

J. NOURRIGAT

**Paramétrixes pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule 3

« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-35

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1978\\_\\_3\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__3_A5_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# PARAMETRIXES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

J. Nourrigat

U.E.R. Mathématiques et Informatique  
35000 RENNES

## Introduction.

Dans cet article on construit des paramétrixes pour une classe d'opérateurs différentiels dont l'hypoellipticité a été démontrée par Bolley-Camus-Helffer [4]. Les opérateurs étudiés dans [4] sont elliptiques hors d'un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . Plus généralement nos résultats s'appliquent à des opérateurs vérifiant hors d'un hyperplan la condition usuelle de Hörmander [1] assurant l'existence d'une paramétrix dans une classe  $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}$ . Les méthodes utilisées s'appliqueraient sans difficulté à des opérateurs pseudo-différentiels.

En notant  $(x, t)$  la variable de  $\mathbb{R}^n$  ( $x \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}$ ), nous écrirons les opérateurs étudiés sous la forme :

$$(0.1) \quad P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{|\alpha| + j \leq m} a_{\alpha j}(x, t) t^{\ell(\alpha, j)} D_x^\alpha D_t^j$$

où  $a_{\alpha j}$  est une fonction  $C^\infty$  et  $\ell(\alpha, j)$  un entier  $\geq 0$ .

Rappelons les résultats connus dans le cas où  $P$  est elliptique pour  $t \neq 0$  et où la surface  $t = 0$  est non caractéristique. L'étude de l'hypoellipticité des opérateurs (0.1) a été abordée

dans le cas quasi-homogène où  $\ell(\alpha, j) = [-m + q|\alpha| + j]$  ( $q$  est rationnel  $\geq 1$ ,  $|x|$  désigne le plus petit entier  $\geq \sup(x, 0)$ ) par Grusin [9] Trêves-Gilioli [8], Sjöstrand [14], Yamamoto [15], Boutet de Monvel-Trêves [7], puis dans le cas plus général où  $\ell(\alpha, j) = [\sigma + q|\alpha| + q'j]$  ( $\sigma \in \mathbb{Z}$ ,  $q$  et  $q' > 0$ ) par Vishik-Grusin [10], Bolley-Camus-Helffer [2], [3], Rolland [13]. Certains de ces auteurs ont construit des paramétrixes pour les opérateurs quasi-homogènes en utilisant des symboles pseudodifférentiels à valeurs vectorielles. Notre démonstration s'inspire au contraire de Beals [1], Boutet de Monvel [5], Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6], qui ont construit, dans des classes d'opérateurs définies à l'aide de fonctions poids, des paramétrixes pour certains des opérateurs (0.1).

Bolley-Camus-Helffer [4], et Menikoff [12] pour les opérateurs d'ordre 2, ont donné une condition suffisante (et nécessaire si les  $a_{\alpha_j}$  sont constants) pour l'hypoellipticité avec régularité maximale des opérateurs (0.1) vérifiant l'hypothèse de convexité suivante : pour tout multi-indice  $(\alpha, j)$  tel que  $|\alpha| + j \leq m$ , il existe  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$  et deux multi-indices  $(\alpha_1, 0)$  et  $(\alpha_2, 0)$  tels que :

$$(0.2) \quad |t|^{\ell(\alpha, j)} |\xi|^{|\alpha|} |\tau|^j \leq c (|t|^m)^{\lambda_0} (|t|^{\ell(\alpha_1, 0)} |\xi|^{|\alpha_1|})^{\lambda_1} (|t|^{\ell(\alpha_2, 0)} |\xi|^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}$$

et  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Nous allons résumer ces conditions avec des notations différentes de [4]. On définit un  $\theta \in ]0, 1[$  par :

$$\theta = \sup_{|\alpha| + j \leq m} \frac{|\alpha|}{\ell(\alpha, j) + m - j} ,$$

puis on définit un opérateur différentiel ordinaire  $p_0(x, t, \xi, D_t)$  dé-

pendant de  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S^{n-2}$  par

$$(0.4) \quad p_0(x, t, \xi, \tau) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-m\theta} p(x, tr^{-\theta}, \xi r, \tau r^\theta)$$

On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  et pour tout  $\xi \in S^{n-2}$

on a :

$$(0.5) \quad \ker p_0(x, t, \xi, D_t) \cap \mathcal{J}(R) = 0$$

D'autre part, on donne dans [4] un ensemble de conditions dites d'ellipticité générale, qui sont équivalentes pour les opérateurs vérifiant (0.2) à la condition suivante : il existe  $A > 0$  et  $C > 0$  tels que :

$$(0.6) \quad |t| |\xi|^\theta + |\tau| |\xi|^{-\theta} > A \Rightarrow |p(x, t, \xi, \tau)| \geq c \sum_{|\alpha|+j \leq m} |t|^{\ell(\alpha, j)} |\xi|^{|\alpha|} |\tau|^j$$

Les conditions données dans [4] sont plus explicites et leur équivalence avec (0.6) est montrée sur des exemples au § 5.

Le but de ce travail est de montrer que, sous l'hypothèse (0.5) et sous des hypothèses un peu plus générales que (0.2) et (0.6), l'opérateur  $P$  admet une paramétrix à gauche dans  $\mathcal{L}_{\theta, \theta}^{-m\theta}(\Omega)$ , et donc est hypoelliptique avec perte de  $m(1-\theta)$  dérivées.

Les hypothèses (0.2) et (0.6) sont remplacées par l'hypothèse suivante : il existe  $A > 0$  tel que, pour tout multiindice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  et pour tout compact  $K$ , il existe  $C > 0$  tel que l'on ait, en posant  $r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2}$  :

$$(0.7) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta p(x, t, \xi, \tau) \right| \leq c |p(x, t, \xi, \tau)| (|t| + r^{-\theta})^{-\beta} r^{-|\gamma|} (|\tau| + r^\theta)^{-\delta}$$

(0.8) pour tout  $(x, t) \in K$  et pour tout  $r > 0$  tels que

$$|t| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} > A, \text{ on a } |p(x, t, \xi, \tau)| \geq c r^{m\theta}$$

En faisant des hypothèses très voisines, on retrouve aussi l'hypoellipticité, démontrée dans [4], d'une classe d'opérateurs pour lesquels la surface  $t = 0$  est caractéristique. Un exemple est donné au § 5.

Pour construire ces paramétrixes, on étudie une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur  $\mathbb{R}^n$  dont les symboles vérifient des majorations analogues à (0.7). Ces classes, incluses dans  $\mathcal{L}_{0,0}^{-m}$  sont donc définies à l'aide de fonctions poids au sens de Beals [1], mais les fonctions choisies :

$$(0.9) \quad \phi = |\tau| + r^\theta \qquad \varphi = |t| + r^{-\theta} \qquad (*)$$

ne vérifient pas l'une des hypothèses de [1], ce qui nous conduit au § 2 à démontrer un résultat sur la composition de ces opérateurs. D'autre part, pour utiliser l'inversibilité de l'opérateur  $p_0(x, t, \xi, D_t)$ , nous employons des techniques voisines de celles de Boutet de Monvel [5] et Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6].

Le § 1 énonce les résultats de manière plus précise. Le § 2 étudie la classe d'opérateurs pseudo-différentiels utilisée. Au § 3 on construit la paramétrixe. L'existence d'un inverse à gauche dépendant de manière  $C^\infty$  de  $(x, \xi)$  pour  $p_0(x, t, \xi, D_t)$  est démontrée au § 4. Le § 5 donne des exemples.

(\*) R. Beals nous a communiqué qu'une modification apportée récemment aux définitions des fonctions poids permet maintenant d'appliquer son théorème de composition aux classes d'opérateurs pseudo-différentiels que nous utilisons.

I - Enoncé des résultats.

Soient  $\Omega_1$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $T > 0$ , et  $\Omega = \Omega_1 \times [-T, T]$ .  
On notera  $(x, t)$  la variable de  $\Omega$  ( $x \in \Omega_1$  et  $t \in [-T, T]$ ), et  $(\xi, \tau)$  la variable duale.

On considère un opérateur différentiel  $P$  sur  $\Omega$ , que nous écrirons :

$$(1.1) \quad P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{|\alpha| + j \leq m} a_{\alpha j}(x, t) t^{\ell(\alpha, j)} D_x^\alpha D_t^j$$

où  $m$  et les  $\ell(\alpha, j)$  sont des entiers  $\geq 0$ , et  $a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega)$ .

Soient d'autre part  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]0, 1[$ . Le but de ce travail est de donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une paramétrix à gauche pour  $P$  dans  $\mathcal{L}_{\theta, \theta}^{-\mu}(\Omega)$ , ce qui entraînera l'hypoellipticité de  $P$  avec perte de  $m - \mu$  dérivées.

On définit un opérateur différentiel ordinaire  $p_0(x, t, \xi, D_\xi)$  dépendant du paramètre  $(x, \xi) \in \Omega_1 \times S^{n-2}$  en posant :

$$(1.2) \quad p_0(x, t, \xi, \tau) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\mu} p(x, tr^{-\theta}, \xi r, \tau r^\theta).$$

Pour assurer l'existence de cette limite et pour qu'elle ne soit pas identiquement nulle, nous sommes amenés à choisir :

$$(1.3) \quad \mu = \sup_{(\alpha, j)} \{ |\alpha| + \theta j - \theta \ell(\alpha, j) \}$$

Désignons par  $I$  l'ensemble des multi-indices  $(\alpha, j)$  où le sup est atteint dans (1.3)

$$(1.4) \quad I = \{ (\alpha, j) \mid |\alpha| + j \leq m, |\alpha| + \theta j - \theta \ell(\alpha, j) = \mu \}.$$

On a :

$$(1.5) \quad p_0(x, t, \xi, \tau) = \sum_{(\alpha, j) \in I} a_{\alpha j}(x, 0) t^{l(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j$$

On fait l'hypothèse suivante :

(H1) Pour tout  $(x, \xi) \in \Omega_1 \times S^{n-2}$  l'opérateur  $p_0(x, t, \xi, D_t)$  est injectif dans  $\mathcal{J}(R)$ .

