalités (2.18) et (2.20), alors l'intégrale $I(f)\ (x,\xi)$, définie en (2.14), est dans $S^{\mu+\mu',k+k'-N_\varepsilon}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$.

Pour cela introduisons une fonction de troncature $\chi(\xi,\eta)\in S^{o}$ telle que :

$$\text{(2.21)}\qquad \begin{cases} \chi(\xi,\eta) = 1 & \text{si } |\xi| \leqslant 2(1+|\xi-\eta|) \\ \chi(\xi,\eta) = 0 & \text{si } |\xi| \geqslant 3(1+|\xi-\eta|), \end{cases}$$

et majorons successivement $I(\chi f)$ et $I(1-\chi f)$ au moyen des lemmes suivants.

<u>Lemme 2.2.</u>

Si f vérifie (2.18), l'intégrale $I(\chi f)\ (x,\xi)$ est dans $S^{-\infty}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> :

Les dérivées $\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi f$ vérifiant des majorations du même type que (2.18), il suffit de majorer $I(\chi f)$ lui-même. Considérons l'opérateur différentiel :

$$L = (1 + |\xi-\eta|^2)^{-1}\ (1-\Delta_y)$$

Il vérifie :

$$L\,e^{-i(x-y,\xi-\eta)} = e^{-i(x-y,\xi-\eta)}.$$

On a donc, pour tout entier M :

$$I(\chi f) = I((^tL)^M\ \chi f).$$

Si f vérifie (2.18), on a pour tout x dans K ; avec C > 0 et m convenables :

$$|(^tL)^M\ \chi f| \leqslant C\ (1+|\xi-\eta|^2)^{-M}\ (1+|\xi|+|\eta|)^{m+2\delta' M}$$

On en déduit :

$$|I(\chi f)(x,\xi)| \leqslant C \int (1+|\xi-\eta|^2)^{-M}\ (1+|\xi|+|\eta|)^{m+2\delta' M}\ dyd\eta.$$

On peut supposer que y décrit un ensemble compact. En utilisant les majorations (2.21) vérifiées sur le support de $\chi$, et le fait que $\delta' < 1$, on en déduit bien que $I(\chi f)$ est dans $S^{-\infty}(\Omega)$.

Majorons maintenant $I((1-\chi)f)$. Dans le support de $(1-\chi)f$ on utilise (2.20). Il nous suffit donc de démontrer :

Lemme 2.3.

Soit $f(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times R^n \times R^n)$. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et $C_1 > 0$ tels que :

$$(x,y,\xi,\eta) \in \text{supp } f \Rightarrow (x,y) \in K \times K,\ |\xi| \geqslant C_1 \text{ et } C_1^{-1}|\xi| \leqslant |\eta| \leqslant C_1|\xi| .$$

On suppose qu'il existe $\ell \geqslant 0$ tel que pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$

$$(2.22) \qquad |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta f(x,y,\xi,\eta)| \leqslant C\, g^{\ell}\, (1+|\xi|)^{(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}$$

Alors l'intégrale $I(f)$ est bornée.

Démonstration :

Pour ce lemme on peut évidemment supposer que $\delta_i = \rho_i$ pour tout i. Considérons l'opérateur différentiel par rapport aux variables $y,\eta$:

$$L = \Big(1 + \sum_1^n |x_i-y_i|^2 r^{2\delta_i} + \sum_1^n |\xi_i-\eta_i|^2 r^{-2\delta_i}\Big)^{-1}$$
$$\Big(1 - \sum_1^n r^{2\delta_i}\partial^2_{\eta_i} - \sum_1^n r^{-2\delta_i}\partial^2_{y_i}\Big).$$

Cet opérateur vérifie $L(e^{ih}) = e^{ih}$, donc pour tout entier N :

$$I(f) = I\,(({}^tL)^N f)$$

et d'après (2.22) :

$$|({}^tL)^N f| \leqslant C\,\Big(1 + \sum_1^n |x_i-y_i|\, r^{\delta_i} + \sum |\xi_i-\eta_i|\, r^{-\delta_i}\Big)^{\ell-2N}$$

Pour N assez grand, on peut écrire :

$$|I(f)| \leqslant C \int \Big(1+\sum |x_i-y_i|\, r^{\delta_i} + \sum |\xi_i-\eta_i|\, r^{-\rho_i}\Big)^{\ell-2N} dy d\eta\ ,$$

cette intégrale étant convergente. Elle est alors indépendante de r, d'où le résultat.

On peut énoncer aussi :

Proposition 2.2.

Si $A \in OPS^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ on a $A^* \in OPS^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$.

On a le résultat suivant sur les séries de symboles.

Proposition 2.3.

Soit $a_j \in S^{\mu,-\varepsilon_j}_{\rho,\delta,\varepsilon}$ une suite arbitraire de symboles ($\mu \in \mathbb{R}$).

