PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. BORDENAVE

Une méthode d'éléments finis pour l'équation d'évolution de Navier-Stokes dans un ouvert borne du plan avec des conditions aux limites « séparables »

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S4_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS POUR L'EQUATION D'EVOLUTION DE NAVIER-STOKES DANS UN OUVERT BORNE DU PLAN AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES "SEPARABLES"

M. BORDENAVE (*)

0. INTRODUCTION

On considère l'équation d'évolution de Navier-Stokes dans un ouvert borné simplement connexe du plan dans sa formulation par la fonction courant Ψ, avec des conditions aux limites homogènes sur Ψ et son laplacien $\Delta\Psi$ (conditions "séparables"). On approche l'équation d'évolution par un schéma implicite "backward" en temps et par éléments finis en espace. On propose ensuite un schéma de Crank-Nicholson pour améliorer la précision en temps.

1. LE PROBLEME (cf. LIONS [1])

On considère l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\Psi) + \nu\,\Delta^2\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(-\Delta\Psi) + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(-\Delta\Psi) = 0$$

$$(1.1) \qquad \Psi(0) = \Psi_0 \qquad \begin{cases} \Psi/_\Gamma = 0 \\ \Delta\Psi/_\Gamma = 0 \end{cases}$$

dans un ouvert Θ de R^2, borné, simplement connexe, de frontière Γ assez régulière. On a alors le résultat suivant ([1]) : Si $\Psi_0 \in H^2(\Theta) \cap H^1_0(\Theta)$ $\Delta\Psi_0 \in L^\infty(\Theta)$, le problème (1.1) a une solution unique qui vérifie :

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &\Psi \in L^\infty(0,T\,;\,H^2(\Theta)\cap H^1_0(\Theta)) \\ &\Delta\Psi \in L^2(0,T\,;\,H^1_0(\Theta))\cap L^\infty(Q) \end{aligned} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\Psi) \in L^2(0,T\,;\,H^{-1}(\Theta))$$

où $Q =]0,T[\times \Theta$

(*) Département de Mathématiques Université de PAU.

Si l'on pose $-\Delta\Psi = \omega$, le problème (1.1) peut se formuler :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\,\Delta\omega - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

(1.3) $$\omega/_{\Gamma} = 0$$

$$\omega(0) = -\Delta\Psi_o$$

(1.4) $$-\Delta\Psi = \omega \qquad \Psi/_{\Gamma} = 0$$

ou sous la forme faible suivante :

(1.5) $$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, v\right) + \nu\, a(\omega,v) + b(\Psi,\omega,v) = 0 \quad \forall v \in H_o^1(\mathcal{O}) \quad \forall t \in]0,T[$$

$$\omega(0) = -\Delta\Psi_o$$

(1.6) $$a(\Psi,w) = (\omega,w) \qquad \forall w \in H_o^1(\mathcal{O}) \quad \forall t \in]0,T[$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{O})$,

$$a(\Psi,w) = \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$b(\Psi,\omega,v) = \int_{\mathcal{O}} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) v\, dx\, dy$$

où b est trilinéaire continue sur $W^{1,4}(\mathcal{O}) \times H_o^1(\mathcal{O}) \times H_o^1(\mathcal{O})$.

On a par ailleurs $b(\Psi,v,v) = 0 \quad \forall v \in H_o^1(\mathcal{O})$ car la dérivée tangentielle de Ψ est nulle sur Γ . On supposera par suite la solution (Ψ,ω) suffisamment régulière pour justifier les majorations d'erreur effectuées, régularité précisée au cours des démonstrations. Par ailleurs et sauf indication particulière, $|.|$ désignera la norme dans $L^2(\mathcal{O})$ et $||.||$ celle dans $H_o^1(\mathcal{O})$.

2. *LE PROBLEME APPROCHE*

Soit $(M_h)_{h \in]0,1[}$ une famille de sous-espaces de dimension finie de $H_o^1(\mathcal{O})$ tels qu'il existe C constante > 0 et k entier ≥ 2, si $0 \leq s \leq 1$, $s \leq \ell \leq k$ les espaces M_h ont la propriété suivante :

$$(2.1) \qquad \inf_{\phi\in M_h} ||\phi-\chi||_{H^s(\Theta)} \leq C\, h^{\ell-s}\, ||\chi||_{H^\ell(\Theta)} \quad \text{pour} \quad \chi \in H^1_o(\Theta)\cap H^\ell(\Theta)$$

et on considère la suite de problèmes approchés (consulter [2] , [3] , [4] , [5] [6] pour des résultats concernant le problème avec d'autres conditions aux limites).