Enonçons maintenant les hypothèses sur le symbole de P.

Posons :

$$(1.6) \quad r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2} ;$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H2) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $A > 0$  tel que, pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , on ait (avec  $C > 0$ )

$$(1.7) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta p(x, t, \xi, \tau) \right| \leq C |p(x, t, \xi, \tau)| (|t| + r^{-\theta})^{-\beta} r^{-|\gamma|} (|\tau| + r^\theta)^{-\delta}$$

si  $(x, t) \in K$  et  $|t| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} \geq A$ .

(H3) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $A > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$(1.8) \quad |p(x, t, \xi, \tau)| \geq C r^\mu$$

si  $(x, t) \in K$  et  $|t| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} \geq A$

Nous pouvons énoncer le résultat principal :

Théorème 1. Soit P un opérateur différentiel de la forme (1.1). On suppose qu'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]0, 1[$ , liés par (1.3), tels que les hypothèses H1, H2 et H3 soient vérifiées. Alors P admet une paramétrix à gauche dans  $\mathcal{L}_{0, \theta}^{-\mu}(\Omega)$ .

Sous ces hypothèses, P est donc hypoelliptique avec perte de  $m - \mu$  dérivées. Mais les hypothèses précédentes n'assurent pas la régularité maximale. Pour obtenir celle-ci, nous ferons l'hypothèse suivante :

(H'3) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $A > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$(1.9) \quad |p(x,t,\xi,\tau)| \geq C \sum_{|\alpha|+j \leq m} (|t|+r^{-\theta})^{\ell(\alpha,j)} r^{|\alpha|} (|\tau|+r^{\theta})^j$$

si  $(x,t) \in K$  et  $|t| r^{\theta} + |\tau| r^{-\theta} \geq A$ .

L'hypothèse H'3 est plus forte que H3 puisque le second membre de (1.9) est supérieur à  $r^{\mu}$ . On verra (proposition 2.1) que l'hypothèse (H'3) implique aussi H2. Les hypothèses H1 et H'3 suffisent donc à assurer l'existence d'une paramétrix à gauche dans  $\mathcal{L}_{0,0}^{-\mu}(\Omega)$ . On a en plus le résultat de régularité maximale suivant :

Théorème 2. Soient P un opérateur différentiel de la forme (1.1),  $\mu$  un nombre réel et  $\theta \in ]0,1[$ , liés par (1.3), tels que les hypothèses H1 et H'3 soient vérifiées. Alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a l'implication :

$$(1.10) \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } Pu \in H_{loc}^s(\Omega) \implies \tau^{\ell(\alpha,j)} D_x^{\alpha} D_t^j u \in H_{loc}^s(\Omega)$$

si  $|\alpha| + j \leq m$ .

II - Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels.

On reprend les notations du § I. On pose  $r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2}$ .

Soit  $\theta \in [0,1]$ .

Définition 2.1. On désigne par  $\mathcal{C}_0$  l'ensemble des fonctions  $M(x,t,\xi,\tau)$  continues sur  $T^*\Omega$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) il existe  $C > 0$  et  $m \in \mathbb{R}$  tels que

$$(2.1) \quad 0 \leq M(x,t,\xi,\tau) \leq C(1+r)^m$$

ii) Pour tout compact  $K \subset \Omega \times \Omega$ , pour tout  $C_1 > 0$ , il existe



$C > 0$  et  $\lambda \geq 0$  tels que, si  $(x, t, x', t') \in K$  et si :

$$(2.2) \quad C_1^{-1} \leq \frac{|\xi'|^2 + \tau'^2}{|\xi|^2 + \tau^2} \leq C_1$$

on ait :

$$(2.3) \quad C^{-1} g^{-\lambda} \leq \frac{M(x', t', \xi', \tau')}{M(x, t, \xi, \tau)} \leq C g^\lambda$$

où l'on pose

$$(2.4) \quad g = 1 + |t-t'| r^\theta + |\tau-\tau'| r^{-\theta}$$

Notons que  $\mathcal{G}_\theta$  est stable par addition, multiplication, élévation à une puissance réelle. Il contient la fonction  $r$  et les fonctions suivantes :

$$(2.5) \quad \phi = (1 + |\tau|^2 + r^{2\theta})^{1/2}, \quad \varphi = (t^2 + \tau^{-2\theta})^{1/2}, \quad \psi = \phi \varphi$$

et par conséquent tous les polynômes en  $r, \phi, \varphi$ , tels que :

$$(2.6) \quad M = \sum_{|\alpha|+j \leq m} r^{|\alpha|} \phi^j \varphi^{\ell(\alpha, j)}$$

En particulier toutes les fonctions  $r^\mu \psi^k$  ( $\mu$  et  $k$  réels) sont dans  $\mathcal{G}_\theta$ .

Définition 2.2. Pour tous  $\theta \in \mathbb{I}, \mathbb{I}$  et  $M \in \mathcal{G}_\theta$ , on désigne par  $S_\theta^M(\Omega)$  l'espace de Fréchet des fonctions  $a(x, t, \xi, \tau) \in C^\infty$  sur  $T^* \Omega$  telles que, pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , on ait :

$$(2.7) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta a(x, t, \xi, \tau) \right| \leq c M(x, t, \xi, \tau) (1+r)^{-|\gamma|} \phi^{-\delta} \varphi^{-\beta}$$

pour tout  $(x, t, \xi, \tau) \in K \times \mathbb{R}^n$  (avec  $c > 0$ ). Dans le cas où  $M = r^\mu \psi^k$  ( $\mu$  et  $k$  réels) la classe  $S_\theta^M(\Omega)$  sera notée  $S_\theta^{\mu, k}(\Omega)$ . On écrira  $S_\theta^M$  et  $S_\theta^{\mu, k}$  s'il n'y a pas de confusion possible.

Exemple. Soit un polynôme différentiel :

$$(2.8) \quad p(x, t, \xi, \tau) = \sum_{|\alpha| + j \leq m} a_{\alpha j}(x, t) t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j.$$

Soient  $\theta \in ]0, 1[$  et

$$(2.9) \quad \mu = \sup_{(\alpha, j)} (|\alpha| + \theta j - \theta \lambda(\alpha, j)) \quad k = \sup_{(\alpha, j)} (j + \lambda(\alpha, j))$$

Soient  $M$  la fonction définie par (2.6) et  $p_0(x, t, \xi, \tau)$  le polynôme défini par :

$$p_0(x, t, \xi, \tau) = \sum_{(\alpha, j) \in I} a_{\alpha j}(x, 0) t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j$$

où  $I = \{(\alpha, j) \mid |\alpha| + j \leq m \text{ et } \mu = |\alpha| + \theta j - \theta \lambda(\alpha, j)\}$ . On a :

Proposition 2.1. Avec les notations ci-dessus, on a pour tout  $(\alpha, j)$   $t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j \in S_\theta^M$ , donc  $p \in S_\theta^M \subset S_\theta^{\mu, k}$ . De plus il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $p - p_0 \in S_\theta^{\mu - \varepsilon, k + 1}$ .

Démonstration. On voit que  $t \in S_\theta^\psi$ , que  $\tau \in S_\theta^\phi$ , que  $\xi_j \in S_\theta^r$ , et que  $a \in S_\theta^M$  et  $b \in S_\theta^{M'}$  ( $M$  et  $M' \in \mathcal{G}_\theta$ ) entraînent  $ab \in S_\theta^{MM'}$ . De plus  $S_\theta^M$  est un espace vectoriel et l'inégalité  $M' \leq M$  ( $M$  et  $M' \in \mathcal{G}_\theta$ ) entraîne  $S_\theta^{M'} \subset S_\theta^M$ .

La première affirmation résulte donc de l'inégalité :

$$r^{|\alpha|} \phi^j t^{\lambda(\alpha, j)} \leq M \leq c r^\mu \psi^k,$$

qui résulte elle-même de

$$\psi \leq r^{-\theta} \psi ; \phi \leq r^{\theta} \psi ; |\alpha| + \theta j - \theta \lambda(\alpha, j) \leq \mu.$$

Pour la deuxième affirmation, on peut écrire :

$$p - p_0 = \sum_{|\alpha| + j \leq m} b_{\alpha j}(x, t) t^{m(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j$$

où l'on pose :

$$\text{si } (\alpha, j) \notin I, b_{\alpha j}(x, t) = a_{\alpha j}(x, t) \quad \text{et } m(\alpha, j) = \lambda(\alpha, j)$$

si  $(\alpha, j) \in I$ ,  $b_{\alpha j}(x, t) = \frac{a_{\alpha j}(x, t) - a_{\alpha j}(x, 0)}{t}$  et  $m(\alpha, j) = l(\alpha, j) + 1$

On vérifie alors qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\sup_{(\alpha, j)} (|\alpha| + \theta j - \theta m(\alpha, j)) = \mu - \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{(\alpha, j)} (j + m(\alpha, j)) \leq k + 1$$

et le calcul précédent montre que  $p - p_0 \in S_{\theta}^{\mu - \varepsilon, k + 1}$ .