Il existe un $a \in S^{\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}$ tel que pour tout entier N :

$$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{\mu,-\varepsilon N}_{\rho,\delta,\varepsilon}$$

La démonstration est dans Beals [1].

## III - CONSTRUCTION DE PARAMETRIXES

On considère un polynôme différentiel :

(3.1) $$P(x,\xi) = \sum_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{M}} a_{\alpha\gamma}\, x^\gamma \xi^\alpha$$

On a vu (exemple 2.1) que, pour tous vecteurs $\rho$ et $\delta$ vérifiant (1.2), $P(x,\xi)$ est dans $S^{\mu,k}_{\rho,\delta,1}(\Omega)$, où $\mu$ et $k$ sont définis par :

(3.2) $$\mu = \sup_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{M}} (\rho,\alpha) - (\delta,\gamma) \qquad k = \sup_{\mathcal{M}} |\alpha| + |\gamma|.$$

La première étape de la construction d'une paramétrixe n'utilise que l'hypothèse H1, que nous allons rappeler :

(H1) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$ il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(3.3) $$|D^\alpha_x D^\beta_\xi P(x,\xi)| \leqslant C\,|P(x,\xi)| \quad (1+|\xi|)^{(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}\psi(x,\xi)^{-(\varepsilon,\beta)}$$

(3.4) $$|P(x,\xi)| \geqslant C\,(1+|\xi|)^\mu$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times R^n$ tel que $\psi\,(x,\xi) \geqslant A$.

On a posé :

$$(\varepsilon,\beta) = \sum_i \varepsilon\beta_i$$

la somme ne portant que sur les indices i pour lesquels $\rho_i = \delta_i$. On peut toujours supposer, afin d'appliquer les résultats du &II, que l'on a :

$$0 < \varepsilon < \rho_i - \delta_i$$

pour tout indice i tel que $\rho_i - \delta_i > 0$. On peut alors énoncer :

<u>Proposition 3.1.</u>

Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $Q \in S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ et $R_j \in \bigcap_n S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ $(j=1,2)$ tels que

(3.5) $$Qp = I + R_1 \qquad PQ = I + R_2$$

Démonstration :

On va chercher Q sous forme d'un développement $Q \sim \sum Q_j$, où $Q_j \in S^{-\mu,-\varepsilon j}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$. Pour former $Q_o$ choisissons une fonction $\chi(\mu)$ dans $C^\infty(R)$ égale à 0 si $\mu \leqslant A+2$, et posons :

$$Q_o = \chi(\psi)P^{-1}$$

Comme $\chi o \psi$ est dans $S^{o,o}_{\rho,\delta,1}(\Omega)$ (voir démonstration de la proposition 2.3) $Q_o$ est bien dans $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$. On définit ensuite les $Q_j$ par la relation de récurrence :

$$Q_k = \frac{1}{P} \sum_{|\alpha|+j=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi Q_j \quad \partial^\alpha_x P$$

Comme dans tous les $Q_k$ ont leur support inclus dans l'ensemble des $(x,\xi)$ tels que $\psi(x,\xi) \geqslant A$, on vérifie par récurrence que $Q_k$ est dans $S^{-\mu,-\varepsilon k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$. La proposition 2.3 assure l'existence d'un élément Q de $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ tel que pour tout N, on ait :

(3.6) $$Q - \sum_{j<N} Q_j \in S^{-\mu,-\varepsilon N}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) .$$

Vérifions que $Q_oP-I$ est dans $S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$, pour tout $N > 0$.

Posons en effet $M = \frac{1}{\varepsilon}(N+k)$. On a :

(3.7) $$Q_oP - J = (Q - \sum_{j<M} Q_j) \, oP + \sum_{\substack{J<M \\ |\alpha|<M-j}} \frac{1}{\alpha} (D^\alpha_\xi Q_j) \ (\partial^\alpha_x P) -1$$

$$+ \sum_{j<M} R_{M-j} \ [Q_j,P]$$

La notation $R_{M-j}[Q_j,P]$ est celle de la proposition 2.1. D'après (3.6), puisque P est dans $S^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}$, le premier terme de (3.7) est bien dans $S^{o,k-\varepsilon M}_{\rho,\delta,\varepsilon}$, c'est-à-dire dans $S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}$. De même, puisque $Q_j$ est dans $S^{-\mu,-\varepsilon_j}_{\rho,\delta,\varepsilon}$, on a :

$$R_{M-j}[Q_j,P] \in S^{o,-\varepsilon_j+k-\varepsilon(M-j)}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) = S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) .$$

Quant à la seconde somme de (3.7), elle se réduit à $PQ_o-1$, c'est-à-dire $\chi o\phi-1$, qui est bien, pour tout N, dans $S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}$, ce qui achève la démonstration.