(2.2) Trouver $\Omega^{n+1}\in M_h$

$$\left(\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}, \phi\right) + \nu\, a(\Omega^{n+1},\phi) + b(\Phi^n,\Omega^{n+1},\phi) = 0 \qquad \forall\phi\in M_h$$

(2.3) Trouver $\Phi^n\in M_h$

$$a(\Phi^n,\phi) = (\Omega^n,\phi) \qquad \forall\phi\in M_h$$

La suite de problèmes (2.2) (2.3) où Δt est le pas de temps, n est entier, $0 \leq n \leq N$ avec $N\Delta t = T$, est bien définie si on se donne $\Omega^o\in M_h$ approximation de $\omega_o = -\Delta\Psi_o$. On se propose ici de montrer que Ω^n est alors une approximation de $\omega^n = \omega(t_n) = \omega(n\Delta t)$ et Φ^n une approximation de $\Psi^n = \Psi(n\Delta t)$.

Si ω est assez régulier en t , le "système continu" (1.5),(1.6) permet d'écrire

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &(\delta_t\omega^{n+\frac{1}{2}},\phi) + \nu\, a(\omega^{n+1},\phi) + b(\Psi^n,\omega^{n+1},\phi) \\ &\qquad = (-r_n,\phi) - b(s_n,\omega^{n+1},\phi) \qquad \forall\phi\in M_h \end{aligned}$$

$$(2.5) \qquad a(\Psi^n,\phi) = (\omega^n,\phi) \qquad \forall\phi\in M_h$$

où $\delta_t\omega^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{\omega^{n+1}-\omega^n}{\Delta t}$, $r_n = \dfrac{\partial\omega}{\partial t}(t_{n+1}) - \delta_t\omega^{n+\frac{1}{2}}$

$$s_n = \Psi^{n+1} - \Psi^n$$

Si, conformément à [7] , [8], on définit l'application :

$$z_2 = [0,T]\rightarrow M_h \quad \text{par :}$$

$$(2.6) \qquad a(z_2(t),\phi) = a(\omega(t),\phi) \qquad \forall\phi\in M_h$$

on a le théorème suivant : [7] [8] .

Théorème 2.1.

Si $\omega \in L^2(0,T\ ;\ H^{\ell}(\Theta) \cap H_o^1(\Theta))$ et si $\frac{\partial\omega}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{\ell}(\Theta) \cap H_o^1(\Theta))$

$$(2.7) \qquad ||\eta_2||_{L^2(0,T;H_o^1(\Theta))} \leq C.||\omega||_{L^2(0,T;H^{\ell}(\Theta))} \cdot h^{\ell-1} \qquad 1 \leq \ell \leq k$$

$$(2.8) \qquad ||\frac{\partial\eta_2}{\partial t}||_{L^2(0,T;H_o^1(\Theta))} \leq C.||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(0,T;H^{\ell}(\Theta))} \cdot h^{\ell-1}$$

où $\eta_2(t) = z_2(t) - \omega(t) \in H_o^1(\Theta)$

De plus, comme dans ces conditions :

$$(2.9) \qquad ||\eta_2||_{L^\infty(0,T;H_o^1(\Theta))} \leq C(||\eta_2||_{L^2(0,T;H_o^1(\Theta)} + ||\frac{\partial\eta_2}{\partial t}||_{L^2(0,T;H_o^1(\Theta)})$$

on a :

$$(2.10) \qquad ||\eta_2^n|| \leq C(||\omega||_{L^2(H^{\ell})} + ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(H^{\ell})}) \cdot h^{\ell-1}$$

où $\eta_2^n = \eta_2(n\Delta t)$. $\square$

Si on définit (cela est possible en vertu des propriétés de $a(.,.)$) :

$\forall n : 0 \leq n \leq N$.

$$(2.11) \qquad z_1^n \in M_h \text{ par : } a(z_1^n, \phi) = (z_2^n, \phi) \qquad \forall\phi \in M_h \quad \text{où } z_2^n = z_2(n\Delta t)$$

on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.

Si $\Psi \in L^\infty(0,T\ ;\ H^{\ell}(\Theta) \cap H_o^1(\Theta))$ on a :

$$(2.12) \qquad ||\eta_1^n|| \leq C(||\Psi||_{L^\infty(H^{\ell})} + ||\omega||_{L^2(H^{\ell})} + ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(H^{\ell})}) \cdot h^{\ell-1}$$

où $1 \leq \ell \leq k$, $\eta_1^n = z_1^n - \Psi^n \in H_o^1(\Theta)$.

