MARIE-FRANCE ALLAIN

Approximation par des intégrales de Stieltjes-Lebesgue d'intégrales stochastiques relatives au mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A1_0>

APPROXIMATION PAR DES INTEGRALES DE STIELTJES-LEBESGUE D'INTEGRALES STOCHASTIQUES RELATIVES AU MOUVEMENT BROWNIEN INDEXE PAR R_+^d

Marie-France ALLAIN

1. Introduction

Le but de ce travail est d'étendre au mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ (tel qu'il est défini par Wong et Zakaï [5]), un résultat connu dans le cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+$. Plus précisément, soit $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \beta, P)$ un mouvement Brownien à valeurs réelles et une suite d'approximations $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues en linéarisant les trajectoires de β, il est alors facile de voir en utilisant la formule de Itô que pour toute fonction G de classe C^2 la suite $(X^n)_{n \in N}$ définie par $X^n_t = G(\beta^n_t) = \int_0^t G'(\beta^n_s)\, d\beta_s^n + G(o)$ converge presque sûrement, lorsque le pas des subdivisions décroît vers zéro, vers le processus X tel que :

$$X_t = G(\beta_t) = \int_0^t G'(\beta_s)\, d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t G''(\beta_s)\, ds + G(o)$$

Notons que les trajectoires de X^n sont continues et à variation bornée.

Des problèmes de ce type ont également été étudiés dans le cas du mouvement Brownien à valeurs dans R^d et dans le cas des équations différentielles stochastiques. ([1], [2], [3], [4]).

Dans le cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ on est conduit à considérer plusieurs types d'intégrales stochastiques. ([5], [6]).

Le premier théorème étend au cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ le résultat connu dans le cas où $d = 1$.

Pour la suite, on suppose que $d = 2$, dans ce cas Wong et Zakaï [5] ont mis en évidence le rôle joué par les intégrales de premier et second types, ce sont certaines de ces intégrales que nous allons approximer en moyenne quadratique par des intégrales de Stieljes-Lebesgue.

Plus précisément, soit $(\Omega, F, (F_t)_{t \in [0,1]^d}, \beta, P)$ un mouvement Brownien ; pour une fonction γ définie sur $[0,1]^{2d}$ et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue, on note $I_2(\gamma)$ l'intégrale de second type ; soit alors $\bar{\beta}_t^\gamma = E(I_2(\gamma)/F_t)$. β est une martingale forte et $\bar{\beta}^\gamma$ est une martingale. Ce sont des intégrales relatives à ces deux martingales que nous considérons.

Notons qu'on peut par la même méthode donner des approximations des intégrales mixtes et obtenir la formule de Ito, cependant l'existence des différents types d'intégrales ne permet pas de l'obtenir aussi rapidement que dans le cas où $d = 1$.

Une rédaction moins détaillée doit paraître aux annales de l'IHP.

Pour la définition des intégrales stochastiques et des martingales, on se réfere à Wong et Zakaï ([5], [6]).

2. Approximation d'intégrales relatives à β

2.1 Notations

- $(\Omega, F, (F_t)_{t \in R_+^d}, P, \beta)$ est un mouvement Brownien indexé par R_+^d tel qu'il est défini par Wong et Zakaï [5].

- Pour tout t de R_+^d, $t = (t^1, \ldots, t^d)$ on note $\| o,t \|$ le pavé : $\prod_{r=1}^{d} [o,t^r]$

- n étant fixé, on considère d partitions de $[0,1]$ et la partition produit, on note $(C_k^n)_{k = 1 \ldots k(n)}$ les pavés de $\| 0,1 \|$ ainsi obtenus.

soient $(i_k^n)^r = \operatorname{Inf} \{t^r : t \in C_k^n\}$

$(s_k^n)^r = \operatorname{Sup} \{t^r : t \in C_k^n\}$

alors $C_k^n = \prod_{r=1}^{d} [(i_k^n)^r, (s_k^n)^r[$

- Si $t \in C_{k_0}^n$ $I^n(k_0) = \{k : C_k^n \subseteq \| 0,t \|\}$

- Nous utiliserons les notations suivantes :

$$(h_k^n)^r = (s_k^n)^r - (i_k^n)^r \qquad r = 1 \ldots d$$

$$\lambda_k^n = \prod_{r=1}^{d} (h_k^n)^r \qquad\qquad |h_k^n| = \sum_{r=1}^{d} (h_k^n)^r$$

$$|h^n| = \operatorname*{Sup}_{k=1\ldots k(n)} |h_k^n|$$

- Pour une fonction f définie sur $\| 0,1 \|$, à valeurs réelles et r fois continûment différentiable, on définit $\| D^r f \|$ par :

$$\| D^r f \| = \operatorname*{Sup}_{t \in \| 0,1 \|} \operatorname*{Sup}_{k \in J_r^d} \left| \frac{\partial^r f(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_d^{k_d}} \right|$$

où : $J_r^d = \{k : k = (k_1, \ldots, k_d) \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{d} k_i = r\}$

2.2 Définitions

Soit $\Delta_k^n\beta = \int_{C_k^n} d\beta_s$

On pose $\psi^n(s) = \sum_{k=1}^{k(n)} \frac{\Delta_k^n\beta}{\lambda_k^n} 1_{C_k^n}(s)$

et $\beta_t^n = \int_{\|o,t\|} \psi^n(s)\, ds$

Pour toute la suite, on suppose que $\lim_n |h^n| = 0$ et qu'il existe K_o tel que $\forall k$, $\forall n$ $|h_k^n|^d \leq K_o \lambda_k^n$, notons qu'alors $|h_k^n|^d$ et λ_k^n sont comparables puisque $\lambda_k^n \leq |h_k^n|^d$.

Remarque :

Dans chaque énoncé et au cours des démonstrations interviennent des constantes de majoration, pour simplifier l'écriture nous les noterons toujours par K, elles dépendent de d et des bornes imposées dans l'hypothèse, elles dépendent également de T si l'on considère $\|0,T\|$ au lieu de $\|0,1\|$.

2.3 Proposition

Soit $\phi(s,\omega)$ une fonction à valeurs réelles telle que

- $\phi(s,\cdot)$ est F_s-mesurable
- $\phi(\cdot,\omega)$ est de classe C_{d_o} avec $2d_o \geq d + 1$,

On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sup_{r=0\ldots d_0} \|D^r\phi(\cdot,\omega)\| \leq C$$

On définit Y et Y^n par :

$$Y_t = \int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega)\, d\beta_s$$

$$Y_t^n = \int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega) d\beta_s^n$$

Alors il existe une constante K telle que :

$$\sup_{t\in\|o,1\|} E\{[Y_t^n - Y_t]^2\} \leq K \; |h^n|$$

Démonstration

Si t appartient à $C^n_{k_o}$ il suffit d'écrire :

$$\int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega)\, \psi^n(s)\, ds = \int_{\|o,t\|-\|o,i^n_{k_o}\|} \phi(s,\omega)\, \Psi^n(s)\, ds$$

$$+ \sum_{k\in I^n(k_o)} \left(\int_{C^n_k} \phi(s,\omega)\, ds\right) \frac{\Delta^n_k \beta}{\lambda^n_k}$$

compte tenu des hypothèses de dérivabilité faites sur la fonction ϕ , on écrit pour $s \in C^n_k$

$$\phi(s,\omega) = \phi(i^n_k\, ,\, \omega) + \sum_{p=1}^{d_o-1} \frac{1}{p!} D^p\phi(i^n_k\, ,\, \omega)(s - i^n_k)^{\otimes p} + R^n_k(s)$$

où $|R^n_k(s)| \leq g^{d_o}(\omega)\ |h^n_k|^{d_o}$

Compte tenu du fait que pour toute fonction $\theta(s,\omega)$ vérifiant les conditions suivantes :

* $\theta(s,\omega)$ est $(B(\|0,1\|) \otimes F)$-mesurable
  ($B(\|0,1\|)$ est la tribu borélienne de $\|0,1\|$).
* pour chaque s $\theta(s,\cdot)$ est F_s-mesurable.
* $\int_{\|0,1\|} E([\theta(s,\omega)]^2)ds < +\infty$

on a :

$$E([\int_{\|0,1\|} \theta(s,\omega)d\beta_s]^2) = \int_{\|0,1\|} E([\theta(s,\omega)]^2)ds$$

On vérifie immédiatement qu'il existe une constante K telle que :

$$- E([\int_{\|o,t\|-\|o,i^n_{k_o}\|} \phi(s,\omega)\ d\beta_s]^2) = \int_{\|o,t\|-\|o,i^n_{k_o}\|} E([\phi(s,\omega)|^2)\ ds \leq K|h^n|$$

$$- E([\sum_{k\in I^n(k)} \phi(i^n_k\, ,\, \omega)\ \Delta^n_k\beta - \int_{\|o,i^n_k\|} \phi(s,\omega)\ d\beta_s]^2) \leq K\ |h^n|$$

$$- E([\sum_{k\in I^n(k)} D^p\phi(i^n_k\, ,\, \omega) \int_{C^n_k} (s - i^n_k)^{\otimes p} \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k}\ ds]^2) \leq K\ |h^n|$$

pour $p = 1 \ldots d_o - 1$

$$- E([\int_{]\!]0,t]\!] \,]\!]0,i^n_{k_o}]\!]} [\phi(s,\omega)-R^n(s)]\psi^n(s)ds]^2) \leq K|^n|$$

Remarquons maintenant que si $A \in B(]\!]0,1]\!])$, on a :

$$E([\int_A R^n(s) \, \psi^n(s)ds]^2)$$

$$\leq \int_A E([R^n(s)]^2 [\psi^n(s)]^2)ds$$

$$\leq \sum_k \int_{A \cap C^n_k} \frac{1}{\lambda^n_k} [E[R^n(s)]^4]^{1/2} \; ds$$

$$\leq K' \sum_k \int_{A \cap C^n_k} \frac{1}{\lambda^n_k} |\lambda^n_k|^{2\,d_o} \; ds$$

$\leq K \, |h^n|$ dès que $2\,d_o \geq d+1$ puisque $|h^n_k|^d \leq K_o\lambda^n_k$.

Ce qui achève la démonstration.

* <u>Remarque</u> :

Si ϕ est déterministe, il suffit de la supposer continue (respectivement lipschitzienne) pour avoir le résultat.

2.4 Théorème

Soit G une fonction définie sur R à valeurs réelles de classe C^b_{d+1}

Soit ϕ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3 avec $g^r(\omega)$ constante pour tout $r = o,1,\dots,d_o$.

Soient Y^n et Y définis précédemment

Et soient $X_t = \int_{\|o,t\|} G(Y_s)\, d\beta_s$

$$X^n_t = \int_{\|o,t\|} G(Y^n_s)\, d\beta^n_s - \frac{1}{2^d} \int_{\|o,t\|} G'(Y^n_s)\, \phi(s,\omega)\, ds$$

Alors, il existe une constante K_o telle que

$$\sup_{t\in\|o,1\|} \{E([X^n_t - X_t]^2)\} \leq K_o |h^n|$$

Démonstration :

Ecrivons $X^n_t = X^n_t - X^n_{i^n_{k_o}} + X^n_{i^n_{k_o}}$

$$\text{soit } A_n = X^n_{i^n_{k_o}} = \sum_{k\in I^n_{k_o}} G(Y^n_{i^n_k})\, \Delta^n_k \beta$$

$$+ \sum_{k\in I^n_{k_o}} G'(Y^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_{k\beta}}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{i^n_k})\, ds$$

$$- \frac{1}{2}\, d \int_{\|o,t\|} G'(Y^n_s)\, \phi(s,\omega)\, ds + R^n$$

* On montre d'abord que :

2.4.1 $E([\sum_{p\in I^n(k_o)} G(Y^n_{i^n_p})\, \Delta^n_p \beta - \int_{\|o,t\|} G(Y_s)\, d\beta_s] \leq K\, |h^n|$

Pour cela, il suffit d'écrire :

$$\theta^1(s,\omega) = \sum_p (G(Y^n_{i^n_p}) - G(Y_{i^n_p}))\, 1_{C^n_p}(s)$$

$$\theta^2(s,\omega) = \sum_p G(Y_{i^n_p})\, 1_{C^n_p}(s) - G(Y_s)$$

et de remarquer que :

- $\theta^1(s,.)$ et $\theta^2(s,.)$ sont F_s-mesurables
- G est lipschitzienne, d'où :

$$E([\theta^1(s,\omega)]^2) \leq K_1 \sum_p E([Y^n_{i^n_p} - Y_{i^n_p}]^2)\, 1_{C^n_p}(s)$$

$$\leq K|h^n| \text{ (Cf. Proposition 2-3).}$$

$$E([\theta^2(s,\omega)]^2) \leq K_1 \sum_p E([Y_{i^n_p} - Y_s]^2)\, 1_{C^n_p}(s)$$

$$\leq K_1 \sum_p \int_{\| 0,s \| - \| 0, i^n_p \|} E([g^1(\omega)]^2) du\, 1_{C^n_p}(s)$$

$$\leq K|h^n|$$

- G est bornée, d'où :

$$E([\int_{\| 0,t \| - \| 0, i^n_{k_o} \|} G(Y_s) d\beta_s]^2) \leq K|h^n|$$

* Soit B^n :

$$B^n = \sum_{p \in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_p}) \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{C^n_p} (Y^n_s - Y^n_{i^n_p}) ds$$

Nous montrons que :

2-4-2 $\quad E([B^n - \frac{1}{2^d} \int_{\| o,t \|} G'(Y^n_s)\, \phi(s,\omega) ds]^2) < K_o |h^n|$

pour cela, on est amené à écrire $Y^n_s - Y^n_{i^n_p}$ sous la forme :

$$Y^n_s - Y^n_{i^n_p} = \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{\prod_{i=1}^{d} [(i^n_p)^r, s^r]} \phi(u,\omega)\, du + \sum_{q=1}^{2^d-2} \int_{C^n_q(s)} \phi(u,\omega)\, \varphi^n(u)\, du$$

où $C^n_q(s)$ est défini de la façon suivante :

pour $I \subseteq \{1,2\ldots d\}$ $I \neq \emptyset$ et $I \neq \{1,2\ldots d\}$

on pose : $C^n_I(s) = \{u \in]\!]0,t]\!] : u^r < (i^n_p)^r \; r \in I, (i^n_p)^r \leq u^r < s^r \; r \in I^c\}$

on obtient ainsi 2^d-2 ensembles qu'on note $(C^n_q(s))_{q = 1\ldots 2^d-2}$.