Cette proposition nous amène à étudier les opérateurs dont le symbole est, pour tout N, dans $S^{o,-N}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$. Ces opérateurs ne sont pas régularisants.

Définition 3.1.

On pose :

(3.8) $$\mathcal{H}^{\mu}_{\rho,\delta}(\Omega) = \bigcap_j S^{\mu,-j}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$$

(l'intersection est bien indépendante de $\varepsilon > 0$), et

$$OP\mathcal{H}^{\mu}_{\rho,\delta}(\Omega) = \bigcap_j OPS^{\mu,-j}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$$

Un symbole $a(x,\xi)$ est dans $\mathcal{H}^{\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$ si, et seulement si pour tout $N \geq 0$, pour tout compact $K \subset \Omega$, et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(3.9) $$|\partial^{\alpha}\partial^{\beta}_{\xi}a(x,\xi)| \leq C\,(1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)}\psi(x,\xi)^{-N} \quad \forall(x,\xi) \in K \times R^n$$

On voit que la restriction d'un tel symbole $a(x,\xi)$ à un cône fermé de $\Omega \times \mathbb{R}^n - 0$ qui ne coupe pas la surface $\Sigma$ suivante :

(3.10) $$\Sigma = \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n-\{0\} \quad \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i > 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i < 1\} \end{array}$$

est dans $S^{-\infty}$ dans ce cône. En effet, dans un tel cône, on a une inégalité de la forme :

(3.11) $$\sum_{\delta_i>0} |x_i| + \sum_{\rho_i<1} |\xi_i|\ |\xi|^{-1} \geq C > 0 .$$

Dans un tel cône, la fonction $\psi(x,\xi)$ vérifie :

$$\psi(x,\xi) = 1 + \sum |x_i| \, |\xi|^{\delta_i} + |\xi_i| \, |\xi|^{-\rho_i} \geqslant C \, |\xi|^{\alpha}$$

en posant :

$$\alpha = \inf \Big[\inf_{\delta_i > 0} \delta_i \ , \ \inf_{\rho_i < 1} 1-\rho_i\Big] \ ,$$

ce qui, d'après (3.9), implique bien que a est dans $S^{-\infty}$ dans ce cône. La proposition 3.1 suffit donc à construire le symbole d'une paramétrixe à gauche pour P dans tout cône défini par une inégalité telle que (3.11). Désormais, nous nous placerons donc dans un voisinage cônique d'un point de $\sum$, où est vérifiée une inégalité de la forme :

$$(3.12) \qquad \sum_{\delta_i > 0} |x_i| + \sum_{\rho_i < 1} |\xi_i| \, |\xi|^{-1} \leqslant C$$

La proposition 2.1 montre que les relations

$$A \in OPS^{\mu,k}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad B \in OP\mathcal{H}^{\mu'}_{\rho,\delta}(\Omega)$$

entrainent :

$$A_o B \text{ et } B_o A \in OP\mathcal{H}^{\mu+\mu'}_{\rho,\delta}(\Omega) \quad \text{et} \quad B^{*} \in OP\mathcal{H}^{\mu'}_{\rho,\delta}(\Omega) \ .$$

Nous pouvons donner un résultat plus précis pour la composition quand A est un opérateur différentiel de la forme (3.1), $\mu$ et k étant donnés par (3.2). Pour cela nous reprenons les notations de l'exemple 2.2. Quitte à restreindre l'ouvert $\Omega$ au voisinage d'un point donné, on peut supposer que tout point $(x,\xi)$ de $\Omega \times R^n$ peut s'écrire $(x,\xi) = (x_o,\xi_o)+(x_1,\xi_1)$, avec $(x_o,\xi_o)$ dans $\sum$ et $(x_1,\xi_1)$ dans $\sum^{\perp}$. On définit un symbole $A_o(x,\xi)$ en posant :

$$A_o(x,\xi) = A_{(x_o,\xi_o)} \, (x_1,\xi_1) \ ,$$

où le symbole $A_{\rho}(x_1,\xi_1)$ est explicité en (1.11).

D'autre part, posons, comme en (1.12) :

(3.13) $$X' = \{x \in R^n,\ \ x_i = 0 \text{ pour tout i tel que } \delta_i < \rho_i\}\ .$$

et

$$X'' = \{x \in R^n,\ \ x_i = 0 \text{ pour tout i tel que } \delta_i = \rho_i\}\ .$$

La variable de $R^n$ sera notée $x = x'+x''$, et la variable duale $\xi = \xi'+\xi''$.

On peut énoncer un résultat sur le développement du compose $A_oB$.

Proposition 3.2.

Soient $A(x,\xi)$ un polynôme différentiel de la forme (1.1),$\rho$,$\delta$, et $\mu$ vérifiant (1.2) et (1.3), et $B(x,\xi)$ un symbole dans $\mathcal{H}^{\mu'}_{\rho,\delta}(\Omega)$ ($\mu' \in \mathbb{R}$). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que le symbole composé vérifie :

(3.14) $$A_oB(x',x'',\xi',\xi'') - e^{-ix'.\xi'} A_o(x',x'',D_{x'},\xi'')[e^{ix'.\xi'}B(x',x'',\xi',\xi'')]$$

$$\in \mathcal{H}^{\mu+\mu'-\varepsilon}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

Démonstration :

On a vu (exemples 2.1 et 2.2) qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$A-A_o$ est dans $S^{\mu-\varepsilon_1,k+1}_{\rho,\delta,1}(\Omega)$, d'où l'on déduit :

(3.15) $$(A-A_o) \text{ o } B \in \mathcal{H}^{\mu+\mu'-\varepsilon_1}_{\rho,\delta}(\Omega)\ .$$

Pour le composé de $A_o$ et B, on a la formule exacte :

(3.16) $$A_o o B(x',x'',\xi',\xi'') = e^{-ix'.\xi'} \sum_{(\alpha,\gamma)\in \mathcal{U}_o} a_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma D^{\alpha'}_{x'}(\xi''+D_{x''})^{\alpha''}[e^{ix'.\xi'}B]$$

Il résulte de (3.9) que si B est dans $\mathcal{H}^{\mu'}_{\rho,\delta}(\Omega)$, on a :

(3.17) $$e^{ix'.\xi'}B \in \mathcal{H}^{\mu'}_{\rho,\delta} \qquad D^\alpha_x B \in \mathcal{H}^{\mu'+(\delta,\alpha)}_{\rho,\delta}$$

$$\xi^\alpha B \in \mathcal{H}^{\mu'+(\rho,\alpha)}_{\rho,\delta} \qquad x^\alpha B \in \mathcal{H}^{\mu'-(\delta,\gamma)}_{\rho,\delta}$$

Si l'on développe $(\xi''+D_{x''})^{\alpha''}$ dans (3.16), on obtient une somme de termes de la forme :

$$(3.18) \qquad e^{-ix'.\xi'} \sum b_{\alpha\gamma} x^{\gamma} D_{x'}^{\alpha'} \xi''^{\alpha''} D_{x''}^{\beta''} [e^{ix'.\xi'} B]$$

D'après (3.17) ces termes sont dans :

$$\mathcal{H}_{\rho,\delta,}^{\mu'+(\rho'',\alpha'')+(\delta'',\beta'')+(\rho,\alpha')-(\delta,\gamma)}$$

Puisque ces termes proviennent du développement de (3.16), les indices vérifient :

$$(\rho'',\alpha''+\beta'') + (\rho',\alpha') - (\delta,\gamma) = \mu$$

Les termes de la somme (3.16) sont donc dans $\mathcal{H}_{\rho,\delta}^{\mu+\mu'+(\delta''-\rho'',\beta'')}$. Comme, par définition, $\delta_i'' < \rho_i''$ pour tout i (X' et X" sont définis en 3.13), tous les termes correspondant a $\beta'' \neq 0$, sont dans un $\mathcal{H}_{\rho,\delta}^{\mu+\mu'\varepsilon-_2}$, avec $\varepsilon_2 > 0$. Quant aux termes correspondant à $\beta'' = 0$, ils se réduisent à :

$$e^{-ix'.\xi'} A_o(x',x'',D_{x'},\xi'') [e^{ix'.\xi'} B] .$$

ce qui démontre la proposition 3.2, en choisissant $\varepsilon = \inf (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

On en déduit aussitôt, par passage à l'adjoint.

<u>Corollaire.</u>

Le symbole $B_o A$ vérifie :

$$(3.19) \qquad B_o A(x,\xi) - e^{-ix'.\xi'} B(x',x'',D_{x'},\xi'') [e^{ix'.\xi'} A] \in \mathcal{H}_{\rho,\delta}^{\mu+\mu'-\varepsilon}(\Omega).$$

On adoptera la notation suivante :

$$(3.20) \qquad a \underset{x'}{o} b(x,\xi) = e^{-ix'\xi'} a(x',x'',D_{x'},\xi'')\, e^{ix'.\xi'} b(x',x'',\xi',\xi'').$$

On vérifie, avec les mêmes calculs que dans la proposition 2.1, l'implication:

$$A \in S_{\rho,\delta,\varepsilon}^{\mu,k} \; , \quad B \in S_{\rho,\delta,\varepsilon}^{\mu',k'} \Rightarrow A \underset{x'}{o} B \in \mathcal{H}_{\rho,\delta,\varepsilon}^{\mu+\mu',k+k'}$$

On en déduit l'implication suivante :

$$A \in S_{\rho,\delta,\varepsilon}^{\mu,k} \quad B \in \mathcal{H}_{\rho,\delta}^{\mu'} \Rightarrow A \underset{x'}{o} B \in \mathcal{H}_{\rho,\delta}^{\mu+\mu'}$$

La proposition suivante va nous permettre de terminer la construction de la paramétrixe. Cette proposition sera démontrée au &IV.

Proposition 3.3.

Si un opérateur $P(x,D_x)$ vérifie les hypothèses du théorème 1, l'opérateur différentiel $P_o(x',x'',D_{x'},\xi'')$ est supposé inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$ en tout point $(x'',\xi'')$ tel que $(0,x'',0,\xi'')$ soit dans $\Sigma$. Alors il existe un symbole $A(x',x'',\xi',\xi'')$ dans $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$ tel que l'inverse à gauche de $P_o(x',x'',D_{x'},\xi'')$ soit $A(x',x'',D_{x'},\xi'')$.

En admettant cette proposition 3.3, terminons la démonstration du théorème 1.1.

Le symbole $Q_1(x,\xi)$ défini par :

$$Q_1(x,\xi) = Q(x,\xi) - R_1 \underset{x'}{o} A(x,\xi)$$

est dans $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$. En effet, $Q(x,\xi)$ est dans cette classe, et le second terme est dans $\mathcal{H}^{\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$. On a :

$$Q_1 \text{ o } P = I + R_1 - R_1 \underset{x'}{o} A \underset{x'}{o} P \text{ o} \quad \text{mod. } \mathcal{H}^{-\varepsilon}_{\rho,\delta}(\Omega) \text{ .}$$

d'après le corollaire de la proposition 3.2. Comme $A \underset{x'}{o} P \text{ o} = I$, le symbole $R_3$ défini par :

$$R_3 = Q_1 \text{ o } P - 1$$

est dans $\mathcal{H}^{-\varepsilon}_{\rho,\delta}(\Omega)$. On en déduit que $(R_3)^n$ est dans $\mathcal{H}^{-n\varepsilon}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Il existe donc un symbole classique $Q_3$ dans $S^o(\Omega)$ tel que :

$$R_3 \sim \sum_{j=o}^{\infty} (-R_3)^j \qquad \text{et} \qquad Q_3 - I \in \mathcal{H}^{-\varepsilon}_{\rho,\delta}(\Omega)$$

Le symbole Q défini par :

$$Q = Q_3\, Q_1$$

est dans $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$, et vérifie

$$QP = Q_3\, Q_1 P = Q_3(I+R_1) = I \qquad \text{mod } S^{-\infty}(\Omega) \text{ ,}$$

ce qui démontre le théorème 1.1.

## IV - ETUDE DE L'INVERSIBILITE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

Le but de ce & est de démontrer la proposition 3.3, et d'étudier la nature de l'inverse à gauche de l'opérateur différentiel $P_o(x',x'',D_{x'},\xi'')$ (avec les notations de la proposition 3.2), ou $P_\rho(y,x',D_{x'})$ (avec les notations de l'introduction), associé à un opérateur $P(x,D_x)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.1.

On vérifie que le symbole $P_o(x',x'',\xi',\xi'')$ a la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$(4.1) \qquad P_o(x,\xi) = \lambda^{-\mu} P_o(x_1\lambda^{-\delta_1},\dots x_n\lambda^{-\delta_n}, \xi_1\lambda^{\rho_1},\dots \xi_n\lambda^{\rho_n}) \quad \forall\lambda>0$$

Il nous suffit donc d'étudier l'inverse de $A_o(x',x'',D_{x'},\xi'')$ quand $\xi''$ vérifie :

$$(4.2) \qquad \sum |\xi''_i|^2 = 1,$$

la sommation portant sur les indices i pour lesquels $\rho_i = 1$. La lettre K désignera un compact de $\sum$ dans lequel cette relation est vérifiée.

Avec les notations de l'introduction, nous allons majorer le symbole $P_\rho(y,x',\xi')$ de cet opérateur.

Proposition 4.1.

Pour tout compact K de $\sum$, où (4.2) est vérifiée, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(4.3) \qquad |\partial_\rho^\alpha \partial_y^\beta \partial_{x'}^\gamma \partial_{\xi'}^\delta P_\rho(y,x',\xi')| \leqslant C\,|P_\rho(y,x',\xi')|\,(1+|x'|+|\xi'|+|y|)^{-\varepsilon|\gamma|}$$

$$(4.4) \qquad |P_\rho(y,x',\xi')| \geqslant C$$

pour tout $\rho \in K$, pour tout $(y,x',\xi') \in Y \times X' \times X'^*$ tels que

$$(4.5) \qquad |y| + |x'| + |\xi'| \geqslant A$$

La vérification de ces majorations est immédiate à partir de l'hypothèse H1 du théorème 1.1, et de (4.2).