Démonstration analogue à celle du théorème 2.1, compte tenu des résultats de ce théorème pour η_2^n , à partir de l'équation 2.11. $\square$

Rappelant alors que $z_2^{n+1} = \omega^{n+1} + \eta_2^{n+1}$, compte tenu de $a(\eta_2^{n+1},\phi) = 0 \quad \forall\phi \in M_h$ et de (2.4), on a l'équation suivante pour z_2^{n+1} :

$$(\delta_t z_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) + \nu a(z_2^{n+1},\phi) = (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) - (r_n,\phi) - b(\Psi^n,\omega^{n+1},\phi) - b(s_n,\omega^{n+1},\phi) \quad \forall\, \phi \in M_h \,. \tag{2.13}$$

Posant alors $\rho_2^{n+1} = \Omega^{n+1} - z_2^{n+1} \in M_h$ et retranchant membre à membre (2.13) de (2.2) :

$$\begin{aligned}(\delta_t \rho_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) + \nu\, a(\rho_2^{n+1},\phi) = &- b(\Phi^n,\Omega^{n+1},\phi)\\ &+ b(\Psi^n,\omega^{n+1},\phi) + b(s_n,\omega^{n+1},\phi)\\ &+ (r_n,\phi) - (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) \quad \forall\, \phi \in M_h \,.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Or $\quad b(\Phi^n,\Omega^{n+1},\phi) - b(\Psi^n,\omega^{n+1},\phi) = b(\Phi^n-\Psi^n,\omega^{n+1},\phi) + b(\Phi^n,\Omega^{n+1}-\omega^{n+1},\phi)$

et compte tenu de $\Omega^{n+1}-\omega^{n+1} = \rho_2^{n+1} + \eta_2^{n+1}$ et posant $e_1^n = \Phi^n-\Psi^n$, (2.14) devient :

$$\begin{aligned}(\delta_t \rho_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) + \nu\, a(\rho_2^{n+1},\phi) = &- b(e_1^n,\omega^{n+1},\phi) - b(\Phi^n,\rho_2^{n+1},\phi)\\ &- b(\Phi^n,\eta_2^{n+1},\phi) + b(s_n,\omega^{n+1},\phi)\\ &+ (r_n,\phi) - (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}},\phi) \quad \forall\, \phi \in M_h \,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Faisant $\phi = \rho_2^{n+1}$ et compte tenu de $b(\Phi^n,\rho_2^{n+1},\rho_2^{n+1}) = 0$ il vient :

$$\begin{aligned}(\delta_t \rho_2^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+1}) + \nu\, \|\rho_2^{n+1}\|^2 = &- b(e_1^n,\omega^{n+1},\rho_2^{n+1}) - b(\Phi^n,\eta_2^{n+1},\rho_2^{n+1})\\ &+ b(s_n,\omega^{n+1},\rho_2^{n+1}) + (r_n,\rho_2^{n+1}) - (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}},\rho_2^{n+1}) \,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

On a alors besoin de quelques lemmes (où C désigne des constantes diverses) :

<u>Lemme 2.1</u> (voir aussi [9] pour des estimations analogues).

Si $\omega \in L^\infty(0,T\,;\,W^{1,\infty}(\Theta))$ on a :

$$b(e_1^n\,,\,\omega^{n+1},\,\rho_2^{n+1}) \leq C\|\omega\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}\, \|e_1^n\|\ \ |\rho_2^{n+1}| \tag{2.17}$$

(On utilise les inégalités de Schwarz et Fiedrichs).

<u>Lemme 2.2</u> Si $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \in L^2(0,T\ ;\ L^2(\mathcal{O}))$

$$|r_n|^2 \leqslant C\ \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right| d\tau \quad . \tag{2.18}$$

On démontre ceci avec la formule de Taylor à reste intégral.

<u>Lemme 2.3.</u> (de manière analogue)

$$|\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}}|^2 \leqslant \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \right|^2 d\tau \tag{2.19}$$

<u>Lemme 2.4</u> (id.)

Si $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \in L^2(0,T\ ;\ H_0^1(\mathcal{O}))$

$$||s_n||^2 \leqslant \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left|\left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|\right|^2 d\tau \tag{2.20}$$

<u>Lemme 2.5.</u> (*)

Si l'ouvert $\mathcal{O}$ est régulier et s'il n'y a pas de petits triangles :

$\forall \varepsilon\ :\ 0 < \varepsilon < 1 \quad \exists C(\varepsilon)$ tq :

$$|\Phi^n|_{1,\infty} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{h^\varepsilon} : |\Omega^n| \tag{2.21}$$

<u>Démonstration</u> : Soit en effet $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ solution de :

$$a(u,v) = (\Omega^n, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\mathcal{O})$$

Il existe alors $r_h u \in M_h$ (interpolée de u) telle que :

$$|u - r_h u|_{1,2} \leqslant C.h\ |\Omega^n|$$

$$|u|_{2,2} \leqslant C|\Omega^n| \tag{2.22}$$

$$|u - r_h u|_{1,p} \leqslant C|u|_{1,p} \leqslant C(p)\ |u|_{2,2}\ ,\quad p > 2\ .$$

(*) Suggestion et preuve dues à M. CROUZEIX.

Φ^n étant solution de : $a(\Phi^n,\phi) = (\Omega^n,\phi) \quad \forall\phi\in M_h$, on a donc

$$(2.23) \qquad |r_h u-\Phi^n|_{1,2} \leqslant C\, h\, |\Omega^n|$$

d'où d'une manière analogue à [10] (n° 7 , remarque 1) si $p \geqslant 2$:

$$(2.24) \qquad |r_h u-\Phi^n|_{1,p} \leqslant \frac{C}{h^{1-2/p}} |r_h u-\Phi^n|_{1,2} \leqslant C\, h^{2/p}|\Omega^n| \quad \text{et donc :}$$

$$(2.25) \qquad |\Phi^n|_{1,p} \leqslant |\Phi^n-r_h u|_{1,p} + |r_h u-u|_{1,p} + |u|_{1,p} \leqslant C(p)\ |\Omega^n| .$$

D'autre part, toujours d'une manière analogue à [10] , on démontre

$$(2.26) \qquad |\Phi^n|_{1,\infty} \leqslant \frac{C(p)}{h^{2/p}} |\Phi^n|_{1,p}$$

donc finalement (2.21) .

<u>Lemme 2.6</u> Dans les hypothèses du lemme 2.5., on a :

$\forall\varepsilon \ : \ 0 < \varepsilon < 1 \quad \exists C(\varepsilon)$ tq :

$$(2.27) \qquad |\Phi^n|_{1,\infty} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{h^\varepsilon} ||\omega^\circ||$$

<u>Démonstration</u> : On fait $\phi = \Omega^{n+1}$ dans (2.2) et on obtient après un calcul classique :

$$(2.28) \qquad |\Omega^n| \leqslant |\Omega^\circ| \qquad \forall n : \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

Alors avec les choix habituels de Ω° par rapport à ω° (projection H_o^1 , interpolée) on a :

$|\Omega^\circ| \leqslant C||\omega^\circ||$ donc finalement (2.27) d'après (2.21). □

Pour le second membre de (2.16) on utilise les lemmes précédents et de manière répétée l'inégalité $ab \leqslant \alpha\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha}\frac{b^2}{2}$, ainsi que l'inégalité :

$||e_1^n|| \leqslant C(|\rho_2^n| + ||\eta_1^n||)$ qui se déduit facilement de (2.3)

et (2.11) en posant :

$$e_1^n = \Phi^n-\psi^n = \rho_1^n + \eta_1^n \quad \text{où} \quad \rho_1^n = \Phi^n-z_1^n \ .$$

Tout cela pour obtenir finalement :

$$(2.29)\qquad (\delta_t\rho_2^{n+\frac{1}{2}},\rho_2^{n+1}) + \nu||\rho_2^{n+1}||^2 \leqslant \Big[\alpha\, C^2||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\,||\eta_1^n||^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\, C^2(\varepsilon)\,\frac{1}{h^{2\varepsilon}}\,||\omega^\circ||^2||\eta_2^{n+1}||^2 + \frac{\alpha}{2}\, C^2||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\,||s_n||^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\, C\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big|\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\Big|\, d\tau + \frac{\alpha}{2\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Big|\frac{\partial\eta_2}{\partial t}\Big|\, d\tau\Big]$$

$$+\ \alpha\, C^2\,||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\,|\rho_2^n|^2 + \frac{5}{2\alpha}\,|\rho_2^{n+1}|^2 .$$

Notant ensuite A_{n+1} la parenthèse du second membre de (2.29), il vient après un calcul analogue à celui fait pour obtenir (2.28) :

$$(2.30)\qquad \frac{1}{2\Delta t}\,(|\rho_2^{n+1}|^2 - |\rho_2^n|^2) \leqslant A_{n+1} + \alpha C^2||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\,|\rho_2^n|^2 + \frac{5}{2\alpha}\,|\rho_2^{n+1}|^2 .$$

On obtient alors, faisant $\alpha = 5$, le :

<u>Théorème 2.2</u>

Si ω vérifie les hypothèses du théorème 2.1 et des lemmes 2.1 et 2.2, Ψ celles de la proposition 2.1, du lemme 2.4, l'ouvert $\mathcal{O}$ et la famille M_h tels que le lemme 2.5, si Δt est suffisamment petit ($\Delta t \leqslant a < 1$), on a l'inégalité suivante (théorème de stabilité) :

$$(2.31)\qquad |\rho_2^{n+1}| \leqslant C(|\rho_2^\circ| + A) \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

où :

$$A = C\,\Big\{||\omega||_{L^\infty(W^{1,\infty})}.(||\Psi||_{L^\infty(H^\ell)} + ||\omega||_{L^2(H^\ell)} + \Big|\Big|\frac{\partial\omega}{\partial t}\Big|\Big|_{L^2(H^\ell)}).h^\ell$$

$$\ldots + C(\varepsilon)||\omega^\circ||.(||\omega||_{L^2(H^\ell)} + \Big|\Big|\frac{\partial\omega}{\partial t}\Big|\Big|_{L^2(H^\ell)}).\ h^{\ell-1-\varepsilon}$$

$$\ldots + ||\omega||_{L^\infty(W^{1,\infty})}.\ \Big|\Big|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|\Big|_{L^2(H_o^1)}\,.\ \Delta t + \Big|\Big|\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\Big|\Big|_{L^2(L^2)}\,.\ \Delta t$$

$$\ldots + \Big|\Big|\frac{\partial\omega}{\partial t}\Big|\Big|_{L^2(L^2)}\,.\ h^{\ell-1}\Big\}$$

où $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $0 < \varepsilon < 1$

N.B. La stabilité inconditionnelle requiert donc $\underline{\underline{\ell \geq 1}}$.