Soit alors :

$$B^n_o = \sum_{p \in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_p}) \left[\frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p}\right]^2 \int_{C^n_p} ds \int_{\prod_{i=1}^{d} [(i^n_p)^r, s^r]} \phi(u,\omega)\, du$$

$$= \frac{1}{2^d} \sum_{p \in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_p})\, \phi(i^n_p,\omega)\, ([\Delta^n_p \beta]^2 - \lambda^n_p)$$

$$+ \frac{1}{2^d} \sum_{p \in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_p})\, \phi(i^n_p,\omega)\, \lambda^n_p$$

$$+ R^n_1$$

En tenant compte du fait que :

- $G'(Y^n_{i^n_p})\, \phi(i^n_p,\omega)$ est $F_{i^n_p}$-mesurable
- $E([\Delta^n_p \beta]^2 - \lambda^n_p / F_{i^n_p}) = 0$
- G' et ϕ sont bornées

on vérifie qu'il existe une constante K telle que :

$$E([\sum_{p \in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_p})\, \phi(i^n_p,\omega)\, ([\Delta^n_p \beta]^2 - \lambda^n_p)]^2)$$

$$\leq K' \sum_p [\lambda^n_p]^2 \leq K |h^n|$$

- Puis, en utilisant le fait que G' et ϕ sont lipschitziennes et bornées, on montre facilement que :

$$E\Big(\Big[\int_{\|0,t\|} G'(Y_s)\ \phi(s,\omega)ds - \sum_{p\in I^n(k_0)} G'(Y^n_{i^n_p})\ \phi(i^n_p,\omega)\lambda^n_p\Big]^2\Big) \leq K|h^n|$$

et :

$$E([R^n_1]^2) \leq K|h^n|$$

On a donc montré que :

$$E\Big(\Big[B^n_0 - \frac{1}{2^d}\int_{\|0,t\|} G'(Y_s)\ \phi(s,\omega)ds\Big]^2\Big) \leq K|h^n|$$

Posons pour $q \in \{1,\dots 2^d-2\}$:

$$B^n_q = \sum_{p\in I^n(k_0)} G'(Y^n_{i^n_p})\ \frac{\Delta^n_p\beta}{\lambda^n_p} \int_{C^n_p} ds \int_{C^n_q(s)} \Phi(u,\omega)\ \psi^n(u)\ du$$

et vérifions que : $E([B^n_q]^2) \leq K|h^n|$

On peut également écrire :

$$B^n_q = \sum_{p\in I^n(k_0)} G'(Y^n_{i^n_p})\ \frac{\Delta^n_p\beta}{\lambda^n_p} \sum_{j\in I^n_{pq}} \frac{\Delta^n_j\beta}{\lambda^n_j} \int_{C^n_j} \phi(u,\omega)\ \prod_{r\in I}(h^n_p)^r \prod_{r\in I^c}((s^n_p)^r-u^r)\ du$$

où : $I^n_{p,q} = \{j : C^n_j \cap C^n_q(s) \neq \emptyset,\ s \in C^n_p\}$

soit alors :

$$B^n_{p,q} = \sum_{j\in I^n_{p\,q}} \Delta^n_j\beta\ \frac{\prod_{r\in I}(h^n_p)^r}{\lambda^n_j\lambda^n_p} \int_{C^n_j} \phi(u,\omega)\ \prod_{r\in I^c}((s^n_p)^r-u^r)\ du$$

si : $\bar{i}^n_p$ est tel que : $(\bar{i}^n_p)^r = \begin{cases} 1 & \text{pour } r\in I^c \\ (i^n_p)^r & \text{pour } r \in I \end{cases}$

il est facile de voir que $B^n_{p,q}$ est $F_{\bar{i}^n_p}$-mesurable.

On a alors, G' étant bornée :

$$E([B^n_q]^2) \leq K\sum_p E[B^n_{p,q}]^2\ \lambda^n_p$$

Notons que dans le cas où ϕ est $F_{i_j^n}$-mesurable, pour $u \in C_j^n$ et bornée, on a immédiatement :

$$E([B^n_{p,q}]^2) \leq K' \sum_{j\in I^n_{p,q}} \lambda^n_j \leq K|h^n|$$

ce qui achève l'étude de B^n_q. Sinon, on obtient la majoration en utilisant l'hypothèse que $\phi(\cdot,\omega)$ est de classe C_{d_o} avec $2d_o \geq d+1$ et en procédant comme dans la démonstration de la proposition 2.3.

* Nous montrons maintenant :

2-4-3 $\qquad E([R^n]^2) \leq K|h^n|$

Pour cela, on écrit si $s \in C^n_p$:

$$G(Y^n_s) - G(Y^n_{i^n_p}) - G'(Y^n_{i^n_p})\,(Y^n_s - Y^n_{i^n_p})$$

$$= \sum_{\ell=2}^{d} \frac{1}{\ell!} D^\ell G(Y^n_{i^n_p})\,(Y^n_s - Y^n_{i^n_p})^\ell + R^n_p(s)$$

on a :

- $|R^n_p(s)| \leq K|Y^n_s - Y^n_{i^n_p}|^{d+1}$

- $$R^n = \sum_{\ell=2}^{d} \frac{1}{\ell!} \sum_{p\in I^n(k_o)} D^\ell G(Y^n_{i^n_p}) \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{C^n_p} (Y^n_s - Y^n_{i^n_p})^\ell\, ds$$
$$+ \sum_{p\in I^n(k_o)} \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{C^n_p} R^n_p(s)\, ds$$

Soit :

$$R^n_\ell = \sum_{p\in I^n(k_o)} D^\ell G(Y^n_{i^n_p}) \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{C^n_p} (Y^n_s - Y^n_{i^n_p})^\ell\, ds$$

on a :

$$Y^n_s - Y^n_{i^n_k} = \frac{\Delta^n_p \beta}{\lambda^n_p} \int_{\pi[(i^n_p)^r, s^r[} \phi(u,\omega)\,du + \sum_{q=1}^{2^d-2} \int_{C^n_q(s)} \phi(u,\omega)\, \psi^n(u)\, du$$

En posant :

$$\sum_p^n(s) = \frac{1}{\lambda_p^n} \int_{\pi[(i_p^n)^r, s^r[} \phi(u,\omega)\, du$$

$$\sum_{q,k}^n(s) = \frac{1}{\lambda_k^n} \int_{C_k^n \cap C_q^n(s)} \phi(u,\omega)\, du$$

$$\Lambda_p^n(s) = \sum_{q=1}^{2^d-2} \sum_{k \in I_{p,q}^n(s)} \sum_{q,k}^n(s)\, \Delta_k^n \beta$$

on peut écrire :

$$[Y_s^n - Y_{i_p^n}^n]^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} C_\ell^j [\sum_p^n(s) \Delta_p^n \beta]^j\, [\Lambda_p^n(s)]^{\ell-j}$$

Il suffit donc d'étudier pour $j \in \{0,\ldots \ell\}$:

$$R_{\ell j}^n = \sum_{p \in I^n(k_o)} D^\ell G(Y_{i_p^n}^n)\, [\Delta_p^n \beta]^{j+1}\, \frac{1}{\lambda_p^n} \int_{C_p^n} [\sum_p^n(s)]^j\, [\Lambda_p^n(s)]^{\ell-j}\, ds$$

Notons que :

- $\sum_p^n$ et $D^\ell G$ sont bornés.

- $E([\Delta_p^n \beta]^{2j}) \leq K_j [h_p^n]^j$

- $E([\Lambda_p^n(s)]^{2j}) \leq K'_j |h_p^n|^j$

on en déduit immédiatement que :

$E([R_{\ell j}^n]^2) \leq K|h^n|$ pour $j = 1\ldots\ell$

et en utilisant les propriétés d'indépendance ainsi que la différentiabilité de ϕ que :

$E([R_{\ell o}^n]^2) \leq K\, |h^n|$

En conséquence :

$$E([R_\ell^n]^2) \leq K_o\, |h^n|$$

D'autre part :

$$E([\sum_{p\in I^n(k_o)} \frac{\Delta_p^n\beta}{\lambda_p^n} \int_{C_p^n} R_p^n(s)\, ds]^2)$$

$$\leq \sum_p \int_{C_p^n} \frac{1}{\lambda_p^n} [E([Y_s^n - Y_{i_p^n}^n]^{4(d+1)}]^{1/2} ds$$

$$\leq \sum_p \int_{C_p^n} \frac{1}{\lambda_p^n} |\lambda_p^n|^{d+1} ds \leq K_o |h^n|$$

ce qui achève l'étude de R^n.

2-4-4 Pour achever la démonstration du Théorème, il ne reste plus qu'à établir la majoration de :

$$E([X^n - X^n_{i^n_{k_o}}]^2) = E([\int_{]\!]o,t]\!]-]\!]o,i^n_{k_o}]\!]} G(Y_s^n)\, \psi^n(s)\, ds]^2)$$

ce qui s'obtient facilement en se reportant aux calculs précédents.

2-5 Corollaire

Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2-4, soit :

$$V_t = \int_{]\!]0,t]\!]} G(Y_s) d\beta_s + \frac{1}{2} d \int_{]\!]0,t]\!]} G'(Y_s)\, \phi(s,\omega) ds$$

$$V_t^n = \int_{]\!]0,t]\!]} G(Y_s^n)\, d\beta_s^n$$

alors il existe une constante K_o telle que :

$$\sup_{t\in[\![0,1]\!]} \{E[V_t^n - V_t]^2\} \leq K_o |\ ^n|$$

<u>Démonstration</u> :

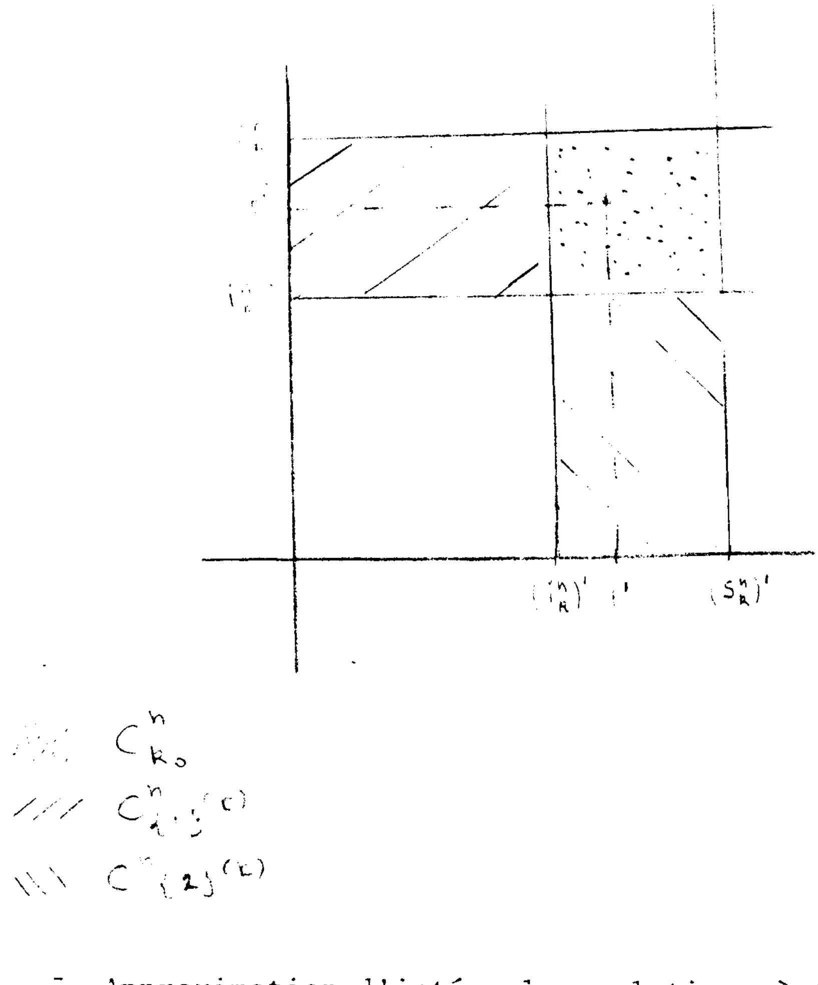
G' est lipschitzienne et ϕ est bornée. On a alors :

$$E([\int_{\|0,t\|} G'(Y_s) - G(Y_s^n))\ \phi(s,\omega)ds]^2) \leq K \sup_{t\in\|0,t\|} \{E([Y_s - Y_s^n]^2)\}$$

mais les hypothèses de la proposition 2-3 étant satisfaites, on a :

$$\sup_{t\in\|0,1\|} \{E([Y_s - Y_s^n]^2)\} \leq K_0 |h^n|$$

d'où le corollaire.



