

GÖRAN HÖGNÄS

Marche aléatoire sur un demi-groupe de matrices $n \times n$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__1_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Marche aléatoire sur un demi-groupe de matrices $n \times n$

Göran Högnäs

0. INTRODUCTION

Regardons un produit (aléatoire)

$$s_k = x_k x_{k-1} \cdots x_2 x_1,$$

de matrices $n \times n$ non forcément régulières, c'est-à-dire un produit d'opérateurs linéaires de R^n dans lui-même. Alors le rang de s_k est décroissant, et il va "vraisemblablement" atteindre une limite. Soit maintenant S le sous-demi-groupe de $M(n,n)$ engendré par les x_k , $M(n,n)$ étant le demi-groupe multiplicatif de matrices réelles $n \times n$. Si l'on s'intéresse au comportement asymptotique de s_k , il convient d'étudier :

$$T_b = \{ x \in S \mid \text{rang}(x) \leq b \}$$

où $b = \min \{ \text{rang}(x) \mid x \in S \}$.

T_b est un idéal, c'est-à-dire $ST_b, T_bS \subseteq T_b$; en particulier, T_b est un sous-demi-groupe de S .

Déf.: Pour $x \in S$ on notera $N(x)$ le sous-espace $\{ N \in R^n \mid x(N) = 0 \}$ et $R(x)$ pour $x(R^n)$.

Si $x, y \in T_b$ on a $xy, yx \in T_b$ d'où $\forall x, y \in T_b$:

$$N(x) \cap R(y) = \{0\}$$

Autrement dit, R^n est somme directe des sous-espaces $N(x)$ et $R(y)$ de dimensions $n-b$ et b , respectivement. Or, si N_0 et R_0 sont de tels sous-espaces, l'ensemble

$$G(R_0, N_0) = \{x \in M(n, n) \mid R(x) = R_0, N(x) = N_0\}$$

est un groupe ! (= $GL(b, R)$). T_b est alors un sous-ensemble d'une réunion de groupes (isomorphes)

$$T_b \subseteq \bigcup_R \bigcup_N G(R, N) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} T'_b$$

En fait, on peut dire plus :

Soient $x \in G(R_i, N_j) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} G_{ij}$ et e_{ij} l'élément neutre de ce groupe. Alors

$$x = e_{i0} e_{00} x e_{00} e_{0j} = e_{i0} \bar{x} e_{0j}$$

où $\bar{x} = e_{00} x e_{00} \in G_{00}$.

On pose $E = \{e_{i0}\}$, $F = \{e_{0j}\}$, $G = G_{00}$. Alors

$$T'_b = EGF \quad (\cong ExGxF)$$

La multiplication s'écrit de la manière suivante :

$$x = e_{i0} \bar{x} e_{0j}, \quad y = e_{i'0} \bar{y} e_{0j'}$$

$$xy = e_{i0} \bar{x} \underbrace{e_{0j} e_{i'0}}_{EG} \bar{y} e_{0j'}$$

EG

T'_b est un demi-groupe dit complètement simple (sans zéro)

Exemple 1 Un demi-groupe de matrices 2×2 de rang < 1 .

$$S = \left(\begin{array}{cc|c} c & c\mu & \\ \lambda c & \lambda c\mu & \end{array} \right) \quad \lambda, \mu, c \in \mathbb{R}$$

S contient "la plupart" des matrices de rang 1.

$$x = \begin{pmatrix} c & c\mu \\ \lambda c & \lambda c\mu \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} c' & c'\mu' \\ \lambda'c' & \lambda'c'\mu' \end{pmatrix}$$

$$xy = \begin{pmatrix} c(1+\mu\lambda')c' & c(1+\mu\lambda')c'\mu' \\ \lambda c(1+\mu\lambda')c' & \lambda c(1+\mu\lambda')c'\mu' \end{pmatrix}$$

$$xy \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad cc' \neq 0 \text{ et } 1+\mu\lambda' \neq 0$$