<u>Démonstration</u> : On multiplie les deux membres de (2.30) par $2\Delta t$ et on somme pour $0 \leq n \leq J$, $0 \leq J \leq N-1$ les inégalités correspondantes, puis on majore le terme $\sum_{0}^{J} \Delta t \, A_{n+1}$ compte tenu du théorème 2.1, de la proposition 2.1 et des lemmes, enfin on applique la forme discrète du lemme de Gronwall pour obtenir finalement (2.31). □

On peut alors conclure par le théorème de majoration d'erreur :

<u>Théorème 2.3</u>.

Dans les hypothèses des théorèmes 2.1 et 2.2 et si

$$|\rho_2^o| \leq C \|\omega^o\|_{H^\ell} \cdot h^{\ell-1} \qquad 1 < \ell \leq k$$

on a pour $0 \leq n \leq N$

$$(2.32) \qquad |e_2^n| \leq C_1 \,\Delta t + C_2 \, h^{\ell-1-\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon : \quad 0 < \varepsilon < 1$$

$$(2.33) \qquad \|e_1^n\| \leq C_3 \,\Delta t + C_4 \, h^{\ell-1-\varepsilon}$$

<u>Démonstration</u> : évidente pour (2.32) à partir du théorème 2.2.
Pour (2.33) on utilise l'inégalité $\|e_1^n\| \leq C(|\rho_2^n| + \|\eta_1^n\|)$. □

<u>Remarques</u> : 1. Les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 ne dépendent pas de Δt et de h.

2. On peut obtenir par le même procédé, une estimation identique de $\left(\sum_{0}^{N} \Delta t \|e_2^n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norme discrète H_o^1) .

3. L'hypothèse du théorème 2.3 sur ρ_2^o est vérifiée dans les conditions habituelles de choix de Ω^o approximation de ω^o soit par exemple la projection H_o^1 :
$\rho_2^o = \Omega^o - z_2^o$ où $a(z_2^o,\phi) = a(\omega^o,\phi) \quad \forall \phi \in M_h$ soit avec $\Omega^o = z_2^o$ $\quad \underline{\underline{\rho_2^o = 0}}$
ou l'interpolée de ω^o par une fonction de M_h : $\Omega^o = r_h\omega^o$ (possible si p ex. $\omega^o \in H^2(\Theta)$)
alors comme $a(r_h\omega^o - z_2^o,\phi) = a(r_h\omega^o - \omega^o,\phi) \quad \forall \phi \in M_h$ il vient :

$$\|r_h\omega^o - z_2^o\| \leq \|r_h\omega^o - \omega^o\| \leq C\, h^{\ell-1} \qquad 1 < \ell \leq k$$

si $\omega^o \in H^\ell(\Theta) \cap H_o^1(\Theta)$ où C dépend de $\|\omega^o\|_{H^\ell}$.

4. On n'a pas d'estimation optimale dans L^2 . □

3. *UNE METHODE DE CRANK-NICHOLSON "EXTRAPOLEE"*

On se place dans les hypothèses de 2. pour les espaces M_h , $h \in]0,1[$, et on considère la suite de problèmes approchés :

$\Omega^o \in M_h$

(approximations de ω^o et ω^1 supposées construites)

$\Omega_1 \in M_h$

$$(3.1) \qquad \left(\frac{\Omega^{n+1}-\Omega^n}{\Delta t}, \phi\right) + \nu\, a(\Omega^{n+\frac{1}{2}},\phi) + b(\Phi_*^{n+\frac{1}{2}}, \Omega^{n+\frac{1}{2}},\phi) = 0 \qquad \forall \phi \in M_h$$

$$\text{où } \Omega^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Omega^{n+1}+\Omega^n}{2} \in M_h$$

$$1 \leqslant n \leqslant N \qquad N\Delta t = T$$

$$\Phi_*^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\,\Phi^n - \frac{1}{2}\,\Phi^{n-1}$$

où Φ^n est défini par :

$$(3.2) \qquad a(\Phi^n,\phi) = (\Omega^n,\phi) \qquad \forall \phi \in M_h$$

Si ω est assez régulier en t , le système "continu" (1.5) écrit pour $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$, joint à (1.6) écrit pour $t = t_n$, entraîne :

$$(3.3) \qquad (\delta_t\omega^{n+\frac{1}{2}} + r_{n+\frac{1}{2}},\phi) + \nu\, a(\omega^{n+\frac{1}{2}},\phi) + \frac{1}{2}\, b(\Psi^{n+1},\omega^{n+1},\phi) + \frac{1}{2}\, b(\Psi^n,\omega^n,\phi) = 0 \qquad \forall \phi \in M_h$$

$$\text{où } r_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\omega}{\partial t}(t_{n+1}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\omega}{\partial t}(t_n) - \delta_t\omega^{n+\frac{1}{2}}$$