3. <u>Approximation d'intégrales relatives à β et $\bar{\beta}$</u>

Pour toute la suite, nous supposons que d = 2.

3-1 <u>Définitions, notations et propriétés</u>

3.1.1 - Définition de l'intégrale de second type

Soit $\phi(s,u,\omega)$ une fonction définie sur $\Omega \times]\!]0,1]\!]^2$ vérifiant les hypothèses H^* :

- ϕ est mesurable par rapport à $F \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, ($\mathbb{B}$ est la tribu borélienne de $]\!]0,1]\!]$);

- pour tout couple (s,u) fixé $\phi(s,u,w)$ est $F_{s \vee u}$-mesurable,

- $\int_{]\!]0,1]\!]^2} E[\phi(s,u,\omega)]^2 \, ds\, du < +\infty$.

Nous dirons que s et u sont non comparables si $(s^1 < u^1$ et $s^2 > u^2)$ ou $(s^1 > u^1$ et $s^2 < u^2)$, soit :

$$H = \{(s,u) : s \text{ et } u \text{ non comparables}\}$$

Pour une fonction satisfaisant aux hypothèses et de la forme :
$\phi(s,u,w) = \alpha(w)\, 1_{C_1}(s)\, 1_{C_2}(u)$ avec $C_1 \times C_2 \subset H$ on définit l'intégrale de second type par :

$$\int_{]\!]0,1]\!]^2} \phi(s,u,\omega)\, d\beta_s\, d\beta_u = \alpha(\omega) \int_{C_1} d\beta_s \int_{C_2} d\beta_u$$

Si la condition $C_1 \times C_2 \subset H$ n'est pas satisfaite, on procède de la façon suivante : on se donne un treillis sur $]\!]0,1]\!]$ de pas ε, s étant fixé, il existe un couple unique $(i_k^\varepsilon, s_k^\varepsilon)$ du treillis tel que $s \in C_k^\varepsilon = \prod_{r=1}^{2} [(i_k^\varepsilon)^r, (s_k^\varepsilon)^r[$; on définit alors $I_2^\varepsilon(\phi)$ par :

$$I_2^\varepsilon(\phi) = \sum_{k,k'} \phi(i_k^\varepsilon, i_{k'}^\varepsilon)\, 1_H(i_k^\varepsilon, i_{k'}^\varepsilon) \int_{C_k^\varepsilon} d\beta_s \int_{C_{k'}^\varepsilon} d\beta_u$$

On montre (cf. [5]) que la limite en moyenne quadratique de $I^\varepsilon(\phi)$ existe quand ε tend vers zéro. On définit alors l'intégrale de second type de ϕ par :

$$I_2(\phi) = \int_{]\!]0,1]\!]^2} \phi(s,u,\omega)\, d\beta_s\, d\beta_u = \lim_{\substack{\|\cdot\|_2 \\ \varepsilon \to 0}} I_2^\varepsilon(\phi).$$

On étend la définition aux fonctions ϕ satisfaisant H^* en approximant ϕ par des fonctions simples.

En particulier si $\gamma(s,u)$ est une fonction définie sur $]0,1]^2$ à valeurs réelles, telles que : $\int_{]0,1]^2} [\gamma(s,u)]^2 \, ds \, du < +\infty$ on sait définir :

$$\bar{\beta}_t^\gamma = \int_{]0,t]^2} \gamma(s,u) \, d\beta_s \, d\beta_u$$

Remarquons que $\bar{\beta}^\gamma$ est une martingale à trajectoires continues et que $E([\bar{\beta}_t^\gamma]^2) = \int_{]0,t]^2} 1_H(s,u)[\gamma(s,u)]^2 \, ds \, du$

3.1.2- Soit $\gamma^*(s,u) = \gamma(s,u) + \gamma(u,s)$

Définissons $\bar{\Delta}_k^n\beta$ (qu'on notera $\bar{\Delta}_k^n\beta^\gamma$ si nécessaire) par :

$$\bar{\Delta}_k^n\beta = \sum_{j\in I_1^n(k)} \sum_{p\in I_2^n(k)} \frac{1}{\lambda_j^n} \frac{1}{\lambda_p^n} \int_{C_j^n \times C_p^n} \gamma^*(v,w) \, dv \, dw \; \Delta_j^n\beta \; \Delta_p^n\beta$$

où $I_1^n(k) = \{j : (i_k^n)^1 = (i_j^n)^1 \, , \, (i_j^n)^2 < (i_k^n)^2\}$

$I_2^n(k) = \{j : (i_k^n)^2 = (i_j^n)^2 \, , \, (i_j^n)^1 < (i_k^n)^1\}$

on notera $\gamma^n(s,u) = \sum_j \sum_p \frac{1}{\lambda_j^n} \frac{1}{\lambda_p^n} \int_{C_j^n \times C_p^n} \gamma(v,w) \, dv \, dw \; 1_{C_j^n}(s) \; 1_{C_p^n}(u)$

3.1.3- Pour tout couple (i,j) on a : $E(\bar{\Delta}_i^n \, \bar{\Delta}_j^n\beta) = \delta_{ij} \; E([\bar{\Delta}_i^n\beta]^2)$

et $E[[\bar{\Delta}_k^n\beta]^2) \leq \sum_{j\in I_1^n(k)} \sum_{p\in I_2^n(k)} \int_{C_p^n \times C_j^n} [\gamma^*(v,w)]^2 \, dv \, dw$

3.1.4- Pour tout couple (i,j), on a : $E(\overline{\Delta}_i^n\beta\ \Delta_j^n\beta) = 0$

3.1.5- Soit alors $\overline{\Psi}^n(s) = \sum_k \frac{\overline{\Delta}_k^n\beta}{\lambda_k^n} 1_{C_k^n}(s)$ qu'on notera $\overline{\Psi}^n(s,\gamma)$ si nécessaire

et $\overline{\beta}_t^n = \int_{\|o,t\|} \overline{\Psi}^n(s)\, ds$. Notons que $\int_{C_k^n} d\overline{\beta}_s^n \neq \int_{C_k^n} d\overline{\beta}_s$

on vérifie que $\overline{\beta}_{i_k^n}^n$ est $F_{i_k^n}$ mesurable et que $\lim_n \operatorname{Sup}_t E([\overline{\beta}_t^\gamma - \overline{\beta}_t^n]^2) = o$

Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que

$$\operatorname{Sup}_{t\in\|o,1\|} E([\overline{\beta}_t^\gamma - \overline{\beta}_t^n]^2) \leq K|h^n| \quad \text{(cf 4-6)}$$

3.1.6- Pour des fonctions $\phi(s,\omega)$ telles que :

$$\begin{cases} \phi(s,.) \text{ est } F_s\text{-mesurable} \\ \int_{\|o,t\|^2} E([\phi(s\vee u,\omega)]^2)\ [\gamma(s,u)]^2\, ds\, du < +\infty \end{cases}$$

On sait définir l'intégrale de 2nd type et on a la propriété :

$$\int_{\|o,t\|^2} \phi(s\vee u,\omega)\ \gamma(s,u)\, d\beta_s\, d\beta_u = \int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega)\, d\overline{\beta}_s^\gamma \quad \text{(cf 4-5)}$$

3-2 Proposition

Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2-3

Soit $\overline{Y}_t^n = \int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega)\, d\overline{\beta}_s^n$

$\overline{Y}_t = \int_{\|o,t\|} \phi(s,\omega)\, d\overline{\beta}_s^\gamma$

Alors $\lim_n \operatorname{Sup}_{t\in\|o,1\|} E([\overline{Y}_t^n - \overline{Y}_t]^2) = o$

Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que

$$\sup_{t \in \| o,1 \|} E([\overline{Y}_t^n - \overline{Y}_t]^2) \leq K \quad |h^n|$$

<u>Démonstration</u> :

Ecrivons pour $t \in C_{k_o}^n$:

$$\overline{Y}_t^n = \overline{Y}_t^n - \overline{Y}_{i_{k_o}^n}^n + \sum_{k \in I^n(k_o)} \phi(i_k^n, \omega) \ \overline{\Delta}_k^n \beta$$

$$+ \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} [\phi(s,\omega) - \phi(i_k^n,\omega)] \ \overline{\psi}_s^n \ ds$$

On montre d'abord que :

3-2-1

$$E([\sum_{k \in I^n(k_o)} \phi(i_k^n, \omega) \ \overline{\Delta}_k^n \beta - \int_{\| o,t \|^2} \phi(s \vee u, \omega) \ \gamma(s,u) \ d\beta_s \ d\beta_u]^2) \leq$$

$$\leq K_o \{ \int_{\| o,1 \|^2} [\gamma^n(s,u) - \gamma(s,u)]^2 \ ds \ du + \sum_{k,p \in J} \int_{C_p^n \times C_k^n} [\gamma(v,w)]^2 dv \ dw + |h^n| \}$$

où $J = \{(k,p) : (i_p^n)^1 = (i_k^n)^1 \text{ ou } (i_p^n)^2 = (i_k^n)^2 \ , \ p \neq k\}$

L'inégalité résulte du lemme 4-5 . le terme majorant tend vers zéro, et si de plus γ est lipschitzienne par suite de la définition de γ^n, il est majoré par $K|h^n|$.

Pour la suite, notons que ϕ satisfait aux hypothèses de la proposition 2-3 et que dans le cas où d = 2, il suffit d'avoir $d_o = 2$.
On peut alors écrire, si $s \in C_k^n$:

$$\phi(s,\omega) - \phi(i_k^n,\omega) = D\phi(i_k^n,\omega)(s - i_k^n) + R_k^n(s)$$

où $\quad |R_k^n(s)| \leq g^2(\omega) |h_k^n|^2$

Soient alors :

$$A^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} [\phi(s,\omega) - \phi(i_k^n,\omega)] \, \bar{\psi}_s^n \, ds$$

et :

$$R^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} R_k^n(s) \, \bar{\psi}_s^n \, ds$$

Montrons que :

$$\text{3-2-2} \qquad \lim_n \operatorname{Sup}_t E([R^n]^2) = 0$$

On a :

$$E([R^n]^2) \leq \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} \frac{|\lambda_k^n|^4}{[\lambda_k^n]^2} E([g^2(\omega) \, \bar{\Delta}_k^n \beta]^2) \, ds$$

En utilisant le lemme 4.7, on obtient 3-2-2 et la majoration par K $|h^n|$ quand γ est bornée.

Montrons ensuite que :

$$\text{3-2-3} \qquad \lim_n \operatorname{Sup}_t ([A^n - R^n]^2) = 0$$

On a :

$$A^n - R^n = \frac{1}{2} \sum_k D\phi(i_k^n,\omega)((h_k^n)^1, (h_k^n)^2) \, \bar{\Delta}_k^n \beta$$

et d'après le lemme 4-7 , on a bien 3-2-3 ; et de plus, si γ est lipschitzienne :

$$E([A^n - R^n]^2) \leq K_o |h^n|$$

Pour achever la démonstration de la Proposition, il suffit de montrer que :

$$\text{3-2-4} \qquad \lim_n \operatorname{Sup}_t E[\bar{Y}_t^n - \bar{Y}_{i_{k_o}^n}^n]^2) = 0$$

Pour cela, on remarque que :

$$\bar{Y}_t^n - \bar{Y}_{i_{k_o}^n}^n = \int_{C_{k_o}^n \cap]\!]o,t]\!]} \phi(s,\omega) ds \, \frac{\bar{\Delta}_{k_o}^n \beta}{\lambda_{k_o}^n} + \sum_{q=1}^{2} \int_{C_q^n(t)} \phi(u,\omega) \, \bar{\psi}^n(u) \, du$$

où $C_q^n(t)$ a été défini en 2-4-2.