Puisque  $M$  vérifie (2.1), on a l'inclusion :

$$S_{\theta}^M(\Omega) \subset S_{\theta, \theta}^m(\Omega)$$

où  $S_{\lambda, \delta}^m(\Omega)$  désigne la classe usuelle de symboles introduite par L. Hörmander [11]. On sait qu'à tout symbole  $a \in S_{\theta, \theta}^m(\Omega)$ , on peut associer un opérateur  $a(x, t, D_x, D_t) = C_0^{\infty}(\Omega) \rightarrow C_0^{\infty}(\Omega)$  défini pour tout  $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$  par :

$$(2.10) \quad a(x, t, D_x, D_t)f(x, t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x \cdot \xi + t\tau)} a(x, t, \xi, \tau) \hat{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Désignons par  $OPS^M(\Omega)$  l'ensemble des opérateurs  $a(x, t, D_x, D_t) + R$ , où  $a(x, t, \xi, \tau) \in S_{\theta}^M(\Omega)$  et  $R$  est à noyau  $C^{\infty}$ . Il résulte de [11] et [1] que, si  $A \in OPS^M(\Omega)$  et si  $M$  vérifie (2.1),  $A$  se prolonge en un opérateur :

$$(2.11) \quad A = H_{loc}^S(\Omega) \longrightarrow H_{loc}^{S-M}(\Omega)$$

On a le résultat suivant sur la composition des opérateurs :

Proposition 2.2. Soient  $a \in S_{\theta}^M$  et  $b \in S_{\theta}^{M'}$  tels que  $b(x, t, \xi, \tau) = 0$  si  $(x, t) \notin K$ , où  $K$  est un compact de  $\Omega$ . Alors il existe  $c \in S_{\theta}^{MM'}(\Omega)$  tel que  $a(x, t, D_x, D_t) \circ b(x, t, D_x, D_t) = c(x, t, D_x, D_t)$ . De plus, pour tout entier  $N$ , on a :

$$(2.12) \quad (a, b) = c(x, t, \xi, \tau) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi, \tau}^{\alpha} a)(\partial_{x, t}^{\alpha} b) \in S_{\theta}^{MM' - N}(\Omega)$$

Démonstration. On a classiquement, si  $a \in S_{0,0}^m$  et  $b \in S_{0,0}^{m'}$  vérifient a condition sur le support :  $a(x,D) \circ b(x,D) = c(x,D)$ , où  $c(x,t,\xi,\tau)$  est donné par :

$$c(x,t,\xi,\tau) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-x').(\xi-\xi')-i(t-t')(\tau-\tau')} a(x,t,\xi,\tau) b(x',t',\xi',\tau') dx' d\xi' dt' d\tau'$$

(l'intégrale étant prise au sens des intégrales oscillantes). Nous poserons :

$$h = -(x-x').(\xi-\xi') - (t-t')(\tau-\tau')$$

et, pour toute fonction  $f(x,x',t,t',\xi,\xi',\tau,\tau')$  telle que l'intégrale oscillante ait un sens, posons :

$$(2.13) \quad I(f)(x,t,\xi,\tau) = (2\pi)^{-n} \int e^{ih} f \, dx' dt' d\xi' d\tau'$$

Pour tout  $N$  on peut écrire en utilisant la formule de Taylor

$$r_N(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\nu|=N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 I(f_{\nu,\lambda}) \, d\lambda$$

où l'on pose : pour tout multi-indice  $\nu$  et pour tout  $\lambda \in [0,1]$  :

$$(2.14) \quad f_{\nu,\lambda} = D_{\xi,\tau}^\nu a(x,t,\xi_\lambda,\tau_\lambda) \partial_{x',t'} b(x',t',\xi,\tau)$$

et

$$\xi_\lambda = \xi + \lambda(\xi' - \xi) \quad \tau_\lambda = \tau + \lambda(\tau' - \tau)$$

Examinons les majorations vérifiées par les  $f_{\nu,\lambda}$  dans  $\mathbb{R}^{4n}$  et en particulier dans toute région définie par une inégalité de la forme (2.2).

Lemme 2.1. Pour tout compact  $K \in \Omega \times \Omega$ , pour tout multi-indice

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ , pour tout multi-indice  $\nu$  tel que  $|\nu| = N$ ,

il existe  $C > 0$  tel que

$$(2.15) \quad \left| \partial_{x,t,\xi,\tau}^\alpha \partial_{x',t',\xi',\tau'}^\beta f_{\nu,\lambda} \right| \leq C(1+r+r')^{m+m'+\Theta(|\beta|+|\beta'|)}$$

pour tout  $(x, t, x', t') \in K$ , et pour tous  $r$  et  $r' > 0$ . On a posé  $r' = (|\xi'|^2 + \tau'^2)^{1/2}$ . De plus, dans toute région définie par une inégalité telle que (2.2), avec  $C_1 > 0$ , il existe  $C > 0$  et  $\lambda \geq 0$  tels que :

$$(2.16) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta \partial_x^{\alpha'} \partial_t^{\beta'} \partial_\xi^{\gamma'} \partial_\tau^{\delta'} f_{v\lambda} \right| \leq c [M M' \psi^{-N} r^{-|\gamma|} \varphi^{-\delta} \varphi^{-\beta}] g^\lambda r^{-|\gamma'| + \theta(\beta' - \delta')}$$

Démonstration du lemme 2.1. L'estimation (2.15) est toujours vérifiée pour tous symboles  $a \in S_{0, \theta}^m$  et  $b \in S_{0, \theta}^{m'}$ , si  $\theta < 1$ . Pour vérifier (2.16) posons  $v = (v', v'')$  ( $v''$  correspond à la variable  $t$ ). Majorons d'abord le second facteur de (2.14) :

$$(2.17) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta \partial_x^{\alpha'} \partial_t^{\beta'} \partial_x^{v'} \partial_t^{v''} b(x', t', \xi, \tau) \right| \leq c [M' \phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-v''}] (x', t', \xi, \tau) r^{\theta \beta'}$$

Puisque les fonctions  $M'$ ,  $\phi$ ,  $r$  et  $\varphi$  sont dans  $\mathcal{G}_\theta$ , il en est de même du second membre de (2.17). Il existe donc  $\lambda_2$  tel que :

$$[M' \phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-v''}] (x', t', \xi, \tau) \leq c g^{\lambda_2} [M' \phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-v''}] (x', t', \xi, \tau)$$

On majore de même le premier facteur de (2.14). Pour obtenir (2.16) on remarque enfin que :

$$r \geq \psi = \phi \varphi \geq 1,$$

ce qui démontre le lemme 1.

On choisit maintenant une fonction de troncature  $\chi(\xi, \tau, \xi', \tau') \in S^0$ , telle que :

$$\chi = 1 \text{ si } r \leq 2 (1 + |\xi - \xi'| + |\tau - \tau'|)$$

$$\chi = 0 \text{ si } r \geq 3 (1 + |\xi - \xi'| + |\tau - \tau'|)$$

Le lemme suivant est classique :

Lemme 2.2. Si  $f$  vérifie (2.15), on a  $I(\chi f) \in S^{-\infty}$ .

Nous en rappelons néanmoins la démonstration. Les dérivées  $\partial_{x,t}^\alpha \partial_{\xi,\tau}^\beta \chi f$  vérifient aussi (2.15),  $m + m'$  étant remplacé par un autre exposant. Il suffit donc de majorer  $I(\chi f)$  lui-même. Pour ce lemme, il est inutile de distinguer la variable  $t$  ; désignons donc par  $x$  la variable de  $\Omega$ . Posons :

$$L = (1 + |\xi - \xi'|^2)^{-1} (1 - \Delta_{x'})$$

On a  $L(e^{ih}) = e^{ih}$  donc, pour tout entier  $M$

$$I(\chi f) = I(({}^tL)^M \chi f)$$

Si  $f$  vérifie (2.15), on a, pour tous compacts  $K$  et  $K'$  de  $\Omega$

$$|({}^tL)^M \chi f(x, x', \xi, \xi')| \leq c(1 + |\xi - \xi'|^2)^{-M} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m+m'+2\Theta M}$$

si  $x \in K$  et  $x' \in K'$ , d'où :

$$|I(\chi f)|(x, \xi) \leq c \iint_D (1 + |\xi - \xi'|^2)^{-M} (1 + |\xi| + |\xi'|)^{m+m'+2\Theta M} dx' d\xi'.$$

L'intégrale porte sur le domaine  $D = \{x' \in K', |\xi - \xi'| \geq \frac{1}{2} |\xi|\}$ . En utilisant  $\Theta < 1$ , on en déduit pour tout entier  $N$  une majoration de la forme  $|I(f)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}$ , d'où le lemme 2.2.

Majorons maintenant  $I((1-\chi)f_{\nu\lambda})$ . Dans le support de  $(1-\chi)f_{\nu\lambda}$ , où une inégalité analogue à (2.2) est vérifiée, on utilise les majorations (2.16). Il nous suffit donc de démontrer :

Lemme 2.3. Soit  $f(x, t, \xi, \tau, x', t', \xi', \tau')$  une fonction  $C^\infty$  sur  $R^{4n}$  dont le support est inclus dans

$$(2.18) \{(x, t, \xi, \tau, x', t', \xi', \tau') \mid (x, t, x', t') \in K, 1 + |\xi - \xi'| + |\tau - \tau'| \leq \frac{1}{2} r\}$$

où  $K$  est un compact de  $\Omega \times \Omega$ . On suppose qu'il existe  $\lambda \geq 0$  tel que :

$$(2.19) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_{\xi'}^\gamma \partial_{\tau'}^\delta f| \leq c g^{\frac{\ell}{2}} r^{-|\gamma| + \theta(\beta - \delta)}$$

g étant définie par (2.4). Alors l'intégrale I(f) est bornée.