D'autre part, posant :

$$s_n^* = \Psi_*^{n+\frac{1}{2}} - \Psi^{n+\frac{1}{2}} , \quad s_n = \Psi^{n+1} - \Psi^n , \quad \sigma_n = \omega^{n+1}-\omega^n$$

on obtient en utilisant la linéarité de b :

$$(3.4) \qquad \frac{1}{2}\, b(\Psi^{n+1},\omega^{n+1},\phi) + \frac{1}{2}\, b(\Psi^n,\omega^n,\phi) = \frac{1}{4}\, b(s_n,\sigma_n,\phi) - b(s_n^*,\omega^{n+\frac{1}{2}},\phi) + b(\Psi_*^{n+\frac{1}{2}},\omega^{n+\frac{1}{2}},\phi)$$

Si alors conformément à (2.6), on définit z_2, on a le théorème 2.1, la proposition 2.1 pour z_1^n défini par (2.11) et l'équation suivante pour

$$z_2^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(z_2^{n+1} + z_2^n)$$

(3.5) $$(\delta_t z_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) + \nu\, a(z_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) = (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) - (r_{n+\frac{1}{2}}, \phi)$$

$$\ldots - b(\Psi_*^{n+\frac{1}{2}}, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \phi) + b(s_n^*, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \phi)$$

$$\ldots - \frac{1}{4}\, b(s_n, \sigma_n, \phi) \qquad \forall \phi \in M_h$$

Il vient alors l'équation suivante, de manière analogue à (2.14) + (2.15), avec $\rho_2^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\rho_2^{n+1} + \rho_2^n)$

(3.6) $$(\delta_t \rho_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) + \nu\, a(\rho_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) = - b(e_{1*}^{n+\frac{1}{2}}, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \phi)$$

$$\ldots - b(\Phi_*^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) - b(\Phi_*^{n+\frac{1}{2}}, \eta_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi)$$

$$\ldots - (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}}, \phi) + (r_{n+\frac{1}{2}}, \phi) - b(s_n^*, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \phi)$$

$$\ldots + \frac{1}{4}\, b(s_n, \sigma_n, \phi) \qquad \forall \phi \in M_h$$

où $e_{1*}^{n+\frac{1}{2}} = \Phi_*^{n+\frac{1}{2}} - \Psi_*^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} e_1^n - \frac{1}{2} e_1^{n-1}$

Faisant alors $\phi = \rho_2^{n+\frac{1}{2}}$, il vient comme dans (2.16) :

(3.7) $$(\delta_t \rho_2^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}) + \nu\, ||\rho_2^{n+\frac{1}{2}}||^2 = - b(e_{1*}^{n+\frac{1}{2}}, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\ldots - b(\Phi_*^{n+\frac{1}{2}}, \eta_2^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}) - (\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}) + (r_{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\ldots - b(s_n^*, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}\, b(s_n, \sigma_n, \rho^{n+\frac{1}{2}})$$

Suivent alors des lemmes analogues aux lemmes 2.1.... 2.6. :

<u>Lemme 3.1</u>. Si $\omega \in L^\infty(0,T\,;\, W^{1,\infty}(\Theta))$

(3.8) $$b(e_{1*}^{n+\frac{1}{2}}, \omega^{n+\frac{1}{2}}, \rho_2^{n+\frac{1}{2}}) \leq C\, ||\omega||_{L^\infty(W^{1,\infty})}\, ||e_{1*}^{n+\frac{1}{2}}||\ \ |\rho_2^{n+\frac{1}{2}}|$$

<u>Lemme 3.2</u>. Si $\dfrac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} \in L^2(0,T;L^2(\Theta))$

(3.9) $$|r_{n+\frac{1}{2}}|^2 \leq C\, \Delta t^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3}|^2 d\tau \quad .$$

Pour $\delta_t \eta_2^{n+\frac{1}{2}}$, on retrouve le lemme 2.3. Puis :

Lemme 3.3. Si $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H_o^1(\Theta))$

(3.10) $$||s_n^*||^2 \leqslant C\Delta t^3 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} ||\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}||^2 \, d\tau$$

Lemme 3.4. Si $\frac{\partial\omega}{\partial t} \in L^2(0,T;H_o^1(\Theta))$ et si $\frac{\partial\Psi}{\partial t} \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Theta))$