Il suffit alors de décomposer ϕ comme précédemment et d'utiliser les mêmes arguments pour obtenir 2-3-4 et la majoration par $K_o|h^n|$ quand γ est lipschitzienne.

3-3 Théorème

Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2-3, on suppose de plus que ϕ, $D\phi$ et γ sont bornées par une constante K.

$\bar{Y}$ et $\bar{Y}^n$ sont définis comme précédemment

Soit G une fonction de $C_3^b(R)$

soit $Z_t^n = \int_{[o,t]} G(\bar{Y}_s^n)\, d\beta_s^n$

et $Z_t = \int_{[o,t]} G(\bar{Y}_s)\, d\beta_s$

Alors $\lim\limits_n \sup\limits_{t\in[o,1]} E([Z_t^n - Z_t]^2) = o$ et si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante k_o telle que :

$$\lim_n \sup_t E([Z_t^n - Z_t]^2) \leq k_o|h^n| .$$

Remarque :

Notons l'absence de terme complémentaire dans le passage à la limite, ceci résulte de l'orthogonalité de $\Delta_k^n\beta$ et $\bar{\Delta}_k^n\beta$.

Démonstration :

Elle est du même type que les précédentes ; pour $s \in C_k^n$ on écrit

$$G(\bar{Y}_s^n) = G(\bar{Y}^n_{i_k^n}) + G'(\bar{Y}^n_{i_k^n})(\bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n}) + \frac{1}{2}G''(\bar{Y}^n_{i_k^n})(\bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n})^2 + R_k^n(s)$$

et $|R_k^n(s)| \leq K|\bar{Y}_s^n - \bar{Y}^n_{i_k^n}|^3$

On peut alors écrire, pour $t \in C^n_{k_o}$:

$$Z^n_t = Z^n_t - Z^n_{i^n_{k_o}} + A^n + B^n + \frac{1}{2} D^n + R^n$$

où : $A^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \Delta^n_k \beta$

$$B^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_k \beta}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} [\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k}) ds$$

$$D^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_k \beta}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} [\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k}]^2 ds$$

$$R^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C^n_k} R^n_k(s) \psi^n(s) ds$$

On montre d'abord :

3-3-1 $$\lim_n \sup_{t \in \| 0,1 \|} E([A^n - Z_t]^2) = 0$$

Pour cela, remarquons que, G étant lipschitzienne et $\overline{Y}^n_{i^n_k}$ étant $F_{i^n_k}$-mesurable, on a :

$$* \; E([\sum_{k \in I^n(k_o)} (G(\overline{Y}^n_{i^n_k}) - G(\overline{Y}_{i^n_k})) \Delta^n_k \beta]^2)$$

$$\leq K \sum_{k \in I^n(k_o)} E([\overline{Y}^n_{i^n_k} - \overline{Y}_{i^n_k}]^2) \lambda^n_k$$

$$\leq K \sup_{t \in \| 0,1 \|} E([\overline{Y}^n_t - \overline{Y}_t]^2)$$

et d'après la proposition 3-2, le terme majorant tend vers zéro, en étant dominé par $K_o |h^n|$ si γ est lipschitzienne.

* $E([\int_{\|o,i^n_{k_o}\|} [\sum_k G(\overline{Y}_{i^n_k}) 1_{C^n_k}(s) - G(\overline{Y}_s)] d\beta_s]^2)$

$$\leq \int_{\|0,1\|} \sum_k E([\overline{Y}_{i^n_k} - \overline{Y}_s]^2) 1_{C^n_k}(s)\, ds$$

et d'après le lemme 4-7 , γ étant bornée, ceci est majoré par $K|h^n|$.

* $E([\int_{\|o,t\|-\|o,i^n_{k_o}\|} G(\overline{Y}_s) d\beta_s]^2) \leq K_o|h^n|$

car G est bornée.

Montrons maintenant :

3-3-2 $$\sup_{t\in\|0,1\|} E([B^n]^2) \leq K_o|h^n|$$

Pour cela, rappelons que : (cf. 3-2-3 et 2-4-2) :

$$(\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k}) 1_{C^n_k}(s) = \frac{\overline{\Delta}^n_k\beta}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k \cap \|o,s\|} \phi(u,\omega)\, du$$

$$+ \sum_{q=1}^{2} \int_{C^n_q(s)} \phi(u,\omega)\, \overline{\psi}^n(u)\, du$$

Soient alors :

$$B^n_o = \sum_{k\in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_k\beta\ \overline{\Delta}^n_k\beta}{[\lambda^n_k]^2} \int_{C^n_k} ds \int_{C^n_k \cap \|o,s\|} \phi(u,\omega)\, du$$

$$B^n_q = \sum_{k\in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} ds \int_{C^n_q(s)} \phi(u,\omega)\, \overline{\psi}^n(u)\, du$$

On a donc :

$$B^n = B^n_o + \sum_{q=1}^{2} B^n_q$$

* Examinons B_o^n On peut également écrire :

$$B_o^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i_k^n}) \frac{\Delta_k^n\beta \overline{\Delta}_k^n\beta}{[\lambda_k^n]^2} \int_{C_k^n} \prod_{i=1}^{2} [(s_k^n)^i - u^i] \; \phi(u,\omega) \, du$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i_k^n}) \; \phi(i_k^n,\omega) \; \Delta_k^n\beta \; \overline{\Delta}_k^n\beta$$

$$+ \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i_k^n}) \frac{\Delta_k^n\beta \overline{\Delta}_k^n\beta}{[\lambda_k^n]^2} \int_{C_k^n} \prod_{i=1}^{2} [(s_k^n)^i - u^i] (\phi(u,\omega) - \phi(i_k^n,\omega)) du$$

Notons que le premier terme est de la forme :

$$\sum_{k \in I^n(k_o)} \theta(i_k^n) \; \Delta_k^n\beta \; \overline{\Delta}_k^n\beta$$

avec : $\theta(i_k^n)$ $F_{i_k^n}$-mesurable et bornée. On a alors :

$$E(\theta(i_k^n)\theta(i_{k'}^n) \; \Delta_k^n\beta \; \Delta_{k'}^n\beta \; \overline{\Delta}_k^n\beta \; \overline{\Delta}_{k'}^n\beta) = \delta_{kk'} \, E([\theta(i_k^n)]^2) \; \lambda_k^n \; E([\overline{\Delta}_k^n\beta]^2)$$

Cette égalité s'obtient en conditionnant par $F_{(1,(i_k^n)^2)}$ si :

$(i_k^n)^1 \geq (i_{k'}^n)^1$ et $(i_k^n)^2 > (i_{k'}^n)^2$ et par $F_{((i_k^n)^1,1)}$ si :

$(i_k^n)^2 = (i_{k'}^n)^2$ et $(i_{k'}^n)^1 < (i_k^n)^1$ et en tenant compte de l'expression de $\overline{\Delta}_k^n\beta$ (cf. 3-1-2).

Maintenant, en tenant compte du fait que θ est bornée et que $E([\overline{\Delta}_k^n\beta]^2) \leq K \lambda_k^n$, on peut affirmer que :

$$E\Big(\Big[\sum_{k \in I^n(k_o)} \theta(i_k^n) \; \Delta_k^n\beta \; \overline{\Delta}_k^n\beta\Big]^2\Big) \leq K \; |h^n|$$

Le second terme est de la forme :

$$\sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} \overline{\theta}_k^n(u) \; \Delta_k^n\beta \; \overline{\Delta}_k^n\beta \; du$$

avec : $|\overline{\theta}_k^n(u)| \leq K \dfrac{|h_k^n|}{\lambda_k^n}$

On a alors :

$$E\left(\left[\sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} \overline{\theta}_k^n(u)\ \Delta_k^n\beta\ \overline{\Delta}_k^n\beta\ du\right]^2\right)$$

$$\leq \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C_k^n} K^2 \left[\frac{|\ _k^n|}{\lambda_k^n}\right]^2 E([\Delta_k^n\beta]^2\ [\overline{\Delta}_k^n\beta]^2)\ du$$

$$\leq K'\,|h^n|$$

On a donc établi que :

$$E([B_o^n]^2) \leq K_o\ |h^n|$$

* Passons alors à l'étude de B_q^n ; les ensembles $C_q^n(s)$ ont été définis en 2-4-2, convenons que pour $s \in C_k^n$ $\quad C_1^n(s) = \{u : (i_k^n)^1 \leq u^1 \leq s^1,$
$u^2 < (i_k^n)^2\}$

$C_2^n(s) = \{u : u^1 < (i_k^n)^1,\ (i_k^n)^2 \leq u^2 \leq s^2\}$

et que $\quad I_p^n(k) = \{j : C_p^n(s) \cap C_j^n \neq \emptyset\}$ pour $p = 1,2$.

Intéressons-nous à B_1^n; notons que :

$$\int_{C_k^n} ds \int_{C_q^n(s)} \phi(u,\omega)\ \overline{\psi}^n(u)\ du =$$

$$= (h_k^n)^2 \sum_{j \in I_1^n(k)} \int_{C_j^n} \phi(u,\omega)\ ((s_k^n)^1 - u^1)\ \overline{\psi}^n(u)\ du$$

et ce terme est $F_{(1,(i_k^n)^2)}$-mesurable ; écrivons alors B_1^n sous la forme :

$$B_1^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} \theta_k^n\ \Delta_k^n\beta$$

où : $\theta_k^n = G'(\overline{Y}^n_{i_k^n})\ \dfrac{1}{(h_k^n)^1} \displaystyle\sum_{j \in I_1^n(k)} \int_{C_j^n} \phi(u,\omega)\ ((s_k^n)^1 - u^1)\ \overline{\psi}^n(u)\ du$

θ_k^n est $F_{(1,(i_k^n)^2)}$-mesurable et $E([\theta_k^n]^2) \leq K\ (h_k^n)^1$

On a alors :

$$E(E(\theta_k^n \theta_k^n \; \Delta_k^n \beta \Delta_{k'}^n \beta \; / \; F_{(1,(i_k^n)^2 V(i_{k'}^n)^2)}))$$

$$= E[\theta_k^n \theta_{k'}^n, \; E(\Delta_k^n \beta \; \Delta_{k'}^n \beta \; / \; F_{(1,(i_k^n)^2 V(i_{k'}^n)^2)})]$$

$$= \delta_{kk'} \; E([\theta_k^n]^2) \; \lambda_k^n$$

En conséquence :

$$E([B_1^n]^2) \leq \sum_{k \in I^n(k_o)} K \; \lambda_k^n (h_k^n)^1$$

$$\leq K \; |h^n|$$

Par symétrie, on a évidemment le même résultat pour B_2^n. En conséquence, 3-3-2 est démontré.

Montrons maintenant que :

3-3-3 $$\sup_{t \in [0,1]} E([D^n]^2) \leq K \; |h^n|$$

$[\overline{Y}_s^n - \overline{Y}_{i_k^n}^n]^2$ comporte six termes, on peut donc écrire D^n sous forme d'une somme de six termes, mais par suite de la symétrie, il suffit d'en étudier quatre qu'on notre $(D_i^n)_{i=1\ldots4}$

* Soit :

$$D_1^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} C''(\overline{Y}_{i_k^n}^n) \; \frac{\Delta_k^n \beta}{\lambda_k^n} \left[\frac{\Delta_k^n \beta}{\lambda_k^n}\right]^2 \int_{C_k^n} ds \left[\int_{C_k^n(s)} \phi(u,\omega) du\right]^2$$

On montre que : $E([D_1^n]^2) \leq K \; |h^n|$ en traitant ce terme de la même façon que B_o^n en 3-3-2.