Démonstration. Considérons maintenant l'opérateur différentiel :

$$L = (1 + |\xi - \xi'|^2 + |\tau - \tau'|^2 r^{-2\theta} + |t - t'|^2 r^{2\theta})^{-1} (1 - \Delta_x, -r^{-2\theta} \partial_t^2, -r^{2\theta} \partial_{\tau'}^2)$$

Cet opérateur vérifie aussi  $L(e^{ih}) = e^{ih}$  d'où  $I(f) = I(({}^tL)^M f)$  pour tout entier M. Or d'après (2.16)

$$|({}^tL)^M f| \leq c (1 + |\xi - \xi'|^2 + |\tau - \tau'|^2 r^{-2\theta} + |t - t'|^2 r^{2\theta})^{\frac{\ell}{2} - M}$$

En choisissant M assez grand, l'intégrale

$$\int (1 + |\xi - \xi'|^2 + |\tau - \tau'|^2 r^{-2\theta} + |t - t'|^2 r^{2\theta})^{\frac{\ell}{2} - M} dx' dt' d\xi' d\tau'$$

converge et est indépendante de r (x décrit un compact). La proposition 2.2 est donc démontrée.

On a pour les opérateurs adjoints le résultat suivant :

Proposition 2.3. Si  $A \in OPS_{\theta}^M(\Omega)$ , alors  $A^* \in OPS_{\theta}^M(\Omega)$ .

Pour les sommations, on a la proposition suivante :

Proposition 2.4. Soit  $\mu \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , soit  $a_j \in S_{\theta}^{\mu, -j}$ .

Alors il existe  $a \in S_{\theta}^{\mu, 0}$  tel que pour tout n

$$a - \sum_{j < n} a_j \in S_{\theta}^{\mu, -n}$$

Démonstration. On suit la démonstration de Beals [1]. On voit que :

$$|D_t^\beta D_{\xi'}^\gamma D_{\tau'}^\delta \phi| \leq c \phi^{1-\delta} \varphi^{-\beta} r^{-|\gamma|}$$

$$|D_t^\beta D_{\xi'}^\gamma D_{\tau'}^\delta \phi| \leq c \phi^{-\delta} \varphi^{1-\beta} r^{-|\gamma|}$$

Soit  $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  égale à 0 si  $t \leq 1$  et à 1 si  $t \geq 2$ . Posons pour

$R > 0$

$$\chi_R(x, t, \xi, \tau) = \chi\left(\frac{\psi}{R}\right) = \chi\left(\frac{\phi \varphi}{R}\right)$$

On a  $(1 - \chi_R) \in \bigcap_j S_{\theta}^{0, -j}$ , et  $R\chi_R$  est borné dans  $S_{\theta}^{0, 1}$ , car :

$$|D_x^{\alpha} D_t^{\beta} D_{\xi}^{\gamma} D_{\tau}^{\delta} \chi_R| \leq \frac{C}{R} \phi^{1-\delta} \varphi^{1-\beta} r^{-|\gamma|}$$

Si  $a \in S_{\theta}^{\mu, -j}$ ,  $(R\chi_R a)$  est donc borné dans  $S_{\theta}^{\mu, 1-j}$ . On peut donc choisir une suite  $R_j \rightarrow \infty$  telle que pour tout  $N$  la série  $\sum_N^{\infty} \chi_{R_j} a_j$  converge dans  $S_{\theta}^{\mu, -N}$ , d'où la proposition 2.4.

### III - Construction de paramétrixes.

On considère un polynôme différentiel :

$$(3.1) \quad p(x, t, \xi, \tau) = \sum_{|\alpha| + j \leq m} a_{\alpha j}(x, t) t^{\ell(\alpha, j)} \xi^{\alpha} \tau^j$$

On a vu (proposition 2.1) que, pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on a  $p \in S_{\theta}^{\mu, k}$ , où  $\mu$  et  $k$  sont définis par :

$$(3.2) \quad \mu = \sup_{(\alpha, j)} (|\alpha| + \theta j - \theta \ell(\alpha, j)) \quad k = \sup (j + \ell(\alpha, j))$$

Nous suivons la méthode de [5] en construisant la paramétrix en deux étapes. La première étape n'utilise que les hypothèses dites "d'ellipticité générale" H2 et H3. Ces hypothèses H2 et H3 correspondent à l'hypothèse d'ellipticité transversale faite dans [5]. Nous allons écrire ces hypothèses avec les notations du § II. On suppose qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que,  $\mu$  étant défini par (3.2), on ait :

(H2) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $A > 0$  tel que, pour tout



multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  on ait :

$$(3.3) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta p(x, t, \xi, \tau) \right| \leq c \left| p(x, t, \xi, \tau) \right| \varphi^{-\beta} r^{-|\gamma|} \phi^{-\delta}$$

si  $(x, t) \in K$  et  $\Psi \geq A$

(H3) Il existe  $M \in \mathcal{G}_\theta$  tel que :

$$(3.4) \quad \left| p(x, t, \xi, \tau) \right| \geq M(x, t, \xi, \tau) \geq c r^\mu$$

si  $\Psi \geq A$

Dans le cas où  $M = r^\mu$  cette hypothèse nous permettra de démontrer l'hypoellipticité avec perte de  $m-\mu$  dérivées, et dans le cas :

$$(3.5) \quad M = \sum_{|\alpha|+j \leq m} \varphi^{l(\alpha, j)} r^{|\alpha|} \phi^j$$

cette hypothèse nous donnera la régularité maximale (ce cas correspond à l'hypothèse H'3 du § I).

La proposition suivante constitue la première étape de la construction de la paramétrix. Elle est formellement identique à la construction du Hörmander [11].

Proposition 3.1. Soient  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , et  $P \in OPS_\theta^{\mu, k}$ . On suppose qu'il existe  $M \in \mathcal{G}_\theta$  tel que les hypothèses H2 et H3 soient vérifiées. Alors il existe  $Q \in OPS_\theta^{M^{-1}}$  tel que :

$$(3.6) \quad QP = I + R_1 \quad PQ = I + R_2$$

où  $R_j \in \bigcap_N S_\theta^{0, -N}$  ( $j = 1, 2$ ).

Démonstration. On va chercher le symbole  $q$  de  $Q$  sous forme d'un développement asymptotique  $q \sim \sum_0^\infty q_j$ , où  $q_j \in S_\theta^{M^{-1} \Psi^{-j}}$ . Pour former  $q_0$ ,

choisissons une fonction  $\chi(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$  égale à 0 si  $u \leq A+1$  et à 1 si  $u \geq A+2$ . Posons :

$$q_0 = \chi(\Psi) p^{-1}$$

Comme  $\chi(\Psi) \in S_{\Theta}^{0,0}$  (d'après la démonstration de la proposition 2.4), on a bien  $q_0 \in S_{\Theta}^{M-1}$ . On définit ensuite les  $q_j$  par la relation de récurrence :

$$q_k = -\frac{1}{p} \sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j < k}} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi, \tau}^\alpha q_j) (\partial_{x, t}^\alpha p)$$

Comme tous les  $q_k$  ont leur support inclus dans  $\{\Psi \geq A\}$  on vérifie par récurrence que  $q_k \in S_{\Theta}^{M-1} \Psi^{-k}$ . La proposition 2.4 assure l'existence d'un  $q \in S_{\Theta}^M$  tel que pour tout N,

$$q - \sum_0^{n-1} q_j \in S_{\Theta}^{M-1} \Psi^{-N}$$

Vérifions que  $(q \circ p)^{-1} \in \cap_j S_{\Theta}^{0, -j}$ . Soit N arbitraire. On a :

$$(q \circ p)^{-1} = \sum_{j=0}^{N+k-1} (q_j \circ p)^{-1} + (q - \sum_{j=0}^{N+k-1} q_j) \circ p$$

Le second terme est dans  $S_{\Theta}^{0, -N}$  (puisque  $p \in S_{\Theta}^{\mu, k}$  et

$$q - \sum_{j=0}^{N+k-1} q_j \in S_{\Theta}^{-\mu, -N-K}).$$

D'après la proposition 2.2. :

$$q_j \circ p = \sum_{|\alpha| < N+k-j} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi, \tau}^\alpha q_j) (\partial_{x, t}^\alpha p) \in S_{\Theta}^{0, -N}$$

D'autre part, d'après la construction des  $q_j$  :

$$1 - \sum_{|\alpha|+j < N+K} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi, \tau}^\alpha q_j) (\partial_{x, t}^\alpha p) = 1 - q \circ p = 1 - \chi(\Psi) \in \cap_j S_{\Theta}^{0, -j}$$

ce qui démontre la proposition.

Cette proposition nous amène à étudier les opérateurs de  $\cap OPS_0^{\mu, -j}(\Omega)$ , qui ne sont pas régularisants dans  $\Omega$ , mais seulement dans le complémentaire de l'hyperplan  $t = 0$  dans  $\Omega$ . La proposition 3.1 permet donc la réduction à la surface  $t = 0$ ,  $\tau = 0$ .

On posera, pour tout réel  $\mu$ ,  $\mathcal{K}_0^\mu = \cap_j S_0^{\mu, -j}$  et  $OP \mathcal{K}_0^\mu = \cap_j OPS_0^{\mu, -j}$ .

