PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

F. SCARPINI
M. A. VIVALDI

Évaluation de l'erreur d'approximation, via éléments finis d'ordre un, pour une inéquation parabolique relative aux convexes dépendant du temps

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S4_A13_0>

Valutation de l'erreur d'approximation, via éléments finis d'ordre un, pour une inéquation parabolique relative aux convexes dépendant du temps

F.Scarpini M.A.Vivaldi

1. Introduction et préliminaires

Nous avons étudié le problème d'évolution avec contraintes unilaterales dépendant du temps, c'est a dire le problème (P): trouver $u \in \mathbb{K}$

$$\int_0^T \left\langle \frac{du}{dt}, v-u \right\rangle + a(u, v-u) - \langle f, v-u \rangle \cdot dt \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}$$

Ici: Ω est un ouvert, borné, de frontière Γ assez régulière; Q est le cylindre $(0,T) \times \Omega$; Σ est la frontière latèrale $(0,T) \times \Gamma$ de Q; le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$; la forme bilinéaire modèle $a(\cdot,\cdot)$ est definie par $a(u,v) = \int_\Omega \mathrm{grad}\, u \times \mathrm{grad}\, v$; $\mathbb{K}$ est l'ensemble convex fermé :

$$\mathbb{K} = \{ v : v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \ / \ \psi_1(t,x) \leq v(t,x) \leq \psi_2(t,x) \ \text{p.p. sur } Q \}$$

On suppose vérifiées: la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad \text{avec} \quad u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$$

et les hypothèses sur les contraintes et sur f :

$$\psi_\ell \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad \frac{d\psi_\ell}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \quad \ell = 1,2.$$

$$\psi_1|_\Sigma \leq 0 \leq \psi_2|_\Sigma, \quad \psi_1 \leq \psi_2 \quad \text{p.p. sur } Q$$

$$f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Il est bien connu qu'il y a des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le problème (P), dû à M. BIROLI [3], [4], H. BREZIS [7], J.L. LIONS [23], [26].

niello [11] ont etudié le problème avec f,ψ moins régulièrs.

2. Régularité

Pour faire le traitement numérique et avoir à la fois une éstimation de l'erreur d'approximation, nous avons demontrées deux théorèmes de régularité, depuis avoir ramené par traslation le problème au cas $\psi_2=\psi$ et $\psi_1=0$.

<u>Théorème I</u> On suppose

$$\psi \in L^p(0,T\,;\,W^{2,p}(\Omega)) \quad , \quad \frac{d\psi}{dt} \in L^p(Q)$$

$$f \in L^p(Q) \quad , \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2-2/p,\,p}(\Omega)\,,\ p>2.$$

Alors le problème (P) admet une solution unique u telle que

$$u \in L^p(0,T\,;\,W^{2,p}(\Omega)) \quad , \quad \frac{du}{dt} \in L^p(Q)\,.$$

<u>Le plan de la démonstration</u> est le suivant: nous avons considèré le problème d'évolution penalisé [23]

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dfrac{du_\varepsilon}{dt} - \Delta u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon-\psi)^+ - \dfrac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^- = f & \text{p.p. sur } Q \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x) & \text{p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

- (i) existence et unicité d'une solution u_ε de (P_ε).

Le problème (P_ε) admet une solution u_ε telle que

$$u_\varepsilon \in L^p(0,T\,;\,W_0^{1,p}(\Omega)) \quad , \quad \frac{du_\varepsilon}{dt} \in L^{p'}(0,T\,;\,W^{-1,p'}(\Omega)) \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

voir J.L.Lions [23].

Pour vérifier que la solution de (P_ε) est unique, il suffit remarquer que:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left((u_1-\psi)^+ - (u_2-\psi)^+,\, u_1-u_2\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(u_1^- - u_2^-,\, u_1-u_2\right) \geq 0\,.$$

-(ii) estimation à priori sur u_ε.