* Soit :

$$D_2^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}_{i_k^n}^n) \; \frac{\Delta_k^n \beta}{\lambda_k^n} \int_{C_k^n} ds \left[\int_{C_1^n(s)} \phi(u,\omega) \; \overline{\psi}^n(u) \; du\right]^2$$

On montre que $E([D_2^n]^2) \leq K \; |h^n|$ en traitant ce terme de la même façon que B_1^n en 3-3-2

* Soit :

$$D_3^n = \sum_{k\in I^n_{k_o}} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} \int_{C^n_1(s)} \phi(u,\omega)\overline{\psi}^n(u)du \int_{C^n_2(s)} \phi(v,\omega)\overline{\psi}^n(v)dv$$

On peut écrire, pour p = 1,2

$$\int_{C^n_p(s)} \phi(u,\omega)\ \overline{\psi}^n(u)du = \sum_{j\in I^n_p(k)} \frac{(s-i^n_k)^p}{(h^n_k)^p}\ \phi(i^n_j,\omega)\ \overline{\Delta}^n_j\beta$$
$$+ \int_{C^n_p(s)} (\phi(u,\omega) - \phi(i^n_j,\omega))\ \overline{\psi}^n(u)du$$

On peut alors réécrire D^n_3, sous forme d'une somme de quatre termes, l'un d'entre eux est le suivant :

$$\overline{D}^n_3 = \sum_{k\in I^n_{k_o}} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \prod_{p=1}^{2} \Big(\sum_{j\in I^n_p(k)} \phi(i^n_j,\omega)\ \overline{\Delta}^n_j\beta\Big)\ \Delta^n_k\beta$$

Posons :

$$\Lambda^p_k = \sum_{j\in I^n_p(k)} \phi(i^n_j,\omega)\Delta^n_j\beta \qquad p = 1,2$$

On a :

$$E(\Lambda^1_k \ /\ F_{((i^n_k)^1,1)}) = 0$$

et :

$$E(\Lambda^2_k \ /\ F_{(1,(i^n_k)^2)}) = 0$$

alors, en conditionnant par $F_{((i^n_k)^1,1)}$ si $(i^n_k)^1 > (i^n_{k'})^1$ et par $F_{(1,(i^n_k)^2)}$ si $(i^n_k)^2 > (i^n_{k'})^2$, on montre que :

$$E(G''(\overline{Y}^n_{i^n_k})\ G''(\overline{Y}^n_{i^n_{k'}})\ \Lambda^1_k\Lambda^1_{k'}\Lambda^2_k\Lambda^2_{k'}\Delta^n_k\beta\Delta^n_{k'}\beta)$$

$$= \delta_{kk'}\ E([G''(\overline{Y}^n_{i^n_k})\ \Lambda^1_k\Lambda^2_k]^2)\lambda^n_k$$

$$\leq K\ \delta_{kk'}\ \lambda^n_k\ |h^n|$$

ce qui prouve que : $E([\overline{D}^n_3]^2) \leq K\ |h^n|$

Pour les autres termes, on majore directement en utilisant l'inégalité :

$$E([\sum_k \Delta_k^n \beta \int_{C_k^n} \theta_k^n(s)ds]^2) \leq \sum_k \int_{C_k^n} E([\Delta_k^n \beta\ \theta_k^n(s)]^2)\ ds$$

* Soit :

$$D_4^n = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i_k^n}) \frac{\Delta_k^n \beta}{\lambda_k^n} \int_{C_k^n} ds [\int_{C_k^n \cap \| o,s \|} \phi(u,\omega)\overline{\psi}^n(u)du \int_{C_1^n(s)} \phi(v,\omega)\overline{\psi}^n(v)\ dv]$$

On traite D_4^n de façon analogue à D_3^n.

Ce qui achève l'étude de D^n.

Montrons ensuite que :

3-3-4 $\qquad E([R^n]^2) \leq K \quad |\Lambda^n|$

On a :

$$E([R^n]^2) \leq \sum_k \int_{C_k^n} \frac{1}{[\lambda_k^n]^2} E[\Delta_k^n \beta (\overline{Y}_s^n - \overline{Y}^n_{i_k^n})^3]^2)\ ds$$

On établit la majoration voulue en tenant compte de l'expression de $\overline{Y}_s^n - \overline{Y}^n_{i_k^n}$ telle qu'elle est rappelée en 3-3-2.

Pour achever la démonstration du Théorème, il ne reste plus qu'à montrer que :

3-3-5 $\qquad \sup_{t \in \| 0,1 \|} E([Z_t^n - Z^n_{i^n_{k_o}}]^2) \leq K \quad |\Lambda^n|$

Notons que :

$$Z_t^n - Z^n_{i^n_{k_o}} = \int_{C^n_{k_o} \cap \| o,t \|} G(\overline{Y}_s^n) \frac{\Delta^n_{k_o} \beta}{\lambda^n_{k_o}} ds$$

$$+ \sum_{p=1}^{2} \int_{C_p^n(t)} G(\overline{Y}_s^n)\ \psi^n(s)\ ds$$

On a évidemment :

$$E([\int_{C^n_{k_o} \cap]o,t]} G(\overline{Y}^n_s) \frac{\Delta^{n\ \beta}_{k_o}}{\lambda^n_{k_o}} ds]^2) \leq K\ \lambda^n_{k_o}$$

Pour les deux autres termes, on établit la majoration en tenant compte des calculs faits en 3-3 (1-2-3-4).

3-4 Théorème

Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2-3. On suppose de plus que ϕ , $D\phi$ et γ sont bornées par une constante .

Y et Y^n sont définis comme précédemment (cf 2-3).

Soit G une fonction de $C^b_3(R)$

Soit

$$\Xi_t = \int_{]o,t]} G(Y_s)\ d\Xi^{\gamma}_s$$

$$\Xi^n_t = \int_{]o,t]} G(Y^n_s)\ d\Xi^n_s$$

$$- \frac{1}{2} \int_{]o,t]^2} 1_H(s,u)\ G'(Y^n_{s\vee u})\ \phi(u,\omega)\ \gamma^*(s,u)\ d\beta^n_s\ du$$

$$+ \frac{1}{8} \int_{]o,t]^2} 1_H(s,u)\ G''(Y^n_{s\vee u})\ \phi(u,\omega)\ \gamma^*(s,u)\ \phi(s,\omega)\ ds\ du$$

Alors $\lim\limits_n \sup\limits_{t\in]o,1]} E([\Xi_t - \Xi^n_t]^2) = o$

Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que

$$\lim_n \sup_{t\in]o,1]} E([\Xi_t - \Xi^n_t]^2) \leq K\ |\ ^n|$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $V^n_t = \int_{]o,t]} G(Y^n_s)\ \overline{\varphi}^n(s)\ ds$

pour $t \in C^n k_o$ on peut écrire :

$$V_t^n = V_t^n - V^n_{i^n_{k_o}} + \sum_{k\in I^n(k_o)} G(Y^n_{i^n_k})\, \overline{\Delta}^n_k\beta$$
$$+ \sum_{k\in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{i^n_k}) \frac{\overline{\Delta}^n_k\beta}{\lambda^n_k}\, ds$$
$$+ \int_{]o,i^n_{k_o}]} \sum_k (G(Y^n_s) - G(Y^n_{i^n_k}) - G'(Y^n_{i^n_k})(Y^n_s - Y^n_{i^n_k}))\, 1_{C^n_k}(s)\, \overline{\Psi}^n(s)\, ds$$

on vérifie d'abord que

3-4-1

$$E(\Big[\sum_{k\in I^n(k_o)} G(Y^n_{i^n_k})\, \overline{\Delta}^n_k\beta - \int_{]o,t]} G(Y_s)\, d\overline{\beta}_s\Big]^2)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K\ |h^n|$ quand γ est lipschitzienne. Ceci résulte essentiellement des propriétés énoncées en 3-1 et se démontre de façon analogue à 3-2-1 et 3-3-1.

On passe alors à l'étude de :

$$A^n = \sum_{k\in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{i^n_k}) \frac{\overline{\Delta}^n_k\beta}{\lambda^n_k}\, ds$$

compte tenu du fait que

$$Y^n_s - Y^n_{i^n_k} = \int_{C^n_k(s)} \phi(u,\omega)\, du\, \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k} + \sum_{p=1}^{2} \int_{C^n_p(s)} \phi(u,\omega)\, \psi^n(u)\, du$$

On a 2 termes à examiner car le 3ème terme se déduit par symétrie du 2ème-terme.

Par suite de l'orthogonalité de $\Delta^n_k\beta$ et $\overline{\Delta}^n_k\beta$, on vérifie facilement que la contribution du premier terme tend vers zéro, en étant majoré par $K\ |h^n|$. Cf. l'étude de B^n_o dans 3-3-2).

Soit alors

$$\overline{A}^n = \sum_{k\in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \frac{\overline{\Delta}^n_k\beta}{\lambda^n_k} \sum_{j\in I^n_1(k)} \frac{\Delta^n_j\beta}{\lambda^n_j} \int_{C^n_k} ds \int_{C^n_j(s)} \phi(u)\, du$$

on a $\bar{\Delta}^n_k\beta = \sum_{j\varepsilon I^n_1(k)} \sum_{p\varepsilon I^n_2(k)} \Delta^n_j\beta\, \Delta^n_p\beta \frac{1}{\lambda^n_p}\frac{1}{\lambda^n_j}\int_{C^n_p\times C^n_j} \gamma^*(v,w)\, dv\, dw$

En utilisant l'orthogonalité de $\Delta^n_j\beta$ et $\Delta^n_{j'}\beta$ quand $j \neq j'$, on montre que $E([\bar{A}^n - A^n_1]^2)$ tend vers zéro en étant majoré par $K\,|h^n|$ où

$$A^n_1 = \sum_{k\varepsilon I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \sum_{j\varepsilon I^n_1(k)} \sigma^n_{kj}\, [\Delta^n_j\beta]^2 \sum_{p\varepsilon I^n_2(k)} \Delta^n_p\beta\, (\gamma^*)^n_{pj}$$

avec $\sigma^n_{kj} = \frac{1}{\lambda^n_k}\frac{1}{\lambda^n_j}\int_{C^n_k} ds \int_{C^n_j(s)} \phi(u)\, du$

$$(\gamma^*)^n_{pj} = \frac{1}{\lambda^n_p}\frac{1}{\lambda^n_j}\int_{C^n_p\times C^n_j} \gamma^*(v,w)\, dv\, dw$$

En tenant compte du fait que si $\delta^n_j = [\Delta^n_j\beta]^2 - \lambda^n_j$ on a $E(\delta^n_j) = o$ et $E(\delta^n_j\ \Delta^n_p\beta) = o$ pour $j \varepsilon I^n_1(k)$ et $p \varepsilon I^n_2(k)$; on pose

$$A^n_2 = \sum_{k\varepsilon I^n_1(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \sum_{j\varepsilon I^n_1(k)} \sigma^n_{kj}\, \lambda^n_j \sum_{p\varepsilon I^n_2(k)} \Delta^n_p\beta\, (\gamma^*)^n_{pj}$$

et on montre que $E([A^n_1 - A^n_2]^2)$ tend vers zéro. Puis, en transformant l'expression de σ^n_{kj}, on montre que $E([A^n_2 - \frac{1}{2}A^n_4]^2)$ tend vers zéro où :

$$A^n_4 = \sum_k G'(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} ds \int_{\|o,s\|} \phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2))\Psi^n(w^1,s^2)dw^1dv^2$$

Soit donc :

$$B^n = \int_{\|o,t\|} G'(Y^n_s)ds \int_{\|o,s\|} \phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2))\Psi^n(w^1,s^2)dw^1dv^2$$

On compare alors A^n_4 et B^n en écrivant :

$B^n - A^n_4 =$

$$R^n + \sum_k G''(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{i^n_k})ds \int_{\|o,s\|} \phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2)\Psi^n(w^1,s^2) dw^1dv^2$$

quand γ est Liptschitzienne on montre que $E((R^n)^2) \leq K|h^n|$ et que :

$$E([B^n - A_4^n - \frac{1}{2} \int_{\| s,t \|} G''(Y_s^n) ds \int_{\| o,s \|} \phi(w^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2)) dw^1 dv^2]^2)$$

$$\leq K \ |h^n|$$

Notons que la contribution des premier et second termes de la décomposition de $Y_s^n - Y_{i_k^n}^n$ tend vers zéro. On en déduit que :

$$E([A^n - \frac{1}{2} \int_{\| o,t \|} G'(Y_s^n) ds \int_{\| o,s \|} \phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2)(w^1,s^2)) \ \Psi^n(w^1,s^2) dw^1 dv^2$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{\| o,t \|} G''(Y^n) ds \int_{\| o,s \|} \phi(w^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2)) dw^1 dv^2]^2)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K\ |h^n|$ quand γ est Lipschitzienne.