Si $x \neq 0$ alors $N(x) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 + \mu t_2 = 0\}$
 et $R(x) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_2 = \lambda t_1\}$

$$R(x) \cap N(x) \neq \{0\} \quad (\Leftrightarrow R(x) = N(x)) \quad \Leftrightarrow \quad 1+\mu\lambda = 0$$

Si $x^2 \neq 0$ alors x appartient à un groupe, d'élément neutre :

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{1+\mu\lambda} & \frac{\mu}{1+\mu\lambda} \\ \frac{\lambda}{1+\mu\lambda} & \frac{\mu\lambda}{1+\mu\lambda} \end{array}$$

Remarques

. Notre description de T_b ne servira pas à grand-chose si s_k n'atteint "presque jamais" T_b , c'est-à-dire

$$\sum_{k \geq 1} \Pr \{ s_k \in T_b \} = 0$$

Alors on regarde T_a ($b < a \leq n$) où
 $a = \min \{ r \mid \sum \Pr \{ s_k \in T_r \} > 0 \}$. Mais les éléments de
 T_a ne sont pas aussi faciles à décrire que ceux de T_b . Dans
le cas discret $T_a = T_b$ et dans le cas compact on sait aussi
utiliser T_b même si T_b n'est pas atteint.

.. Si dans le cas S discret on ajoute une condition de
récurrence (à préciser) T_b est lui-même de la forme EG'F avec
 G' sous-groupe de G (MARTIN-LÖF). En outre G' est un groupe
récurrent (LARISSE).

Dans le cas général (avec des conditions supplémentaires)
on peut démontrer que T_a est "p.s." un demi-groupe complètement
O-simple (avec une représentation analogue à celle vue plus
haut, à ceci près que $e_{oi} e_{jo} \in G \setminus \{0\}$). Le demi-groupe S de
l'exemple 1 est complètement O-simple.

I DEFINITIONS ET NOTATIONS

$M(n,n)$, muni de la topologie de \mathbb{R}^{n^2} (qui est localement
compact à base dénombrable), est un demi-groupe topologique,
c'est-à-dire, la multiplication est une application continue
de $M(n,n) \times M(n,n)$ dans $M(n,n)$.

Soit S un sous-demi-groupe localement compact de $M(n,n)$, engendré en tant que demi-groupe par une probabilité régulière sur S :

$$S = \overline{\bigcup_{k \geq 1} S_\mu^k}$$

où S_μ est le support de μ . Si l'on pose $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mu^k$, $S_\nu = S$.

Si on suppose S fermé dans $M(n,n)$ les calculs se simplifient. On ne le supposera pas dans cet exposé. ($GL(n,R)$ n'est pas fermé dans $M(n,n)$)

Soit

$$T_r = \{x \in S \mid \text{rang}(x) \leq r\} \quad (0 \leq r \leq n)$$

T_r est un idéal fermé de S . De plus, $\nu(T_r) > 0$ implique $\mu^k(T_r^c) \leq d^k$ ($d < 1$, k assez grand.)

On a

$T_r = \{x \in S \mid \text{tous les mineurs de } x \text{ d'ordre } \geq r+1 \text{ sont } = 0\}$
 donc T_r est fermé.

Pour $B \in S$, $x \in S$, $x^{-1}B \stackrel{\text{déf}}{=} \{s \in S \mid xs \in B\}$.

$$\begin{aligned} \text{Maintenant } x^{-1} T_r^c &= \emptyset \text{ si } x \in T_r \\ &\subseteq T_r^c \text{ si } x \in T_r^c \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mu^{k_1 + k_2}(T_r^c) \leq \int_{T_r^c} \mu^{k_1}(x^{-1} T_r^c) \mu^{k_2}(dx) \leq \mu^{k_2}(T_r^c) \mu^{k_1}(T_r^c)$$