(3.11) $$|s_n|_{1,\infty}^2 \; ||\sigma_n||^2 \leqslant C||\frac{\partial\Psi}{\partial t}||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})} \cdot \Delta t^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||^2 \, d\tau \; . \; \square$$

Pour Φ^n, on retrouve le lemme 2.5 et par suite :

Lemme 3.5. Si $|\Omega^1| \leqslant |\Omega^o|$ (*) , dans les hypothèses du lemme 2.5 :

$$\forall\, \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \quad \exists C(\varepsilon) \text{ tq } :$$

(3.12) $$|\Phi^n|_{1,\infty} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{h^\varepsilon} ||\omega^o||$$

Démonstration : analogue à celle du lemme 2.6 en faisant $\Phi = \Omega^{n+\frac{1}{2}}$ dans (3.1) , on obtient $|\Omega^n| \leqslant |\Omega^1|$ $\forall\, n : 1 \leqslant n \leqslant N$ et l'hypothèse $|\Omega^1| \leqslant |\Omega^o|$ donne le résultat dans les mêmes conditions que le lemme 2.6. $\square$

Compte tenu de tous ces résultats, et de l'inégalité :

$$||e_{1*}^{n+\frac{1}{2}}|| \leqslant C\,(|\rho_{2*}^{n+\frac{1}{2}}| + ||\eta_{1*}^{n+\frac{1}{2}}||) \text{ qui se déduit aussi de (2.3)}$$

et (2.11), on a finalement pour (3.7) :

(3.13) $$(\delta_t\rho_2^{n+\frac{1}{2}},\rho_2^{n+\frac{1}{2}}) + \nu||\rho_2^{n+\frac{1}{2}}||^2 \leqslant \Big[\alpha\, C^2||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\, ||\eta_{1*}^{n+\frac{1}{2}}||^2$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\, C^2(\varepsilon)||\omega^o||^2\, ||\eta_2^{n+\frac{1}{2}}||^2 . \frac{1}{h^{2\varepsilon}} + \frac{\alpha}{2\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\frac{\partial\eta_2}{\partial t}|^2 d\tau$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\, C\, \Delta t^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\frac{\partial^3\omega}{\partial t^3}|^2 d\tau + \alpha\,\frac{C^2}{2}\,||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\,\Delta t^3 . \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} ||\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}||^2 d\tau$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\,\Delta t^3\, ||\frac{\partial\Psi}{\partial t}||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})} \int_{t_n}^{t_{n+1}} ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||^2 \, d\tau\Big]$$

$$\ldots + \alpha\, C^2\, ||\omega||^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\, |\rho_{2*}^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{6}{2\alpha}\, |\rho_2^{n+\frac{1}{2}}|^2 \; .$$

(*) Hypothèse non réalisée de manière évidente.

De la même manière que pour le théorème 2.2 on obtient alors le théorème 3.1 (théorème de stabilité).

<u>Théorème 3.1</u>. Si ω vérifie les hypothèses du théorème 2.1 et des lemmes 3.1, 3.2, 3.4, Ψ celles de la proposition 2.1, des lemmes 3.3, 3.4, l'ouvert $\mathcal{O}$ et la famille M_h tels que le lemme 2.5, si $|\Omega| \leq |\Omega^o|$ et Δt suffisamment petit, on a l'inégalité suivante :

$$(3.14) \qquad |\rho_2^{n+1}| \leq C(A + |\rho_2^1| + |\rho_2^o|) \qquad 1 \leq n \leq N-1$$

où
$$A = C\Big\{ ||\omega||_{L^\infty(W^{1,\infty})}(||\Psi||_{L^\infty(H^\ell)} + ||\omega||_{L^2(H^\ell)} + ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(H^\ell)}).h^{\ell-1}$$
$$+ C(\varepsilon)||\omega^o||(||\omega||_{L^2(H^\ell)} + ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(H^\ell)}).h^{\ell-1+\varepsilon}$$
$$\ldots + ||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(L^2)}.h^{\ell-1} + \Delta t^2\Big[||\frac{\partial^3\omega}{\partial t^3}||_{L^2(L^2)} + ||\omega||_{L^\infty(W^{1,\infty})}||\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}||_{L^2(H_o^1)}$$
$$\ldots + ||\frac{\partial\Psi}{\partial t}||_{L^\infty(W^{1,\infty})}||\frac{\partial\omega}{\partial t}||_{L^2(H_o^1)}\Big]\Big\} \qquad \text{pour } 1 \leq \ell \leq k .$$

<u>N.B</u>. La stabilité inconditionnelle requiert encore $\ell > 1$. □

On peut alors conclure par le théorème de majoration d'erreur :

