PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE CREPEL

Théorèmes limites pour les sommes partielles de V.A. Indépendantes ou non

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-63
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A5_0>

THEOREMES LIMITES POUR LES SOMMES PARTIELLES DE V.A. INDEPENDANTES OU NON

Pierre CREPEL

L'objet de cet exposé est de faire en gros le point des résultats connus et des méthodes employées pour l'étude du comportement asymptotique des sommes partielles S_n de variables aléatoires X_n sous des conditions diverses (indépendance, indépendance asymptotique, orthogonalité, presque orthogonalité, martingales ...), la suite (X_n) étant stationnaire dans des sens à préciser, ou non, et admettant ou non des moments d'ordres divers.

Plan de l'exposé :

Nous ne chercherons pas à donner systématiquement les résultats les plus généraux, ni les démonstrations complètes lorsqu'elles se trouvent dans des références accessibles. Nous essaierons plutôt d'indiquer les résultats qui nous semblent les plus centraux et les plus parlants et de dégager les méthodes qui permettent d'y arriver.

Des questions sont posées, certaines sont probablement faciles à résoudre. Cet exposé a un goût d'inachevé et ne prétend en aucun cas être exhaustif, son but est plutôt une invitation à la lecture des articles et ouvrages cités en bibliographie.

I - Introduction : Cas de v.a. indépendantes et de même loi (iml)

Rappelons les trois théorèmes classiques relatifs aux sommes partielles $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ de v.a.r. (X_n) iml : (notons μ la loi commune).

* Loi forte des grands nombres (LFGN)

$$\left(\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.}\right) \iff \left(E|X_1| < \infty \quad \text{et} \quad EX_1 = 0\right)$$

* Théorème de la limite centrale (TLC)

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)\right) \iff \left(EX_1^2 < \infty \quad \text{et} \quad \begin{cases} EX_1 = 0 \\ EX_1^2 = 1 \end{cases}\right)$$

* Loi du logarithme itéré (LLI)

$$\left(\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \text{p.s.}\right) \iff \left(EX_1^2 < \infty \quad \text{et} \quad \begin{cases} EX_1 = 0 \\ EX_1^2 = 1 \end{cases}\right)$$

[On trouvera dans [P] les références nécessaires]

Remarques :

1°) On peut s'intéresser au problème de la loi faible des grands nombres (LfGN) pour laquelle on a le résultat suivant :

$$\left(\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} 0\right) \iff \left(\begin{array}{c} n \quad P(|X_1| > n) \to 0 \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_{|X_1|<n} X_1 \, dP \to 0 \end{array}\right)$$

Comme $E|X_1| < \infty$ s'écrire aussi $\sum_n P(|X_1| > n) < \infty$, il est facile de voir que la LfGN est valable sous des conditions plus larges que la LFGN.

- Lorsque les v.a. sont dans L^2, on a, clairement, la loi des grands nombres en moyenne quadratique (Lm_2GN) i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0$. Nous étudierons plus loin ce genre de condition dans un autre cadre.

2°) - Si les v.a. ne sont pas dans L^2, l'extension naturelle du problème de la limite centrale c'est-à-dire la question de la normalisation de S_n pour obtenir une convergence en loi, donne lieu à la théorie des lois stables. Nous ne regarderons pas ces questions ici.

- Une autre extension possible du TLC consiste à normaliser par une quantité aléatoire, par exemple par

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$. Il est alors facile de voir que, sous l'hypothèse L^2, puisque

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ en probabilité, on a aussi $\frac{S_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$.

Cette remarque très simple peut donner lieu dans des cadres plus généraux à des problèmes intéressants.
(cf D.A. DARLING, Ann Proba vol 3 n°5 (1975) p. 876-8, et les références qui s'y trouvent, pour des problèmes de ce genre dans le cas iid).

3°) - Si les v.a. sont dans L^2, il est évident que la LLI améliore beaucoup la LFGN, mais la démonstration de la LLI demande un certain travail ; on peut remarquer par contre que, toujours pour des v.a. L^2, il est possible d'obtenir une précision (moins bonne) pour la LFGN de manière assez simple :

Plaçons-nous toujours dans le cas $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. Alors si ψ est une fonction croissante t.q. $\sum \frac{1}{n\psi(n)} < \infty$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_n}{\sqrt{n\psi(n)}}\right)^2 < \infty$$

$$\Downarrow$$

(lemme classique dans le cas (Z_n) indépendant, (non de même loi) :
$\sum E\, Z_n^2 < \infty \Rightarrow \sum Z_n$ converge p.s.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n\psi(n)}} \quad \text{converge p.s.}$$

$$\Downarrow$$

(lemme de Kronecker)

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

Un cas particulier typique est $\psi(n) = (\log n)^{1+\varepsilon}$, mais ni $\psi(n) = \log n$ ni à plus forte raison $\psi(n) = \log \log n$ ne vérifient la condition de cette remarque !