Soit $a = \min \{r \mid \nu(T_r) > 0\}$. ν -presque tous $x \in T_a \setminus T_{a-1}$ satisfait à la condition suivante :

$$\nu \{y \mid xy \text{ ou } yx \in T_{a-1}\} = 0$$

On va introduire maintenant la condition de récurrence suivante pour $x \in S$:

$$(*) \text{ Pour tout voisinage } V_x \text{ de } x : \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k(V_x) = \infty$$

On désignera par H l'ensemble des points satisfaisant à $(*)$

DANS CE QUI SUIT ON SUPPOSERA TOUJOURS QU'ON A : $H \neq \emptyset$

La condition de récurrence positive s'écrit :

$$(**) \text{ Pour tout } V_x : \limsup \mu^n(V_x) > 0$$

On désignera par H' les points qui satisfont à $(**)$.

Exemple 2 Dans le cas du demi-groupe multiplicatif $S = [0, \infty)$ on peut facilement trouver des probabilités μ_1, μ_2, μ_3 , t.q.

$$H = \emptyset \text{ si } \mu = \mu_1$$

$$H' = \{0\}, H = S \text{ si } \mu = \mu_2$$

$$H = H' = \{0\} \text{ si } \mu = \mu_3$$

On montre assez facilement que H est un idéal fermé de S , contenu dans T_a .

$$\left[S \text{ discret : } H = T_b \text{ complètement simple sans zéro} \right]$$

2. CAS ABELIEN

Dans cette section S est donc commutatif. Notons qu'un demi-groupe abélien complètement simple est nécessairement un groupe. Dans le cas discret $H = T_b$ est un groupe abélien de matrices de rang b .

Exemple 1a : Dans le demi-groupe S de Ex.1 on a

$$0 \neq xy = yx \iff \mu = \mu', \lambda = \lambda'$$

les sous-groupes abéliens les plus grands sont alors de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & c\mu \\ \lambda c & \lambda c\mu \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{avec } 1 + \lambda\mu \neq 0$$

Si $x_0 \in T_a$ tel que $v\{y \mid x_0 y \in T_{a-1}\} = 0$ (cette condition-là vaut pour p.t.t $x_0 \in T_a$) alors on définit

$$C = \{y \in T_a \mid x_0 y \in T_a \setminus T_{a-1}\}$$

Théorème : ou $H \subseteq T_{a-1}$ ou $H = T_a = C \cup T_{a-1}$, et C est un groupe abélien localement compact. En particulier, cela est le cas quand $v(H) > 0$.

$$\left[T_{a-1} \text{ peut très bien être vide} \right]$$

Démonstration (en gros) : La commutativité entraîne que les matrices de C ont toutes même noyau et même image. C est un demi-groupe, donc un sous-demi-groupe abélien d'un groupe G localement compact. D'autre part, C est fermé et dense, dans $T_a \setminus T_{a-1}$, donc égal à $T_a \setminus T_{a-1}$.

Si $H \subseteq T_{a-1}$ il n'y a rien à prouver.

Soit alors $x \in H \cap C$. Si V_x est un voisinage de x , écrivons :

$$V_{1x} = V_x \cap C. \quad \sum_{k \geq 1} \mu^n(V_{1x}^k) = \infty \text{ puisque } \sum_{k \geq 1} \mu^n(T_a^k) < \infty$$

Soit maintenant $S_k = X_k X_{k-1} \dots X_2 X_1$, une marche aléatoire sur S de loi μ . On peut démontrer que :

$$P(S_k \in V_{1x} V_{1x}^{-1} \cap C \text{ infiniment souvent (i.s.)}) = 1$$

[$AB^{-1} = \bigcup_{b \in B} Ab^{-1}$]. Il s'ensuit que $\bar{C}x$ -fermeture dans le groupe $G - \bigcup_{b \in B} b \in B$ est un idéal minimal de \bar{C} [la démonstration fait appel d'une manière essentielle à l'indépendance des v.a. $\{X_k\}$ et au fait que G est un groupe topologique]. La théorie des demi-groupes nous dit qu'alors \bar{C} contient un groupe abélien qui, en fait, est égal à \bar{C} . C est localement compact et dense dans \bar{C} , donc ouvert dans \bar{C} . Un demi-groupe ouvert et dense d'un groupe est lui-même un groupe. C est un groupe topologique puisque la topologie est localement compacte [théorème d'ELLIS] : La mesure $\mu(.e^{-1})$ restreinte à C engendre, en fait, la marche aléatoire sur C .