Par des méthodes standards, nous avons obtenues les estimations suivantes

$$(2.1) \quad \left\| \frac{u_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right\|_{L^p(Q)} \leq C \| f \|_{L^p(Q)}$$

$$(2.2) \quad \left\| \frac{(u_\varepsilon - \psi)^+}{\varepsilon} \right\|_{L^p(Q)} \leq C \left\{ \left\| \frac{d\psi}{dt} \right\|_{L^p(Q)} + \| \Delta \psi \|_{L^p(Q)} + \| f \|_{L^p(Q)} \right\}$$

ou C désigne une costante qui dépend seulement de p.

Enfin avec l'usage essentielle d'un théorème de régularité [22] pour le

problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{du_\varepsilon}{dt} - \Delta u_\varepsilon = g \\ u_\varepsilon(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

avec $g = f - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad , \quad \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = \dfrac{(u_\varepsilon - \psi)^+}{\varepsilon} - \dfrac{u_\varepsilon^-}{\varepsilon}$

nous avons obtenue l'estimation

$$(2.3) \quad \| u_\varepsilon \|_{L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega))} + \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L^p(Q)} \leq C \left\{ \| g \|_{L^p(Q)} + \| u_0 \|_{W^{2-2/p,p}(\Omega)} \right\}$$

-(iii) convergence des u_ε à u, grâce à des propriétés de compacité.

On peut, d'après (2.3), extraire une suite, encore notée u_ε telle que

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;L^p(Q)) \qquad \text{faible}$$

On a alors

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \longrightarrow (u - \psi)^+ \quad \text{dans } L^p(Q) \text{ fort}$$

$$u_\varepsilon^- \longrightarrow u^- \qquad \text{" " "}$$

et, compte tenu de (2.1), (2.2)

$$(u - \psi)^+ = 0 \quad , \quad u^- = 0$$

On deduit maintenant de (P_ε):

$$\int_0^T \left\langle \frac{du_\varepsilon}{dt}, v-u_\varepsilon \right\rangle + a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) - (f, v-u_\varepsilon)\cdot dt \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{K}$$

et la thèse en passant à la limite.

<u>Théorème II</u> Si on ajoute les hypothèses ultérieures

$$\frac{d\psi}{dt} \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \,, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} \in L^{p'}(Q) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

$$f \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \,, \quad \frac{df}{dt} \in L^2(Q) \,, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$$

la solution de (P) est,de plus ,telle que

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega)) \qquad \frac{du}{dt} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

<u>Plan de la démonstration</u>

-(i) Par la méthode de Faedo-Galerkin on construit des solutions "approchées" pour le problème (P_ε).

On introduit une suite des fonctions propres

$$-\Delta v_i = \lambda_i v_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$v_i = 0 \qquad \text{sur } \Gamma .$$

On pose

$$u_{\varepsilon,m} = \sum_{i=1}^m U_i^m(t)\, v_i(x)$$

$$\psi_m = \sum_{i=1}^m \beta_i^m(t)\, v_i(x)$$

$$u_{0,m} = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m\, v_i(x)$$

avec bonnes hypothèses de convergence de ψ_m à ψ et de $u_{0,m}$ à u_0.

Nous allons déterminer le U_i^m par le système

$$(P_{\varepsilon,m}) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{du_{\varepsilon,m}}{dt}, v_j\right) + a(u_{\varepsilon,m}, v_j) + \dfrac{1}{\varepsilon}\left((u_{\varepsilon,m}-\psi_m)^+, v_j\right) - \dfrac{1}{\varepsilon}\left(u_{\varepsilon,m}^-, v_j\right) = \\ \qquad = (f, v_j) \quad j=1,\dots,m \\ u_{\varepsilon,m}(0,x) = u_{0,m}(x) . \end{cases}$$

qui en fait admet une et une seule solution dans un intervalle $[0,t_m]$.

-(ii) on établit des estimations à priori sur les solutions $u_{\varepsilon,m}$.

On demontre tout d'abord que $t_m = T$ et les limitations suivantes:

(2.4) $\| u_{\varepsilon,m} \|_{L^\infty(0,T\,;\,H^2(\Omega))} \leq C$

(2.5) $\| \frac{du_{\varepsilon,m}}{dt} \|_{L^\infty(0,T\,;\,L^2(\Omega))} \leq C$

(2.6) $\| \frac{du_{\varepsilon,m}}{dt} \|_{L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega))} \leq C$

avec C indépendant de ε et de m.

-(iii) on passe à la limite sur m grâce à des propriétés de compacité.

D'après (2.4) -(2.6) on peut extraire de $u_{\varepsilon,m}$ une suite $u_{\varepsilon,\mu}$ telle que:

$u_{\varepsilon,\mu} \to u_\varepsilon$ dans $L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega))$ faible-étoile

$\frac{du_{\varepsilon,\mu}}{dt} \to \frac{du_\varepsilon}{dt}$ " $L^\infty(0,T\,;\,L^2(\Omega))$ " "

On passe à la limite en μ dans $(P_{\varepsilon,m})$ et on trouve alors une solution u_ε de (P_ε) telle que

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega)) \quad , \quad \frac{du_\varepsilon}{dt} \in L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T\,;\,L^2(\Omega))$$

-(iV) on passe à la limite sur ε et on obtient une solution de (P) et la thèse.

3. <u>Discretisation du problème</u> (P)

En ce qui concerne la discretisation ,nous avons employées les éléments finis d'ordre un pour la variable x et les fonctions étagées pour la variable t (voir [24]).

On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, borné, convexe. On considère un polygone convexe Ω_h inscrit dans Ω (tout coté de Ω_h étant plus petit que h) et une triangulation " régulière" T_h ([31], [34]) de Ω_h.

Soient x_i $i=1,\dots,N$ les sommets de la triangulation, on definit la fonction φ_i^h par

$\varphi_i^h(x)$ fonction affine sur chaque triangle de T_h

$\varphi_i^h(x) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) si x_j est un sommet intérieur à Ω_h

$\varphi_i^h(x) = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_h$.

On va découper l'intervalle $[0,T]$ en m sous-intervalles egaux:

$[t_r, t_{r+1}[$ $r=0,\dots,m$. soit $k = T/m$

On définit la fonction $\theta_r^k(t)$ par

$$\theta_r^k(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_r, t_{r+1}[\\ 0 & t \in [0, t_r[\cup [t_{r+1}, T[\end{cases} \qquad r=0,\dots,m-1$$

$$\theta_m^k(t) = \begin{cases} 1 & t = T \\ 0 & t \in [0,T[\end{cases}$$

On définit ensuite S_{kh}^0 par : $S_{kh}^0(Q)$ espace engendré par les $\theta_r^k(t)\varphi_i^h(x)$ $\begin{smallmatrix} r=0,\dots,m \\ i=1,\dots,N \end{smallmatrix}$

On a $S_{kh}^0 \subset VB(0,T; H_0^1(\Omega))$ espace des fonctions a valeurs dans $H_0^1(\Omega)$, à variation bornée sur $[0,T]$.

Si $v(t,x) \in C^0(\bar{Q})$ on définit $v_I(t,x) \in S_{kh}^0(Q)$ par :

$$v_I(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{m} v(t_r, x_i)\, \theta_r^k(t)\, \varphi_i^h(x)$$

$$v_{I_1}(t,x) = \sum_{r=0}^{m} \theta_r^k(t)\, v(t_r, x)$$

$$v_{I_2}(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^h(x)\, v(t, x_i).$$

Soit $\mathbb{K}_{kh} = \{ v_{kh} : v_{kh} \in \mathcal{S}^{\circ}_{kh}(Q) : (\psi_1)_I \leq v_{kh} \leq (\psi_2)_I \}$

On considère le problème approché (P_{kh}):trouver $u_{kh} \in \mathbb{K}_{kh}$

avec $u_{kh}(0,x) = u_{0I_2}(x) \quad \forall x \in \Omega$;

$$\langle\langle \frac{du_{kh}}{dt}, v_{kh} - u_{kh} \rangle\rangle + \int_0^T a(u_{kh}, v_{kh} - u_{kh})\,dt \geq \int_0^T (f, v_{kh} - u_{kh})\,dt, \quad \forall v_{kh} \in \mathbb{K}_{kh}, \ v(0,x) = u_{0I_2}(x)$$

Ici: $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ désigne la dualité entre $VB(0,T; H^1_0(\Omega))$ et son dual.

On fait les positions suivantes: $u_{kh}(t,x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{m} U_i^r \theta_r^k(t)\varphi_i^h(x)$, $v_{kh}(t,x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{m} V_i^r \theta_r^k(t)\varphi_i^h(x)$

Avec des déductions simples on verifie l'équivalence du problème (P_{kh})

à la chaîne des systèmes de complementarité

$$(3.1_r) \begin{cases} \Psi_2^r \geq U^r \geq \Psi_1^r \\ M^r = h^2 B\,(U^r - U^{r-1}) + k\,A\,U^r - C^r \\ M_+^r\,(U^r - \Psi_1^r) = M_-^r\,(\Psi_2^r - U^r) = 0 \end{cases} \qquad r = 1, \ldots, m-1$$

$$(3.1_m) \begin{cases} \Psi_2^m \geq U^m \geq \Psi_1^m \\ M^m = h^2 B\,(U^m - U^{m-1}) \\ M_+^m\,(U^m - \Psi_1^m) = M_-^m\,(\Psi_2^m - U^m) = 0 \end{cases}$$

Ici: A,B sont matrices carrées d'ordre N avec éléments respectifs: $a_{ij} = a(\varphi_i^h, \varphi_j^h)$

$b_{ij} = \frac{1}{h^2}(\varphi_i^h, \varphi_j^h)$. On a $\Psi_\ell^r = \{\psi_\ell(t_r, x_i)\}_{i=1,N}^{r=0,m}$ $\ell = 1,2$, $C^r = \{C_i^r\}_{i=1,N} = \left\{ \int_{t_r}^{t_{r+1}} (f(t), \varphi_i^h)\,dt \right\}_{i=1,N}$

M^+ ,M^- sont les parties positives et negatives de M:

$$(M_i^r)^+ = \tfrac{1}{2}\left[\,|M_i^r| + M_i^r\,\right] \quad , \quad (M_i^r)^- = \tfrac{1}{2}\left[\,|M_i^r| - M_i^r\,\right].$$

Le système (3.1) admet une solution U et une seule car les matrices $h^2B + kA$, h^2B sont symètriques, irreductibles avec éléments diagonaux positifs, dominants, pourtant elles appartiennent à la classe des matrices définies positives. Naturellement on peut calculer la solution avec les algorithmes finis ou itératifs usuels ([9],[10],[12],[17],[29],[32])

4. Erreurs d'interpolation

Théorème III. Soit $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ on a:

$$(4.1)\quad \|u-u_I\|^2_{L^2(Q)} \le C\,(h^4+k^2)\left[\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(Q)} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\right]$$

$$(4.2)\quad \|(u-u_I)(t_\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\,h^4\,\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$$

$$(4.3)\quad \|u-u_I\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \le C\,(h^2+k^2)\left[\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\right]$$

Démonstration

On a

$$\|u-u_I\| \le \|u-u_{I_1}\| + \|u_{I_1}-u_I\|$$

$$(4.4)\quad \|u-u_{I_1}\|^2_{L^2(Q)} \le \sum_{\tau=0}^{m-1} k^2 \int_\Omega dx \int_{t_\tau}^{t_{\tau+1}} \left|\frac{du}{dt}\right|^2 d\tau \le k^2 \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$(4.5)\quad \|u_{I_1}-u_I\|^2_{L^2(Q)} \le T \sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega |u(t,x)-u_{I_2}(t,x)|^2 dx \le C h^4 \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$$ (Cfr [31])

D'après (4.4),(4.5) on obtient (4.1). Il résulte

$$(4.2)\quad \|(u-u_I)(t_\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega |u(t,x)-u_{I_2}(t,x)|^2 dx \le C h^4 \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$$ (Cfr [31])

$$(4.6)\quad \|D_x(u-u_{I_1})\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sum_{\tau=0}^{m-1} k^2 \int_\Omega dx \int_{t_\tau}^{t_{\tau+1}} \left|\frac{d}{dt} D_x u\right|^2 d\tau \le C k^2 \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

$$(4.7)\ \|D_x(u_{I_1}-u_I)\|^2_{L^2(Q)} \le T \sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega |D_x[u(t,x)-u_{I_2}(t,x)]|^2 dx \le C h^2 \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$$ (Cfr [31])

D'après (4.6),(4.7) on obtient (4.3).

5. Erreur d'approximation

Avec l'usage des valutations (4.1)-(4.3) et avec la méthode de R.Falk [14] mis en éxecution dans le cadre fonctionnel mentionné pour les problèmes (P) et (P_{kh}), nous avons

<u>Théorème</u> IV. Soit: $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ avec $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ solution de (P); u_{kh} solution de (P_{kh});alors résulte

$$(5.1)\ \sum_{\tau=1}^{m} \|(u-u_{kh})(t_\tau)-(u-u_{kh})(t_{\tau-1})\|_{L^2(\Omega)} + \|(u-u_{kh})(T)\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \|u-u_{kh}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} = O(h+k^{1/2}).$$

<u>Démonstration</u>

On a

$$(5.2)\ \sum_{\tau=1}^{m} \|u(t_\tau)-u(t_{\tau-1})\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sum_{\tau=1}^{m} k \int_\Omega dx \int_{t_{\tau-1}}^{t_\tau} \left|\frac{du}{dt}\right|^2 d\tau \le k \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(Q)}$$

Il suffit donc de prouver :

$$(5.3)\ \sum_{\tau=1}^{m} \|u_{kh}(t_\tau)-u_{kh}(t_{\tau-1})\|_{L^2(\Omega)} + \|(u-u_{kh})(T)\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \|u-u_{kh}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} = O(h+k^{1/2}),$$

au lieu de (5.1).

Nous avons les inégalités de (P) et de (P_{kh}):

$$(5.4)\ u \in \mathbb{K} : \int_0^T \left\langle \frac{du}{dt}, u-v\right\rangle + a(u,u-v) - (f,u-v)\cdot dt \le 0,\ \forall v \in \mathbb{K}$$

$$(5.5)\ u_{kh} \in \mathbb{K}_{kh} : \left\langle\left\langle \frac{du_{kh}}{dt}, u_{kh}-v_{kh}\right\rangle\right\rangle + \int_0^T a(u_{kh},u_{kh}-v_{kh}) - (f,u_{kh}-v_{kh})\cdot dt \le 0,\ \forall v_{kh} \in \mathbb{K}_{kh}$$

D'après (5.4),(5.5) on a

$$(5.6)\quad \langle\langle \frac{du_{kh}}{dt}-\frac{du}{dt},\, u_{kh}-u_1 \rangle\rangle + \int_0^T a(u_{kh}-u, u_{kh}-u)\,dt \le \int_0^T \Big[(f+\Delta u, u-v_{kh}) +$$

$$+ \Big(f+\Delta u-\frac{du}{dt},\, u_{kh}-v\Big) + a(u-u_{kh}, u-v_{kh})\Big]dt + \langle\langle -\frac{du_{kh}}{dt},\, u-v_{kh}\rangle\rangle .$$

En ce qui concerne le premier terme de (5.6) on a:

$$(5.7)\quad \langle\langle \frac{du_{kh}}{dt}, u_{kh}\rangle\rangle = \sum_{r=1}^{m} \big(u_{kh}(t_r), u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\big) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\Big[\|u_{kh}(t_r)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \|u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_{kh}(t_{r-1})\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] = \frac{1}{2}\|u_{kh}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\|u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_{kh}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$(5.8)\quad \langle\langle \frac{du}{dt}, u\rangle\rangle = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$(5.9)\quad \langle\langle \frac{du_{kh}}{dt}, u\rangle\rangle + \langle\langle \frac{du}{dt}, u_{kh}\rangle\rangle = \big(u_{kh}(T), u(T)\big) - \big(u_{kh}(0), u(0)\big)$$

D'après (5.7)-(5.9) on obtient:

$$(5.10)\quad \langle\langle \frac{du_{kh}}{dt}-\frac{du}{dt},\, u_{kh}-u\rangle\rangle = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\|u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{1}{2}\|u(T)-u_{kh}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(0)-u_{kh}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Par rapport au dernier terme de (5.6) on a

$$(5.11)\quad \langle\langle -\frac{du_{kh}}{dt},\, u-v_{kh}\rangle\rangle = \sum_{r=1}^{m}\big(u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1}), (u-v_{kh})(t_r)\big)$$

On deduit alors de (5.6) l'estimation suivante:

$$(5.12)\quad \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\|u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u(T)-u_{kh}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\|u-u_{kh}\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \le \|f+\Delta u\|_{L^2(Q)}\|u-v_{kh}\|_{L^2(Q)} + \|f+\Delta u-\frac{du}{dt}\|_{L^2(Q)}$$

$$\|u_{kh}-v\|_{L^2(Q)} + \|u-u_{kh}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \cdot \|u-v_{kh}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \tfrac{1}{2}\|u(0)-u_{kh}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\sum_{r=1}^{m} \|u_{kh}(t_r)-u_{kh}(t_{r-1})\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|(u-v_{kh})(t_r)\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v\in \mathbb{K}\,,\ v_{kh}\in \mathbb{K}_{kh}.$$

On va choisir

$$v = \inf\{\psi_2\,,\ \sup(\psi_1, u_{kh})\}\quad,\quad v_{kh} = u_I$$

Avec ce choix de v on a :

$$(5.13)\quad \|u_{kh}-v\|_{L^2(Q)} \le \|\psi_1-(\psi_1)_I\|_{L^2(Q)} + \|\psi_2-(\psi_2)_I\|_{L^2(Q)}.$$

D'autre part on a

$$(5.14)\quad \|u(0)-u_{kh}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u(0)-(u_0)_{I_2}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C h^4 \|u(0)\|^2_{H^2(\Omega)}$$

On achève la démonstration en utilisant (4.1)-(4.3),(5.12)-(5.14).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.E.BERGER, R.FALK: *An error estimates for the truncation method for the solution of parabolic obstacle variational inequalities*. A paraître.

[2] M.BIROLI: *Gli operatori monotoni, teoria ed applicazioni*. Rendiconti del Sem. Matem. e Fis. di Milano, 42 (1972), Fusi Pavia.

[3] M.BIROLI: *Sur un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps*. Ricerche di Matematica, 23 (1974), p. 203-222.

[4] M.BIROLI: *Sur les inéquations d'évolution avec convexe dépendant du temps*. Ricerche di Matematica, 23 (1974), p.1-48.

[5] H.BREZIS: *Operateurs maximaux monotones*. North Holland, New York (1973).

[6] H.BREZIS: *Problèmes unilatéraux*. J.Math. Pures ed Appl. 51 (1972), p. 1-168.

[7] H.BREZIS: *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps*. C.R.A.S. 274(1972).

[8] F.BREZZI,W.W.HAGER, P.A.RAVIART: *Error estimates for the finite element solution of variational inequalities*. Part 1, à paraître.

[9] J.CEA: *Optimisation, theorie et algorithmes*. Dunod-Paris, (1971).

[10] J.CEA, R.GLOWINSKI: *Sur des méthodes d'optimisation par relaxation*. R.A.I.R.O., R3 (1973) p. 5-32.

[11] P.CHARRIER, G.M.TROIANIELLO: *On Strong solutions to parabolic variational inequalities with obstacles dependent on Time, to appear in Jour*. Math.Anal. Appl.

[12] R.W.COTTLE, M.S.COHEEN: *A special class of large quadratic programs*. Tech. Report. April 76. Stanford University, California.

[13] G.DUVAUT, J.L.LIONS: *Les inéquations en mecanique et en physique*. Dunod, Paris 1972.

[14] R.FALK: *Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities*. Math. Comp. 28 (1974), p. 963-971.

[15] A.FRIEDMAN: *Stochastic games and variational inequalities*. Arch. Rational Mech. Anal. 51 (1973) p.321-346.

[16] A.FRIEDMAN: *Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and application to stopping time problems*. Arch. Rational Mech. Anal. 52(1973), p. 134-160.

[17] R.GLOWINSKI: *La méthode de relaxation*. Quaderni di Matem. Ist. Mat. Univ. di Roma (1971).

[18] R.GLOWINSKI: *Introduction to the approximation of elliptic variational inequalities*. Université Paris VI, Lab. Anal. Num. 1976.

[19] C.JOHNSON: *A convergence estimate for an approximation of a parabolic variational inequality.* S.I.A.M. J.Numer Anal. à paraitre.

[20] J.HLÁVAČEK : *Dual finite element analysis for the unilateral boundary value problems.* A paraître.

[21] J.HLÁVAČEK, J.LOVIŠEK: *A finite element analysis for the Signorini problem in plane elastostatics.* A paraître.

[22] D.A.LADYŽENSKAJA, V.A.SOLONNIKOV, N.N.URAL'CEVA : *Linear and quasi linear equations of parabolic type.* A.M.S. Providence 1968.

[23] J.L.LIONS: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod Paris, 1969.

[24] J.L.LIONS: *Approximation numérique des inéquations d'évolution.* Constructive aspects of functional analysis (G.Geymonat Ed.) C.I.M.E. Cremonese - Roma,1973.

[25] J.L.LIONS: *Cours d'Analyse numérique.* Hermann,Paris 1973.

[26] J.L.LIONS: *Sur quelques questions d'Analyse, de Mecanique et de Contrôle Optimal.* Conférences à Montreal 1976.

[27] F.MIGNOT, J.P.PUEL: *Inéquation d'évolution parabolique avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi variationnelles d'évolution.* A paraître.

[28] U.MOSCO: *Error estimates for some variational inequalities.* A paraître.

[29] U.MOSCO, F.SCARPINI: *Complementarity systems and approximation of variational inequalities.* R.A.I.R.O. R1 (1975) p.83-104.

[30] U.MOSCO, G.STRANG: *One sided approximation and variational inequalities.* Bull. A.M.S. 80 (1974), p.308-312.

[31] P.A.RAVIART, J.M.THOMAS: *Méthode des elements finis.* D.E.A. Analyse numérique 1971-72. Université de Paris VI.

[32] F.SCARPINI: *Some algorithms solving the unilateral Dirichlet problem with two constraints.* Calcolo 12 (1975) p. 113-149.

[33] F.SCARPINI, M.A.VIVALDI: *Error estimates for the approximation of some unilateral problems.* A paraître sur R.A.I.R.O.

[34] G.STRANG, G.J.FIX: *An analysis of the finite element method.* Prentice Hall, London 1973.

[35] G.M.TROIANIELLO: *On the smoothness of solutions of time-dependent variational inequalities.* A paraître.

[36] R.S.VARGA: *Matrix iterative analysis.* Prentice Hall, N.Y. 1962.