- Si maintenant les v.a. ne sont pas dans L^2 , la LLI, comme on a dit plus haut n'est jamais vérifiée ; mais il est également clair que, dans le cas général, l'estimation de la convergence vers 0 dans la LFGN ne peut être beaucoup améliorée : il suffit pour s'en convaincre de prendre pour μ une loi stable centrée d'indice $\alpha \in]1,2[$ proche de 1, donc telle que $E|X_1| < \infty$, alors $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$, ayant pour loi μ , ne peut converger vers 0 p.s. . Bien entendu, avec des hypothèses intermédiaires on peut donner diverses précisions.

Pour tous ces problèmes de normalisation de S_n sans conditions de moments voir : H. Kesten "The 1971 Rietz lecture : Sums of independent random variables - without moment conditions". Ann. Math. Stat. vol.43, n°3 (1972) p. 701-732.

Vois aussi K.B. ERICKSON TAMS 185 (1973), p.371-81 et Am. Prob. 5 (1976) p.645-57 etc.

Ce ne sont pas ces questions que nous étudierons ici, nous nous appesantirons au contraire sur le cas où les v.a. sont dans L^2 et nous nous attacherons à nous débarrasser soit de l'hypothèse "de même loi", soit de l'hypothèse d'"indépendance".

II - Cas des v.a. indépendantes, mais non nécessairement de même loir : (inm̂l)

Là encore, sauf mention du contraire, la référence est [P]. les numéros des énoncés sont ceux de [P].

Contrairement à ce qu'on croit souvent, le cas inm̂l, même sous des conditions raisonnables sur les v.a. (X_n) n'est pas une simple variante du cas im̂l. Des phénomènes nouveaux apparaissent que nous allons essayer de décrire.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous nous limiterons au cas de v.a. L^2 centrées, et nous poserons

$$B_n = ES_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_n$$

$(EX_n = 0)$

a) Convergence des séries

Le théorème suivant est très célèbre (théorème des 3 séries)

<u>Th 8</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge p.s. (ou en loi : dans ce cas ces deux convergences sont équivalentes)   ssi les trois séries numériques $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} EX_n^{(c)} < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var} X_n^{(c)} < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(\lvert X_n\rvert > c) < \infty \end{array}\right.$ convergent simultanément pour un $c > 0$ (ou pour tout $c > 0$)

Ici si X est une v.a., on note pour $c > 0$, $X^{(c)}$ la v.a.

$$X^{(c)} = \begin{cases} X & \text{pour } |X| \le c \\ 0 & \text{pour } |X| > c \end{cases}$$

Ce théorème s'appuie entre autres sur le lemme suivant, intéressant en soi :

Lemme 7.8

- Si les (X_n) sont indépendantes et centrées, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge p.s.}$$

- Si les X_n sont bornées p.s. par une même constante C, alors la réciproque est vraie.

b) LGN ici $B_n \to \infty$

Les résultats du type LFGN sous les hypothèses L^2 se déduisent en général des théorèmes de convergence des séries par application du lemme de Kronecker : il n'y a donc pas là de différence de méthode sensible par rapport au cas des v.a. iîl.

On a, en particulier :

Notons Ψ_c (resp. Ψ_d) l'ensemble des fonctions positives croissantes t.q.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi(n)} < \infty \qquad (\text{resp.} = \infty)$$

Th 24 Avec les notations précédentes : $\dfrac{S_n}{\sqrt{B_n \psi(B_n)}} \to 0$ p.s. pour toute $\psi \in \Psi_c$

En particulier, on en déduit le critère de validité suivant de la LFGN :

<u>Th 26</u>

Si $\frac{B_n}{n^2} = 0\left(\frac{1}{\psi(n)}\right)$ pour une $\psi \in \Psi_c$, on a $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.

Il est in ressant de noter que ces résultats sont précis au sens suivant :

<u>Th 25-26</u>

- Si $\psi \in \Psi_d$, il existe une suite (X_n) de v.a. inml centrées L^2 t.q. $\frac{S_n}{\sqrt{B_n\ \psi(B_n)}} \not\to 0$ p.s.
- Si $\psi \in \Psi_d$, avec $\frac{n}{\psi(n)} \nearrow$, alors il existe une suite (X_n) de v.a. inml centrées L^2 t.q. $\frac{B_n}{n^2} = 0\left(\frac{1}{\psi(n)}\right)$ et $\frac{S_n}{n} \not\to 0$ p.s.

<u>Remarques</u> :

1) La démonstration du th. 24 est très simple et s'inspire de la même idée que la remarque 3. dans le cas inml :

Si $\psi \in \Psi_c$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{B_n\ \psi(B_n)} < \infty$ (élémentaire), ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_n}{\sqrt{B_n\ \psi(B_n)}}\right)^2 < \infty$$

(lemme 7.8)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\sqrt{B_n\ \psi(B_n)}} \quad \text{converge p.s.}$$

(Kronecker)

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{B_n\ \psi(B_n)}} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

2) On a le schéma suivant :

$$\frac{ES_n^2}{n^2} = 0\left(\frac{1}{\psi(n)}\right) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{EX_k^2}{k^2} < \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} \text{ converge p.s.}$$

$$\Downarrow \text{ (Kronecker)} \qquad\qquad \Downarrow \text{ (Kronecker)}$$

$$\frac{ES_n^2}{n^2} \to 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

Par contre la condition $\frac{ES_n^2}{n^2} \to 0$ signifie que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0$ donc $\frac{S_n}{n} \to 0$ en probabilité. On retrouve bien que la LfGN est valable sous des conditions plus larges que la LFGN (toujours sous l'hypothèse L^2).

3) Notons que dans le th. 25.26, pour toute $\psi \in \Psi_d$, on peut trouver une suite (X_n) de v.a. inm̂l centrées t.q. $EX_n^2 = 1$ pour tout n (donc $B_n = n$) et t.q.

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} \not\to 0 \quad \text{p.s.}$$

Il existe donc des suites X_n de variances 1 tq $\frac{S_n}{\sqrt{n(\log n)^{1+\varepsilon}}} \to 0$ $\forall \varepsilon>0$

et $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \not\to 0$ p.s.

[La situation est donc <u>très différente du cas im̂l</u> où on a la loi du logarithme itéré.] <u>Démonstration</u> :

- $\psi \in \Psi_d$ étant donnée, il existe une suite $\varepsilon_n > 0$ tendant vers 0 assez lentement pour que $\sum_n \frac{\varepsilon_n^2}{n\psi(n)} = \infty$ (très facile).

Vérifions alors que la suite de v.a.

$$X_n = \begin{cases} \pm \dfrac{\sqrt{n\psi(n)}}{\varepsilon_n} & \text{avec probabilité } \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_n^2}{n\psi(n)} \text{ chacun} \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - \dfrac{\varepsilon_n^2}{n\psi(n)} \end{cases}$$

(supposées indépendantes) donne bien le contre-exemple cherché :

* Elles sont symétriques et de variance 1.

* D'un côté, par définition de la suite (X_n), on a :

$$\sum_n P\left(X_n = \frac{\sqrt{n\psi(n)}}{\varepsilon_n}\right) = \infty \quad .$$

Le lemme de Borel-Cantelli nous dit donc que $\dfrac{X_n}{\sqrt{n\psi(n)}} = \dfrac{1}{\varepsilon_n}$ infiniment souvent, donc $\overline{\lim_n} \dfrac{X_n}{\sqrt{n\psi(n)}} = \infty$ p.s.

* D'un autre côté, si l'on avait $\overline{\lim_n} \dfrac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} < \infty$ p.s. ,

on aurait aussi, grâce à la symétrie,

$\underline{\lim_n} \dfrac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} > -\infty$ p.s. , soit $\underline{\lim_n} \dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{(n-1)\psi(n-1)}} > -\infty$ p.s.,

d'où par la condition de croissance sur :

$\underline{\lim_n} \dfrac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} > -\infty$ p.s.

* Mais alors l'égalité évidente $\dfrac{S_n}{\sqrt{n\psi(n)}} = \dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n\psi(n)}} + \dfrac{X_n}{\sqrt{n\psi(n)}}$

ne pourrait être vérifiée. ∎

c) <u>T L C</u>

Toujours sous les mêmes hypothèses ((X_n) centrées, L^2) on sait que le TLC est équivalent à la condition de Lindeberg. Plus précisément :

$$\frac{\max\limits_{1\le k\le n} b_k}{B_n} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{\text{loi}} n(0,1) \iff \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|X_k|>\varepsilon\sqrt{B_n}} X_k^2 \, dP \to 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

Nous ne nous appesantirons pas sur ces questions qui sont très classique.

Notons seulement que, sous la condition de Lindeberg, il est facile de montrer que $\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ en probabilité et que, par suite :

$$\frac{S_n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1).$$

d) <u>L L I</u>

Nous avons vu plus haut au b), que les estimations données pour le comportement asymptotique p.s. de S_n ne pouvaient être améliorées en général pour des (X_n) inm̂l.

On peut se demander quelles conditions <u>supplémentaires</u> imposer à (X_n) pour avoir de meilleures estimations et en particulier la LLI.

- D'abord, certains résultats expriment que, si (contrairement à ce qui se passe dans le contre-exemple cité au b) la probabilité que $|X_n|$ soit grand ne croît pas trop vite quand $n \to \infty$, alors la LLI est vérifiée.

Citons un énoncé (qui n'est pas le plus général)

<u>Th1</u>

Supposons $|X_n| \leq A_n$ (cosntantes) p.s. où

$A_n = 0((\frac{B_n}{\log_2 B_n})^{1/2})$ alors $\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \log_2 B_n}} = 1$ p.s.

(la conclusion n'est pas vraie pour $A_n = 0((\frac{B_n}{\log_2 B_n})^{1/2})$

La démonstration est très longue.

- Donnons maintenant quelques liens entre le TLC et la LLI.

Dans le cas des v.a. iml, on a vu que ces deux théorèmes étaient réalisés dans les mêmes conditions ; il n'en est pas de même dans le cas inml : le th. 5 ci-dessous donne un cas où le <u>TLC est vérifié</u> (car on a visiblement la condition de Lindeberg) et où la LLI ne l'est pas. D'autre part, il est possible de donner un contre-exemple (avec : $\frac{B_n}{n} \to c$ constante > 0) où au contraire <u>on a la LLI mais pas le TLC</u> (cf [P] , complément 16, p. 317)

Th.5

- Si $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_k| \geq \varepsilon \sqrt{\frac{B_n}{\log_2 B_n}}} X_k^2 \, dP = (\frac{1}{\log B_n (\log_3 B_n)^{1+\delta}})$ $(\delta > 0)$

alors $\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \log_2 B_n}} = 1$ p.s. (*)

- Il existe une suite (X_n) centrée t.q. $0<c\leq EX_n^2\leq C<\infty$, vérifiant $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_k|>2} X_k^2 \, dP = 0(\frac{1}{\log B_n \log_3 B_n})$

et t.q. (*) ne soit pas vrai .

On peut donner un autre théorème lié à la vitesse de convergence dans le TLC :

Notons $R_n = \sup\limits_x |P(\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} < x) - \phi(x)|$ ϕ fonction de répartion gaussienne réduite.

Th3.7

- Si $\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1$ et $R_n = 0(\frac{1}{(\log B_n)^{1+\delta}})$ $(\delta > 0)$ alors on a (*)
- Il existe une suite centrée (X_n) t.q. $0<c\leq EX_n^2\leq C<\infty$ vérifiant $R_n = 0(\frac{1}{\log B_n})$ mais pas (*)

III - Que faire dans le cas de v.a. non indépendantes ?

a) Quels problèmes ?

La question est la suivante : quel est l'ordre de grandeur de S_n ? (pour la convergence p.s., ou en loi, ou L^2...). En particulier, comment normaliser S_n (par une suite a_n à préciser) pour que $\frac{S_n}{a_n}$ converge $\begin{cases} L^2 \\ \text{loi} \\ \text{p.s.} \end{cases}$

On est donc amené, plus précisément, à formuler des questions du type suivant :

- Pour une suite (X_n) donnée, ou pour une classe donnée de suites de v.a., trouver pour chaque convergence la meilleure normalisation.
- Pour une normalisation donnée (ex : $a_n = n$ ou $\sqrt{n}$) trouver toutes les suites (X_n) d'une certaine classe telles que $\frac{S_n}{a_n}$ converge $\begin{cases} \text{p.s.} \\ \text{loi} \\ L^2 \end{cases}$ ... En d'autres termes, il s'agit de trouver des <u>critères</u> par exemple pour la LFGN ($\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.) ou pour le TLC ($\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}}$) ...
- Elucider les relations qui existent entre les différentes sortes de convergence : par exemple, à partir d'une convergence en loi (TLC) peut-on déduire (directement ou non) une convergence p.s. (LLI) ?

<u>Remarque</u> :

On peut remarquer, à cet effet, que les théorèmes vus précédemment dans le cas où la suite (X_n) est indépendante répondent à ce genre de questions. On voit d'ailleurs immédiatement, avec les notations précédentes $(B_n = ES_n^2)$, que

$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{L^2} 0$ dès que $\frac{a_n}{\sqrt{B_n}} \to \infty$.

Dans le cas iîl $B_n = n$; dans le cas inîl , ce n'est pas le cas en général. On pourra se poser la question de la normalisation soit par une suite $a_n = f(n)$, soit par une suite $a_n = f(B_n)$. La suite normalisante a_n pourrait aussi être aléatoire.

b) A quelles classes étendre les théorèmes limites ?

Il est évident qu'il faut faire des hypothèses sur la suite (X_n) si l'on veut espérer des résultats, car si dans la somme $X_1+\ldots+X_n$ certains termes rendent les autres négligeables, il est clair qu'on pourra obtenir n'importe quoi pour le comportement asymptotique !

Une idée naturelle pour resteindre le problème consiste à prendre certaines des propriétés des v.a. indépendantes, centrées, éventuellement de même loi et à voir ce qui se passe si l'on retient seulement telle ou telle propriété. Par exemple :

- Si les (X_n) sont indépendantes et centrées, il est évident que (S_n) est une martingale, ou que $X_n = S_n - S_{n-1}$ est un accroissement de martingale", c'est-à-dire : $E(X_n | X_1,\ldots,X_{n-1}) = EX_n = 0$.

On peut donc étudier les thèorèmes limites pour les martingales.

- Dire que les (X_n) sont indépendantes signifie que, pour m et n entiers

$$P(X_1 \in A_1,\ldots,X_m \in A_m ; X_{m+n} \in A_{m+n},\ldots) - P(X_1 \in A_1,\ldots,X_m \in A_m)P(X_{m+n} \in A_{m+n},\ldots) = 0$$

On peut affaiblir cette hypothèse en supposant simplement que cette différence tend vers 0, en un certain sens, quand n tend vers l'infini On dit alors que (X_n) vérifie certaines propriétés de mélange

- Si les (X_n) sont indépendantes, il est bien connu que (S_n) est une chaîne de Markov...
- Si les (X_n) sont iîl, alors il est clair que la suite (X_n) est stationnaire (voir définitions plus loin...)
- Si les (X_n) sont indépendantes, centrées et dans L^2, elles forment une suite orthogonale : $E(X_m\, X_{m+n}) = EX_m \,.\, EX_{m+n} = 0$.

On pourra donc étudier des théorèmes limites pour des suites orthogonales, ou pour des suites presque orthogonales dans un sens à préciser.

c) Relations entre les différentes conditions de stationnarité

Rappelons d'abord un certain nombre de définitions plus ou moins classiques :

Définitions :

- Une suite (X_n) de v.a. est dite stationnaire au sens strict si la loi jointe des v.a. $(X_{n_1+h},\dots,X_{n_p+h})$ est indépendante de h, quelle que soit la suite finie $n_1,\dots,n_p$ d'entiers.

- Une suite (X_n) de v.a. L^2 est dite stationnaire au sens large si EX_m et $E(X_m\,\overline{X}_{m+n})$ sont indépendants de m . On supposera ici $\left.\begin{array}{l} EX_m = 0 \\ EX_m^2 = 1 \end{array}\right\} \forall m$, et on posera $E(X_m\,\overline{X}_{m+n}) = R_1(n)$.

- Une suite (X_n) de v.a. L^2 est dite quasi-stationnaire si $EX_m = 0$, $E|X_m|^2 \le c^2$ (constante), $E(X_m\overline{X}_{m+n}) \le \phi_1(n)$ où ϕ_1

est une certaine fonction positive décroissante tendant vers 0 à l'infini.

[Il est facile de voir que la condition $E\left|\frac{1}{n}(X_{m+1} + \ldots + X_{m+n})\right|^2 \le \phi_2(n)$ avec $\phi_2(n) \downarrow 0$ est plus faible que la précédente].

Remarque : On voit plus facilement qu'on a les liens suivants entre ces définitions (pour des v.a. L^2) :

$$\begin{bmatrix}\text{stationnaire}\\ \text{strict}\end{bmatrix} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{bmatrix}\text{stationnaire}\\ \text{large}\\ +\ \hat{m}\ \text{loi}\end{bmatrix} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{bmatrix}\text{stationnaire}\\ \text{large}\\ +\ \text{Lindeberg}\end{bmatrix} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{bmatrix}\text{stationnaire}\\ \text{large}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{bmatrix}\text{quasi-}\\ \text{stationnaire}\end{bmatrix}$$

d) Liens entre les différentes conditions de dépendance

Définitions :

1°- Conditions d'indépendance asymptotique

Il y a de nombreuses définitions exprimant qu'une suite de v.a. est asymptotiquement indépendante : elles disent en général que les tribus $\mathcal{F}_m = \sigma(X_\ell ; \ell \le m)$ et $\mathcal{F}^{\infty}_{n+m} = \sigma(X_{n+m}, \ldots)$ sont de moins en moins dépendantes quand $m \to \infty$

Donnons en quelques-unes :

Supposons qu'il existe une suite $\begin{cases}\alpha_m\\ \phi_m\\ \psi_m\end{cases} \to 0$ (pour $m \to \infty$) t.q. pour $A \in \mathcal{F}_n$, $B \in \mathcal{F}^{\infty}_{m+n}$

(i) $|P(A.B) - P(A)\,P(B)| \le \alpha_m$ ou

(ii) $|P(A.B) - P(A)\,P(B)| \le \phi_m\,P(A)$ ou

(iii) $|P(A.B) - P(A)\,P(B)| \le \psi_m\,P(A)\,P(B)$

Nous dirons dans le cas (i) que (X_n) est fortement mélangeant

(ii) que (X_n) est uniformément mélangeant (ou ϕ-mélangeant)

(iii) que (X_n) est super-uniformément mélangeant

(iv) Si la suite est nulle pour tout $m \geq m_0$ fixé, alors (X_n) est dite m_0-dépendante.

Il est clair que (iv) ⟹ (iii) ⟹ (ii) ⟹ (i) .

[Il serait intéressant de faire le lien entre ces conditions de mélange et celles qu'on rencontre couramment en théorie ergodique, nous ne le ferons pas].

Remarques : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ sont deux tribus, on peut définir les deux coefficients de mélange suivants :

$$\alpha(\mathcal{B},\mathcal{A}) = \sup_{B\in\mathcal{B},A\in\mathcal{A}} |P(B.A) - P(B)\ P(A)| \quad \text{et}$$

$$\phi(\mathcal{B},\mathcal{A}) = \sup_{B\in\mathcal{B},A\in\mathcal{A}} \frac{P(B.A) - P(B)\ P(A)}{P(A)}$$

Les conditions (i) et (ii) s'écrivent alors :

(i) $\sup_n \alpha(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+m}^{\infty}) \leq \alpha_m \downarrow 0$

(ii) $\sup_n \phi(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+m}^{\infty}) \leq \phi_m \downarrow 0$

2°- Martingales (asymptotiques)

Soit (X_n) une suite de v.a. adaptée à une suite de tribus $\mathcal{F}_n$ (par exemple $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m; m \leq n)$)

- On dit que (X_n) est une suite d'accroissements de martingales si

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \forall n .$$

[Remarquons qu'on a alors $E(X_n|\mathcal{F}_{n-k}) = 0 \quad \forall n, \forall k > 0$]

- On dit que (X_n) est une __mélangale__ s'il existe une suite $\phi_k \downarrow 0$ telle que

$$||E(X_n|\mathcal{F}_{n-k})||_2 \leq \phi_k \, ||X_n||_2$$

__Remarques__ : α) Il est clair qu'une suite d'accroissements de martingales est une mélangale.

β) Ce qui est plus intéressant est de voir les liens entre les diverses conditions de mélange et la condition de mélangale : on a d'abord le lemme suivant :

__Lemme__

> Si X est une v.a. $\mathcal{A}$-mesurable et si $2 \leq r \leq \infty$, alors pour toute tribu
>
> $$||E(X|\mathcal{B}) - EX||_2 \leq 2\, \phi(\mathcal{B},\mathcal{A})^{1-\frac{1}{r}} ||X||_r$$
>
> et
>
> $$||E(X|\mathcal{B}) - EX||_2 \leq 2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \alpha(\mathcal{B},\mathcal{A})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} ||X||_r$$

démonstration facile cf [ML] p. 162 et 176. ∎

En particulier, si (X_n) est centrée et en posant $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{n-k}$, on obtient

$\lvert\lvert E(X_n\lvert\mathcal{F}_{n-k})\rvert\rvert_2 \leq 2\, \phi_n^{1-\frac{1}{r}} \, \lvert\lvert X_n\rvert\rvert_r$	: si (X_n) est ϕ-mélangeante
$\lvert\lvert E(X_n\lvert\mathcal{F}_{n-k})\rvert\rvert_2 \leq 2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \, \alpha_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \lvert\lvert X_n\rvert\rvert_r$	: si (X_n) est fortement mélangeante

On en déduit immédiatement que si EX_n^2 est borné, alors

- $[(X_n)$ ϕ-mélangeante de coefficient $\phi_n]$
$$\Downarrow$$
$[(X_n)$ mélangale de coefficient $\phi_n^{1/2}]$

Si de plus $||X_n||_r$ est borné pour un $r > 2$, on a mieux : (X_n) est une mélangale de coefficient $\phi_n^{1-1/r}$ (par exemple de coefficient ϕ_n dans le cas où les $|X_n|$ sont bornées par une même constante)

- Dans le cas du mélange fort (toujours avec $EX_n^2 = 1$) il faut supposer $||X_n||_r$ borné pour un $r > 2$ si l'on veut conclure :

$[(X_n)$ fortement mélangeante de coefficient $\alpha_n]$
$$\Downarrow$$
$[(X_n)$ mélangale de coefficient $\alpha_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}$ $]$

Le coefficient est $\alpha_n^{1/2}$ si $r = \infty$.

γ) L'intérêt de la notion de mélangale est qu'elle est beaucoup plus facile à vérifier que les propriétés de mélange parce qu'elle revient à étudier $E(X_n|\mathcal{F}_{n-k})$ au lieu $E(f(X_n)|\mathcal{F}_{n-k})$ pour <u>toute</u> f mesurable. On a donc une uniformité en moins.

δ) Dans la définition d'une mélangale on pourrait supposer que (X_n) est seulement "asymptotiquement" adaptée en un certain sens.

ε) Il serait sûrement intéressant de comparer ces notions aux autres notions de martingales approchées connues (asymptomartingales, amarts...) .

3°- Conditions d'orthogonalité et de multiplicativité

Supposons la suite (X_n) centrée et ayant des moments de tous ordres.

- On dit que (X_n) est <u>orthogonale</u> si $EX_i X_j = 0$ dès que $i \neq j$
- On dit que (X_n) est <u>multiplicative</u> si $E(X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_r}) = 0$ pour toute suite finie strictement croissante d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_r$
- On dit que (X_n) est un <u>MS</u> si (X_n) est multiplicative et vérifie

$$EX_i^2 X_j^2 = EX_i^2 EX_j^2 \qquad \forall i \neq j$$

- On dit que (X_n) est fortement multiplicative si, en plus,

$$E(X_{i_1}^2 X_{i_2}^2 \dots X_{i_1}^2) = EX_{i_1}^2 \dots EX_{i_1}^2$$

Et on peut encore donner d'autres définitions si l'on veut (cf [S], p). Ces définitions sont strictement emboitées les unes dans les autres (évident) (Par exemple, $X_n = \sin nx$ sur $[0,2\pi]$ est orthogonale et non multiplicative) ; mais on peut aussi les comparer aux accroissements de martingales :

<u>Remarque très simple</u> :

* Si (X_n) est une suite d'accroissements de martingale (admettant des moments de tous ordres), alors (X_n) est multiplicative :

En effet $E(X_{i_1} \dots X_{i_r}) = E[E(X_{i_1} \dots X_{i_r} | \mathcal{F}_{i_r - 1})]$

$$= E[X_{i_1} \dots X_{i_{r-1}} E(X_{i_r} | \mathcal{F}_{i_r - 1})] = 0 \qquad \square$$

* Mais on peut trouver des accroissements de martingales qui ne sont pas des MS : le contre-exemple suivant nous sera utile par la suite :

Si (U_i, V_i) est une suite de vecteurs aléatoires $(\in \mathbb{R}^2)$

centrées ayant des moments de tous ordres, alors la suite $X_n = (U_1 + \ldots + U_{n-1})V_n$ est une suite d'accroissements de martingale, mais n'est pas un MS.

[démonstration : calcul très simple ∎] .

4°- Conditions de presque-orthogonalité - Liens avec la (quasi)stationnarité

On étudie ici le cas où $E(X_m X_{m+n})$ devient petit quand n devient grand.

Indiquons les trois lemmes suivants : $(EX_n = 0)$

α) Si (X_n) est une mélangale de coefficient ϕ_n , alors :

$$|E(X_m X_{m+n})| \leq \phi_n \, ||X_m||_2 \, ||X_{m+n}||_2$$

β) Si (X_n) est ϕ-mélangeante de coefficient ϕ_n , alors :

$$|E(X_m X_{m+n})| \leq 2\phi_n^{1/2} \, ||X_m||_2 \, ||X_{m+n}||_2$$

γ) Si (X_n) est fortement mélangeant (borné) de coefficient α_n , alors :

$$|E(X_m X_{m+n})| \leq 4\alpha_n \, ||X_m||_\infty \, ||X_{m+n}||_\infty$$

Tout cela est facile à montrer (cf [IL] p.306-309...)

On peut exprimer cela dans le cadre de la quasi-stationnarité. Exprimons plutôt ce que ça signifie lorsque (X_n) est stationnaire au sens large : $(EX_n^2 = 1 \, , \forall n)$.

α) $R_1(n) \leq \phi_n$

β) $R_1(n) \leq 2\ \phi_n^{1/2}$

γ) $R_1(n) \leq 4\ C^2 \alpha_n$ (si $||X_0||_\infty \leq C$).

On en déduira facilement des estimations pour le calcul de la variance de S_n .

Il est clair qu'il ne peut être question d'avoir dans le cas général des inégalités dans l'autre sens.

IV - Cas des v.a. orthogonales

Rappelons seulement quelques résultats classiques qu'on peut trouver par exemple dans [A]

- Convergence des séries : (X_n) suite orthogonale.

  Contrairement à ce qui se passe dans le cas des v.a. indépendantes, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2$ n'entraîne pas que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge p.s. . Par contre :

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} X_n & \text{converge dans } L^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \pm X_n & \text{converge p.s. pour "presque tout choix des signes } \pm \text{ (distribués selon le jeu de pile ou face).} \end{cases}$$

  On pressent donc qu'une petite condition supplémentaire devrait permettre la convergence p.s. de $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$. On a en effet les deux résultats suivants :

Théorème de Rademacher-Menchoff : [A] , p.80

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 \log^2 n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge p.s.}}$$

Théorème de Tandori : [A] , p.88

Si c_n est une suite décroissante t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2{}_n = \infty$ alors il existe une suite orthogonale (X_n) t.q. $EX_n^2 = c_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ diverge p.s.

- Loi forte des grands nombres

Il est clair alors que le lemme de Kronecker nous donne, par la même démonstration que dans le cas indépendant :

Si $B_n = ES_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2$: ($B_n = n$ si $EX_k^2 = 1 \quad \forall k$)

$$\boxed{\frac{S_n}{\sqrt{B_n \psi(B_n)} \log B_n} \to 0 \text{ p.s.} \quad \text{pour} \quad \psi \in \Psi_c \quad \text{(cf. th.24)}}$$

Il est clair qu'on ne pourra guère obtenir de résultats plus précis sans hypothèses supplémentaires :

Par exemple, si les (X_n) sont iid , on a la TLC et la LLI ;

si $X_n = \sin nx$, la somme S_n est p.s. bornée et on a donc des estimations très différentes.

