PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MONIQUE SABLE-TOUGERON

Comportement asymptotique des valeurs propres pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 10, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A10_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

Monique SABLE-TOUGERON

U.E.R. Mathématiques
Avenue du Général Leclerc

35031 RENNES CEDEX
FRANCE

INTRODUCTION.

Ce travail généralise et améliore les résultats de PHAM THE LAÏ [16]. Par l'étude du noyau de la résolvante, méthode employée par S. AGMON, on obtient un équivalent avec estimation du reste pour les valeurs propres d'un opérateur non nécessairement auto-adjoint, d'ordre 2m, elliptique à l'intérieur, dégénérant à l'ordre k (k entier, $1 \leq k \leq 2m-1$), sur le bord d'un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas auto-adjoint et à l'ordre deux, le comportement asymptotique des valeurs propres a été déterminé, pour un opérateur particulier, par N. SHIMAKURA [17] pour la boule unité, puis par C. NORDIN [11] pour un domaine général ; et pour un opérateur plus général, par L. VULIS et Z. SOLOMJAK [18]. Pour une bibliographie plus complète sur ce sujet on renvoie à [18] et aussi [15].

1. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ, tel qu'il existe une fonction φ de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{grad} \varphi(s) \neq 0 \quad \text{pour } s \in \Gamma \end{cases}$$

Pour $m, k \in \mathbb{N}$, on considère les espaces de Sobolev avec poids :

$$W_m^{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \ \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

où $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

$W_m^{k/2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \varphi^{k/2} D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$.

Si $m-k/2 > 0$, on a $W_m^{k/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte, et $W_m^{k/2}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

De même si on note $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_n > 0\}$, on utilise les espaces

$$W_m^{k/2}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+), \ x_n^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n_+), \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

On considère la forme sesquilinéaire :

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) \, D^\alpha u(x) \, \overline{D^\beta v(x)} \, dx$$

Pour $s \in \Gamma$, on note T_s l'espace vectoriel des vecteurs tangents en s à Γ, S_{T_s} la sphère unité de T_s et $\nu_s = \dfrac{\operatorname{grad} \varphi(s)}{\|\operatorname{grad} \varphi(s)\|}$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ désignant la norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$ on associe à $a(u,v)$ la forme :

$$b_{s,\omega}(u,v) = \int_0^\infty t^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) (\omega + \nu_s D_t)^\alpha u(t) \, \overline{(\omega + \nu_s D_t)^\beta v(t)} \, dt,$$

avec $D_t = -i \dfrac{\partial}{\partial t}$.

On fait les hypothèses : $1 \leq k \leq 2m-1$ et :

H 1) Pour tous α, β, $a_{\alpha\beta}$ appartient à l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions C^∞ dans $\mathbb{R}^n$,

Pour $|\alpha| = |\beta| = m$, $x \in \overline{\Omega}$, $a_{\alpha\beta}(x) \in \mathbb{R}$ et $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$.

H 2) $a(u,v)$ est fortement coercitive sur $W_m^{k/2}(\Omega)$, c'est-à-dire : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in W_m^{k/2}(\Omega)$ on ait :

$$\operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{W_m^{k/2}(\Omega)} .$$

D'après R. PAVEC (non publié) et P. BOERO-R. PAVEC [5] dans un cas particulier, H 2) entraîne :

$$\begin{cases} \text{. il existe une constante } c > 0 \text{ telle que pour tout } x \in \overline{\Omega} \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n \\ \text{on ait} \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ \xi^{\alpha+\beta} \geq c\|\xi\|^{2m} \\ \text{. pour tout } s \in \Gamma,\ \omega \in S_{T_s},\ b_{s,\omega} \text{ est fortement coercitive sur } W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+). \end{cases}$$

2. ENONCE DES RESULTATS.

D'après P. BOLLEY-J. CAMUS [6], [7], l'opérateur A non borné dans $L^2(\Omega)$ associé à $a(u,v)$ a un domaine $D(A)$ contenu dans $W_{2m}^k(\Omega)$; $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ étant dense dans $W_m^{k/2}(\Omega)$, on dira que A est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A}(.,D) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} D^\beta (a_{\alpha\beta}\ \varphi^k\ D^\alpha)$$

Avec les données et les hypothèses de 1), le spectre de A est constitué d'une infinité dénombrable de valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de λ_j en dehors de la région $\{\mu \in \mathbb{C},\ |\arg \mu| < \varepsilon\}$. Alors, les λ_j étant rangées par ordre croissant des modules, si on note $N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \lambda} 1$, on a :

THEOREME 2.1 Si $n < 2m/k$, on a :

$$N(\lambda) = \int_\Omega \omega(x)\ dx \ .\ \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{\frac{n-\Theta}{2m}}),$$

pour tout Θ vérifiant $0 < \Theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$, avec

$$(2.1) \qquad \omega(x) = (2\pi)^{-n} \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}} \int_{\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} < 1} d\xi .$$

De même l'opérateur $\beta_{s,\omega}$, non borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, associé à $b_{s,\omega}(u,v)$ a un domaine $D(\beta_{s,\omega})$ contenu dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}_+)$, et on dira aussi que $\beta_{s,\omega}$ est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{B}_{s,\omega} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) \; (\omega + \nu_s D_t)^{\beta} \; (t^k(\omega + \nu_s D_t)^{\alpha}).$$

De plus, $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$ étant fixés, $(\beta_{s,\omega}, D(\beta_{s,\omega}))$ est auto-adjoint positif dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ d'après H 1) et H 2) ; si $(\mu_j(s,\omega))_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des valeurs propres de $\beta_{s,\omega}$ on a alors :

<u>THEOREME 2.2</u> Si $n > 2m/k$, pour tout $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, la série $\sum\limits_{j\geq 1} \rho_j(s)$, où

$$(2.2) \qquad \rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(s,\omega)^{\frac{1-n}{2m-k}} \, d\omega,$$

est convergente et sa somme est bornée sur Γ.

<u>THEOREME 2.3</u> Si $2m/k < n < 4m/k - 1$ on a :

$$N(\lambda) = \int_\Gamma C(s)\, ds \,.\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\Theta}{2m}} \operatorname{Log} \lambda),$$

pour tout Θ vérifiant $\Theta \leq \inf\left(1/2, \frac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)}\right)$

et si $n \geq \frac{4m}{k} - 1$ on a

$$N(\lambda) = \int_\Gamma C(s)\, ds \,.\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\Theta}{2m}}),$$

pour tout Θ vérifiant $0 < \Theta < \frac{m}{3m-k}$ et $\Theta \leq 1/2$, avec

$$(2.3) \qquad C(s) = (2\pi)^{1-n} \, \| \operatorname{grad} \varphi(s) \|^{\frac{k(1-n)}{2m-k}} \sum_{j\geq 1} \rho_j(s).$$

<u>Remarque 2.4</u>

i) Si A est auto-adjoint on peut supprimer les contraintes $\Theta \leq 1/2$ dans l'énoncé du théorème 2.3.

ii) Si $2m/k$ est entier et si $n = 2m/k$, d'après [10], en adaptant la méthode de [14], on montre que

$$N(\lambda) = \int_{\Gamma} \tilde{\omega}(s)\, ds \;.\; \lambda^{1/k} \operatorname{Log}(\lambda^{1/(2m-k)}) + O(\lambda^{1/k}), \text{ avec}$$

$$\tilde{\omega}(s) = (2\pi)^{-n} \| \operatorname{grad} \varphi(s) \|^{-1} \int_{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)\xi^{\alpha+\beta} < 1} d\xi \;.$$

iii) Le théorème 2.1 est vrai aussi pour toute réalisation auto-adjointe semi-bornée $(A,D(A))$ de $\mathcal{A}(x,D)$ dans $L^2(\Omega)$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{N}$, $(2m-k)q > n$ et $D(A^q) \subset W^{kq}_{2mq}(\Omega)$.

3. <u>OPERATEURS BORNES DANS $L^2(\Omega)$, (resp. $L^2(\mathbb{R}^n_+)$), A IMAGE DANS $W^k_{2m}(\Omega)$, (resp. $W^k_{2m}(\mathbb{R}^n_+)$).</u>

<u>LEMME 3.1</u> Si $m > n/2$, toute fonction $u \in W^{k/2}_m(\Omega)$ est continue dans Ω et :

il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in W^{k/2}_m(\Omega)$, $x \in \Omega$ on ait

$$|u(x)| \leq c\, \varphi(x)^{-\frac{kn}{4m}} \;\| u \|^{\frac{n}{2m}}_{W^{k/2}_m(\Omega)} \;.\; \| u \|^{1-\frac{n}{2m}}_{L^2(\Omega)} \;. \tag{3.1}$$

<u>Démonstration</u>. On utilise la méthode de [14].