La théorie des marches aléatoires sur les groupes donne,

pour tout $x \in C$, $P_x (S_k \in V_x \text{ infiniment souvent}) = 1$

(on note cela : $x \rightarrow x \text{ i.s.}$) . C étant dense dans T_a on a $xe = x$

pour tout $x \in T_a$, ce qui entraîne le

Corollaire : Si $H = T_a$ alors $x \rightarrow x \text{ i.s.}$ pour tout $x \in T_a$.

Remarque : Sous l'hypothèse que le noyau de transition pour la marche aléatoire ait une composante continue non-triviale au point $x \in H$ [notion introduite par TUOMINEN-TWEEDIE équivalente à l'étalement de μ dans le cas d'un groupe] on obtient que $H = T_a$ et que C est un groupe ($H \subseteq T_{a-1}$ ne s'applique pas).

Quant à la récurrence positive, on a le résultat suivant:

Théorème : ou $H' \subseteq T_{a-1}$

ou $H' = C$ qui est alors compact et égal à T_a , c'est-à-dire $T_{a-1} = \emptyset$.

3. CAS NON-ABELIEN

On revient à la situation de la 1ère section, c'est-à-dire S n'est plus forcément abélien. Regardons les matrices de rang a d'un peu plus près. Soit $T'_r = \{ x \in M(n,n) \mid \text{rang}(x) \leq r \}$

On définit alors [quotient de REES] le demi-groupe T'_a / T'_{a-1} (que l'on appellera S') de la façon suivante : $S' = (T'_a \setminus T'_{a-1}) \cup \{0\}$ et la multiplication

devient : xy (dans S') = $\begin{cases} 0 & \text{si } xy \text{ (dans } T'_a) \in T'_{a-1} \\ xy & \text{sinon} \end{cases}$

Autrement dit, on identifie T'_{a-1} avec 0. S' est un demi-groupe algébrique mais la multiplication n'est plus nécessairement continue au point (x,y) si x ou $y = 0$ [sauf si T_{a-1} est compact]. La topologie de S' est celle induite par $M(n,n)$. T_a sera considéré comme un sous-espace de S' .

Soit $e = e^2$ un idempotent $\neq 0$ de S' . Alors on peut montrer que $eS'e \setminus \{0\}$ est un groupe G_e . Désignons par E_e les idempotents $\neq 0$ de $S'e$ et par F_e les idempotents $\neq 0$ de eS' . Le demi-groupe

$$E_e G_e F_e \cup \{0\}$$

est alors un demi-groupe complètement 0-simple. Malheureusement, $E_e G_e F_e$ dépend fortement du choix de e et, en général, n'épuise pas S' [En effet, $E_e G_e F_e = \{x \in S' \mid xe, ex \neq 0\}$.]

Cette représentation de "la plupart" des éléments de T_a nous permet toutefois de démontrer [preuve assez technique avec 8 lemmes] le résultat suivant :

Théorème : Si $\nu(H) > 0$ alors $H = T_a$. Il existe un idempotent $e \neq 0$ tel que

$$(T_a \cap E_e G_e F_e) \cup \{0\}$$

soit un demi-groupe complètement 0-simple dont le complément dans T_a est de ν -mesure nulle.

L'ensemble des $x \in T_a$, tels que $x \rightarrow x$ i.s. dans la marche à droite et la marche à gauche, contient $T_a \cap E_e G_e F_e$ et est donc dense dans T_a .

° °

°

Cet exposé contient les résultats sur les marches aléatoires de Högnäs-Mukherjea : "r* - invariant measures and recurrent random walks : two problems on matrix semigroups" ; 25 pp, manuscrit soumis au Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie.