YVES GUIVARC'H

Remarques sur le rayon spectral d'une marche aléatoire

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A6_0>

REMARQUES SUR LE RAYON SPECTRAL D'UNE MARCHE ALEATOIRE

Yves Guivarc'h

Cette note complète la partie D de l'article intitulé "une loi des grands nombres pour les groupes de Lie" paru dans le séminaire 1976.

On reprend les notations de cet article.

Avant d'établir un théorème analogue au théorème 2, pour les groupes semi-simples, à centre fini, montrons quelques résultats préliminaires.

Soit $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G et fixons un ordre sur les racines de A dans G, de façon que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N soit somme directe des sous-espaces propres correspondant aux racines positives. Notons par M et M' le centralisateur et le normalisateur de A dans K et soit $W = M'/M$ le groupe de Weyl de G. Pour une forme linéaire réelle λ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A notons h_λ la mesure relativement invariante sur AN qui s'écrit $h_\lambda = h.e^{\lambda-\varepsilon}$ où h est une mesure de Haar à droite fixée de AN et ε est la demi-somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités. Notons que $h_\lambda * \delta_t = e^{-\lambda+\varepsilon}(t)\, h_\lambda$ pour $t \in AN$.

Pour un élément w de w et un élément λ de $\mathfrak{a}^*$ posons $w\lambda = \lambda \circ \mathrm{Ad}\, w^{-1}$

Soit $\mathfrak{g}_\lambda$ le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ correspondant à λ.

Ecrivons alors

$$\mathfrak{U}_w = \bigoplus_{\substack{\alpha>0 \\ w^{-1}\alpha<0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

et soit N_w le sous-groupe correspondant de N , n_w une mesure de Haar de N_w . Notons aussi N^- le sous-groupe opposé à N et observons que $w(n_{w^{-1}}) = wNw^{-1} \cap N^-$. Posons enfin, pour $n^- \in N^-$

$$n^- = k(n^-)\ a(n^-)\ n(n^-)$$

avec $k(n^-)$, $a(n^-)$, $n(n^-)$ dans K , A , N .

Le calcul donne alors la formule

$$h_\lambda * \delta_{w^{-1}} * n_w = w^\lambda * h_{w\lambda}$$

où w^λ est la mesure concentrée sur K donnée par

$w^\lambda = \int_{w(N)\cap N^-} e^{-w\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]\ \delta_{wk(n^-)}\, d\bar{n}$ où $d\bar{n}$ est la mesure $w(n_{w^{-1}})$.

c'est-à-dire l'image par $n^- \to wk(n^-)$ de la mesure sur $w(N)\cap N^-$ ayant pour densité $e^{-w\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]$ par rapport à la mesure de Haar $w(n_{w^{-1}})$ de $w(N)\cap N^-$.

La masse de cette mesure est donc égale à

$$\int_{w(N)\cap N^-} e^{-w\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]\ dn^-$$

D'après [13] une intégrale de la forme $\int_{w(N)\cap N^-} e^{-\mu-\varepsilon}[a(n^-)]\ dn^-$ est finie pourvu que le produit scalaire de Killing $\langle\mu,\alpha\rangle$ soit positif pour les racines α vérifiant $\alpha > 0$ et $w^{-1}\alpha < 0$.

En particulier, w^λ est une mesure de Radon dès que $\langle-\lambda,\alpha\rangle > 0$. Si $\alpha > 0$, c'est-à-dire si $-\lambda$ appartient au sous-ensemble de $\mathcal{A}^*$ noté $\mathcal{C}_0$ en [15] .

Pour résumer la discussion précédente, notons $\sigma_\lambda(g,k)$ ($g \in G$, $k \in K$) le cocycle défini par

$$\sigma_\lambda(g,k) = e^{-\lambda-\varepsilon}[a(gk)]$$

et ρ_λ la représentation de G dans l'espace des mesures du Radon sur K définie par

$$\rho_\lambda(g)\ [\delta_k] = \sigma_\lambda(g,k)\ \delta gk$$

représentation qui correspond à l'action par translations à gauche de G sur les mesures de la forme $\nu * h_\lambda$ où ν une mesure portée par K .
On a alors la

Proposition :

Pour $\lambda \in \mathfrak{C}o$, la représentation ρ_λ et la mesure $\varpi^\lambda\ (w \in W)$ satisfont la relation d'entrelacement suivante

$$\rho_\lambda(g)\ [\nu] * \varpi^\lambda = \rho_{w\lambda}(g)\ [\nu * \varpi^\lambda]$$

Remarque : Prenant $g = t \in AN$, $\nu = \delta_e$ on a $\rho_\lambda(t)\ [\delta_e] = e^{-\lambda-\varepsilon}(t)\ \delta_e$ et donc la relation de "droite fixe" suivante se trouve vérifiée par ϖ^λ

$$e^{-\lambda-\varepsilon}(t)\ \varpi^\lambda = \rho_{w\lambda}(t)\ [\varpi^\lambda]$$

Cette relation détermine la densité $\bar{\varpi}^\lambda$ de $\varpi^\lambda (w \neq e)$ par rapport à la mesure de Haar de K :

$$\bar{\varpi}^\lambda(t.k) = \bar{\varpi}^\lambda\ (k)\ e^{w\lambda-\varepsilon}[a(t.k)]\ e^{-\lambda-\varepsilon}(t)$$ où $t.k \in K$ est transformé de $k \in G/_{AN} = K$ par l'action de t .

Disons que la probabilité p est à décroissance exponentielle si pour une fonction de la forme δ_V et pour toute constante $c > 0$ on a $\int_G e^{c\delta_V}(g)dp(g) < +\infty$. Ceci est réalisé pour les probabilités d'un semi-groupe associé à un opérateur elliptique invariant à droite sur G d'après [7]. Si de plus p a une densité continue positive en e , les opérateurs $\rho_\lambda(p)$ sur K peuvent être défini à l'aide d'un noyau continu $P\ (k,k') > 0$ et il existe, pour λ donné, une unique mesure de probabilité ν_λ et un unique scalaire positif noté $\hat{p}(\lambda)$ tel que

$$\rho_\lambda(p)\ [\nu_\lambda] = \hat{p}(\lambda)\nu_\lambda$$

Dans ces conditions, il est clair que

$$\hat{p}(w\lambda) = \hat{p}(\lambda)\ ,$$

$$w^\lambda(K)\ .\ \nu_{w\lambda} = \nu_\lambda * w^\lambda \qquad (\lambda \in \mathcal{C}_0\ )$$

d'après la relation d'entrelacement. On va en déduire le

Théorème 3

Si la probabilité p admet une densité continue, positive en e à décroissance exponentielle, la fonction $\hat{p}(\lambda)$ est strictement convexe sur $\mathfrak{a}^*$, vérifie $\forall w \in W$ $\hat{p}(w\lambda) = \hat{p}(\lambda)$, atteint son minimum pour $\lambda = 0$. Ce nombre $\hat{p}(0)$ est égal au rayon spectral de la probabilité p et au rayon spectral de l'opérateur de convolution par p sur $\mathbb{L}^2(G)$.

Preuve :

La stricte convexité de $\hat{p}$ est analogue à celle rencontrée dans la démonstration du théorème 2 et la relation $\hat{p}(w\lambda) = \hat{p}(\lambda)$ a été justifiée lorsque λ appartient à $\mathcal{C}_0$. Par continuité, elle reste vraie sur $\overline{\mathcal{C}}_0$ et comme $w(\overline{\mathcal{C}}_0) = \mathfrak{a}^*$, elle est vraie pour tout λ . Comme dans la démonstration du théorème 2, on a donc, par convexité, $\hat{p}(0) \leq \hat{p}(\lambda)$. D'après le principe de majoration de Herz [6], le rayon spectral de p dans $\mathbb{L}^2(G)$ est égal au rayon spectral de l'opérateur associé à p dans la représentation quasi-régulière de G dans $G/_{MAN}$ donc de G dans $G/_{AN} = K$.

Cet opérateur n'est autre que $\rho_0(p)$ et en raison de la continuité de son noyau, il est compact et son rayon spectral est égal à la valeur propre $\hat{p}(0)$.

Les théorèmes 2 et 3 admettent une généralisation au cas d'un groupe de Lie quelconque. Pour une exponentielle λ sur G notons α_λ , la mesure de densité λ par rapport à la mesure α ($\alpha_\lambda = \alpha \, . \, \lambda$) et observons que

$$\alpha_\lambda * \beta_\lambda = (\alpha * \beta)_\lambda$$

Il découle de ceci que si μ vérifie $p * \mu \leq k \mu$, μ_λ vérifie $p_\lambda * \mu \leq k \mu_\lambda$ et l'ensemble des nombres k ainsi obtenus ne dépend donc pas de λ .

Notons σ_λ le rayon spectral de l'opérateur de convolution défini par p_λ sur l'espace $\mathbb{L}^2(G)$. On a alors le

Théorème 4

Soit G un groupe de Lie connexe et p une probabilité sur G admettant une densité continue à décroissance exponentielle. Alors le rayon spectral de p est égal à la borne inférieure des nombres σ_λ lorsque λ parcourt l'ensemble des exponentielles sur G .

Du principe de majoration déjà utilisé à la fin de la preuve du théorème 3 découle le lemme suivant :

Lemme :

Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe moyennable et q une mesure positive bornée sur G. Alors les normes des opérateurs de convolution associés à q dans les représentations régulières de G dans $\mathbb{L}^2(G)$ et $\mathbb{L}^2(G/_H)$ sont égales

Preuve :

Notons t et t' les deux représentations étudiées et observons que, en raison de la moyennabilité de H , t' est faiblement contenue dans t . Il en découle que x' et y' étant donnés, vecteurs unitaires de $\mathbb{L}^2(G/_H)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux vecteurs unitaires x et y de $\mathbb{L}^2(G)$ tels que

$|<t'(q)\, x',y'> - <t(q)x,y>| \leq \varepsilon$ et donc $||t'(q)|| < \varepsilon + ||t(q)||$ ce qui fournit l'inégalité $||t'(q)|| \leq ||t(q)||$. L'autre inégalité est indépendante de la moyennabilité de H et découle du principe de majoration de Herz. La représentation de G dans $\mathbb{L}^2(G)$ étant induite par la représentation régulière de H dans $\mathbb{L}^2(H)$ on majore en remplaçant cette dernière par l'identité, ce qui conduit à la représentation de G dans $\mathbb{L}^2(G/_H)$: pour deux éléments x et y de $\mathbb{L}^2(G)$ unitaires on peut trouver deux éléments unitaires, x' et y' de $\mathbb{L}^2(G/_H)$ tels que $|<t(g)x,y>| \leq <t'(g)x',y'$ $(g \in G)$. Ceci donne
$|<t(q)x,y>| \leq <t'(q)x',y'> \leq ||t'(q)||$ et donc $||t(q)|| < ||t'(q)||$.

Preuve du Théorème :

Soit μ mesure positive et k un réel minimum vérifiant la relation $p * \mu \leq k\, \mu$. La preuve du théorème 2 montre que l'on peut supposer que μ vérifie

$$\mu * \delta_t = \lambda(t)\ \mu$$

pour une exponentielle λ sur le radical R de G qui est G-invariant par automorphismes intérieurs. Cette exponentielle et la fonction modulaire δ de R se prolongent en des exponentielles sur G , notées encore λ et δ et l'on peut donc considérer la mesure $\mu' = \mu_{\lambda\,.\,\delta}$ qui vérifie

$$\mu' * \delta_t = \delta(t)\ \mu'$$

On aura alors,

$$p_{\lambda\delta} * \mu' \leq k\mu'$$

équation qui se réduit à une équation analogue sur $G/_R$ en raison de la relation

$$\mu' * \delta_t = \delta(t)\ \mu'$$

Notant $\overline{p_{\lambda\delta}}$ la projection de p sur $G/_R$ et $\overline{\mu'}$ la mesure sur $G/_R$ correspondant à μ' on a $\overline{p_{\lambda\delta}} * \overline{\mu'} \leq k\, \overline{\mu'}$ où k est encore le plus petit réel vérifiant une telle relation pour $\overline{p_{\lambda\delta}}$.

D'après le théorème 3, k est égal au rayon spectral de $\overline{p_{\lambda\delta}}$ sur $\mathbb{L}^2(G/_R)$, donc à celui de $p_{\lambda\delta}$ sur $\mathbb{L}^2(G)$ d'après le lemme. On a donc, puisque $\rho = \overline{\lim\limits_n} [p^n(v)]^{1/n} = \overline{\lim\limits_n} [p_\lambda^n(v)]^{1/n}$, c'est-à-dire $\rho \leq \sigma_\lambda$, la relation $\rho = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in G^*} \sigma_\lambda$

On particularise ici au cas des mouvements browniens quelques résultats obtenus précédemment. En fait, dans ce cas, à cause des propriétés de symétrie, certains résultats deviennent évidents.

Considérons une métrique riemannienne invariante à droite sur G et désignons par $\delta(g)$ la fonction modulaire de G définie par $\delta_g * \mu = \delta(g)\mu$ où μ est une mesure invariante à droite, par exemple la mesure riemannienne. On obtient alors [7] le laplacien Δ sous la forme

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i\delta)(e)\, x_i$$

où les x_i sont des champs de vecteurs invariants à droite, formant en e une base orthonormée de l'espace tangent. Le semi-groupe associé à Δ est alors un semi-groupe de convolution à gauche par des mesures de probabilité p^t. Notons s_t le mouvement brownien correspondant et d la distance riemannienne à e que l'on sait être une jauge principale [ ]. Précisons le comportement asymptotique de $d(s_t)$ et $p^t(v)$ pour un voisinage compact v de e ainsi que la croissance de p^t par rapport à la mesure riemannienne suivant les propriétés de G et celles de la métrique choisie.

Notons d'abord le

<u>Lemme</u> :

Lorsque t tend vers l'infini, la limite de $\frac{d(s_t)}{t}$ existe p.p.

Preuve :

Montrons que $\sup\limits_{0<t\leq 1} d(s_t)$ est intégrable et pour celà considérons une fonction r, indéfiniment dérivable, majorant d et égale à d en dehors d'une boule de centre e. Ecrivons $r(s_t)$ à l'aide d'une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien unidimensionnel $b_\theta(\omega)$ |11| :

$$r(s_t) = \int_0^t \|\mathrm{grad}\ r(s_\theta)\| db_\theta + \int_0^t \Delta r[s_\theta]\, d\theta$$

Le premier terme au second membre, noté α_t, se majore à l'aide d'une inégalité classique de surmartingale exponentielle |10|, puisque $\|\mathrm{grad}\ r\|$ est borné : $\sup\limits_{0<t\leq 1} \alpha_t$ est intégrable.

Pour majorer le second terme, notons que Δd est bornée à l'infini ; ceci découle de la comparaison [1] avec les espaces à courbure constante, où la propriété est vraie, puisque la courbure sectionnelle est bornée sur le groupe G. Il en résulte, puisque r est C^∞ sur la boule où il diffère de d, que Δr est bornée sur G. Alors $\int_0^t \Delta r(s_\theta) d\theta$ est bornée et $d(s_t)$ est intégrable comme $r(s_t)$, puisque $d(s_t) \leq r(s_t)$. Pour achever la démonstration du lemme, écrivons, pour $n \leq t < n+1$ $(n \in N)$ $d(s_t) \leq d(s_n) + d(s_{t-n} \circ \theta^n)$ et posons

$F = \sup\limits_{0<\theta\leq 1} s_\theta$. Alors : $d(s_t) \leq d(s_n) + F \circ \theta^n$

$$\frac{d(s_t)}{t} \leq \frac{d(s_n)}{n} + \frac{F \circ \theta^n}{n}$$

Puisque $\frac{d(s_n)}{n}$ converge vers γ et que $\frac{F \circ \theta^n}{n}$ converge vers zéro, F étant intégrable, on a $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{d(s_t)}{t} \leq \gamma$.

On a de même l'inégalité contraire. Examinons maintenant à quelles conditions $p = p^1$ est centrée.

Lemme :

Notons ε l'exponentielle égale à $\delta^{-1/2}$ et $p_\varepsilon = p : \varepsilon$
Alors la mesure p_ε est symétrique.

Preuve :

Considérons l'opérateur de convolution à gauche par p sur l'espace $L^2(G)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure riemanienne, opérateur que l'on sait être symétrique. On obtient une isométrie de $L^2(G)$ sur l'espace $L^2(G)'$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Haar à gauche $\delta \cdot \mu$ en posant pour $f \in L^2(G)$:

$$f' = f \, . \, \delta^{-1/2} \quad .$$

En effet, on a $\int |f'|^2 (\delta . d\mu) = \int |f|^2 \, d\mu$ et en vertu de la relation

$$p_\varepsilon * f_\varepsilon = (p * f)_\varepsilon$$

l'opérateur associé à p sur $L^2(G)$ correspond à l'opérateur associé à p_ε sur $L^2(G)'$. Cet opérateur est donc symétrique et ceci implique la symétrie de la mesure p_ε.

Il découle en particulier de ce lemme que la probabilité $\frac{1}{\hat{p}(\varepsilon)} p_\varepsilon$ est centrée et donc, puisque ces propriétés ne dépendent que de la projection de p sur le plus grand quotient abélien de G, le minimum de $\hat{p}(\lambda) = \int \lambda(g) \, dp(g)$ est atteint pour $\lambda = \varepsilon$. En particulier, si G n'est pas unimodulaire, $\hat{p}(\varepsilon) < 1$ et p n'est pas centrée. On a aussi, dans ce cas, par convexité :

$$\int \mathrm{Log}\, \varepsilon(g) \, dp(g) \leq \mathrm{Log} \quad \hat{p}(\varepsilon) < 1 \quad \text{et} \quad \int \mathrm{Log}\, \delta(g) \, dp(g) > 0$$

relation qui avait déjà été obtenue en [8]. Au contraire, si G est unimodulaire, p est centrée. Donc si G est moyennable et unimodulaire, les théorèmes du chapitre II impliquent

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d(s_t)}{t} = 0$$

La symétrie de p implique aussi, dans ce cas, $\lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{Log}\, p^t(v)}{t} = 0$.

Sinon ces deux limites sont non nulles. Il est possible de préciser la valeur de la deuxième limite à partir de la structure de G et de la donnée de Δ . Puisque cette quantité ne change pas lorsqu'on remplace p par p_ε et que p_ε est symétrique on a

$$\lim_{t\to\infty} [p^t(v)]^{1/t} = \sigma_\varepsilon$$

où σ_ε est le rayon spectral de p_ε dans $L^2(G)$. Si G est moyennable ce rayon spectral n'est autre que la masse de p_ε , c'est-à-dire $\hat{p}(\varepsilon)$ Ceci fournit, en détaillant le calcul, l'expression du rayon spectral pour le laplacien canonique sur un espace symétrique de type non compact, puisque un tel espace s'identifie à un groupe de Lie résoluble.

La relation $\int \mathrm{Log}\, \delta(g)\, dp(g) > 0$ implique d'après [4], l'existence de fonctions harmoniques bornées non constantes solutions de

$$\int f\,(y\,x)\, dp(y) = f(x)$$

Par suite, d'après la démonstration de [1], la croissance de p^t par rapport à la mesure de Haar à droite de G doit être strictement positive. Si G est non moyennable la même conclusion vaut, tandis que si G est moyennable et unimodulaire, la relation $\lim_{t\to\infty} \frac{d(s_t)}{t} = 0$ montre que la croissance de p^t est nulle. La trivialité des limites étudiées se trouve donc réalisée simultanément et seulement dans le cas où G est moyennable et unimodulaire. On peut se démander dans quelle mesure ceci s'étend aux variétés riémaniennes complètes. Le cas de la courbure sectionnelle négative majorée par une constante négative a été étudié par divers auteurs ([2], [10], [12], [14]) ainsi que celui de la courbure de Ricci positive [5]. Observons que, d'après [3] un groupe de Lie à courbure négative non nulle, est résoluble non unimodulaire et les quantités étudiées ont donc des valeurs non triviales. Les hypothèses de courbure sont donc susceptible d'être affaiblies.

REFERENCES :

[1] A. AVEZ : Harmonic functions or groups

[2] R. AZENCOTT : Behaviour of diffusion semi-group at infinity Bull - S.M.F. 102 (1974) p. 193-240.

[3] R. AZENCOTT et WILSON : Homogeneous manifolds with negative curvatrice I - A.M.S. vol 215 (1976) p. 323-362

[4] L. BIRGE et A. RAUGI : Fonctions harmoniques sur les groupes moyennables - CRAS t. 278 (1974) p. 1287-1289.

[5] S.Y. CHENG et S.T. YAU : Differential Equations on riemannian manifolds - Comm. Pure and Applied Math vol 28 (1975) p.333-354.

[6] P. EYMARD et N. LOHOUE : Sur la racine carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques - Annales de l'E.N.S. t.8 n°2 (1975) p. 179-188

[7] L. GARDING : Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie - Bull S.M.F. 88 (1960) p. 73-93.

[8] H. HENNION : Sur la récurrence et la transience dans les espaces homogènes - Séminaires de l'Université de Rennes (1976).

[9] A. HULANICKI : Subalgebra of $L^1(G)$ associated with a Laplacian on a Lie group - Colloquium Math to appear.

[10] H.P. Mac KEAN : AN upper bound to the spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature - J. Diff Geom. (1970) p. 359-366.

[11] P. MALLIAVIN : Diffusions et géométrie différentielle globale - Centro Internationale Mathematico Estivo - Varenna (1975)

[12] J.J. PRAT : Etude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative - C.R.A.S.280 (1975) p. 1539-1542.

[13] G. SCHIFFMANN : Intégrales d'entrelacement - C.R.A.S. t. 266 (1968) p. 47-49.

[14] VAUTHIER : Diffusion sur une variété riemannienne complète à courbure négative - C.R.A.S. 275 (1972) p. 925-926.

[15] W. VEECH : The Tail of a positivity preserving semi-group - vol 18 n°2 (1974) p. 167-206.