Cette proposition nous amène à étudier, comme dans [3], une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur x, dépendant des paramétres $\rho \in \sum$ et $y \in Y$.

Définition 4.1.

Pour tout p réel et $\varepsilon > 0$, désignons par $S^p_\varepsilon(\sum,Y,X)$ l'ensemble des fonctions $a(\rho,y,x',\xi')$ $C^\infty$ sur $\sum \times Y \times X' \times X'^*$ telles que, pour tout compact K de $\sum$ vérifiant (4.2), pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(4.6) \qquad |\partial^\alpha_\rho \partial^\beta_y \partial^\gamma_{x'} \partial^\delta_{\xi'}\, a(\rho,y,x',\xi')| \leq C\,(1+ y +|x'|+|\xi'|)^{p-\varepsilon|\beta|}$$

pour tout $\rho \in K$, pour tout $(y,x',\xi') \in Y \times X' \times X'^*$.

Tout polynôme en $(y,x',\xi')$ dépendant de manière $C^\infty$ du paramètre $\rho$ est dans une classe $S^p_1(\sum,Y,X)$. A tout symbole A dans $S^p_\varepsilon(\sum,Y,X)$ on associe un opérateur pseudo-différentiel $A(\rho,y,x',D_{x'})$ sur X, dépendant des paramètres $\rho$ et y. Les propriétés de cette classe d'opérateurs sont classiques. En particulier, si A est dans $S^p_\varepsilon(\sum,Y,X)$ et B dans $S^{p'}_\varepsilon(\sum,Y,X)$, le composé $A_oB$ vérifie, pour tout entier N.

$$(4.7) \qquad A_oB - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha_\xi,A)\;(\partial^\alpha_{x'},B) \in S^{p+p'-\varepsilon N}\,(\sum,Y,X).$$

On en déduit, suivant la propriété classique rappelée dans la proposition 3.1, que si un symbole $P(\rho,y,x',\xi')$ dans une classe $S^p_\varepsilon(\sum,Y,X)$ vérifie (4.3) et (4.4), alors il existe un élément Q de $S^o_\varepsilon(\sum,Y,X)$ tel que :

$$(4.8) \qquad Q(\rho,y,x',D_{x'})\; P(\rho,y,x',D_{x'}) = I \qquad \text{mod. } S^{-\infty}(\sum,Y,X)$$

$$P(\rho,y,x',D_{x'})\; Q(\rho,y,x',D_{x'}) = I \qquad \text{mod. } S^{-\infty}(\;,Y,X).$$

La proposition 3.3 sera donc une conséquence de la suivante :

Proposition 4.2.

Soit un symbole $P(\rho,y,x',\xi')$ dans une classe $S_1^p(\sum,Y,X)$, vérifiant (4.3) et (4.4). On suppose qu'il existe $\rho_o$ dans $\sum$ tel que, pour tout y dans Y, l'opérateur $P(\rho,y,x',D_{x'})$ soit inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$. Alors il existe un voisinage $V(\rho_o)$ dans $\sum$ et un symbole $A(\rho,y,x',\xi')$ dans $S_\varepsilon^o(\sum,Y,X)$ tel que pour tout $\rho \in V(\rho_o)$, pour tout $y \in Y$, on ait :

(4.9) $$A(\rho,y,x',D_{x'})\ P(\rho,y,x',D_{x'}) = I$$

La démonstration est identique à celle de [3], déjà rappelée dans l'article [6].

Mais l'hypothèse de la proposition 4.2 n'est pas encore exactement l'hypothèse H2 du théorème 1.1. Une nouvelle réduction est nécessaire, et obtenue grâce à la :

Proposition 4.3.

Soit un symbole $P(\rho,y,x',\xi')$ dans une classe $S_1^p(\sum,Y,X)$ vérifiant (4.3) et (4.4). Alors :

i) - Pour tout $\rho_o \in \sum$, il existe $A > 0$ tel que l'opérateur $P(\rho_o,y,x',D_{x'})$ soit inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$, pour tout y tel que $|y| \geqslant A$.

ii) - Si en un point $y_o \in Y$ l'opérateur $P(\rho_o,y_o,x',D_{x'})$ est inversible à gauche, alors il existe un voisinage $V(y_o)$ de $y_o$ dans Y tel que pour tout y dans $V(y_o)$, l'opérateur $P(\rho_o,y,x',D_{x'})$ soit inversible à gauche.