On note $\| T \|_{0,j,\Omega}$ la norme de T dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega),H^j(\Omega))$, $\| T \|_{0,2m:k,\Omega}$ sa norme dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega),W^k_{2m}(\Omega))$, (E et F étant deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F). De même pour $\mathbb{R}^n_+$. Alors on a :

<u>PROPOSITION 3.2</u> Soit T un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$ tel que son image et celle de T^* soient contenues dans $W^k_{2m}(\Omega)$, avec $2m-k > n$. Alors T est un opérateur intégral dont le noyau $T(x,y)$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ et vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $x,y \in \Omega$ on ait

$$|T(x,y)| \leq c(\| T \|_{0,2m:k,\Omega} \;.\; \| T^* \|_{0,2m:k,\Omega})^{\frac{n}{2(2m-k)}} \;.\; \| T \|^{1-\frac{n}{2m-k}}_{0,0,\Omega} \tag{3.2}$$

$$|T(x,y)| \leq c(\varphi(x)\, \varphi(y))^{-\frac{kn}{4m}} (\| T \|_{0,2m:k,\Omega} \;.\; \| T^* \|_{0,2m:k,\Omega})^{\frac{n}{4m}} \;.\; \| T \|^{1-\frac{n}{2m}}_{0,0,\Omega} \;. \tag{3.3}$$

(On peut énoncer la même proposition avec Ω remplacé par $\mathbb{R}^n_+$ et $\varphi(x)$ remplacé par x_n).

Démonstration. Le début de la proposition et (3.2) résultent d'une proposition de [12] et de l'inclusion $W^k_{2m}(\Omega) \subset H^{2m-k}(\Omega)$. Pour montrer (3.3) on utilise (3.1) et des inégalités de [12].

PROPOSITION 3.3 Soit T un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ tel que son image et celle de T^* soient contenues dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}_+)$; soit $T(t,\tau)$ son noyau ; alors si $2m-k > 1$ il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $t,\tau \in \mathbb{R}_+$ on ait

(3.4) $$|T(t,\tau)| \leq c\ (t\tau)^{-k/2}\ .\ (\|T\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+}\ .\ \|T^*\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+})^{1/2}$$

Démonstration. Comme pour (3.1) on montre qu'il existe $c > 0$ telle que pour $u \in W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$, $t > 0$ on ait :

$$|u(t)| \leq c\ t^{-k/2}\ \|u\|_{W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)} \quad ,$$

puis on utilise l'inégalité suivante qui résulte de [12] :

$$\|Tf\|_{W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)} \leq (\|T\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+}\ .\ \|T^*\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+})^{1/2}\ .\|f\|_{(W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+))'} \quad ,$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$

PROPOSITION 3.4 Soit T un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ dont l'image est contenue dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}_+)$ avec $2m-k > 1$, et $k > 1$. Alors T est un opérateur nucléaire au sens de Gohberg et Krein [9], et la suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, de ses valeurs propres vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que pour $j \geq 1$ on ait

(3.5) $$|\mu_j| < c\ .\ j^{-k}\ .$$

Démonstration. D'après [13] l'opérateur $Q = (TT^*)^{1/2}$ borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ a son image contenue dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}_+)$; soit $Q(t,\tau)$ son noyau ; (3.2) donne l'intégrabilité de $Q(t,t)$ au voisinage de 0 et (3.4) la donne au voisinage de $+\infty$. Si $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la suite décroissante des valeurs propres de Q, l'inégalité

$$\sum_{j\geq 1} |\mu_j| \leq \sum_{j\geq 1} s_j \ ,$$

démontrée dans [9] et l'égalité

$$\sum_{j\geq 1} s_j = \int_0^\infty Q(t,t)\,dt,$$

montrent que T est nucléaire.

Pour montrer (3.5) on applique (3.3) et (3.4) au noyau $Q_\lambda(t,\tau)$ du résolvant modifié de Q, $Q_\lambda = Q(I+\lambda Q)^{-1}$, $\lambda > 0$:

Puisque $\|Q_\lambda\|_{0,0,\mathbb{R}_+} \leq \frac{c}{\lambda}$ et $\|Q_\lambda\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \leq c\|Q\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+}$, (3.4) donne

$$\int_{\lambda^{1/k}}^\infty Q_\lambda(t,t)dt \leq c\,\lambda^{-1+1/k},$$

et (3.3) donne une majoration identique pour $\int_0^{\lambda^{1/k}} Q_\lambda(t,t)\,dt$. De l'égalité

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{s_j^{-1}+\lambda} = \int_{\mathbb{R}_+} Q_\lambda(t,t)\,dt,$$

on déduit alors

$$\sum_{s_j^{-1}<\lambda} 1 \leq c\,\lambda^{1/k}, \text{ pour } \lambda > 0.$$

Ceci implique l'existence d'une constante $c > 0$ telle que, pour $j \geq 1$, on ait :

$$s_j \leq c\,j^{-k};$$

Alors (3.5) s'obtient à l'aide du résultat de [9] suivant : pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\prod_{j=1}^n (1 + r\,|\mu_j|) \leq \prod_{j=1}^n (1 + r\,s_j).$$

A ce stade on peut déjà démontrer le théorème 2.2 :

on se place donc dans le cas $n > 2m/k$ et on peut supposer $2m-k>n$, (sinon on considère $\beta^q_{s,\omega}$ avec $q(2m-k) > n$, les techniques de [4] donnant $D(\beta^q_{s,\omega}) \subseteq W^{kq}_{2mq}(\mathbb{R}_+)$).

Γ et S_{T_s} étant compacts et les données régulières, la proposition 3.4 appliquée à $\beta^{-1}_{s,\omega}$ donne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tous $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, $j \geq 1$ on ait :

$$\mu_j(s,\omega)^{\frac{1-n}{2m-k}} \leq c\ j^{-1+\frac{2m-kn}{2m-k}}$$

La série $\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)$ est donc convergente et sa somme est une fonction bornée sur Γ.

4. ENSEMBLE RESOLVANT DE (A,D(A)).

Dans ce paragraphe on donne les calculs qui permettent, grâce à une formule de A. Pleijel utilisée d'abord par S. Agmon [3], de déduire le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ de l'étude du noyau de $(A-\lambda)^{-1}$.

On note $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de (A,D(A)). On a :

PROPOSITION 4.1 Il existe $K > 0$ tel que la région

$$\mathcal{R} \equiv \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ \mu \leq 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\mu| \geq K(1+|\mu|)^{1-\frac{1}{2m}}\}$$

soit contenue dans $\rho(A)$ et il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \in \mathcal{R}$ $\mu \neq 0$ on ait, $d(\mu)$ désignant la distance de μ à $\mathbb{R}_+$:

$$(4.1) \qquad \|(A-\mu)^{-1}\|_{0,0,\Omega} \leq \frac{c}{d(\mu)} .$$

Démonstration. Elle est identique à celle de [16] : on utilise la forte coercivité de a pour montrer (4.1) pour $\mathrm{Re}\ \mu < 0$, puis on considère l'opérateur A' non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine D(A') contenu dans $W^k_{2m}(\Omega)$ associé à

$$(4.2) \qquad a'(u,v) = \int_\Omega \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ D^\alpha u\ \overline{D^\beta v}\ dx \ ;$$

on démontre l'estimation : il existe $c > 0$ telle que pour tous $\delta > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq 2m$, $u \in W^k_{2m}(\Omega)$ on ait :

$$\|u\|_{W^k_\ell(\Omega)} \leq c\ \{\delta^{2m-\ell}\ \|u\|_{W^k_{2m}(\Omega)} + \delta^{-\ell}\ \|u\|_{L^2(\Omega)}\} .$$

On utilise alors un argument de perturbation d'Agmon [1] pour montrer l'existence de $\mathcal{R}$ et l'estimation (4.1) dans cette région.

PROPOSITION 4.2 Pour tout $\mu \in \rho(A)$, $(A-\mu)^{-1}$ est compact dans $L^2(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de A en dehors du secteur $\{\mu \in \mathbb{C},\ |\arg \mu| < \varepsilon\}$.

Démonstration. Comme dans [15], elle utilise la compacité de l'injection de $H^{2m-k}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.3 Si $2m-k > n$ il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(4.3)\qquad \sum_{j\geq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\mu|} \leq \begin{cases} c\ \dfrac{|\mu|^{\frac{n-1}{2m-k}}}{d(\mu)} & \text{si } n > \dfrac{2m}{k} \\[2ex] c\ \dfrac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} & \text{si } n < \dfrac{2m}{k} \end{cases} \quad , \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}$$

$$(4.4)\qquad \left| \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda_j-\mu} - \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j-\mu} \right| \leq c\ \frac{|\mu|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\mu)} \cdot \sum_{j\geq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\mu|} \ , \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}\ |\mu| \geq 1$$

Démonstration. Comme dans [16], à l'aide de la proposition 4.2, (4.4) se déduit de (4.3) dont la preuve suit ; soit $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$ et $Q_\mu = (G_\mu G_\mu^*)^{1/2}$; Q_μ est continu dans $L^2(\Omega)$, son image est contenue dans $W^k_{2m}(\Omega)$ et d'après [13],

$$\| Q_\mu \|_{0,0,\Omega} \leq \| G_\mu \|_{0,0,\Omega}$$

Alors (4.1), (3.2) et (3.3) donnent :

$$\begin{cases} 0 \leq Q_\mu(x,x) \leq c\ \dfrac{|\mu|^{\frac{n}{2m-k}}}{d(\mu)} \\[2ex] 0 \leq Q_\mu(x,x) \leq c\ \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}}\ \dfrac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \end{cases} \quad , \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}$$

Si $n < \frac{2m}{k}$, la seconde inégalité donne :

$$\int_\Omega Q_\mu(x,x)\ dx \leq c\ \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)}$$

Si $n > \frac{2m}{k}$, en intégrant la seconde inégalité sur $\Omega\,(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$ et la première sur $\Omega - \Omega(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$, où

$$\Omega(\rho) = \{x \in \Omega,\ \varphi(x) > \rho\} \ , \text{ pour } \rho \geq 0 \ ,$$

on obtient

$$\int_\Omega Q_\mu(x,x)\,dx \leq c\left(\frac{|\mu|}{d(\mu)}\right)^{\frac{n-1}{2m-k}} ;$$

la majoration $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{|\lambda_j-\mu|} \leq \int_\Omega Q_\mu(x,x)\,dx$, démontrée dans [9], donne alors (4.3).