Remarquons alors que si $H = \{(s,u) : s \text{ et } u \text{ non comparables}\}$

et $H_s = \{u : (s,u) \in H\}$, on a :

$$H_s = (]s^1,1] \times [o,s^2[) \cup ([o,s^1[\times]s^2,1])$$

$$\int_{\| o,t \|} G'(Y_s^n) ds \int_{\| o,s \|} \phi(s^1,v^2) \ \gamma^*((s^1,v^2),(w^1,s^2) \ \Psi^n(w^1,s^2) dw^1 dv^2$$

$$= \int_{\| o,t \|} \Psi^n(s) ds \int_{]s^1,t^1] \times [o,s^2[} G'(Y_{u^1,s^2}^n) \ \phi(u) \ \gamma^*(s,u) du$$

et :

$$\int_{\| o,t \|} G''(Y_s^n) ds \int_{\| o,s \|} \phi(w^1,s^2) \ \phi(s^1 v^2) \ \gamma^*((s^1 v^2) \ (w^1,s^2) dw^1 dv^2$$

$$= \int_{\| o,t \|} \phi(s) ds \int_{]s^1,t^1] \times [o,s^2[} G''(Y_{u^1,s^2}^n) \ \phi(u) \ \gamma^*(s,u) du$$

En tenant compte de la symétrie et du fait que :

$(u^1,s^2) = u \vee s$ si $u \in]s^1,t^1] \times [o,s^2[$ $(s^1,u^2) = u \vee s$ si $u \in]o,s^1] \times]s^2,t^2]$

on a :

3-4-2

$$E\Big(\Big[\sum_{k\in I^n(k_o)} G'(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{i^n_k}) \frac{\overline{\Delta}^n_k \beta}{\lambda^n_k} ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\|o,t\|^2} 1_H(s,u)\ G'(Y^n_{s\vee u})\ \phi(u)\ \gamma^*(s,u)\ \Psi^n(s)\ du\ ds$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\|o,t\|^2} 1_H(s,u)\ G''(Y^n_{s\vee u})\ \phi(u)\ \gamma^*(s,u)\ \phi(s)\ ds\ du\Big]^2\Big)$$

qui tend vers zéro en étant majoré par $K\ |h^n|$ quand γ est Lipschitzienne.

On passe alors à l'étude de :

$$C^n = \sum_k G''(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} [Y^n_s - Y^n_{i^n_k}]^2\ \overline{\Psi}^n_s\ ds$$

$[Y^n_s - Y^n_{i^n_k}]^2$ comporte six termes, par suite de la symétrie il suffit d'en étudier quatre. On s'aperçoit alors que le seul terme dont la contribution ne tend pas vers zéro est celui qui correspond aux termes :

$$\Big(\sum_{j\in I^n_1(k)} \int_{C^n_j(s)} \phi(u)du\ \frac{\Delta^n_j\beta}{\lambda^n_j}\Big) \qquad \Big(\sum_{p\in I^n_2(k)} \int_{C^n_p(s)} \phi(u)du\ \frac{\Delta^n_p\beta}{\lambda^n_p}\Big)$$

dans la décomposition de $[Y^n_s - Y^n_{i^n_k}]^2$. Il est en relation avec la variation quadratique de $\overline{\beta}$.

Plus précisément on montre que :

3-4-3

$$E\Big(\Big[\sum_k G''(Y^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} [Y^n_s - Y^n_{i^n_k}]^2\ \overline{\Psi}^n_s\ ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\|o,t\|} G''(Y^n_s)ds \int_{\|o,s\|} \phi(w^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2)(w^1,s^2))dw^1dv^2\Big]^2\Big)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K\ |h^n|$ quand γ est Lipschitzienne.

Il ne reste plus qu'à vérifier que :

$$E([V^n_t - V^n_{i^n_{k_o}}]^2) \le K\ |h^n|$$

et :

$$E\Big(\Big[\sum_{k\in I^n_{k_o}} \int_{C^n_k} [G(Y^n_s) - G(Y^n_{i^n_k}) - G'(Y^n_{i^n_k})(Y^n_s - Y^n_{i^n_k}) - \tfrac{1}{2}G''(Y^n_{i^n_k})[Y^n_s - Y^n_{i^n_k}]^2]ds\Big]^2\Big) \le K\ |h^n|$$

pour achever la démonstration du théorème puisque :

$$\frac{1}{4}\int_{\|o,t\|} G''(Y_s^n)ds \int_{\|o,s\|} \phi(w^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2)(w^1,s^2))dw^1dv^2$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\|o,t\|^2} 1_H(s,u)\ G''(Y^n_{s\vee u})\ \phi(s)\ \gamma^*(s,u)\ \phi(u)ds\ du.$$

3-5 Théorème

Soit ϕ une fonction définie sur $\|0,1\|$, γ et Γ des fonctions définies sur $\|0,1\|^2$. On suppose que ces fonctions sont à valeurs réelles et Lipschitziennes.

Soient $\overline{Y}$ et $\overline{Y}^n$ définis par :

$$\overline{Y}_t = \int_{\|o,t\|} \phi(s)\ d\overline{\beta}_s^\Gamma, \qquad \overline{Y}_t^n = \int_{\|o,t\|} \phi(s)\ \overline{\Psi}^n(s,\Gamma)ds$$

G étant une fonction de $C_3^b(\mathbb{R})$. Soient $\overline{W}$ et $\overline{W}^n$ définis par :

$$\overline{W}_t = \int_{\|o,t\|} G(\overline{Y}_s)\ d\overline{\beta}_s^\gamma$$

$$\overline{W}_t^n = \int_{\|o,t\|} G(\overline{Y}_s^n)\ \overline{\Psi}^n(s,\gamma)ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\|o,t\|} G'(\overline{Y}_s^n)\left[\int_{\|o,s\|} \phi(s^1,v^2)\ \sigma^n(s,v)\ d\beta_v^n\right] ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\|o,t\|} G'(\overline{Y}_s^n)\left[\int_{\|o,s\|} \phi(v^1,s^2)\ \overline{\sigma}^n(s,v)\ d\beta_v^n\right] ds$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\|o,t\|} G'(\overline{Y}_s^n)\ \phi(s)\ \left[\int_{\|o,s\|} \gamma^*\cdot\Gamma^*((s^1,u^2),(u^1,s^2))\ du\right] ds$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\|o,t\|} G''(\overline{Y}_s^n)\ \left[\int_{\|o,s\|^2} \phi(u^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\alpha(u,s,v)d\beta_u^n\ d\beta_v^n\right] ds$$

où :

$$\sigma^n(s,v) = \int_{[o,s^1]\times[o,v^2]} \gamma^*((u^1,s^2),(s^1,u^2))\ \Gamma^*((s^1,u^2),v)\ \Psi^n(u^1,s^2)\ du$$

$$\bar{\sigma}^n(s,v) = \int_{[o,v^1]\times[o,s^2]} \gamma^*((u^1,s^2),(s^1,u^2))\ \Gamma^*((u^1,s^2),v)\ \Psi^n(s^1,u^2)\ du$$

$$\alpha(u,s,v) = \int_{[o,u^1]\times[o,v^2]} \gamma^*((s^1,w^2)(w^1,s^2))\Gamma^*((w^1,s^2),u)\Gamma^*((s^1,w^2),v)dw$$

Alors il existe une constante K telle que :

$$\lim_n \sup_{t\in\|0,1\|} E([\bar{W}_t-\bar{W}_t^n]^2) \leq K\ |h^n|$$

Démonstration

$$\text{Soit } W_t^n = \int_{\|o,t\|} G(\bar{Y}_s^n)\ \bar{\Psi}^n(s,\gamma)\ ds$$

On peut écrire :

$$W_t^n = W_t^n - W^n_{i^n_{k_o}} + A^n + B^n + C^n + R^n$$

où :

$$A^n = \sum_{k\in\bar{I}^n(k_o)} G(\bar{Y}^n_{i^n_k})\ \bar{\Delta}_k^n\ \beta^\gamma$$

$$B^n = \sum_{k\in\bar{I}^n(k_o)} G'(\bar{Y}^n_{i^n_k})\ \bar{\Delta}_k^n\ \beta^\gamma\ \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n} (\bar{Y}_s^n-\bar{Y}^n_{i^n_k})\ ds$$

$$C^n = \frac{1}{2}\sum_{k\in\bar{I}^n(k_o)} G''(\bar{Y}^n_{i^n_k})\ \bar{\Delta}_k^n\ \beta^\gamma\ \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n} [\bar{Y}_s^n-\bar{Y}^n_{i^n_k}]^2\ ds$$

$$R^n = \sum_{k\in\bar{I}^n(k_o)} \bar{\Delta}_k^n\ \beta^\gamma\ \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n} R_k^n(s)\ ds \quad \text{où } |R_k^n(s)| \leq K\ |\bar{Y}_s^n-\bar{Y}^n_{i^n_k}|^3.$$

Nous allons d'abord faire la démonstration dans le cas où $\gamma(s,u) = \gamma^1(s)\ \gamma^2(u)$, $\Gamma(s,u) = \Gamma^1(s)\ \Gamma^2(u)$, γ^1, γ^2, Γ^1, Γ^2 étant des fonctions définies sur $\|0,1\|$, à valeurs réelles et Lipschitziennes.

On a alors :

$$\bar{\Delta}_k^n\beta^\gamma = {}^1\Delta_k^n(\gamma^1)\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^2) + {}^1\Delta_k^n(\gamma^2)\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^1)$$

où :

$${}^i\Delta_k^n(\gamma^p) = \sum_{j \in I_i^n(k)} \gamma^p(n,j)\,\Delta_j^n\beta,\ p = 1, 2\ ;\ i = 1, 2 \quad \gamma^p(n,j) = \frac{1}{\lambda_j^n} \int_{C_j^n} \gamma^p(u)\,du$$

et l'expression analogue pour $\bar{\Delta}_k^n\beta^\Gamma$.

1 - Etude de A^n

On vérifie en utilisant les propriétés de $\bar{\beta}$ énoncées en 3-1 que :

$$\sup_{t \in \| 0,1 \|} E([A^n - \int_{\| o,t \|} G(\bar{Y}_s)\,d\bar{\beta}_s^\gamma|^2) \leq K\ |h^n|$$

2 - Etude de B^n

Compte tenu du fait que :

$$\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n = \int_{C_k^n(s)} \phi(u)\,du\ \frac{\bar{\Delta}_k^n\beta^\Gamma}{\lambda_k^n} + \sum_{j \in I_1^n(k) \cup I_2^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u)\,du\ \frac{\bar{\Delta}_j^n\beta^\Gamma}{\lambda_j^n}$$

on écrit $B^n = B_1^n + B_2^n + B_3^n$, les termes B_2^n et B_3^n étant symétriques.

2-1 On montre que :

$$E([B_1^n - \frac{1}{4}\int_{\| o,t \|} G'(\bar{Y}_s^n)\ \phi(s)\ ds \int_{\| o,s \|} \gamma^* \cdot \Gamma^*(s^1,u^2),(u^1,s^2)\,du|^2 \leq K\ |h^n|$$

En effet :

B_1^n est la somme de quatre termes du type :

$$B_1^n(p,q) = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\ {}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\ {}^1\Delta_k^n(\Gamma^{q^1})\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})\ {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{q^2})$$

$$\times \frac{1}{[\lambda_k^n]^2} \int_{C_k^n} ds \int_{C_k^n(s)} \phi(u)\,du$$

où $p = (p^1, p^2)$, $q = (q^1, q^2)$ p et q appartenant à l'ensemble : $\{(1,2)\ (2,1)\}$.