<u>Théorème 3.2</u>. Si $|\rho_2^o| \leq C_o\, h^{\ell-1} \qquad 1 < \ell \leq k$

$$|\rho_2^1| \leq C_1\, h^{\ell-1-\varepsilon} + C'_1\, \Delta t^2$$

on a pour $0 \leq n \leq N \quad \forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$:

$$(3.15) \qquad |e_2^n| \leq C_2\, \Delta t^2 + C_3\, h^{\ell-1-\varepsilon}$$

$$(3.16) \qquad ||e_1^n|| \leq C_4\, \Delta t^2 + C_5\, h^{\ell-1-\varepsilon}$$

<u>Démonstration</u> : évidente pour (3.15) à partir du théorème de stabilité. Pour (3.16) même remarque que pour (2.33) conduisant au résultat. □
Les remarques 1.2., 3., 4., suivant le théorème 2.3 restent valables en particulier la remarque 3. permet de préciser le choix de Ω^o. Il reste donc à préciser celui de Ω^1 de sorte qu'il réponde aux deux hypothèses : $|\Omega^1| \leq |\Omega^o|$, Ω^o étant donné et

$$|\rho_2^1| \leq C_1\, h^{\ell-1-\varepsilon} + C'_1\, \Delta t^2 .$$

Pour cela on pourra par exemple utiliser le schéma (prédicteur-correcteur) suivant (qui en fait peut remplacer complètement (3.1).(3.2) mais nécessite deux fois plus d'opérations) :

$$(3.17)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{W-\Omega^o}{\Delta t}, \phi\right) + \nu\, a\left(\dfrac{W+\Omega^o}{2}, \phi\right) + b\left(\Phi^o, \dfrac{W+\Omega^o}{2}, \phi\right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \phi \in M_h \\ W \in M_h \end{cases}$$

$$(3.18)\quad \begin{cases} a(\Phi_W, \phi) = \left(\dfrac{W+\Omega^o}{2}, \phi\right) \qquad \forall \phi \in M_h \\ \Phi_W \in M_h \end{cases}$$

$$(3.19)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\Omega^1-\Omega^o}{\Delta t}, \phi\right) + \nu\, a\left(\dfrac{\Omega^1+\Omega^o}{2}, \phi\right) + b\left(\Phi_W, \dfrac{\Omega^1+\Omega^o}{2}, \phi\right) = 0 \\ \Omega_1 \in M_h \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \phi \in M_h \end{cases}$$

A noter que (3.19) est (3.1) pour n = 0 avec $\Phi_*^{1/2}$ remplacé par Φ_W et en y posant $\phi = \dfrac{\Omega^1+\Omega^o}{2} = \Omega^{1/2}$ il vient facilement :

$$|\Omega^1|^2 - |\Omega^o|^2 \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad |\Omega^1| \leqslant |\Omega^o| \quad \text{est vérifié.}$$

Il ne reste alors qu'à montrer que $\rho_2^1 = \Omega^1 - z_2^1$ est tel que :

$|\rho_2^1| \leqslant C_1\, h^{\ell-1-\varepsilon} + C'_1 \Delta t^2$ pour $1 < \ell \leqslant k$ pour conclure le paragraphe 3., démonstration qui se fait en deux étapes comme le schéma, et de manière absolument analogue à celle employée pour le schéma général (3.1). (3.2), utilisant en particulier les lemmes déjà introduits. $\square$

Nous tenons à remercier pour leur aide et leurs conseils nos collègues J. GENET et R. ARCANGELI, ainsi que M. CROUZEIX de l'Université de Rennes pour une remarque et un lemme importants pour la conclusion de ce travail.

REFERENCES

[1] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris. Dunod Gauthier-Villars 1969. pp. 88-96.

[2] R. TEMAM : Une méthode d'approximation des équations de Navier-Stokes. Bull. Soc. Math. France 98. 1968. pp. 115-152.

[3] M. CROUZEIX et P.A. RAVIART : Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. R.A.I.R.O. (R.3) Déc. 1973. pp. 33-75 .

[4] P. JAMET et P.A. RAVIART : Numerical solutions of the stationary Navier Stokes equations by finite element methods. Proceeding of colloque IRIA. Déc. 1973. pp. 103-133.

[5] M. FORTIN : Résolution numérique des équations de Navier-Stokes par des éléments finis de type mixte. Rapport de recherche n° 184 (LABORIA-IRIA) Août 1976.

[6] F. THOMASSET : Numerical solution of the Navier-Stokes equations by finite element methods. Von Karman. Institute for Fluid Dynamics Lecture series 86 1977.

[7] J. DOUGLAS - T. DUPONT : Galerkin methods for parabolic equations with non linear boundary conditions. Num. Math. 20. 1973.

[8] M.F. WHEELER : A priori L^2 estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. SIAM. Journal on Num. Anal. 4. 1973.

[9] G.J. FIX : Finite Element Methods for ocean circulation problems. SIAM Journal on Appl. Math. 3. 1975.

[10] P.G. CIARLET : Numerical Analysis of the finite element method. Seminaire de l'Université de Montréal. Juin-Juillet 1975.

===