On note enfin, comme dans [16] :

(4.5) $$f(\mu) = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda_j-\mu} \quad , \text{ pour } \mu \notin \mathbb{R}_+$$

(4.6) $$I(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} f(\mu)\,d\mu \text{ , pour } \lambda > 0,$$

où $L(\lambda)$ est une courbe orientée de $\mathbb{C}$ joignant $\lambda - ia\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}}$ à son conjugué, ne rencontrant pas $\mathbb{R}_+$ et où a, $\Theta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $0 < \Theta < 1$.

(4.7) $$\mathcal{R}_\Theta = \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ \mu \leq 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\ \mu| > K(1+|\mu|)^{1-\frac{\Theta}{2m}}\} \text{ , pour } 0 < \Theta < 1$$

Alors on a :

<u>PROPOSITION 4.4</u> Si $2m-k > n$, pour tout Θ, $0 < \Theta < 1$, il existe $a > 0$, $c > 0$, $\lambda_o > 0$ tels que $\lambda + ia\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}}$ appartienne à $\mathcal{R}_\Theta$ pour $\lambda \geq \lambda_o$ et tels que :

(4.8) $$|N(\lambda)-I(\lambda)| \leq c\left(\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}} \left|\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j-(\lambda+ia\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}})}\right| + \begin{cases} \lambda^{\frac{n-\Theta}{2m}}\Big) & \text{, si } n > \frac{2m}{k} \\ \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}-\frac{\Theta}{2m}}\Big) & \text{, si } n > \frac{2m}{k} \end{cases}\right. \text{, pour } \lambda \geq \lambda_o$$

<u>Démonstration</u>. Pour $a > 0$, $\Theta \in]0,1[$, $\lambda > 0$, d'après la formule de A. Pleijel citée dans [16] par exemple, on a :

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leq a\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}}\,|f(\lambda+ia\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}})|$$

On note $\xi = \lambda + ia\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}}$; Θ étant fixé on montre facilement qu'il existe $a > 0$, $\lambda_o > 0$ tels que pour $\lambda \geq \lambda_o$ on ait $\xi \in \mathcal{R}_\Theta$ et $|\xi| \geq 1$. Alors (4.3) et (4.4) donnent :

$$|f(\xi)| \leq \left|\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j-\xi}\right| + c\left(\frac{|\xi|}{d(\xi)}\right)^2 |\xi|^{-1-\frac{1}{2m}} \times \begin{cases} |\xi|^{\frac{n}{2m}} & \text{si } n < \frac{2m}{k} \\ |\xi|^{\frac{n-1}{2m-k}} & \text{si } n > \frac{2m}{k} \end{cases} ,$$

d'où (4.8) par une majoration immédiate.

5. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1 : $n < 2m/k$.

L'estimation de $N(\lambda)$ s'obtient ici, comme dans le cas non dégénéré traité par S. Agmon [2], par une étude du noyau de la résolvante à l'intérieur de Ω.

5.1 Cas où $2m-k > n$.

Pour $x \in \Omega$ on note $F_{x,\mu}(y)$ la solution élémentaire dans $\mathbb{R}^n$ de l'opérateur à coefficients constants :

$$\mathcal{A}'_x(D) - \mu \equiv \varphi(x)^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha+\beta} - \mu\,, \text{ où } \mu \notin \mathbb{R}_+ \quad ;$$

on a, avec la notation (2.1) :

$$F_{x,\mu}(0) = \frac{n\pi}{2m}\left(\sin \frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \omega(x)\ (-\mu)^{-1+\frac{n}{2m}}$$

où $(-\mu)^{-1+\frac{n}{2m}}$ est la détermination holomorphe dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ qui est positive sur le demi-axe négatif.

Pour $\mu \in \rho(A)$ on note $G_\mu(y,z)$ le noyau de l'opérateur $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$ et pour $x \in \Omega$ on note $\mathcal{R}_{x,\mu}$ la restriction à Ω de l'opérateur inverse de $(\mathcal{A}'_x(D)-\mu, H^{2m}(\mathbb{R}^n))$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le résultat essentiel pour montrer le théorème 2.1 est obtenu par application de la proposition 3.2 et constitue la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. Soient $\Theta > 0$, $\beta > 0$, $\Theta + \beta > 1$. Il existe des constantes $c > 0$, $a_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ telles que pour tout $x \in \Omega$ on ait

$$|G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| < c\ \varphi(x)^{-1-\frac{kn}{2m}+\frac{k}{2m}} \left(\frac{|\mu|}{d(\mu)^2}\right)^{\frac{n}{2m}+1-\frac{\beta}{2m}},$$

pour $\mu \in \mathcal{B}_\Theta$, $a_0|\mu| > \varphi(x)^{-\frac{2m-k}{\beta}}$, $|\mu| > \mu_0$.

Démonstration. Le schéma de la démonstration est classique :

pour $x \in \Omega$ on considère l'opérateur borné dans $L^2(\Omega)$:

$$T_{x,\mu,r} = \zeta_{x,r}(G_\mu - \mathcal{R}_{x,\mu})\ \zeta_{x,r},$$

où $\mu \in \rho(A)$, $r \in \mathbb{R}$ vérifie $0 < r < \inf\left(1, \varphi(x), \dfrac{\varphi(x)}{2 \sup_{y\in\Omega} \|\operatorname{grad} \varphi(y)\|}\right)$,

et où $\zeta_{x,r}$ est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^n$, à support contenu dans

$B(x,r) = \{y \in \Omega, \|y-x\| < r\}$, à valeurs dans $[0,1]$, valant 1 en x et vérifiant

$\|D^{\alpha} \zeta_{x,r}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq c\, r^{-|\alpha|}$, où c est indépendante de x et de r.

On écrit :

$$T_{x,\mu,r} = T_1 + T_2 \equiv \zeta_{x,r} G_\mu \eta_{x,r} (\mathcal{A}'_x - \mathcal{A}) \mathcal{R}_{x,\mu} \zeta_{x,r} + \zeta_{x,r} G_\mu [\eta_{x,r}, \mathcal{A}] \cdot \mathcal{R}_{x,\mu} \zeta_{x,r}$$

où la fonction $\eta_{x,r}$ possède les mêmes propriétés que $\zeta_{x,r}$ et vérifie de plus $\eta_{x,r} \zeta_{x,r} = \zeta_{x,r}$.

Une inégalité d'interpolation classique appliquée à $\Omega(\frac{\varphi(x)}{2})$, la majoration $\|u\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leq \rho^{-k} \|u\|_{W^k_{2m}(\Omega)}$, et (4.1) donnent :

$$(5.1) \qquad \|G_\mu f\|_{H^j(B(x,r))} \leq c\, \varphi(x)^{-\frac{kj}{2m}} \frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)} \|f\|_{L^2(\Omega)} ,$$

pour $f \in L^2(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{R} - \{0\}$. D'où :

$$(5.2) \qquad \|\zeta_{x,r} G_\mu\|_{0,2m:k,\Omega} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)} , \text{ pour } |\mu| \geq \varphi(x)^k . r^{-2m} , \ \mu \in \mathcal{R} - \{0\}.$$

D'après [3] on a aussi :

$$(5.3) \qquad \|\mathcal{R}_{x,\mu}\|_{0,j,\Omega} \leq c\, \varphi(x)^{-\frac{kj}{2m}} \frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)} , \text{ pour } \mu \notin \mathbb{R}_+ .$$

on en déduit, en écrivant

$$\mathcal{A}(y,D) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y) \varphi^k(y) D^{\alpha+\beta} + \sum_{h=1}^{k} \varphi^{k-h}(y) \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} a_{h,\alpha}(y) D^\alpha ,$$

$$\|\eta_{x,r} (\mathcal{A}'_x - \mathcal{A}) \mathcal{R}_{x,\mu} \zeta_{x,r}\|_{0,0,\Omega} \leq c \cdot \frac{|\mu| r\, \varphi(x)^{-1}}{d(\mu)}, \text{ pour } |\mu| \geq \varphi(x)^k . r^{-2m}, \ \mu \notin \mathbb{R}_+ .$$

Cette dernière majoration, (4.1) et (5.2) donnent alors l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \in \mathcal{R}$, $|\mu| > \varphi(x)^k . r^{-2m}$ on ait :

$$\|T_1\|_{0,0,\Omega} \leq c \frac{|\mu| \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)^2} \quad \text{et} \quad \|T_1\|_{0,2m:k,\Omega} \leq c \frac{|\mu|^2 \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)^2} .$$

Pour estimer T_2 on introduit pour $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, des fonctions $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$, ayant les mêmes propriétés que $\zeta_{x,r}$; on pose $\varphi_1 = \eta_{x,r}$, $\varphi_{p+1} = \zeta_{x,r}$ et on impose