La classe  $\mathcal{K}_0^\mu$  correspond à la classe des opérateurs de Hermite introduite dans [5].

On a  $a \in \mathcal{K}_0^\mu$  si et seulement si pour tout entier  $N$ , sur tout compact, et pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  il existe  $C > 0$  tel que :

$$(3.7) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta a| \leq C(1 + |t| r^\theta + |\tau| r^{-\theta})^{-N} (1+r)^{\mu - |\gamma| + \theta(\beta-5)}$$

Cela résulte de :

$$\Psi \geq (1 + |t| r^\theta + |\tau| r^{-\theta}) \geq C \Psi^{1/2}, \quad r^\theta \leq \frac{\Psi}{C}, \quad r^{-\theta} \leq C \frac{\Psi}{\theta}$$

D'après les propositions 2.2 et 2.3, si  $A \in OPS_0^{\mu, k}$  et  $B \in OP \mathcal{K}_0^{\mu'}$ , on a  $A \circ B$  et  $B \circ A \in OP \mathcal{K}_0^{\mu+\mu'}$  et  $B^* \in OP \mathcal{K}_0^{\mu'}$ .

Nous donnerons un résultat plus précis pour la composition de  $A$  et  $B$  lorsque  $A$  est un opérateur différentiel de la forme :

$$A(x, t, D_x, D_t) = \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha, j}(x, t) t^{\ell(\alpha, j)} D_x^\alpha D_t^j$$

avec  $\mu = \sup \{|\alpha| + \theta j - \theta \ell(\alpha, j)\}$ , et  $B \in OP \mathcal{K}_0^{\mu'}$  de symbole  $b(x, t, \xi, \tau)$ .

Posons :

$$I = \{(\alpha, j) \mid \mu = |\alpha| + \theta j - \theta \ell(\alpha, j)\}$$

et

$$(3.8) \quad a_0(x, t, \xi, \tau) = \sum_{(\alpha, j) \in I} a_{\alpha j}(x, 0) t^{\ell(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j.$$

Proposition 3.2. Avec les notations ci-dessus, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le symbole  $a \circ b$  de  $A \circ B$  vérifie :

$$(3.9) \quad a \circ b(x, t, \xi, \tau) - e^{it\tau} a_0(x, t, \xi, D_t) [e^{it\tau} b(x, t, \xi, \tau)] \in \mathcal{S}_0^{\mu+\mu'-\varepsilon}$$

Démonstration. On a vu (proposition 2.1) que  $a - a_0 \in \mathcal{S}_0^{\mu-\varepsilon, k}$  (avec  $\varepsilon$  et  $k$  convenables). D'où  $(a - a_0) \circ b \in \mathcal{F}_0^{\mu+\mu'-\varepsilon}$ . Pour  $a_0 \circ b$  on a la formule exacte :

$$(3.10) \quad a_0 \circ b(x, t, \xi, \tau) = e^{it\tau} \sum_{(\alpha, j) \in I} a_{\alpha j}(x, 0) t^{\ell(\alpha, j)} D_t^j (\xi + D_x)^\alpha [e^{it\tau} b]$$

Il résulte de (3.7) que si  $b \in \mathcal{F}_0^\mu$  on a :

$$(3.11) \quad e^{it\tau} b \in \mathcal{F}_0^\mu, \quad D_x^\alpha b \in \mathcal{F}_0^\mu, \quad \xi^\alpha b \in \mathcal{F}_0^{\mu+|\alpha|}, \quad D_t^j b \in \mathcal{F}_0^{\mu+\theta j}$$

$$t^\ell b \in \mathcal{F}_0^{\mu'-\theta \ell}$$

Si l'on développe  $(\xi + D_x)^\alpha$  dans (3.10), on obtient une somme de terme de la forme

$$e^{-it\tau} \sum_{|\alpha'|+|\alpha''|+\theta j-\theta \ell} b_{\alpha j} t^{\ell(\alpha, j)} D_t^j \xi^{\alpha'} D_x^{\alpha''} [e^{it\tau} b]$$

D'après (3.11), ces termes sont dans  $\mathcal{F}_0^{\mu'+|\alpha'|+\theta j-\theta \ell(\alpha, j)} = \mathcal{F}_0^{\mu'+\mu-|\alpha''|}$

Les termes correspondant à  $\alpha'' \neq 0$  sont dans  $\mathcal{F}_0^{\mu+\mu'-1}$ . Les termes correspondant à  $\alpha'' = 0$  forment bien le second terme de (3.9).

On en déduit aussitôt, par passage à l'adjoint :

Corollaire. Avec les notations ci-dessus, la symbole  $b \circ a$  vérifie :

$$(3.12) \quad (b \circ a)(x, t, \xi, \tau) - e^{it\tau} b(x, t, \xi, D_t) [e^{it\tau} a_0(x, t, \xi, \tau)] \in \mathcal{F}_0^{\mu+\mu'-\varepsilon}$$

$$(3.13) \quad a \underset{t}{\circ} b(x, t, \xi, \tau) = e^{-it\tau} a(x, t, \xi, D_t) [e^{it\tau} b(x, t, \xi, \tau)]$$

On a :

$$a(x, t, \xi, D_t) \underset{t}{\circ} b(x, t, \xi, D_t) = a \underset{t}{\circ} b(x, t, \xi, D_t).$$

On vérifie avec les mêmes calculs que pour la proposition 2.2, que :

$$a \in S_{\theta}^{\mu, k} \quad b \in S_{\theta}^{\mu', k'} \implies a \underset{t}{\circ} b \in S_{\theta}^{\mu+\mu', k+k'}$$

donc

$$(3.14) \quad a \in S_{\theta}^{\mu, k} \quad b \in \mathcal{H}_{\theta}^{\mu'} \implies a \underset{t}{\circ} b \in \mathcal{H}_{\theta}^{\mu+\mu'}$$

Montrons maintenant que l'on peut achever la construction de la paramétrix à l'aide de la proposition suivante, que nous démontrerons au § IV.

Proposition 3.3. Sous les hypothèses du théorème 1, l'opérateur différentiel ordinaire  $p_{\theta}(x, t, \xi, D_t)$  admet un inverse à gauche  $a(x, t, \xi, D_t)$ , où  $a(x, t, \xi, \tau) \in S_{\theta}^{-\mu, 0}$ .

Fin de la démonstration du théorème 1. Posons :

$$(3.15) \quad q_1(x, t, \xi, \tau) = q(x, t, \xi, \tau) - r_1(x, t, \xi, \tau) \underset{t}{\circ} a(x, t, \xi, \tau)$$

On a  $q_1 \in S_{\theta}^{M-1}$ . En effet le second terme est dans  $\mathcal{H}_{\theta}^{-\mu}$  d'après

(3.14), et les hypothèses :

$$r^{\mu} \leq M \leq |p(x, t, \xi, \tau)| \leq c r^{\mu} \psi^k$$

impliquent que  $\mathcal{H}_{\theta}^{-\mu} \subset S_{\theta}^{M-1}$ . On a :

$$q_1 \underset{t}{\circ} p = 1 + r_1 \underset{t}{\circ} a \underset{t}{\circ} p_0 \quad \text{mod. } \mathcal{H}_{\theta}^{-\epsilon}$$

d'après le corollaire de la proposition 3.2. Comme  $a \underset{t}{\circ} p_0 = 1$ , on

a :

$$q_1 \circ p = 1 \quad \text{mod } \mathcal{L}_\theta^{-\varepsilon}.$$

Posons  $r_3 = q_1 \circ p - 1$ . On a  $(r_3)^n \in \mathcal{L}_\theta^{-n\varepsilon} \subset S_{\theta, \theta}^{-n\varepsilon}$ . Il existe un symbole  $q_3$  d'ordre 0 tel que  $q_3 \sim \sum_0^\infty (-r_3)^j$  et  $q_3 - 1 \in \mathcal{L}_\theta^{-\varepsilon}$ .

Posons  $q = q_3 \circ q_1$ . On a bien  $q \in S_\theta^{M-1}$ . En effet, comme

$$r^\mu \leq M \leq c r^\mu \psi^k$$

le composé d'un symbole de  $S_\theta^{M-1}$  et d'un symbole de  $\mathcal{L}_\theta^{-\varepsilon}$  est dans  $\mathcal{L}_\theta^{-\varepsilon}$  donc a fortiori dans  $S_\theta^{M-1}$ . D'autre part :

$$q \circ p = q_3 \circ q_1 \circ p = q_3 \circ (1+r_1) = 1 \quad \text{mod. } S^{-\infty}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

L'hypoellipticité avec perte de  $m-\mu$  dérivées en découle immédiatement car si  $Q \in OPS_{\theta, \theta}^{-\mu, 0} \subset \mathcal{L}_{\theta, \theta}^{-\mu}$  on a

$$f \in H_{loc}^s(\Omega) \implies Qf \in H_{loc}^{s+\mu}(\Omega).$$

Démonstration de la régularité maximale (théorème 2).

Nous nous plaçons dans le cas où l'hypothèse (H'3) est vérifiée. La paramétrix  $Q$  que nous avons construite est alors dans  $OPS_\theta^{M-1}$ , où  $M$  est donnée par (3.3). Il nous faut démontrer que :

$$f \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^n) \implies t^{\lambda(\alpha, j)} D_x^\alpha D_t^j Qf \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$$

si  $|\alpha| + j \leq m$ . Il nous suffit de vérifier que

$(t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j) \circ q \in S_\theta^{0, 0}$ . Cela résulte de  $q \in S_\theta^{M-1}$  (par construction) et de  $t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^\alpha \tau^j \in S_\theta^M$  (d'après la proposition 2.1).