On utilise alors la propriété suivante :

$$E({}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})\ {}^1\Delta_k^n(\Gamma^{q^1})\ {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{q^2})/(F_{i_k^n}))$$

$$= (\sum_{j \in I_1^n(k)} \gamma^{p^1}(i_j^n)\ \gamma^{q^1}(i_j^n)\ \lambda_j^n)\ (\sum_{j \in I_2^n(k)} \gamma^{p^2}(i_j^n)\ \Gamma^{q^2}(i_j^n)\ \lambda_j^n)$$

<u>2-2</u>

On va montrer que $E([B_2^n - D^n]^2) \leq K|h^n|$ où

$$D^n = \frac{1}{2} \int_{\|o,t\|} G'(\overline{Y}_s^n)\ [\int_{\|o,s\|} \phi(s^1,v^2)\ \Psi^n(v)\ \sigma^n(s,v)dv]\ ds$$

$$- \frac{1}{4} \int_{\|o,t\|} G''(\overline{Y}_s^n)\ [\int_{\|o,s\|^2} \phi(u^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\Psi^n(u)\Psi^n(v)\ \alpha(s,u,v)du\ dv]\ ds$$

$$- \frac{1}{4} \int_{\|o,t\|} G'(\overline{Y}_s^n)\phi(s)ds \int_{\|o,s\|} \gamma^* \cdot \Gamma^*((s^1,u^2),(u^1,s^2))\ du$$

On remarque d'abord que B_2^n est la somme de quatre termes du type :

$$B_2^n(p,q) = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}_{i_k^n}^n)\ {}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2}) \sum_{j \in I_1^n(k)} \int_{C_k^n} ds \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du \times \frac{{}^1\Delta_j^n(\Gamma^{q^1})\ {}^2\Delta_j^n(\Gamma^{q^2})}{\lambda_k^n \lambda_j^n}$$

on vérifie immédiatement que $E([B_2^n(p,q) - b_2^n(p,q)]^2) \leq K|h^n|$ où

$$b_2^n(p,q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}_{i_k^n}^n)\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})$$

$$\sum_{r \in I_1^n(k)} \phi(i_r^n)\ (\sum_{j \in I_1^n(r)} \gamma^{p^1} \cdot \Gamma^{q^1}(i_j^n)\lambda_j^n)\ {}^2\Delta_r^n(\Gamma^{q^2})$$

Soit alors :

$$\overline{B}^n(p,q) = \int_{\rrbracket o, i^n_{k_o} \rrbracket} G'(\overline{Y}^n_s)\ \overline{\theta}^n(s)\ ds$$

où $\overline{\theta}^n(s) = \overline{\theta}^n_1(s)\ \overline{\theta}^n_2(s)$ avec :

$$\overline{\theta}^n_1(s) = \int_{[o,s^1]} \gamma^{p^2}(v^1,s^2)\ \psi^n(v^1,s^2)\ dv^1$$

$$\overline{\theta}^n_2(s) = \int_{\rrbracket o,s \rrbracket} \phi(s^1,v^2)\ \left\{\int_{[o,v^2]} \gamma^{p^1}\cdot\Gamma^{q^1}(s^1,u^2)du^2\ \Gamma^{q^2}(u^1,v^2)\right\}\ \psi^n(u^1,v^2)\ du^1dv^2$$

On peut écrire $\overline{B}^n(p,q) = \sum_{\ell=1}^{4} \overline{B}^n_\ell$ où :

$$\overline{B}^n_1 = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}_{i^n_k})\ \overline{\theta}^n(i^n_k)\ \lambda^n_k$$

$$\overline{B}^n_2 = \sum_{k \in I^n(k_o)} G'(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (\overline{\theta}^n(s) - \overline{\theta}^n(i^n_k))\ ds$$

$$\overline{B}^n_3 = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} (\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k})\ \overline{\theta}^n(s)\ ds$$

$$\overline{B}^n_4 = \sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C^n_k} R^n_k(s)\ \overline{\theta}^n(s)\ ds$$

On vérifie d'abord que :

$$E([\,b^n_2(p,q) - \tfrac{1}{2}\,\overline{B}^n_1]^2) \leq K\ |h^n|$$

On passe alors à l'étude du terme $\overline{B}^n_2$

Compte tenu des expressions de $\overline{\theta}^n_1(s)$ et $\overline{\theta}^n_2(s)$ pour s éléments de C^n_k et des propriétés d'orthogonalité, on vérifie que :

$$E([\,\overline{B}^n_2 - \tfrac{1}{2}\int_{\rrbracket o,t \rrbracket} G'(\overline{Y}^n_s)\ \phi(s)ds \int_{\rrbracket o,s \rrbracket} \gamma^{p^1}\cdot\Gamma^{q^1}(s^1,u^2)\ \gamma^{p^1}\cdot\Gamma^{q^2}(u^1,s^2)du]^2) \leq K\ |h^n|$$

En tenant compte de l'expression de $(\overline{Y}^n_s - \overline{Y}_{i^n_k})$ (cf. le paragraphe 2 de la démonstration), on écrit $\overline{B}^n_3$ sous la forme d'une somme de trois termes :

$\overline{B}^n_{3,1}(p,q,\ell)$, $\overline{B}^n_{3,2}(p,q,\ell)$, $\overline{B}^n_{3,3}(p,q,\ell)$

On a :

$$\overline{B}^n_{3,1}(p,q,\ell) = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}_{i^n_k}) \int_{C^n_k} \overline{\theta}^n(s)\,ds \int_{C^n_k(s)} \phi(u)\,du \,\frac{1}{\lambda^n_k}\, {}^1\Delta^n_k(\Gamma^{\ell^1})\, {}^2\Delta^n_k(\Gamma^{\ell^2})$$

G'' et ϕ sont bornées

$$E([\,{}^1\Delta^n_k(\Gamma^{\ell^1})\ {}^2\Delta^n_k(\Gamma^{\ell^2})]^{2r}) \leq K[\lambda^n_k]^r$$

et

$$E([\overline{\theta}^n(s)]^{2r}) \leq K \frac{1}{[(h^n_k)^2]^r}$$

on en déduit que :

$$E([\overline{B}^n_{3,1}]^2) \leq K\, |h^n|$$

Passons à $\overline{B}^n_{3,2}$ qui s'écrit :

$$\overline{B}^n_{3,2}(p,q,\ell) = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} \overline{\theta}^n(s)\,ds \sum_{j \in I^n_1(k)} \Big(\int_{C^n_j(s)} \phi(u)\,du$$
$$\times \frac{1}{\lambda^n_j}\, {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^1})\ {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^2})\Big)$$

d'une part :

$$E([\sum_{j \in I^n_1(k)} \int_{C^n_j(s)} \phi(u)\,du \,\frac{1}{\lambda^n_j}\, {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^1})\ {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^2})]^{2r}) \leq K\,[(h^n_k)^1]^r$$

D'autre part, on peut écrire $\overline{\theta}^n_2(s)$ sous la forme :

$$\overline{\theta}^n_2(s) = \overline{\theta}^n_{2,1}(s) + \overline{\theta}^n_{2,2}(s)$$

où $\overline{\theta}^n_{2,1}(s)$ est $F(1,(i^n_k)^2)$-mesurable et $E([\overline{\theta}^n_{2,1}(s)]^{2r}) \leq K$

et $\overline{\theta}^n_{2,2}(s)$ est tel que $E([\overline{\theta}^n_{2,2}(s)]^{2r}) \leq K[(h^n_k)^2]^r$

on en déduit que : $E([\overline{B}^n_{3,2}]^2) \leq K\ |h^n|$

Pour $\overline{B}^n_{33}$ qui s'écrit :

$$\overline{B}^n_{3,3}(p,q,\ell) = \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} \overline{\theta}^n(s)ds \sum_{j \in I^n_2(k)} \{\int_{C^n_j(s)} \phi(u)\, du$$

$$\times \frac{1}{\lambda^n_j}\ {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^1})\ {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{\ell^2})\}$$

On montre en utilisant les mêmes arguments que précédemment que :

$$E([\overline{B}^n_{3,3}(p,q,\ell) - \frac{1}{2}\int_{\|o,t\|} G''(\overline{Y}^n_s)\ [\int_{\|o,s\|} \sigma(u,s^2)\psi^n(u)du]$$

$$[\int_{\|o,s\|} \overline{\sigma}(v,s^1)\ \psi^n(v)dv]\, ds]^2) \leq K\ |h^n|$$

où : $\sigma(u,s^2) = \phi(u^1,s^2)\Gamma^{\ell^1}(u) \int_{[o,u^1]} \gamma^{p^2}\cdot\Gamma^{\ell^2}(w^1,s^2)dw^1$

$\overline{\sigma}(v,s^1) = \phi(s^1,v^2)\Gamma^{q^2}(v) \int_{[o,v^2]} \gamma^{p^1}\cdot\Gamma^{q^1}(s^1,w^2)dw^2$

Pour le terme $\overline{B}^n_4$ on vérifie que :

$$E([\sum_{k \in I^n(k_o)} \int_{C^n_k} R^n_k(s)\ \overline{\theta}^n(s)ds]^2) \leq K\ |h^n|$$

car : $|R^n_k(s)| \leq K([\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k}]^2)$

et pour achever l'étude de $B^n_2(p,q)$ on montre que :

$$E([\int_{\|o,t\| - \|o,\, i^n_{k_o}\|} G'(\overline{Y}^n_s)\ \overline{\theta}^n(s)ds]^2) \leq K\ |h^n|$$

Ceci résulte des propriétés de $\overline{\theta}^n(s)$ utilisées précédemment.

En regroupant les termes on trouve l'expression annoncée.

Le terme B_3^n s'obtient à partir de B_2^n par symétrie, ce qui achève l'étude du terme B^n.

3 - Etude de C^n

On va montrer que :

$$E([C^n - \frac{1}{4}\int_{\|o,t\|} ds\, G''(\overline{Y}_s^n)[\int_{\|o,s\|^2} \phi(u^1,s^2)\phi(s^1,v^2)\psi^n(u)\psi^n(v)\ \alpha(u,s,v)dudv]]^2)$$

$$\leq K\,|h^n|$$

$[\overline{Y}_s^n - \overline{Y}_{i_k^n}^n]^2$ fait apparaître six termes, par suite de la symétrie il suffit d'en étudier quatre ; on montre que le seul terme qui ne tend pas vers zéro est : (cf. 3-4-3)

$$\overline{C}^n = \sum_{k\in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}_{i_k^n}^n)\ \overline{\Delta}_k^n \beta^\gamma\ \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n} [\sum_{j\in I_1^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\ \frac{\overline{\Delta}_j^n \beta^\Gamma}{\lambda_j^n}]$$

$$[\sum_{j\in I_2^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\ \frac{\overline{\Delta}_j^n \beta^\Gamma}{\lambda_j^n}]\ ds$$

Compte tenu de l'expression de γ et Γ, $\overline{C}^n$ est la somme de huit termes du type :

$$\overline{C}^n(p,q,\ell) = \sum_{k\in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}_{i_k^n}^n)\ {}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\ {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})$$

$$\frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n} [\sum_{j\in I_1^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\ {}^1\Delta_j^n\ (\Gamma^{q^1})\ {}^2\Delta_j^n(\Gamma^{q^2})\ \frac{1}{\lambda_j^n}]$$

$$[\sum_{j\in I_2^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\ {}^1\Delta_j^n\ (\Gamma^{\ell^1})\ {}^2\Delta_j^n\ (\Gamma^{\ell^2})\ \frac{1}{\lambda_j^n}]\ ds$$

où $p,q,\ell \in \{(1,2),\ (2,1)\}$.

en écrivant ${}^{i}\Delta_k^n(\gamma^{p^i})\ {}^{i}\Delta_j^n(\Gamma^{\cdot})$ sous la forme :

$${}^{i}\Delta_j^n(\gamma^{p^i})\ {}^{i}\Delta_j^n(\Gamma^{\cdot}) + ({}^{i}\Delta_k^n(\gamma^{p^i}) - {}^{i}\Delta_j^n(\gamma^{p^i}))\ {}^{i}\Delta_j^n(\Gamma^{\cdot})$$

et en utilisant l'orthogonalité et les propriétés de martingale, on montre que : $E([\overline{C}^n(p,q,\ell) - \overline{C}_1^n(p,q,\ell)]^2)$ tend vers zéro où

$\overline{C}_1^n(p,q,\ell) =$

$$\frac{1}{4} \sum_{k \in I^n(k_o)} G''(\overline{Y}^n_{i_k^n})\ \lambda_k^n \ (\sum_{j \in I_1^n(k)} \phi(i_j^n)\ {}^{2}\Delta_j^n(\Gamma^{q^2}) \sum_{r \in I_1^n(j)} \gamma^{p^1} \cdot \Gamma^{q^1} (i_r^n)(h_r^n)^2)$$

$$\times \ (\sum_{j \in I_2^n(k)} {}^{1}\Delta_j^n(\Gamma^{\ell^1})\ \phi(i_j^n) \sum_{r \in I_2^n(j)} \gamma^{p^2} \cdot \Gamma^{\ell^2} (i_r^n)(h_r^n)^1)$$

et donc compte tenu de l'étude de $\overline{B}_{33}^n$ on a :

$$E([\overline{C}^n(p,q,\ell) - \frac{1}{4} \int_{\|o,t\|} G''(\overline{Y}_s^n) ds \int_{\|o,s\|} \sigma(u,s^2)\Psi^n(u) du \int_{\|o,s\|} \overline{\sigma}(s^1,v)\Psi^n(v) dv]^2)$$

$$\leq K\ |h^n|$$

En regroupant les termes on obtient le résultat annoncé pour C^n.

4 - Majoration de R^n

Il suffit pour l'établir de calculer :

$$\frac{1}{[\lambda_k^n]^2} E([\overline{\Delta}_k^n \beta^\gamma]^2 \ [\overline{Y}_s^n - \overline{Y}^n_{i_k^n}]^6)$$

Compte tenu de l'expression de $\overline{Y}_s^n - \overline{Y}^n_{i_k^n}$ on montre facilement que ce terme est majoré par $K\ |h^n|$.