Si un opérateur $P(x,\xi)$ vérifie (H1) et (H2), alors en tout point $(\rho_o,y_o)$ de $\sum \times Y$, l'opérateur $P_\rho(y,x',D_{x'})$ vérifie les hypothèses de la proposition 4.3. Les propositions ci-dessus assurent alors l'existence d'une inverse à gauche de la forme $A(\rho,y,x',D_{x'})$, où le symbole A est dans $S^{-\mu,o}_{\rho,\delta,\varepsilon}(\Omega)$, ce qui démontre la proposition 3.3.

## V - EXEMPLES

Exemple 1.

Considérons l'opérateur différentiel P dans $R^3$

(5.1) $$P(x,D_x) = D^2_{x_1} + D^2_{x_2} + (x_1^2 + x_2^2)^k D^2_{x_3} + \lambda(x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2}) D_{x_3} .$$

où $\lambda$ est un nombre complexe non nul, k, $\rho_1$ et $\rho_2$ des entiers tels que $2\rho_j < k-1$ pour j = 1.2. La plus grande valeur de $\mu$ qu'on puisse espérer est :

(5.2) $$\mu = \sup_{j=1,2} \left( \frac{1}{\rho_j + 1} \right)$$

On voit que le choix suivant de $\rho$ et $\delta$ convient :

(5.3) $$\rho = (\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, 1) \qquad \delta = (\delta_1, \delta_2, 0)$$

$$_j = \sup \left( \frac{2-\mu}{2k} , \frac{1-\mu}{2\rho_j} \right) \qquad j = 1,2$$

On a bien $\delta_j \leqslant \rho_j$ et l'un au moins des $\delta_j$ est égal à $\frac{\mu}{2}$ (celui pour lequel le sup est atteint dans (5.2)), ce qui nous amène à distinguer 3 cas pour l'opérateur $P_o$ que nous supposerons injectif (hypothèse H2) :

1) $\rho_1 < \rho_2$, donc $\mu = \frac{1}{\rho_1+1}$ , $\rho_1 = \delta_1$ , $\rho_2 > \delta_2$ .

Il y a encore 3 cas à distinguer suivant la valeur de $\delta_2$.

a) si $\rho_1 < \rho_2 < k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)$

$$P_o(x,D_{x_1},\xi_2,\xi_3) = D^2_{x_1} + \xi_2^2 + \lambda\ (x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2})\ \xi_3$$

b) si $\rho_1 < \rho_2 = k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)$

$$P_o(x,D_{x_1},\xi_2,\xi_3) = D^2_{x_1} + \xi_2^2 + x_2^{2k}\xi_3^2 + \lambda(x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2})\ \xi_3.$$

c) si $\rho_2 > k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}\right)$

$$P_o(x,D_{x_1},\xi_2,\xi_3) = D^2_{x_1} + \xi_2^2 + x_2^{2k}\xi_3^2 + \lambda x_1^{2\rho_1}\xi_3.$$

Dans les 3 cas nous supposons l'opérateur $P_o(x,D_{x_1},\xi_2,\xi_3)$ injectif dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pour $(x_2,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_3 \neq 0$ (il suffit de prendre $\xi_3 = \pm 1$).

2) si $\rho_1 = \rho_2$ on a $\rho_1 = \delta_1$, $\rho_2 = \delta_2$, donc

$$P_o(x,D_{x_1},D_{x_2},\xi_3) = D^2_{x_1} = D^2_{x_2} + \lambda(x_1^{2\rho} + x_2^{2\rho})\ \xi_3$$

Nous supposons cet opérateur injectif dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ pour $\xi_3 = \pm 1$

3) Si $\rho_1 > \rho_2$, il y a une étude analogue à celle du cas 1.

Pour que les conditions d'ellipticité générale (H1) soient vérifiées, il suffit dans tous les cas $\lambda \notin \mathbb{R}$. Si les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées l'opérateur P admet une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

<u>Exemple 2.</u>

On peut aussi traiter certains opérateurs d'ordre 2 elliptiques en cehors d'un point et dont les termes d'ordre 2 s'annulent sur une surface passent par ce point.

$$P(x,D_x) = D^2_{x_1} + (x_1^2 + x_2^2)^k\ D^2_{x_2} + \lambda(x_1 + x_2^{\alpha})\ D_{x_2} \tag{5.4}$$

où $\lambda \notin \mathbb{R}$, k et $\alpha$ sont des entiers tels que $\alpha > \frac{k}{2} \geqslant 1$. Le choix suivant de $\mu,\rho$ et $\delta$ convient :

$$\mu = \frac{2}{3} \qquad \rho = (\frac{1}{3}\ ,\ 1) \qquad \delta = (\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3k})$$

La condition d'ellipticité générale (H1) est vérifiée si $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Posons :

$$P_o(x,D_{x_1},\xi_2) = D^2_{x_1} + x_2^{2k}\xi_2^2 + \lambda\ x_1\xi_2$$

Nous supposerons cet opérateur injectif dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pour $x_2 \in \mathbb{R}$ et $\xi_2 = \pm 1$.