IV - Une classe d'opérateurs différentiels ordinaires.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition

3.3. Nous voulons démontrer l'existence d'un inverse à gauche  $a(x, t, \xi, D_t)$ , avec  $a \in S_{\theta}^{-\mu, 0}$ , pour l'opérateur différentiel ordinaire :

$$p_0(x, t, \xi, D_t) = \sum_{(\alpha, j) \in I} a_{\alpha j}(x, 0) t^{\lambda(\alpha, j)} \xi^{\alpha} D_t^j$$

où l'on pose  $I = \{(\alpha, j) \mid |\alpha| + j \leq m \text{ et } |\alpha| + \theta j - \theta \lambda(\alpha, j) = \mu\}$ .

On peut écrire aussi :

$$p_0(x, t, \xi, \tau) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\mu} p(x, tr^{-\theta}, \xi r, \tau r^{\theta})$$

Le symbole  $p_0$  possède la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$p_0(x, t, \xi, \tau) = \lambda^{-\mu} p_0(x, t\lambda^{-\theta}, \xi\lambda, \tau\lambda^{\theta})$$

pour tout  $\lambda > 0$ . Il nous suffit donc de construire l'inverse pour  $|\xi| = 1$ . Faisons le changement de variable :

$$(4.1) \quad \tau |\xi|^{\theta} = s \quad \tau |\xi|^{-\theta} = \sigma \quad \xi |\xi|^{-1} = \omega$$

et posons

$$(4.2) \quad b(x, s, \omega, \sigma) = |\xi|^{-\mu} p_0(x, t, \xi, \tau)$$

Vérifions les majorations satisfaites par le symbole  $b(x, s, \omega, \sigma)$ .

Proposition 4.1. Pour tout compact  $K \subset \Omega_1$ , il existe  $A > 0$  tel que pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  on ait :

$$(4.3) \quad \left| \partial_x^{\alpha} \partial_s^{\beta} \partial_{\omega}^{\gamma} \partial_{\sigma}^{\delta} b(x, s, \omega, \sigma) \right| \leq c |b(x, s, \omega, \sigma)| (1+|s|)^{-\beta} (1+|\sigma|)^{-\delta}$$

$$(4.4) \quad |b(x, s, \omega, \sigma)| \geq C$$

si  $x \in K$ ,  $|\omega| = 1$  et  $|s| + |\sigma| \geq A$ .

Démonstration. Ecrivons les majorations des hypothèses H2 et H3 avec le changement de variable (4.1) en posant

$$(4.5) \quad \tilde{p}(x, s, \omega, \sigma, r) = r^{-\mu} p(x, t, \xi, \tau)$$

où  $r = |\xi|$ . On tronque le symbole  $\tilde{p}$  pour qu'il soit nul pour  $|t| > 1$ .

Les hypothèses s'écrivent : pour tout compact  $K \subset \Omega_1$ , il existe

$A > 0$  tel que pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  on ait :

$$|\partial_x^\alpha \partial_s^\beta \partial_\omega^\gamma \partial_\sigma^\delta \tilde{p}| \leq C |\tilde{p}(x, s, \omega, \sigma, r)| (1 + |s|)^{-\beta} (1 + |\sigma|)^{-\delta}$$

$$|\tilde{p}(x, s, \omega, \sigma, r)| \geq C$$

si  $x \in K$ ,  $|\omega| = 1$  et  $|s| + |\sigma| \geq A$ . La constante  $C$  est indépendante de  $x, s, \sigma, \omega$  et  $r$ . Comme par définition :

$$b(x, s, \omega, \sigma) = \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{p}(x, s, \omega, \sigma, r)$$

et comme les dérivées de  $\tilde{p}$  convergent vers celles de  $b$ , on en déduit la proposition 4.1.

On veut construire un opérateur  $a(x, \omega, s, D_s)$  tel que :

$$a(x, s, \omega, D_s) b(x, s, \omega, D_s) = I$$

et pour  $|s| + |\sigma|$  assez grand :

$$|\partial_x^\alpha \partial_s^\beta \partial_\omega^\gamma \partial_\sigma^\delta a(x, s, \omega, \sigma)| \leq C |a(x, s, \omega, \sigma)| (1 + |s|)^{-\beta} (1 + |\sigma|)^{-\delta}$$

Nous utiliserons de nouvelles notations pour simplifier. Nous désignerons par  $\lambda$  le paramètre  $(x, \omega)$  qui décrit le compact  $\Lambda = K \times S^{n-2}$ .

Cela nous amène à étudier une classe d'opérateurs sur  $R$  dépendant du paramètre  $\lambda \in \Lambda$ .



Définition 4.1. On désigne par  $S^k(\Lambda)$  l'espace de Fréchet des fonctions  $a(t, \tau, \lambda) \in C^\infty$  sur  $R^2 \times \Lambda$  telles que, pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , on ait :

$$|\partial_t^\alpha \partial_\tau^\beta \partial_\lambda^\gamma a(t, \tau, \lambda)| \leq c(1 + |t|)^{k-\alpha} (1 + |\tau|)^{k-\beta}$$

pour tout  $(t, \tau, \lambda) \in R^2 \times \Lambda$ .

Tout polynôme en  $t$  et  $\tau$  dont les coefficients dépendent de manière  $C^\infty$  de  $\lambda$ , est dans un  $S^k(\Lambda)$ . A tout symbole  $a(t, \tau, \lambda) \in S^k(\Lambda)$  on associe un opérateur pseudo-différentiel sur  $R$ ,  $a(t, D_t, \lambda)$ , dépendant du paramètre  $\lambda$ , défini pour tout  $u \in \mathcal{S}(R)$  par :

$$a(t, D_t, \lambda) u(t) = (2\pi)^{-1} \int e^{it\tau} a(t, \tau, \lambda) \hat{u}(\tau) d\tau.$$

Les propriétés de  $S^k(\Lambda)$  sont classiques. Si  $a \in S^k(\Lambda)$  et  $b \in S^{k'}(\Lambda)$  on a pour tout  $N$

$$a \circ b - \sum_{j < N} \frac{1}{j!} (D_t^j a) (\partial_t^j b) \in S^{k+k'-N}(\Lambda)$$

Si  $a_j \in S^{-j}(\Lambda)$  pour tout  $j \in N$ , il existe  $a \in S^0(\Lambda)$  tel que pour tout  $N$

$$(4.5) \quad a - \sum_0^{N-1} a_j \in S^{-N}(\Lambda)$$

Si un symbole  $b \in S^k(\Lambda)$  vérifie (4.3) et (4.4), alors  $b$  admet une paramétrix  $a'$  dans  $S^0(\Lambda)$ , c'est-à-dire que

$$(4.6) \quad r = a' \circ b - 1 \in S^{-\infty}(\Lambda) \quad r' = b \circ a' - 1 \in S^{-\infty}(\Lambda).$$

En effet, si  $a'_0$  est un symbole égal à  $\frac{1}{b}$  quand  $|t| + |\tau|$  est assez grand, on a  $a'_0 \circ b = 1 + r_1$ , avec  $r_1 \in S^{-1}(\Lambda)$ . D'après (4.5) il existe  $a'_1 \in S^0(\Lambda)$  tel que  $a'_1 \sim \sum_0^\infty (-r_1)^j$ , et le symbole

$a' = a'_1$  o  $a'_0$  vérifie bien (4.6).

La proposition 3.3 se trouve donc ramenée à la suivante :

Proposition 4.2. Soient  $\Lambda$  un compact de  $\mathbb{R}^{2n-2}$  et  $b(t, \tau, \lambda) \in S^k(\Lambda)$  vérifiant (4.3) et (4.4). On suppose qu'il existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $b(t, D_t, \lambda_0)$  soit injectif dans  $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  et un  $a \in S^0(V)$  tel que pour tout  $\lambda \in V$

$$(4.7) \quad a(t, D_t, \lambda) \circ b(t, D_t, \lambda) = I$$

La démonstration est inspirée de [6].

Démonstration. La fonction  $(t, \tau) \longrightarrow r(t, \tau, \lambda_0)$  est dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ , donc l'opérateur  $r(t, D_t, \lambda_0)$  est compact dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  et dans  $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$ . D'après (4.6)  $b(t, D_t, \lambda_0)$  est donc à indice dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  et dans  $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$ . Si on suppose  $b(t, D_t, \lambda_0)$  injectif dans  $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$ , il admet donc, un inverse à gauche  $a_0$  dans  $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$ . Des égalités

$$a_0 \circ b = I$$

et

$$a'(t, D_t, \lambda) \circ b(t, D_t, \lambda) = r(t, D_t, \lambda)$$

on déduit :

$$[a'(t, D_t, \lambda) - r(t, D_t, \lambda) \circ a_0] \circ b = I + r_2$$

avec  $r_2 \in S^{-\infty}(\Lambda)$  et  $r_2(t, \tau, \lambda_0) = 0$ . L'opérateur  $R(\lambda) = r_2(t, D_t, \lambda)$  est un opérateur à noyau dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$  dépendant de manière  $C^\infty$  de  $\lambda \in \Lambda$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  tel que :

$$\|R_2(\lambda)\|_{(L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{1}{2}$$

pour tout  $\lambda \in V$ .  $I + R(\lambda)$  est donc inversible pour tout  $\lambda \in V$  et,

d'après Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6], l'inverse est de la forme  $I + s_2(t, D_t, \lambda)$ , où  $s_2 \in S^{-\infty}(\Lambda)$ . Posons alors :

$$a(t, D_t, \lambda) = [I + s_2(t, D_t, \lambda)] \circ [a'(t, D_t, \lambda) - r(t, D_t, \lambda) a_0]$$

On a bien

$$a(t, \tau, \lambda) \in S^0(\Lambda)$$

et pour tout  $\lambda \in V$

$$a(t, D_t, \lambda) \circ b(t, D_t, \lambda) = I.$$

#### V - Exemples.

Nous allons donner des exemples où l'hypothèse H'3 est vérifiée. Tous ces exemples ont été étudiés dans [4]. Nous verrons d'abord une classe assez vaste d'opérateurs pour lesquels la surface  $t = 0$  est non caractéristique et pour lesquels on peut expliciter l'hypothèse H'3. Ensuite nous donnerons un exemple pour lequel la surface  $t = 0$  est caractéristique.