5 - Majoration de $W_t^n - W^n_{i_k^n}$

$$W_t^n - W^n(i_{k_o}^n) = \overline{\Delta}_{k_o}^n \beta^\gamma \frac{1}{\lambda_{k_o}^n} \int_{C_{k_o}^n(s)} G(\overline{Y}_s^n)\, ds$$

$$+ \sum_{j \in I_1^n(k_o) \cup I_2^n(k_o)} \overline{\Delta}_j^n \beta^\gamma \frac{1}{\lambda_j^n} \int_{C_j^n(s)} G(\overline{Y}_s^n)\, ds$$

Pour le premier terme, G étant bornée, on a :

$$E([\overline{\Delta}_{k_o}^n \beta^\gamma \frac{1}{\lambda_{k_o}^n} \int_{C_{k_o}^n(s)} G(\overline{Y}_s^n) ds]^2) \leq K\, E([\overline{\Delta}_{k_o}^n \beta^\gamma]^2) \leq K\, \lambda_k^n$$

Pour le deuxième terme, il suffit d'écrire :

$$G(\overline{Y}_s^n) = G(\overline{Y}^n_{i_k^n}) + [G(\overline{Y}_s^n) - G(\overline{Y}^n_{i_k^n})]$$

et d'utiliser les propriétés de G et $\overline{\Delta}_k^n \beta^\gamma$ pour obtenir le résultat.

On a donc montré que :

$$E([\int_{\| o,t \|} G(\overline{Y}_s) d\overline{\beta}_s^\gamma - [W_t^n - B^n - C^n - R^n]]^2) \leq K\, |h^n|$$

Pour approximer $\int_{\| o,t \|} G(\overline{Y}_s) d\overline{\beta}_s^\gamma$ on peut donc prendre $\overline{W}_t^n$

6 - Extension au cas général

Supposons que $\gamma(s,u)$ soit de la forme :

$\gamma(s,u) = \gamma^1(s)\, \gamma^2(u) + \overline{\gamma}^1(s)\, \overline{\gamma}^2(u)$.

Les résultats du Théorème restent valables pour γ quand γ^1, γ^2, $\overline{\gamma}^1$ et $\overline{\gamma}^2$ satisfont aux hypothèses, c'est évident tous les termes sont linéaires relativement à γ.

Si on suppose de même que :

$\Gamma(s,u) = \Gamma^1(s)\ \Gamma^2(u) + \bar{\Gamma}^1(s)\ \bar{\Gamma}^2(u)$

en reprenant la démonstration on vérifie que les résultats sont encore valables.

D'autre part, si Γ et γ sont deux fonctions définies sur $\|0,1\|^2$, à valeurs réelles, lipschitziennes, on peut trouver une suite $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaisons linéaires de fonctions qui sont des produits tensoriels, telles que $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\|\Gamma^n-\Gamma\|_\infty + \|\gamma^n-\gamma\|_\infty \leq K|h^n|$$

$$E([\bar{W}_t(\gamma^n,\Gamma^n)-\bar{W}_t^n(\gamma^n,\Gamma^n)]^2) \leq K|h^n|$$

On vérifie alors que :

$$E([\int_{\|o,t\|} [G(\bar{Y}_s(\Gamma))-G(\bar{Y}_s(\Gamma^n)]\,d\beta_s^\gamma]^2) \leq K|h^n|$$

$$E([\int_{\|o,t\|} G(\bar{Y}_s(\Gamma^n))\,d\beta_s^{\gamma-\gamma^n}]^2 \leq K|h^n|$$

$$E([\bar{W}_t^n(\Gamma,\gamma) - \bar{W}_t^n(\Gamma^n,\gamma^n)]^2) \leq K|h^n|$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

3-6 Remarque :

S'il est facile d'écrire la limite de $V_t^n = \int_{\|o,t\|} G(Y_s^n)\,d\beta_s^n$ (corollaire 2-5), il est plus difficile d'écrire celles de $\int_{\|o,t\|} G(Y_s^n)\,d\bar{\beta}_s^n$ et de $\int_{\|o,t\|} G(\bar{Y}_s^n)\,d\bar{\beta}_s^n$ à partir des résultats des Théorèmes 3-4 et 3-5 respectivement, car cela nécessite l'introduction des intégrales mixtes et l'étude de leur approximation ; nous avons voulu rester ici dans le cadre des intégrales stochastiques de premier et second types.

Remarquons également que la méthode utilisée permet d'étudier le cas des intégrales :

$\int_{]o,t]} G(Y_s,\overline{Y}_s,s)\, d\beta_s$ et $\int_{]o,t]} G(Y_s,\overline{Y}_s,s)\, d\overline{\beta}_s$

4. ADDITIF

Ce paragraphe comprend quelques rappels des propriétés du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ tel qu'il est défini par Wong et Zakaï ([5]) et quelques inégalités et majorations simples utilisées dans les démonstrations.

4-1 Propriétés (fondamentales)

4.1.1

$\int_A d\beta_s$ suit une loi $\mathcal{N}(0,\lambda(A))$ (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$)

4.1.2

Si $A \cap B = \emptyset$ $\quad \int_A d\beta_s$ et $\int_B d\beta_s$ sont orthogonales.

4-2 Lemme

La suite $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément par trajectoire sur $\|0,1\|$ vers β.

Démonstration

Soit $t \in C_k^n$ on a $\beta_t^n = \beta_{i_k^n} + \sum_{q=1}^{2^d-2} \int_{C_q^n(t)} \psi^n(s)\, ds$

soit $I \subseteq \{1,2,\ldots d\}$ $I \neq 0$ et $I \neq \{1,2,\ldots d\}$

On pose $C_I^n(t) = \{u \in \|o,t\| : u^r < (i_k^n)^r \quad r \in I \ ; \quad (i_k^n)^r \leq u^r \leq t^r \quad r \in I^c\}$

alors $\int_{C_I^n(t)} \psi^n(s)ds = \prod_{r \in I^c} \left[\frac{s^r-(i_k^n)^r}{(h_k^n)^r}\right] \left[\beta_{\hat{i}_k^n} - \beta_{i_k^n}\right]$

où $\hat{i}_k^n$ est tel que : $(\hat{i}_k^n)^r = \begin{cases} (i_k^n)^r & \text{pour } r \in I \\ (i_k^n + h_k^n)^r & \text{pour } r \in I^c \end{cases}$

les trajectoires de β sont uniformément continues sur $[0,1]$, en conséquence :

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon \ : \ \|t-s\| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |\beta_t - \beta_s| \leq \varepsilon$$

soit N_ε tel que :

$$\forall \ n \geq N_\varepsilon \qquad |h^n| < \eta_\varepsilon$$

on a alors :

$$\forall \ n \geq N_\varepsilon \qquad |\beta_t^n - \beta_t| \leq (2^d - 1)\varepsilon$$

d'où la convergence uniforme par trajectoire sur $[0,1]$.

Notons qu'on n'a pas cette propriété pour $\overline{\beta}^n$ et $\overline{\beta}$, on a seulement dans ce cas la convergence en moyenne quadratique ; rappelons à ce sujet que $\overline{\beta}$ est défini ([5]) comme limite en moyenne quadratique et non pas par trajectoires.

4-3 Majoration de $E([\int_{C_I^n(t)} \psi(\quad) \ \Psi^n(u)du]^{2r})$

4.3.1

Si $\psi(u,\omega) = \psi(u)$ on écrit :

$$\int_{C_I^n(t)} \psi(u) \ \Psi^n(u)du = \sum_k \int_{C_k^n \cap C_I^n(t)} \psi(u) \ \Psi^n(u)du$$

$$= \sum_k \left[\frac{1}{\lambda_k^n} \int_{C_k^n \cap C_I^n(t)} \psi(u)du \right] \Delta_k^n \beta$$

et on utilise les propriétés 4-1 pour obtenir une majoration par $\int_{C_I^n(t)} \psi^2(u)du$.

4.3.2

Sinon, comme dans la démonstration de la proposition 2-3 on écrit le développement de Taylor de ψ jusqu'à l'ordre nécessaire et on utilise les propriétés 4-1 pour chaque terme, on obtient alors un terme majorant comportant les termes : $\int_{C_I^n(t)} E[D^r\psi(u)]^2 du \quad r = 1\ldots d_o$

4-4 Propriété

$$E([\overline{\Delta}_k^n\beta]^2) \leq \sum_{j\in I_1^n(k)} \sum_{p\in I_2^n(k)} \int_{C_p^n\times C_j^n} [\gamma^*(v,w)]^2\, dvdw$$

ceci résulte directement de la définition de $\overline{\Delta}_k^n\beta$ et des propriétés 4-1 de β.

4-5 Lemme

Soient ϕ et γ satisfaisant aux hypothèses 3.1.6. Alors :

4.5.1

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_t E([\sum_{k\in I_{k_o}^n} \phi(i_k^n)\overline{\Delta}_k^n\beta - \int_{\|0,t\|^2} \phi(sVu)\gamma(s,u)d\beta_s d\beta_u]^2) = 0$$

4.5.2

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_t E([\int_{\|0,t\|} \phi(s)\overline{\Psi}^n(s)ds - \sum_{k\in I_{k_o}^n} \phi(i_k^n)\overline{\Delta}_k^n\beta]^2) = 0.$$

Démonstration :

Soient $J = \{(j,p) : \quad u\in C_j^n$ et $v\in C_p^n$ u et v ne sont pas comparables$\}$

$$\mathcal{I} = \{(j,p) : (i_p^n)^1 = (i_j^n)^1 \text{ ou } (i_p^n)^2 = (i_j^n)^2\}$$

$$\overline{\Gamma}^n(s,u) = \sum_{j,p\in J} \phi(i_k^n \vee i_p^n)\, \frac{1}{\lambda_p^n}\, \frac{1}{\lambda_j^n} \int_{C_p^n\times C_j^n} \gamma(v,w)dvdw\; 1_{C_j^n}\, 1_{C_p^n}(u)$$

on a alors :

$$\sum_{k \in I^n_{k_o}} \phi(i^n_k)\ \overline{\Delta}^n_k \beta = \int_{\|0, i^n_{k_o}\|^2} \overline{\Gamma}^n(s,u)\ d\beta_s\ d\beta_u$$

et compte tenu des hypothèses sur ϕ et du fait que

$\lambda(\bigcup_{j,p \in I} C^n_p \times C^n_j) \leq K|h^n|$ on obtient 4.5.1.

Pour obtenir 4.5.2, on écrit le développement de Taylor de ϕ.

On remarque que si ϕ est continue $\int_{\|0,t\|} \phi(s) d\overline{\beta}_s{}^{\gamma}$ est limite

dans L^2 de $\sum_k \phi(i^n_k)\Delta^n_k \overline{\beta}^{\gamma}$, en notant que $\Delta^n_k\ \overline{\beta}^{\gamma}{}^n = \overline{\Delta}^n_k \beta$, on obtient

l'égalité :

$$\int_{\|0,t\|} \phi(s) d\overline{\beta}^{\gamma}{}_s = \int_{\|0,t\|^2} \phi(s \vee u)\ \gamma(s,u) d\beta_s\ d\beta_u.$$

4-6 <u>Corollaire</u>

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup}_t E([\overline{\beta}^{\gamma}_t - \overline{\beta}^n_t]^2) = 0.$$

4-7 <u>Lemme</u>

Si γ est bornée

4.7.1 $\quad E([\overline{\Delta}^n_k \beta]^{2r}) \leq K[\lambda^n_k]^r$

4.7.2 $\quad E([\overline{Y}^n_s - \overline{Y}^n_{i^n_k}]^{2r}) \leq K\ |h^n_k|^r$

<u>Démonstration</u>

Pour démontrer 4-7-1, il suffit de développer $[\overline{\Delta}^n_k \beta]^{2r}$ et d'utiliser les propriétés de $\Delta^n_p \beta$. Pour démontrer 4-7-2, on écrit $\overline{Y}^n_s - \overline{Y}_{i^n_k}$ sous la forme :

$$\int_{C^n_k(s)} \phi(u)\ \overline{\Psi}^n(u) du + \sum_{j \in I^n_1(k) \cup I^n_2(k)} \int_{C^n_j(s)} \phi(u)\ \overline{\Psi}^n(u) du$$

On obtient le résultat en développant ϕ à l'ordre voulu et en utilisant 4.7.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIN Marie-France — *Sur quelques types d'approximations des solutions d'équations différentielles stochastiques.*
Thèse de 3ème cycle, Rennes 1974.

[2] E. WONG et M. ZAKAI — *On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals.*
Ann. of Math. Stat. n° 36, 1965.

[3] E. WONG et M. ZAKAI — *On the relation between ordinary and stochastic differential equations.*
Int. Journal of Engineering Sciences, vol. 3, 1965.

[4] E. WONG et M. ZAKAI — *Riemann Stieltjes approximations of stochastic integrals.*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete Band 12, Heft 2 87-97, 1969.

[5] E. WONG et M. ZAKAI — *Martingales and Stochastic Integrals for Processes with a multi-dimensional Parameter.*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete Band 29 Heft 2, 109-122, 1974.

[6] E. WONG et M. ZAKAI — *Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane.*
Memorandum n° ERL-M540. Electronic research Laboratory. College of Engineering, University of California, Berkeley.