$\varphi_j\ \varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq p$. On montre facilement que l'on a :

$$\zeta_{x,r}\, G_\mu[\eta_{x,r}, \mathcal{A}] = -\ \zeta_{x,r}\, G_\mu[\mathcal{A}, \varphi_p]\ G_\mu\, [\mathcal{A}, \varphi_{p-1}] \ldots G_\mu[\mathcal{A}, \varphi_1].$$

En écrivant $[\mathcal{A}, \varphi_j] = \sum\limits_{h=0}^{k} \varphi^{k-h} \sum\limits_{1\leq|\alpha|\leq 2m-h} a_{h,\alpha} \sum\limits_{\substack{\gamma+\nu=\alpha \\ |\gamma|\geq 1}} c_{\gamma\nu}(D^\gamma\ \varphi_j)\, D^\nu$, (5.1) et des majorations simples donnent :

$$\| [\mathcal{A}, \varphi_j]\ G_\mu \|_{0,0,\Omega} \leq c\, \frac{|\mu|}{d(\mu)}\, (r(\varphi(x)^{-k}\ |\mu|)^{\frac{1}{2m}})^{-1}, \text{ pour } \mu\in\mathcal{R}\ |\mu| \geq \varphi(x)^k.r^{-2m}$$

De même, en utilisant (5.3), on obtient une majoration analogue pour $\| [\mathcal{A}, \varphi_1]\ \mathcal{R}_{x,\mu}\ \ \zeta_{x,r} \|_{0,0,\Omega}$. Alors ces estimations, avec (5.2), montrent que pour tout $p \geq 1$ il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \|T_2\|_{0,0,\Omega} \leq \dfrac{c}{d(\mu)}\ .\ (\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}\ (r(\varphi(x)^{-k}\ |\mu|)^{\frac{1}{2m}})^{-1})^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,\Omega} \leq \dfrac{c|\mu|}{d(\mu)}\ (\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}\ (r(\varphi(x)^{-k}\ |\mu|)^{\frac{1}{2m}})^{-1})^p \end{array}\right. , \text{ pour } \mu \in \mathcal{R},\ |\mu| \geq \varphi(x)^k.r^{-2m}$$

On sait donc estimer $T_{x,\mu,r}$ et aussi $T^*_{x,\mu,r}$ puisque A^* est associé à $a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}$ donc aussi à une forme $W_m^{k/2}(\Omega)$-coercive.

On applique alors (3.3) : pour tout $p \geq 1$, il existe $c > 0$ telle que

$$(5.4)\ |G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| \leq c\ \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \left(\frac{|\mu|\ \ \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)} + \frac{|\mu|}{d(\mu)}\ (r(\varphi(x)^{-k}|\mu|^{\frac{1}{2m}})^{-1})^p\right)$$

pour tous $x \in \Omega$, $0 < r < \inf(1, \varphi(x), \dfrac{\varphi(x)}{2 \sup\limits_{y\in\Omega} \|\mathrm{grad}\ \varphi(y)\|})$, $\mu \in \mathcal{R}$, $|\mu| \geq \varphi(x)^k.r^{-2m}$.

Soit maintenant $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. On fait $r = \varphi(x)^{\frac{k}{2m}}\, |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}}$ dans (5.4) ; on obtient il existe $\mu_o > 0$, $a_o > 0$ tels que pour tout $p \geq 1$ il existe une constante $c > 0$ qui vérifie :

$$(5.5)\, |G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| \leq c\, \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m} - 1 + \frac{k}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}+1-\frac{\beta}{2m}}}{d(\mu)^2} (1 + \varphi(x)^{\frac{2m-k}{2m}}\, |\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m}} d(\mu) (\frac{|\mu|}{d(\mu)})^{1+\frac{\beta-1}{2m}}$$

pour tous $x \in \Omega$, $\mu \in \mathcal{R}$ vérifiant $|\mu| \geq \mu_o$ et $a_o|\mu| > \varphi(x)^{\frac{-(2m-k)}{\beta}}$.

Soit enfin $\Theta \in \mathbb{R}$, $0 < \Theta < 1$. Pour $\Theta + \beta < 1$, on peut choisir p de façon que la quantité entre parenthèses de (5.5) reste bornée indépendamment de $x \in \Omega$ et de $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$; ceci donne bien la proposition 5.1.

COROLLAIRE 5.2. Soit $\Theta \in \mathbb{R}$, $0 < \Theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$. Il existe $c > 0$, $\mu_o > 0$ tels que $|\int_\Omega G_\mu(x,x)\,dx| \leq c\,|\mu|^{-1+\frac{n}{2m}}$ pour $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$ $|\mu| > \mu_o$.

Démonstration. Soit $\beta > 0$, $\Theta + \beta > 1$. De la proposition 5.1 on déduit

$$\int_{\Omega(\rho)} |G_\mu(x,x)-F_{x,\mu}(0)|\,dx \leq c\,\frac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}}}{d(\mu)^2} \times \begin{cases} |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}} \operatorname{Log}|\mu| & \text{si } n = 1 \\ |\mu|^{-\frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

pour $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\mu| > \mu_o$, avec $\rho=(a_o|\mu|)^{-\frac{\beta}{2m-k}}$

D'autre part (4.1) et (3.3) donnent :

$$\int_{\Omega-\Omega(\rho)} |G_\mu(x,x)|\,dx \leq c\,\frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}-\frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})}}{d(\mu)}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}-\{0\}.$$

Enfin on montre facilement l'analogue de cette dernière inégalité pour $F_{x,\mu}(0)$ avec $\mu \notin \mathbb{R}_+$. Ces trois estimations impliquent :

$$(5.6)\quad |\int_\Omega (G_\mu(x,x)-F_{x,\mu}(0))\,dx| \leq c\,\frac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \times \begin{cases} |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}} \operatorname{Log}|\mu| & \text{si } n = 1 \\ |\mu|^{-\frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

pour $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\mu| > \mu_o$.

Θ étant fixé, la meilleure majoration de $|\int_\Omega G_\mu(x,x)\,dx|$ par une puissance de $|\mu|$ dans $\mathcal{R}_\Theta$ est obtenue s'il existe β, $0 < \Theta + \beta < 1$, tel que $\beta > \frac{2\Theta(2m-k)}{2m-kn}$ si $n = 1$, $\beta \geq \frac{2\Theta(2m-k)}{2m-kn}$ si $n \geq 2$, ce qui donne bien le corollaire 5.2.

Démonstration du théorème 2.1. Puisque, d'après S. Agmon [1], pour $\mu \in \rho(A)$ on a :

$$(5.7)\qquad \int_\Omega G_\mu(x,x)\,dx = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j-\mu},$$

le corollaire 5.2 et la proposition 4.4 donnent : pour $0 < \Theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$, il existe $c > 0$, $\lambda_o > 0$ tels que pour $\lambda \geq \lambda_o$ on ait :

$$(5.8) \qquad |N(\lambda) - I(\lambda)| \leq c\, \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{\Theta}{2m}}$$

Il reste à étudier $I(\lambda)$ dans $\mathcal{R}_\Theta$, avec $\Theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$. On note

$$\alpha_{m,n} = \frac{n\pi}{2m} \left(\sin \frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \int_\Omega \omega(x)\, dx.$$

(4.3), (4.4), (5.7) et (5.6), en prenant β très voisin de $1-\Theta$, donnent :

$$(5.9) \quad |f(\mu) - \alpha_{m,n}(-\mu)^{-1+\frac{n}{2m}}| \leq c\, \frac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m} - \frac{1-\Theta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m}) + \varepsilon}}{d(\mu)^2}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}_\Theta,\ |\mu| > \mu_o,\ \varepsilon > 0.$$

On choisit la courbe :

$$L(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C},\ \mu = \lambda + iy,\ a\,\lambda^{1-\frac{\Theta}{2m}} \leq |y| \leq a\lambda\} \cup \{\mu \in \mathbb{C},\ |\mu| = (1+a^2)^{1/2}.\lambda,\ \mathrm{Re}\,\mu \leq \lambda\}.$$

Pour $\lambda \geq \lambda_1$, $L(\lambda)$ est contenue dans $\mathcal{R}_\Theta \cap \{|\mu| > \mu_o\}$; l'intégration de (5.9) sur $L(\lambda)$ donne alors, avec la notation (4.6) :

$$|I(\lambda) - \frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+\frac{n}{2m}} d\mu| \leq c\, \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{1-\Theta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m}) + \frac{\Theta}{2m} + \varepsilon}, \text{ pour } \lambda \geq \lambda_1 .$$

Enfin un calcul simple de variable complexe donne :

$$|\frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+\frac{n}{2m}} d\mu - \int_\Omega \omega(x)dx\ .\ \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq c\, \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{\Theta}{2m}}$$

(5.8) et ces deux dernières majorations donnent alors le théorème 2.1.

5.2 <u>Cas où $2m-k < n$.</u>

On considère A^{2q} avec $2(2m-k)\,q > n$; avec les mêmes techniques que dans [4] on montre que le domaine $D(A^{2q})$ de A^{2q} est contenu dans $W^{2kq}_{4mq}(\Omega)$. Des calculs simples dans les espaces avec poids décrits dans [8] montrent que :

$$(A^{2q} - A'^{2q}) \in \mathcal{L}(W^{2kq}_{4mq-1}(\Omega),\ L^2(\Omega)).$$

A'^{2q} étant associé à une forme fortement coercitive sur $D(A^q)$, on en déduit, comme dans la proposition 4.1, l'existence d'une région

$$\mathcal{R}_{2q} = \{\mu \in \mathbb{C},\ d(\mu) \geq K_q\ (1 + |\mu|)^{1-\frac{1}{4mq}}\}\quad ,$$

contenue dans $\rho(A^{2q})$ et telle que pour $\mu \in \mathcal{R}_{2q}$ on ait aussi (4.1) avec A remplacé par A^{2q}.

Alors la proposition 5.1 et le corollaire 5.2 sont vrais pour le noyau de $(A^{2q}-\mu)^{-1}$. On montre facilement aussi l'analogue de (4.3) et (4.4) dans $\mathcal{R}_{2q}$; alors (4.8) est vraie pour $N_{2q}(\lambda) = \sum_{(\mathrm{Re}\,\lambda_j)^{2q}} 1$. La fonction ω associée à A^{2q} étant la même que celle associée à A on en déduit encore le théorème 2.1.

6. PRELIMINAIRES A LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2.3.

6.1. Un problème variationnel dans $\mathbb{R}_+$, à paramètre.

ξ désignant un paramètre de $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, on considère sur $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+) \times W_m^{k/2}(\mathbb{R}$ la forme :

$$c_\xi(u,v) = \int_0^\infty t^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} c_{\alpha\beta}(\xi,D_t)^\alpha u\ \overline{(\xi,D_t)^\beta\ v}\ dt,$$

où $k,\ m \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2m-1$, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, $D_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$.

On fait l'hypothèse :

pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\mathbb{R}^{n-1}$, c_ω est fortement coercitive sur $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$.

On note $(C_\omega, D(C_\omega))$ l'opérateur non borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ associé à c_ω et $(\mu_j(\omega))_{j\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des valeurs propres de C_ω. On va démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1 On suppose $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, pour tout $\mu \notin \mathbb{R}_+$, le problème

(6.1) $$c_\xi(u,v) - \mu(u,v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (f,v)_{L^2(\mathbb{R}_+)}\ ,\ \text{pour tout } v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+),$$

admet, pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ une solution unique u_μ dans $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ qui s'écrit à l'aide d'un noyau :

$$u_\mu(\xi,t) = \int_0^\infty r(\xi,\mu,t,\tau)\ f(\tau)\ d\tau,$$

où $r(\xi,\mu,t,\tau)$ est une fonction qui possède les propriétés :

(6.2) pour tous $\mu \notin \mathbb{R}_+$, $t,\tau > 0$, $\xi \mapsto r(\xi,\mu,t,\tau)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$

(6.3) pour tous $\mu \notin \mathbb{R}_+$, $t > 0$, $(\xi,\tau) \mapsto r(\xi,\mu,t,\tau)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$

(6.4) pour tout $\mu \notin \mathbb{R}_+$, $(\xi,t) \mapsto r(\xi,\mu,t,t)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n_+)$ et :

(6.5) $$\int_{\mathbb{R}^n_+} r(\xi,\mu,t,t)d\xi\, dt = \frac{\pi(n-1)}{2m-k}\left(\sin\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1}\left(\sum_{j\geq 1}\rho_j\right)\cdot(-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}},$$

où $\rho_j = \frac{1}{n-1}\int_{S_{n-2}} \mu_j(\omega)^{\frac{1-n}{2m-k}}\, d\omega$.

<u>Démonstration</u>. La coercivité forte de c_ω sur $W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$ implique l'inclusion de $D(C_\omega)$ dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}_+)$ et l'existence du résolvant $(C_\omega-\mu)^{-1}$ pour $\mu \notin \mathbb{R}_+$. De plus il résulte de la compacité de S_{n-2} qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\omega \in S_{n-2}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ on ait :

$$\|(C_\omega-\mu)^{-1}\|_{0,0,\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|(C_\omega-\mu)^{-1}\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)}$$

Alors (3.2) et (3.4) donnent pour le noyau $r(\omega,\mu,t,\tau)$ de $(C_\omega-\mu)^{-1}$ l'estimation : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $\omega \in S_{n-2}$, $\mu \notin \mathbb{R}_+$, $t,\tau > 0$ on ait :

(6.6) $$|r(\omega,\mu,t,\tau)| \leq c\,\frac{|\mu|^{\frac{1}{2m-k}}}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad |r(\omega,\mu,t,\tau)| \leq c\,(t\tau)^{-\frac{k}{2}}\,\frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

on fixe maintenant $\mu \notin \mathbb{R}_+$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, le changement de variable $z = |\xi|t$, avec les notations $w(\xi,z) = u(\xi,t)$ et $g(z) = f(t)$ transforme le problème (6.1) en :

$$c_{\xi|\xi|^{-1}}(w,v) - \mu|\xi|^{-2m+k}(w,v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (|\xi|^{-2m+k}g,v)_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

pour tout $v \in W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$.

Pour f donné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, l'unique solution v_μ de ce problème dans $W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$ est donnée par :

$$v_\mu(\xi,z) = |\xi|^{-2m+k}\int_0^\infty r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, z, z')\, g(z')\, dz'.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de u_μ et donne aussi la formule :

$$r(\xi,\mu,t,\tau) = |\xi|^{-2m+k+1}\, r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, |\xi|t, |\xi|\tau).$$

Alors les estimations (6.6) se traduisent par :

$$|r(\xi,\mu,t,\tau)| \leq c(\mu) \quad \text{et} \quad |r(\xi,\mu,t,\tau)| \leq c(\mu)\ (t\tau)^{-k/2}\ |\xi|^{-2m+1} .$$

Ces majorations permettent de montrer (6.2), (6.3) et (6.4) et donc aussi d'appliquer le théorème de Fubini pour écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} r(\xi,\mu,t,t)\, d\xi\, dt &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k} \int_0^\infty r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, z,z)\, dz\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mu_j(\xi|\xi|^{-1}) - \mu|\xi|^{-2m+k}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2m-k} \int_{S_{n-2}} \left(\int_0 \sum_{j\geq 1} \frac{r^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}}{r\,\mu_j(\omega)-\mu}\, dr\right) d\omega .\end{aligned}$$

La proposition 3.4 donnant $\mu_j(\omega) \geq c\, j^k$ pour tous $\omega \in S_{n-2}$, $j \geq 1$, on a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} r(\xi,\mu,t,t) d\xi\, dt = \frac{1}{2m-k} \sum_{j\geq 1} \int_{S_{n-2}} \frac{1}{\mu_j(\omega)} \left(\int_0^\infty \frac{r^{-1+\frac{n-1}{2m-2}}}{r - \frac{\mu}{\mu_j(\omega)}}\, dr\right) d\omega ,$$

ce qui, à l'aide de la formule $\int_0^\infty \frac{r^{-1+\alpha}}{r-\mu}\, dr = (-\mu)^{-1+\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, valable pour $0 < \alpha < 1$, $\mu \notin \mathbb{R}_+$, donne (6.5).

6.2. Etude de la résolvante d'un opérateur modèle dans $\mathbb{R}^n_+$.

Sur $W^{k/2}_m(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k/2}_m(\mathbb{R}^n_+)$, on considère la forme

$$c(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} c_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx ,$$

avec encore $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2m-1$, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$.

On suppose que pour tout $\mu < 0$, $c(u,v) - \mu(u,v)_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ est fortement coercitive sur $W^{k/2}_m(\mathbb{R}^n_+)$. Alors pour $\omega \in S_{n-2}$ la forme c_ω associée de manière évidente à c est fortement coercitive sur $W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$.

On note $(C,D(C))$ l'opérateur non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ associé à c ; pour $\mu \notin \mathbb{R}_+$ le résolvant $F_\mu = (C-\mu)^{-1}$ existe et a son image contenue dans $W^k_{2m}(\mathbb{R}^n_+)$.

Si de plus $2m-k > n$, la proposition 3.2 donne l'existence d'un noyau $F_\mu(x,y)$ pour F_μ.

On note enfin $F_\mu(x_n,x_n)$ au lieu de $F_\mu((0,x_n), (0,x_n))$.

De la proposition 6.1, en utilisant les notations de 6.1, on va déduire :

COROLLAIRE 6.2. On suppose $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$. Pour $\mu \notin \mathbb{R}_+$, on a :

$$(6.7)\qquad \int_0^\infty F_\mu(x_n,x_n)dx_n = (2\pi)^{1-n}\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\left(\sin\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1}\left(\sum_{j\geq 1}\rho_j\right)(-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}$$

Démonstration. Comme dans PHAM THE LAÏ [15], on calcule $F_\mu(x,y)$; on montre que pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n_+$ on a :

$$(6.8)\qquad F_\mu(x,y) = (2\pi)^{1-n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<x'-y',\xi>}\, r(\xi,\mu,x_n,y_n)\, d\xi \quad ,$$

les notations étant celles de 6.1 :

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, la fonction $u_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} F_\mu(x,y)\ \varphi(y)\, dy$ vérifie en particulier : pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{cases} \hat{u}_\mu(\xi,.) \in W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+) \text{ et} \\ c_\xi(\hat{u}_\xi(\xi,.),v) - \mu(\hat{u}_\mu(\xi,.),v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (\hat{\varphi}(\xi,.),v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} \end{cases},$$

pour tout $v \in W^{k/2}_m(\mathbb{R}_+)$,

où $\hat{\varphi}(\xi,x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i<x',\xi>}\varphi(x',x_n)\, dx'$ est le transformé de Fourier partielle en x' de φ.

D'après la proposition 6.1 on a donc :

$$u_\mu(x',x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<x',\xi>}\left(\int_0^\infty r(\xi,\mu,x_n,y_n)\,\hat{\varphi}(\xi,y_n)dy_n\right)d\xi$$

(6.3) et le théorème de Fubini donnent :

$$u_\mu(x',x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<x',\xi>}\, r(\xi,\mu,x_n,y_n)\hat{\varphi}(\xi,y_n)d\xi\right)dy_n$$

(6.2) et ce même théorème donnent ensuite :

$$u_\mu(x',x_n) = (2\pi)^{-(n-1)}\int_0^\infty dy_n\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<x'-y',\xi>} r(\xi,\mu,x_n,y_n)d\zeta\right)\varphi(y',y_n)d\xi\ \ dy'$$

on a donc montré l'égalité dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$ de $F_\mu(x,.)$ et de $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<x'-y',\xi>} r(\xi,\mu,x_n,y_n)d\xi$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n_+$. Ces fonctions de (x,y) étant continues dans $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$, on a bien (6.8).

Enfin (6.8), (6.4) et (6.5) donnent immédiatement le corollaire 6.2.

Sur le noyau $F_\mu(x,y)$ on a aussi le résultat suivant, conséquence immédiate de la proposition 3.2. :

PROPOSITION 6.3. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $\mu \notin \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$ on ait

$$(6.9) \qquad \int_\varepsilon^\infty |F_\mu(x_n,x_n)|\, dx_n \leq c \; \varepsilon^{1-\frac{kn}{2m}} \; \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} .$$

On donne maintenant des estimations sur l'opérateur F_μ qui seront utilisées dans l'étude des commutants pour la démonstration du théorème 2.3. Ces estimations sont basées sur un lemme, essentiel pour améliorer les résultats de PHAM THE LAÏ [16] :

Pour $r > 0$ on note : $B_+(r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < r,\ x_n > 0\}$, et pour ℓ, $k \in \mathbb{N}$,

$$W^k_\ell(B_+(r)) = \{u \in \mathcal{D}'(B'_+(r)) \;;\; x_n^k D^\alpha u \in L^2(B_+(r)) \;;\; |\alpha| \leq \ell\} ;$$

on munit $W^k_\ell(B_+(r))$ de la norme :

$$\|u\|_{W^k_\ell(B_+(r))} = \Big(\sum_{\|\alpha\| \leq \ell} \|x_n^k D^\alpha u\|^2_{L^2(B_+(r))} \Big)^{1/2} .$$

On a :

LEMME 6.4. Soient k, $m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous δ, r, $0 < \delta \leq r \leq 1$, pour tous $u \in W^k_m(B_+(1))$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq m$, on ait :

$$\|u\|_{W^k_\ell(B_+(r))} \leq c \, \{\delta^{m-\ell} \|u\|_{W^k_m(B_+(1))} + \delta^{-\ell} (\delta^k + r^k) \|u\|_{L^2(B_+(1))}\} .$$

Démonstration. D'après [8], $\|v\|_{W^k_\ell(B_+(1))}$ est équivalente à $\|x_n^k v\|_{H^\ell(B_+(1))}$ si $k \geq \ell$ et à $\{\|v\|_{H^{\ell-k}(B_+(1))} + \|x_n^k v\|_{H^\ell(B_+(1))}\}$ si $k < \ell$.

Un résultat classique d'interpolation donne alors dans les deux cas l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout ρ, $0 < \rho \leq 1$, tout $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq m$, tout $v \in W_m^k(B_+(1))$ on ait :

$$\|v\|_{W_\ell^k(B_+(1))} \leq c\{\rho^{m-\ell}\Big(\sum_{|\beta|=m} \|D^\beta(x_n^k v)\|_{L^2(B_+(1))} + \sum_{|\gamma|=m-k} \|D^\gamma v\|_{L^2(B_+(1))}\Big) + \rho^{k-\ell}\|v\|_{L^2(B_+(1))}$$

$$+ \rho^{-\ell} \|x_n^k v\|_{L^2(B_+(1))}\} .$$

Soit alors $0 < r \leq 1$ et $u \in W_m^k(B_+(1))$. On sait $y = rx$, $v(x) = u(rx)$ dans cette inégalité ; on obtient, pour tout α, $|\alpha| \leq \ell$:

$$r^{|\alpha|-\ell}\|y_n^k D^\alpha u\|_{L^2(B_+(r))} \leq c\{(\rho r)^{m-\ell}\Big(\sum_{|\beta|=m} \|D^\beta(y_n^k u)\|_{L^2(B_+(r))} + \sum_{|\gamma|=m-k} \|D^\gamma u\|_{L^2(B_+(r))}\Big) +$$

$$(\rho r)^{k-\ell}\|u\|_{L^2(B_+(r))} + (\rho r)^{-\ell}\|y_n^k u\|_{L^2(B_+(r))}\} ,$$

d'où le lemme.

Pour $0 < \varepsilon \leq 1/2$, on introduit une fonction ζ_ε possédant les propriétés

$$(6.10) \qquad \begin{cases} \zeta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) , \ 0 \leq \zeta_\varepsilon \leq 1, \ \zeta_\varepsilon = 1 \text{ dans } \|x\| \leq \varepsilon \\ \text{le support de } \zeta_\varepsilon \text{ est contenu dans } \|x\| < 2\varepsilon, \text{ et} \\ \qquad \|D^\alpha \zeta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c\, \varepsilon^{-|\alpha|} \end{cases}$$

Du lemme 6.4 on va déduire :

<u>PROPOSITION 6.5</u>. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \notin \mathbb{R}_+$, $0 < \varepsilon \leq 1/2$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait :

$$(6.11) \qquad \|\zeta_\varepsilon F_\mu\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+^n} \leq c\, \frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

$$(6.12) \qquad \|[C, \zeta_\varepsilon] F_\mu\|_{0,0,\mathbb{R}_+^n} \leq c\, \frac{|\mu|}{d(\mu)} \left(\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1}\right)^{1/2m}$$

<u>Démonstration</u>. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \notin \mathbb{R}_+$ on ait :

(6.13) $$\|F_\mu\|_{0,0,\mathbb{R}^n_+} \leq \frac{c}{d(\mu)} \text{ et } \|F_\mu\|_{0,2m-h:k-h,\mathbb{R}^n_+} \leq c\,\frac{|\mu|}{d(\mu)}, \text{ pour } 0 \leq h \leq k.$$

Ces majorations et le lemme 6.4 donnent pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $0 \leq h \leq k$, $0 \leq \ell \leq 2m-h$ et $0 < \delta \leq 2\varepsilon$:

(6.14) $$\|F_\mu f\|_{W^{k-h}_\ell(B_+(2\varepsilon))} \leq \frac{c}{d(\mu)} \{\delta^{2m-h-\ell}\,|\mu| + \delta^{-\ell}(\delta^{k-h}+\varepsilon^{k-h})\}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

on fait alors $\delta = (\varepsilon^{k-h}\,|\mu|^{-1})^{\frac{1}{2m-h}}$ avec $\delta < \varepsilon$; (6.14) devient :

(6.15) $$\|F_\mu f\|_{W^{k-h}_\ell(B_+(2\varepsilon))} \leq \frac{c}{d(\mu)}\,\varepsilon^{k-h}(\varepsilon^{k-h}|\mu|^{-1})^{-\frac{\ell}{2m-h}}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)},$$

pour $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$

De cette estimation on déduit alors facilement (6.11) et (6.12).

7. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.3 : $n > 2m/k$.

7.1. Cas où $2m-k > n$.

D'après P. BOERO-R. PAVEC [5], pour chaque point s de Γ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de s dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme Θ_s de $\mathcal{V}$ dans $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < 1\}$ qui possède les propriétés :

(7.1)
- $\Theta_s(s) = 0$, $\Theta_s(\mathcal{V} \cap \Omega) \subseteq \{x \in B(1),\ x_n > 0\}$, $\Theta_s(\mathcal{V} \cap \Gamma) \subseteq \{x \in B(1),\ x_n = 0$
- l'image par Θ_s de la normale en s à Γ est contenue dans $\{x \in \mathbb{R}^n,\ x' = 0\}$
- pour tout $x \in \mathcal{V}$ la $n^{\text{ième}}$ coordonnée de $\Theta_s(x)$ est $\varphi(x)$
- si $J(x)$ désigne la matrice jacobienne de Θ_s en x, $J(s)$ est une isométrie de T_s sur $T = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n = 0\}$, ${}^tJ(s)$ est une isométrie de T sur T_s et l'image par ${}^tJ(s)$ de $(0,\dots,0,1)$ est $\|\operatorname{grad}\varphi(s)\|\,\nu_s$,
- si ρ_s désigne la valeur absolue du déterminant jacobien de Θ_s^{-1}, Γ étant compacte, il existe ε_o, $0 < \varepsilon_o \leq 1$, tel que la boule $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \leq \varepsilon_o\}$ soit contenue dans $\Theta_s(\mathcal{V})$ pour tout $s \in \Gamma$ et tel que l'application $(s,h) \longmapsto \rho_s(0,h)$ soit continue sur $\Gamma \times [0,\varepsilon_o]$.

On note $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \Omega$ et $U = \Theta_s(\mathcal{U})$. Par le difféomorphisme Θ_s la forme a est transformée en une forme c fortement coercitive sur l'espace des fonctions de $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$ à support dans $\overline{U}$: la restriction à $\mathcal{U}$ de $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$ est transformée en un opérateur A_μ continu dans $L^2(U)$, à image dans $W_{2m}^k(U)$ qui vérifie : pour $f \in L^2(U)$,

$$c(H_\mu f,v) - \mu(H_\mu f,v)_{L^2(U)} = (f,v)_{L^2(U)} \quad \text{pour tout } v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n) \text{ à support dans } \overline{U}.$$

Alors pour $2m-k > n$, G_μ et H_μ sont des opérateurs intégraux dont les noyaux $G_\mu(x,y)$ et $H_\mu(x,y)$ sont liés par la relation :

$$H_\mu(x,y) = G_\mu(\Theta_s^{-1}(x),\ \Theta_s^{-1}(y))\ \rho_s(y).$$

Pour étudier $H_\mu(x,y)$ et par là même $G_\mu(x,y)$ on va se ramener à la situation de 6.2 : on a

$$c(u,v) = \int_U x_n^k \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta} \circ \Theta_s^{-1}\ P_\alpha(x,D)u\ \overline{P_\beta(x,D)v}\ dx,$$

avec $(P_\alpha(x,D)u) \circ \Theta_s = D^\alpha(u \circ \Theta_s)$; $P_\alpha(x,D)$ est donc un opérateur différentiel d'ordre $|\alpha|$; on note $P'_\alpha(0,D)$ la partie homogène d'ordre $|\alpha|$ de $P_\alpha(x,D)$, les coefficients étant figés en 0 et :

$$c'_s(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)\ P'_\alpha(0,D)u\ \overline{P'_\beta(0,D)v}\ dx$$

Pour tout $\mu < 0$, $c'_s(u,v) - \mu(u,v)_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$ est fortement coercitive sur $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$; C'_s étant l'opérateur non borné associé à c'_s dans $L^2(\mathbb{R}_+^n)$, pour $2m-k > n$ on note alors $F_\mu(x,y)$ le noyau de l'opérateur $(C'_s-\mu)^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$.

On va utiliser d'abord la fin du paragraphe 6.2 pour démontrer le résultat de comparaison suivant :

<u>PROPOSITION 7.1</u>. On suppose $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$. Soient Θ, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\Theta + \beta < 1$; il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour $s \in \Gamma$, $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\mu| > \mu_0$ on ait :

$$\left| \int_0^{|\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}}} (G_\mu(\Theta_s^{-1}(0,h),\Theta_s^{-1}(0,h))\rho_s(0,h) - F_\mu(h,h))dh \right| < c\, \frac{|\mu|^{1+\frac{n-1}{2m-k}-\frac{\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2}$$

<u>Démonstration</u>. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o/2$ on considère deux fonctions ζ_ε et η_ε vérifiant (6.10) et de plus $\eta_\varepsilon\ \zeta_\varepsilon = \zeta_\varepsilon$. Pour $\mu \in \rho(A)$ on note

$$T_{\varepsilon,\mu} = \zeta_\varepsilon (H_\mu - F_\mu)\ \zeta_\varepsilon\ .$$

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'_s$ désignent les opérateurs différentiels associés à c et c'_s respectivement, on a :

$$T_{\varepsilon,\mu} = \zeta_\varepsilon\ F_\mu\ \eta_\varepsilon(\mathscr{C}'_s - \mathscr{C}) H_\mu\ \zeta_\varepsilon - \zeta_\varepsilon\ F_\mu [\eta_\varepsilon, \mathscr{C}'_s]\ H_\mu\ \zeta_\varepsilon \equiv T_1 + T_2 .$$

Pour estimer T_1 on écrit $\mathscr{C}'_s - \mathscr{C}$ sous la forme

$$\sum_{h=0}^{k} x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} (q_{h,\alpha}(x) - q_{h,\alpha}(0))\ D^\alpha + \sum_{h=0}^{k} x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leq 2m-h-1} P_{h,\alpha}\ D^\alpha$$

alors on a : pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$,

$$(7.2)\quad \|\eta_\varepsilon(\mathscr{C}'_s - \mathscr{C}) H_\mu\ \zeta_\varepsilon\ f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\ \{\varepsilon \|H_\mu\ \zeta_\varepsilon\ f\|_{W^k_{2m}(U)} + \sum_{h=0}^{k} \|H_\mu\ \zeta_\varepsilon\ f\|_{W^{k-h}_{2m-h-1}(B_+(2\varepsilon))}\}.$$

D'après (4.1), H_μ vérifie des inégalités identiques à (6.13) pour $\mu \in \mathscr{R} - \{0\}$ donc aussi les inégalités (6.15) avec $f \in L^2(U)$ et $\mu \in \mathscr{R} - \{0\}$.

Ces majorations, (7.2) et (6.11) impliquent :

$$(7.3)\qquad \|T_1\|_{0,0,\mathbb{R}^n_+} \leq c\ \frac{\varepsilon|\mu|}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|T_1\|_{0,2m:k,\mathbb{R}^n_+} \leq \frac{\varepsilon|\mu|^2}{d(\mu)^2}\ ,\ \text{pour } \mu \in \mathscr{R},\ |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$$

pour estimer T_2 on introduit encore $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$ vérifiant (6.10) et $\varphi_j\ \varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq p$ avec $\varphi_1 = \eta_\varepsilon$ et $\varphi_{p+1} = \zeta_\varepsilon$. On a :

$$\zeta_\varepsilon\ F_\mu[\eta_\varepsilon, \mathscr{C}'_s] = -\ \zeta_\varepsilon\ F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_p]\ F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_{p-1}] \ldots F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_1].$$

De plus $H_\mu\ \zeta_\varepsilon$ vérifie aussi une inégalité de type (6.12) pour $\mu \in \mathscr{R},\ |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$.

Alors, avec (6.11), (6.12) on obtient : pour tout $p \geq 1$ il existe $c > 0$ tel que pour $\mu \in \mathscr{R},\ |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait :

$$(7.4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \|T_2\|_{0,0,\mathbb{R}^n_+} &\leq \frac{c}{d(\mu)}\ \Big(\frac{|\mu|}{d(\mu)}\ (\varepsilon^{-2m+k}\ |\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,\mathbb{R}^n_+} &\leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)}\ \Big(\frac{|\mu|}{d(\mu)}\ (\varepsilon^{-2m+k}\ |\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p \end{aligned} \right.$$

Ayant des majorations identiques pour l'adjoint (7.3), (7.4), (3.2) et (3.3) montrent que pour tout $p \geq 1$, il existe $c > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_o}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, $\mu \in \mathcal{B}$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait :

$$\begin{cases} |T_{\varepsilon,\mu}(x,y)| \leq c \dfrac{|\mu|^{\frac{n}{2m-k}}}{d(\mu)} \left(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} + \left(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m}\right)^p\right) \\ |T_{\varepsilon,\mu}(x,y)| \leq c\,(x_n y_n)^{-\frac{kn}{4m}} \left(\dfrac{\varepsilon|\mu|}{d(\mu)} + \left(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m}\right)^p\right) \end{cases}$$

Soit alors $\beta > 0$; on fait $\varepsilon = |\mu|^{\frac{\beta}{2m-k}}$ dans les inégalités ci-dessus ; en notant $H_\mu((0,h),(0,h)) = H_\mu(h,h)$, de même pour F_μ, on obtient : pour $|\mu| > \mu_o \geq 1$, $\mu \in \mathcal{R}$, $0 < h < |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}}$,

$$\begin{cases} |H_\mu(h,h)-F_\mu(h,h)| \leq c \dfrac{|\mu|^{1+\frac{n-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \left(1 + |\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m-k}} d(\mu) \cdot \left(\dfrac{|\mu|^{1+\frac{\beta-1}{2m}}}{d(\mu)}\right)^p\right) \\ |H_\mu(h,h)-F_\mu(h,h)| \leq c\, h^{-\frac{kn}{2m}} \dfrac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}-\frac{\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \left(1+|\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m-k}} d(\mu) \left(\dfrac{|\mu|^{1+\frac{\beta-1}{2m}}}{d(\mu)}\right)^p\right) \end{cases}$$

Soit enfin $\Theta \in \mathbb{R}$, $0 < \Theta < 1$. Comme en 5.1, ces deux dernières inégalités montrent que pour $\Theta + \beta < 1$ on a :

$$\begin{cases} |H_\mu(h,h)-F_\mu(h,h)| \leq c \dfrac{|\mu|^{1+\frac{n-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \\ |H_\mu(h,h)-F_\mu(h,h)| \leq c\, h^{-\frac{kn}{2m}} \dfrac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}-\frac{\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \end{cases} \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{R}_\Theta,\ |\mu| > \mu_o,\ 0 < h < |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}}$$

On intègre alors la première inégalité sur $(0, |\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$ et la seconde sur $(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}}, |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}})$; on obtient la proposition 7.1 puisqu'on peut choisir μ_o indépendant de s.