##### 1. Le cas non-caractéristique.

On suppose ici  $\lambda(0, m) = 0$  et  $a_{0, m} = 1$ , c'est-à-dire

$$(5.1) \quad P = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha| + j \leq m \\ j < m}} a_{\alpha j}(x, t) t^{\lambda(\alpha, j)} D_x^\alpha D_t^j.$$

On fait l'hypothèse de convexité suivante :

(C) Pour tout multi-indice  $(\alpha, j)$  tel que  $|\alpha| + j \leq m$ , il existe  $\lambda_0, \lambda_1$  et  $\lambda_2 \in [0, 1]$  et deux multi-indices  $(\alpha_1, 0)$  et  $(\alpha_2, 0)$  tels que :

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$|\tau|^{\ell(\alpha,j)} |\xi|^{|\alpha|} |\tau|^j \leq c (|\tau|^m)^{\lambda_0} (|\tau|^{\ell(\alpha_1,0)} |\xi|^{|\alpha_1|})^{\lambda_1} (|\tau|^{\ell(\alpha_2,0)} |\xi|^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}$$

Pour tous les opérateurs de la forme (5.1) vérifiant l'hypothèse (C) on peut expliciter la condition H'3. Lorsque les  $a_{\alpha_j}$  sont constants, l'hypothèse H'3 est nécessaire pour qu'on ait l'hy-poellipticité avec régularité maximale (cf. [4]).

Tout d'abord on peut simplifier l'énoncé de H'3. Posons :

$$(5.2) \quad M = \sum_{|\alpha|+j \leq M} (|\tau|+r^{-\theta})^{\ell(\alpha,j)} r^{|\alpha|} (|\tau|+r^{\theta})^j$$

$$M_1 = \sum_{|\alpha|+j \leq M} |\tau|^{\ell(\alpha,j)} r^{|\alpha|} |\tau|^j + r^{\mu}$$

Rappelons les notations :

$$(5.3) \quad \mu = \sup\{|\theta| + \theta_j - \theta \ell(\alpha,j)\} \quad I = \{(\alpha,j) / \mu = |\alpha| + \theta_j - \theta \ell(\alpha,j)\}.$$

On peut énoncer :

Proposition 5.1. Si I contient  $(0,m)$  on a nécessairement  $\mu = m\theta$ .

Si I contient un multi-indice  $(\alpha,0)$ , on a :

$$(5.4) \quad \theta = \sup_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|}{\ell(\alpha,0) + m}$$

Si la famille d'entiers  $\ell(\alpha,j)$  vérifie ces deux hypothèses et la condition (C) il existe  $C > 0$  tel que

$$c^{-1} M_1 \leq M \leq c M_1$$

Démonstration. Les deux premières affirmations résultent immédiatement de la définition de I. Pour la troisième les seuls points à

vérifier sont :

$$r^{|\alpha| - \Theta \lambda(\alpha, j)} |\tau|^j \leq c M_1 \quad |t|^{\lambda(\alpha, j)} r^{|\alpha| + \Theta j} \leq c M_1$$

La première majoration résulte de  $|\Theta| - \Theta \lambda(\alpha, j) \leq \mu - \Theta j = \Theta(m-j)$  d'où  
 $r^{|\alpha| - \Theta \lambda(\alpha, j)} |\tau|^j \leq r^{\Theta(m-j)} |\tau|^j \leq (r^\mu)^{1 - \frac{j}{m}} (|\tau|^m)^{\frac{j}{m}} \leq c(r^\mu + |\tau|^m) \leq c M_1$ .

Pour la seconde on utilise l'hypothèse de convexité (C). Il existe

$(\alpha_1, 0), (\alpha_2, 0), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  et

$$\begin{aligned} |t|^{\lambda(\alpha, j)} r^{|\alpha| + \Theta j} &\leq (r^{\Theta m})^{\lambda_0} (|t|^{\lambda(\alpha_1, 0)} r^{|\alpha_1|})^{\lambda_1} (|t|^{\lambda(\alpha_2, 0)} r^{|\alpha_2|})^{\lambda_2} \\ &\leq c(r^\mu + |t|)^{\lambda(\alpha_1, 0)} r^{|\alpha_1|} + |t|^{\lambda(\alpha_2, 0)} r^{|\alpha_2|} \leq c M_1 \end{aligned}$$

d'où la proposition.

Etant donné un opérateur P de la forme (5.1) vérifiant la condition (C), définissons  $\Theta$  par (5.4) et posons  $\mu = m\Theta$ . L'hypothèse (H'3) est alors équivalente à : il existe  $A > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$|p| \geq c M_1$$

si  $|t| r^\Theta + |\tau| r^{-\Theta} \geq A$ .

Sous cette forme, la condition (H'3) peut s'expliciter plus facilement. Nous allons le faire d'abord pour des opérateurs quasi-homogènes, puis pour un exemple plus compliqué.

a) Le cas quasi-homogène.

Supposons que  $\frac{m}{\Theta}$  soit un entier, et posons

$$\lambda(\alpha, j) = \left[ \frac{|\alpha|}{\Theta} + j - m \right], \text{ où } [x] \text{ désigne le plus petit entier}$$

$\geq \sup(\alpha, 0)$ . La condition (C) est alors vérifiée.

Proposition 5.2.

Dans ce cas l'hypothèse H'3 est équivalente à : il existe  $C > 0$  tel que :

$$(5.6) \quad |P_m(x, t, \xi, \tau)| \geq C \sum_{|\alpha|+j=m} |t|^{\ell(\alpha, j)} |\xi|^{|\alpha|} |\tau|^j.$$

pour tout  $(x, t, \xi, \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ .

En effet, on voit que la fonction  $M_1$  définie en (5.2) est dans le cas quasi-homogène, majorée et minorée par une fonction de la forme :

$$(5.7) \quad M_1' = r^{m\theta} \left[ \sum_{|\alpha|+j \leq m} (|t|r^\theta)^{\ell(\alpha, j)} (|t|r^{-\theta})^j + 1 \right]$$

On remarque que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $A > 0$  tel que  $|t|r^\theta + |\tau|r^{-\theta} > A$  entraîne :

$$(5.8) \quad 1 + \sum_{|\alpha|+j \leq m-1} (|t|r^\theta)^{\ell(\alpha, j)} (|\tau|r^{-\theta})^j \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|+j=m} (|t|r^\theta)^{\ell(\alpha, j)} (|\tau|r^{-\theta})^j$$

En effet il existe  $A_1$  tel que  $|t|r^\theta > A_1$  entraîne, si  $|\alpha| + j \leq m-1$ , en posant  $|\beta| = m-|j|$ , d'où  $|\beta| > |\alpha|$  :

$$(|t|r^\theta)^{\left[\frac{|\alpha|}{\theta} + j - m\right]} \leq \varepsilon (|t|r^\theta)^{\left[\frac{|\beta|}{\theta} + j - m\right]}$$

L'inégalité (5.8) est donc vérifiée si  $|t|r^\theta > A_1$ . D'autre part il existe  $A_2$  tel que  $|\tau|r^{-\theta} > A_2$  entraîne, si  $j < m$

$$A_1^{\ell(\alpha, j)} (|\tau|r^{-\theta})^j < \varepsilon (|\tau|r^{-\theta})^m.$$

Donc l'inégalité (5.8) est vérifiée pour  $|t|r^\theta + |\tau|r^{-\theta} > A_1 + A_2$ .

Donc il existe  $A > 0$  tel que  $|t|r^\theta + |\tau|r^{-\theta} > A$  entraîne :

$$|p - P_m| \leq \varepsilon r^{m\theta} \left( \sum_{|\alpha|+j=m} (|t|r^\theta)^{\ell(\alpha,j)} (|\tau| r^{-\theta})^j \right)$$

L'hypothèse (H'3), qu'on peut formuler comme en (5.5), est donc équivalente dans le cas quasi-homogène à (5.6), d'où la proposition.

b) Exemples non quasi-homogènes.

Considérons des opérateurs dans  $\mathbb{R}^2$  de la forme

$$(5.9) \quad P(x, t, D_x, D_t) = D_t^m + \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha t^{\ell(\alpha)} D_x^\alpha$$

pour lesquels la condition (C) est évidemment vérifiée. On pose, suivant (5.4)

$$(5.10) \quad \theta = \sup_{\alpha \leq m} \frac{\alpha}{m + \ell(\alpha)} \quad \mu = m\theta$$

On peut alors expliciter facilement l'hypothèse (H'3). Faisons-le sur deux exemples.

Exemple 1. Soit :

$$p(x, t, \xi, \tau) = \tau^2 + t^{2k} \xi^2 + \lambda t^\ell \xi + a\tau + b \quad \lambda, a, b \in \mathbb{C}$$

Si  $\ell \geq k-1$ , on est dans le cas quasi-homogène étudié ci-dessus (avec  $\theta = \frac{1}{k+1}$ ) et (H'3) est toujours vérifiée. Si  $\ell < k-1$ , H'3 est équivalente à : il existe  $C > 0$  tel que :

$$(5.11) \quad |\tau|^2 + t^{2k} \xi^2 + \lambda t^\ell \xi| \geq c(|\tau|^2 + |t^{2k} \xi^2| + |t^\ell \xi|)$$

c'est-à-dire à :  $\lambda \notin \mathbb{R}$ .

Dans le cas  $\ell < k-1$ , on a d'après (5.10),  $\theta = \frac{1}{\ell+2}$ .

D'après (5.5) l'hypothèse (H'3) s'énonce : il existe  $A$  tel que pour

$$|\tau| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} > A \text{ on ait}$$

$$|p| \geq C (|\tau|^2 + |t^{2k} \xi^2| + |t^l \xi| + |\tau| + 1)$$

Mais le raisonnement du § a) montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $A_1$  tel que  $|\tau| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} > A_1$  entraîne :

$$|\tau| + 1 \leq \varepsilon (|\tau|^2 + |t^l \xi|) .$$

La condition (H'3) est donc bien équivalente à (5.11), donc à  $\lambda \notin \mathbb{R}$ .

Exemple 2. Soit :

$$(5.12) \quad p(t, \xi, \tau) = \tau^4 + a_1 \xi + a_2 t^4 \xi^2 + a_3 t^9 \xi^3 + a_4 t^{16} \xi^4$$

où  $a_j \in \mathbb{C}$ . Dans cet exemple le  $\theta$  défini par (5.10) est égal à  $\frac{1}{4}$ .

Posons

$$(5.13) \quad \begin{aligned} p_1(t, \xi, \tau) &= \tau^4 + a_2 t^4 \xi^2 + a_3 t^9 \xi^3 \\ p_2(t, \xi, \tau) &= \tau^4 + a_3 t^9 \xi^3 + a_4 t^{16} \xi^4 \end{aligned}$$

La condition H'3 est équivalente à : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(t, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^3$

$$(5.14) \quad |p_1(t, \xi, \tau)| \geq C (|\tau|^4 + |t^4 \xi^2| + |t^9 \xi^3|)$$

$$(5.15) \quad |p_2(t, \xi, \tau)| \geq C (|\tau|^4 + |t^9 \xi^3| + |t^{16} \xi^4|)$$

Démonstration. La condition H'3 s'énonce : il existe  $A > 0$  et  $C > 0$  tels que, si  $|\tau| |r|^\theta + |\tau| r^{-\theta} > A$  :

$$|p(t, \xi, \tau)| \geq c (|\tau|^4 + |\xi| + |t^4 \xi^2| + |t^9 \xi^3| + |t^{16} \xi^4|) = M(t, \tau, \xi) .$$

Le même raisonnement que dans le cas quasi-homogène montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $A_1$  tel que  $|\tau| r^\theta + |\tau| r^{-\theta} > A_1$  entraîne

$$(5.16) \quad |\xi| \leq \varepsilon (|\tau|^4 + |t^4 \xi^2|)$$



Le coefficient  $a_1$  est donc sans influence sur la condition H'3. De même il existe  $\varepsilon_1 > 0$  et  $A_2 > 0$  tels que :

$$(5.17) \quad |t| |\xi|^{\frac{1}{7}} < \varepsilon_1 \implies |t^{16} \xi^4| < \varepsilon |t^9 \xi^3|$$

$$(5.18) \quad |t| |\xi|^{\frac{1}{5}} > A_2 \implies |t^4 \xi^2| < \varepsilon |t^9 \xi^3|$$

Si  $|\xi|$  est assez grand, donc a fortiori si  $|t| r^\ominus + |\tau| r^{-\ominus}$  est assez grand, l'une ou l'autre de ces inégalités sera vérifiée. Dans le 1er cas on a :

$$|p-p_1| \leq C |t^{16} \xi^4| < \varepsilon (|\tau|^4 + |t^4 \xi^2| + |t^9 \xi^3|)$$

et

$$M(t, \xi, \tau) \leq c (|\tau|^4 + |t^4 \xi^2| + |t^9 \xi^3|) \leq c M(t, \xi, \tau)$$

Donc la condition H'3, pour la restriction du symbole  $p$  à la zone où (5.17) est vérifiée est bien équivalente à (5.14). De même pour l'ensemble des  $(t, \xi, \tau)$  où (5.18) est vérifiée H'3 est équivalente à (5.15). Comme pour  $|t| r^\ominus + |\tau| r^{-\ominus}$  assez grand l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée, H'3 est bien équivalent à la réunion de (5.14) et (5.15).

Dans le cas général d'un symbole  $p(t, \xi, \tau)$  de la forme (5.9), désignons par  $\alpha_0$  la plus grande valeur de  $\alpha$  pour laquelle le sup est atteint dans (5.10). Un calcul analogue à (5.16) montre que les termes  $a_\alpha t^{2(\alpha)} \xi^\alpha$  avec  $\alpha < \alpha_0$  sont sans influence sur la condition H'3. Celle-ci se traduit toujours par un nombre fini d'inégalités analogues à (5.14) et (5.15).

2. Le cas caractéristique non fuchsien.

Nous donnerons seulement l'exemple suivant, traité dans [4]. Soit :

$$(5.19) \quad P = t^\sigma (D_t^4 + D_x^4) + \lambda D_t^2 + \mu t^2 D_x^2 + \nu D_x$$

où  $\sigma$  est un entier  $\geq 3$  et  $\lambda, \mu, \nu$  des nombres complexes. On a :

Proposition 5.3. L'opérateur  $P$  est hypoelliptique avec régularité maximale (au sens du théorème 2) si et seulement si :

1) L'opérateur différentiel  $p_0(x, \xi, t, D_t)$  défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{i) si } \sigma > 6 \quad p_0(x, \xi, t, D_t) &= \lambda D_t^2 + \mu t^2 \xi^2 + \nu \xi \\ \text{ii) si } \sigma = 6 \quad p_0(x, \xi, t, D_t) &= \lambda D_t^2 + t^\sigma \xi^4 + \mu t^2 \xi^{2+\nu\xi} \\ \text{iii) si } \sigma < 6 \quad p_0(x, \xi, t, D_t) &= \lambda D_t^2 + t^\sigma \xi^4 \end{aligned}$$

est injectif dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  quand  $\xi = \pm 1$ .

2) Les conditions d'ellipticité générale suivantes sont vérifiées pour tous  $t \neq 0$  et  $(\xi, \tau) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{i) si } \sigma > 6, \text{ on a à la fois } \lambda \tau^2 + \mu t^2 \xi^2 &\neq 0 \\ &\lambda \tau^2 + t^\sigma \xi^4 + \mu t^2 \xi^2 \neq 0 \\ &t^\sigma \tau^4 + t^\sigma \xi^4 + \lambda \tau^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) si } \sigma \leq 6, \text{ on a } t^\sigma \tau^4 + t^\sigma \xi^4 + \lambda \tau^2 \neq 0.$$

Si ces conditions sont vérifiées, l'opérateur  $P$  admet une paramétrix à gauche dans  $\mathcal{L}_{\theta, \theta}^{-2\theta}(\mathbb{R}^2)$ , où  $\theta$  est défini par :

$$\theta = \sup\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{\sigma+2}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEALS, General calculus for pseudo-differential operators. Duke Maths. Journal 42 n°1, mars 1975.
- [2] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. pures et appl. 55, (1976), 131-171.
- [3] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non fuchsien. Comm. in partial differential equ. 2(1) (1977), 1-30.
- [4] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Remarques sur l'hypoellipticité. C.R.A.S. t. 283 (1976) 979-982, et exposé aux Journées "Equations aux dérivées partielles". (Rennes 1976) à paraître aux séminaires d'Analyse fonctionnelle de Rennes.
- [5] BOUTET de MONVEL, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. CPAM 27 (1974) 585-639.
- [6] BOUTET de MONVEL-GRIGIS-HELFFER, Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34-35 (1976) 93-121.
- [7] BOUTET de MONVEL-TREVES, On a class of pseudo-differential operators with double characteristics. Inventiones Math. 24 (1974) 8-34.
- [8] GILIOLI-TREVES, An example in the solvability theory of linear partial differential equations. Amer. J. of Math. 96 (1974), 367-385.
- [9] GRUSHIN, On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik 83 (125), (1970), 456-473.
- [10] GRUSHIN-VISHIK, Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. Math. Sb. 80 (122) (1969) 455-491.

- [11] HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Amer. Math. Soc. Proc. of Sym. Pure Math 10 (1966) 138-183.
- [12] MENIKOFF, Some examples of hypoelliptic partial differential equations. Math. Ann. 221 (1976) 167-181.
- [13] ROLLAND, Hypoellipticité partielle pour des opérateurs elliptiques et dégénérés. CRAS (1976).
- [14] SJOSTRAND, Parametrixes for pseudo-differential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12 (1974) 85-130.
- [15] YAMAMOTO, Parametrixes for pseudo-differential equations with double characteristics. Hokkaido Math J. 5 (1976) 280-301.
- [16] MENIKOFF, Pseudo-differential operators with double characteristics (à paraître).