<u>Exemple 3.</u>

Soit l'opérateur :

$$P(x,D_x) = D^2_{x_1} + D^2_{x_2} + x_1^{2k}\ D^2_{x_3} + \lambda x_1^{\rho}\ D_{x_3} \tag{5.5}$$

où $\rho < k-1$ et $\lambda \notin R$. La condition d'ellipticité générale (H1) est vérifiée, et l'on a :

$$P_o(x,D_{x_1},\xi_2,\xi_3) = D_{x_1}^2 + \xi_2^2 + \lambda\, x_1^\rho \xi_3$$

On suppose cet opérateur injectif dans $\mathcal{S}'(R)$ pour $\xi_3 = \pm 1$ et $\xi_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\delta}(R^3)$, avec $\mu = \frac{2}{\rho+2}$ $\rho = (\frac{\mu}{2},\frac{\mu}{2},1)$ $\delta = (\frac{\mu}{2},0,0,)$.

Exemple 4.

Soit l'opérateur différentiel dans $R^2$ :

(5.6) $$P = (x^2 + t^2)^k (D_x^2 + D_t^2)^2 + a\, D_t^2 + b\, t^2\, D_x^2 + \lambda\, D_x. \text{ où } k \geqslant 2$$

où $a,b,\lambda \in C$. Il faut d'abord choisir des vecteurs $\rho = (\rho_1,\rho_2)$ et $\delta = (\delta_1,\delta_2)$ vérifiant (1.2). On voit que le choix :

(5.7) $$\rho_1 = \delta_1 = \sup\left(\frac{1}{2},\frac{2}{k+1}\right) \quad (\text{donc } \delta_1 < 1 \text{ si } k \geqslant 2).$$

$$\rho_2 = 1 \qquad \delta_2 = \frac{2-\rho_1}{k}$$

convient. Pour déterminer l'opérateur différentiel que nous supposerons injectif, il nous faut donc distinguer 3 cas :

1er cas :

$\rho_1 = \frac{1}{2} > \frac{2}{k+1}$ , c'est-à-dire $k > 3$

$$P_o(t,x,D_t,\xi) = x^{2k}\xi^4 + aD_t^2 + bt^2\xi^2 + \lambda\xi.$$

Nous supposerons donc que pour tout $x \in R$, pour $\xi = \pm 1$ l'opérateur différentiel $P_o(t,x,D_t,\xi)$ est injectif dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2ème cas :

$\rho_1 = \frac{1}{2} = \frac{2}{k+1}$ , c'est-à-dire $k = 3$. Ici :

$$P_o(t,x,D_t,\xi) = t^2 + x^2)^k\xi^4 + aD_t^2 + bt^2\xi^2 + \lambda\xi$$

3ème cas :

$\rho_1 = \frac{2}{k+1} > \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire $k = 2$. Ici :

$$P_o(t,x,D_t,\xi) = (t^2 + x^2)^k \xi^4 + D_t^2$$

Explicitons maintenant la condition (H1) dans le cas où $k > 3$. On peut alors montrer que la réunion des 2 conditions suivantes :

$$\begin{cases} |(x^2+t^2)^k \xi^4 + at^2 + bt^2\xi^2| = |p_1| \geqslant C\,((x^2+t^2)^k |\xi|^4 + |t|^2 + |t|^2 + |t^2\xi^2|) & (5.8) \\ |(x^2+t^2)^k\,(\xi^2+t^2)^2 + at^2| = |p_2| \geqslant C\,(|(x^2+t^2)^k\,(\xi^2+t^2)^2 + |t|^2). & (5.9) \end{cases}$$

implique les majorations de l'hypothèse H1, avec $\varepsilon = 1$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BEALS - General calculs for pseudo differential operators.
Duke Math. Journal 42 n°1, march 1975.

[2] BOLLEY - CAMUS - HELFFER - Remarques sur l'hypoellipticité.
C.R.A.S. t 283 (1976) p.979-982
et exposé aux journées "Equations aux Dérivées Partielles"
(Rennes 1976)
(Séminaires d'Analyse Fonctionnelle de Rennes).

[3] BOUTET de MONVEL - GRIGIS - HELFFER - Paramétrixes d'opérateurs pseudo différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34-35 (1976) p. 93-121.

[4] GRUSHIN - Hypoelliptic differential equations and pseudo differential operators with operator valued symbols. Math U.S.S.R. Sbornik 17 (1972) n°4 p. 497-514.

[5] HORMANDER - Pseudo differential operators and hypoelliptic equations.
Amer - Math - Soc - Proc - of Symp Pure Math 10 (1966) 138-183.

[6] NOURRIGAT - Paramétrixes pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques.
A paraître aux Comm. in Partial Differential Equations.