<u>COROLLAIRE 7.2</u> On suppose $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$. On a

$$\left|\int_\Omega G_\mu(x,x)dx\right| = O(|\mu|^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}) \text{ dans } \mathcal{R}_\Theta \text{ avec}$$

$$(7.5) \qquad \begin{cases} \Theta \leq \dfrac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)} & \text{si } \dfrac{2m}{k} < n < \dfrac{4m}{k} - 1 \\ \Theta < \dfrac{m}{3m-k} & \text{si } n \geq \dfrac{4m}{k} - 1 \end{cases}$$

Démonstration. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a $P'_\alpha(y,\xi) = ({}^tJ(\Theta_s^{-1}(y))\xi)^\alpha$ donc pour $\omega \in S_{n-2}$, en notant $\omega_s = {}^tJ(s)\binom{\omega}{0}$, on a d'après (7.1) et avec des notations analogues à celles de 6.2 :

$$c'_{s,\omega}(u,v) = \int_0^\infty x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)(\omega_s + \| \operatorname{grad} \varphi(s)\| \nu_s \partial_{x_n})^\alpha u \, \overline{(\omega_s + \| \operatorname{grad} \varphi(s)\| \nu_s \partial_{x_n})^\beta v} \, dx_n$$

La $j^{\text{ième}}$ valeur propre de $c'_{s,\omega}$ est donc $\| \operatorname{grad} \varphi(s)\|^k \mu_j(s,\omega_s)$, où $\mu_j(s,\omega_s)$ est la $j^{\text{ième}}$ valeur propre de β_{s,ω_s}. Alors le corollaire 6.2 donne, avec la notation (2.3) :

$$\int_0^\infty F_\mu(x_n,x_n)dx_n = \frac{\pi(n-1)}{2m-k} \left(\sin \frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1} C(s) \, (-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}$$

On note $\quad \gamma_{m,k,n} = \dfrac{\pi(n-1)}{2m-k} \left(\sin \dfrac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1} \displaystyle\int_\Gamma C(s) \, ds.$

Les propositions 6.3 et 7.1 impliquent alors : pour $|\mu| > \mu_0$, $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$, avec $\rho = |\mu|^{-\frac{\beta}{2m-k}}$

$$\left| \int_{\Omega-\Omega(\rho)} G(x,x)dx - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}} \right| \leq c \left\{ \frac{|\mu|^{1+\frac{n-1-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})}}{d(\mu)} \right\}$$

Ce qui, joint à la majoration déduite de (4.1) et (3.3) :

$$\left| \int_{\Omega(\rho)} G_\mu(x,x)dx \right| \leq c \, \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})}}{d(\mu)}, \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{R},$$

donne enfin : pour $|\mu| > \mu_0$, $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$:

$$(7.6) \quad \left| \int_\Omega G_\mu(x,x)dx - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}} \right| \leq c \left\{ \frac{|\mu|^{1+\frac{n-1-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}(1-\frac{kn}{2m})}}{d(\mu)} \right\}$$

Θ étant fixé, la meilleure majoration de $\left|\int_\Omega G_\mu(x,x)\,dx\right|$ par une puissance de $|\mu|$ dans $\mathcal{R}_\Theta$ est obtenue s'il existe β, $0 < \Theta + \beta < 1$ tel que :

$$\Theta \, \frac{2m-k}{m} \leq \beta \leq 1 - \frac{2m-k}{kn-2m} \, \Theta ,$$

et ceci équivaut au corollaire 7.2.

Démonstration du théorème 2.3. Le corollaire 7.2 et la proposition 4.4 donnent :

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \le c\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\Theta}{2m}} \quad \text{pour } \lambda > \lambda_o, \ \Theta \text{ appartenant aux in-}$$

tervalles $(0,\Theta_n)$ décrits en (7.5) suivant les valeurs de n.

On étudie encore $I(\lambda)$: (4.4) et (7.6) donnent, pour $\mu \in \mathcal{R}_\Theta$, $|\mu| > \mu_o$, $0 < \Theta + \beta < 1$:

$$|f(\mu) - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}| \le c\, \frac{|\mu|^{\frac{n-1}{2m-k}}}{d(\mu)} \left(\frac{|\mu|}{d(\mu)}\right)^{1-\frac{1}{2m}} + \frac{|\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)} + |\mu|^{-(1-\beta)\frac{kn-2m}{2m(2m-k)}}$$

On choisit $L(\lambda)$ du même type qu'en 5.1. Alors pour λ assez grand :

$$|I(\lambda) - \frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}} d\mu| \le c\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} \{\lambda^{-\frac{(1-\Theta)}{2m}} + \lambda^{\frac{-\beta}{2m-k} + \frac{\Theta}{2m}} + \lambda^{-(1-\beta)\frac{kn-2m}{2m(2m-k)}} \mathrm{Log}\lambda$$

Enfin le même calcul qu'en 5.1 donne pour λ assez grand :

$$\left|\frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+\frac{n-1}{2m-k}} d\mu - \int_\Gamma C(s)\, ds.\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}}\right| \le c\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\Theta}{2m}}$$

On a donc : Θ vérifiant (7.5), pour tout β, $0 < \Theta + \beta < 1$, pour λ assez grand :

$$|N(\lambda) - \int_\Gamma C(s)ds.\lambda^{\frac{n-1}{2m-k}}| \le c\, \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} (\lambda^{-\frac{\Theta}{2m}} + \lambda^{\frac{-(1-\Theta)}{2m}} + \lambda^{\frac{-\beta}{2m-k} + \frac{\Theta}{2m}} + \lambda^{-(1-\beta)\frac{kn-2m}{2m(2m-k)}} \mathrm{Log}\lambda$$

On note $f(\lambda)$ la parenthèse de cette dernière inégalité et on fait

$$\beta = \frac{2m-k}{2m}\, \alpha\,\Theta + (1-\alpha)(1-\Theta) \ , \ \text{pour } 0 < \alpha < 1 \ ,$$

dans $f(\lambda)$. Alors $f(\lambda) \le c\, \lambda^{-\frac{\Theta}{2m}}$ pour λ assez grand si $\Theta \le 1/2$ et si :

il existe $\alpha \in]0,1[$, $\dfrac{2m(4m-k-kn)\Theta}{(kn-2m)(2m-\Theta(4m-k)} < \alpha < \dfrac{2(m-\Theta(3m-k))}{2m-\Theta(4m-k)}$

Cette condition est toujours vérifiée si $n \ge \frac{4m}{k} - 1$ et seulement pour $\Theta < \dfrac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)}$

si $n < \frac{4m}{k} - 1$; mais dans ce dernier cas on voit facilement que pour $\Theta \le 1/2$ et

$\Theta \le \dfrac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)}$ on a $f(\lambda) \le c\, \lambda^{-\frac{\Theta}{2m}}$ Log λ.

Ceci démontre le théorème 2.3 dans le cas $2m-k > n$.

7.2 Cas où 2m-k < n.

On procède comme en 5.2 pour se ramener à l'étude du noyau de $(A^{2q}-\mu)^{-1}$ avec $2q(2m-k) > n$, et on compare ce noyau à celui de $(B_s'^{2q}-\mu)^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - Lectures on elliptic boundary value problems.
Van Nostrand Mathematical Studies.

[2] S. AGMON - Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators.
Archive for rational mechanics and analysis. vol 28 n° 3 (1968).

[3] S. AGMON et Y. KANNAÏ - On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators.
Israël J. Math 5, 1-30 (1967).

[4] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 34 n° 5, 361-379 (1969).

[5] P. BOERO - R. PAVEC - Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids.
CRAS Paris t. 270 (1970) p. 1416-1419.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels.
CRAS Paris t. 279 (1974) 651-653.

[7] P. BOLLEY - J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels.
CRAS Paris t. 282 (1976) 45-47.

[8] P. BOLLEY - J. CAMUS - Espaces de Sobolev avec poids.
Sém. Anal. Fonctionnelle Rennes 1968-1969.

[9] C. GOHBERG et G. KREIN - Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien.
Dunod - Paris.

[10] P. MALLIAVIN - Un théorème taubérien avec reste pour la transformée de Stieljes
CRAS Paris 255 (1962) 2351-52.

[11] C. NORDIN - The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator.
Arkivför Matematik vol. 10 (1972) p. 3-21.

[12] PHAM THE LAÏ - Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés.
Israël J. of Math., vol. 17 (1974) p. 364-379.

[13] PHAM THE LAÏ - Noyaux d'Agmon.
Séminaire J. Leray, Collège de France (1973).

[14] PHAM THE LAÏ - Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2.
CRAS Paris t. 278 (1974) p. 1619-1622.
Séminaire J. Leray Collège de France.

[15] PHAM THE LAÏ - Opérateurs elliptiques dégénérés : comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres.
CRAS Paris t. 280 (1975) p. 1067-1070.
Journal de Math Pures et appl. vol. 55 (1976) p. 379-420.

[16] PHAM THE LAÏ - Estimation du reste dans la théorie spectrale d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
Séminaire Goulaouic-Schwartz 975-76 exposé n° X.

[17] N. SHIMAKURA - Quelques exemples de ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre.
Proc. Japan Acad. Sc. 46 (1970) p. 1065-1069.

[18] L. VULIS - Z. SOLOMJAK - Spectral asumptotics of degenerate elliptic operators
Soviet Math Dokl vol. 13 (1972) p. 1484-1488.