Il est donc naturel de regarder des cas plus particuliers que le cas orthogonal (cas multiplicatif, accroissements de martingales...) .

V - Cas des systèmes multiplicatifs

Nous insisterons assez peu sur ce cas (cf [S], p.243 sqq et p.305-6)(cf aussi [K] et les références qui y sont).

Les résultats valables pour les v.a. orthogonales sont bien sûr valables. Mais a-t-on beaucoup mieux ? Oui . Voici quelques exemples :

a) Convergence des séries (cf [K] p.68, note en bas de page)

Si $E(X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}) = 0$ pour $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ et $\|\|X_n\|\|_4$ borné, (ce qui est vérifié dans le cas multiplicatif borné) alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ converge p.s.

On en tire évidemment des conséquences sur la loi des grands nombres.

b) Loi du logarithme itéré

Voici deux résultats :

Si (X_n) est multiplicatif et vérifie $\|X_n\| \leq \sqrt{A}$ p.s. (A constante > 0) alors $\lim \dfrac{\|S_n\|}{\sqrt{2\, An \log\log n}} \leq 1$ p.s

Si (X_n) vérifie $EX_n^2 = 1$ et $\|X_n\| \leq C^{te}$ p.s., ainsi que $E(X_{i_1}^{r_1} \dots X_{i_p}^{r_p}) = (E\, X_{i_1}^{r_1}) \dots (E\, X_{i_p}^{r_p})$ $\forall i_1 < \dots < i_p$ $\forall r_i = 1$ ou 2

alors : $\overline{\lim} \dfrac{|S_n|}{\sqrt{2n \log \log n}} \leq 1$

Il a été remarqué que ces résultats ne pouvaient pas être tellement améliorés (cf [K] p.68 et [S] p.305-6)

c) TLC

La condition de multiplicativité simple associée à la condition de Lindeberg n'est pas suffisante pour avoir un TLC (cf [K] p.68). Par contre on peut démontrer le théorème suivant ([K]) :

Si (X_n) est un MS t.q. $E(X_{i_1}^2 \ldots X_{i_p}^2) \leq C^p\, EX_{i_1}^2 \ldots EX_{i_p}^2$ (*) pour une certaine constante C, $\forall i_1 \ldots i_p$ p quelconque, alors la condition de Lindeberg :

$$\left(\frac{1}{B} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_k| > \varepsilon\sqrt{B_n}} X_k^2\, dP \to 0 \qquad (\text{où } B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2\right)$$

entraîne le TLC i.e. $\dfrac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

La démonstration repose sur des idées qu'on voit dans bien d'autres démonstrations : il s'agit

∿ de voir que $\dfrac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ en probabilité

∿ d'appliquer la formule élémentaire : $e^{ix} = (1+ix)\, e^{-\frac{x^2}{2}+r(x)}$

$[\text{où } |r(x)| \leq |x|^3 \quad \forall x \in R]$,

aux variables $\dfrac{tX_k}{\sqrt{n}}$ afin de calculer $E(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}) = \ldots$ (expliciter)

∿ de remarquer que la condition (*) donne une certaine équiintégrabilité.

$\sim$ et d'utiliser la multiplicativité pour obtenir

$$E\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + it\,\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 \qquad \blacksquare$$

VI - Cas des accroissements de martingale

a) Rappels et définitions

Sauf mention des contraires $(X_n,\mathcal{F}_n)$ désigne dans cette partie une suite d'accroissements de martingale L^2. On suppose donc : $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \forall n$. Ce qui revient à dire que S_n est une martingale : $E(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$, $\forall n$.

On a vu que (sous des hypothèses de moments évidentes) :
(X_n) indépendantes et centrées $\Longrightarrow$ (X_n) accr. de mart. $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ (X_n) multiplicatif $\Longrightarrow$ (X_n) orthogonale

On peut donc s'attendre à se rapprocher des théorème limites pour les v.a. indépendantes, centrées.

Nous nous limiterons essentiellement au cas L^2 , ce qui bien sûr simplifie les choses.

Nous trouverons les précisions utiles (démonstrations, cas $L^p(p\neq 2)$, etc.) par exemple dans [S] sections 2.8 et 3.3 ou dans [N] chapitre VII .

b) Convergence des séries

On a, comme dans le cas des v.a. indépendantes, centrées :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad S_n \text{ converge p.s.}}$$

(ce qui n'était pas le cas pour les v.a. orthogonales !), mais on a mieux :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) < \infty \quad \Longrightarrow \quad S_n \text{ converge p.s.}}$$

(Remarquons qu'on a évidemment : $\sum_n E\, X_n^2 < \infty \Longrightarrow \sum_n E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$

<u>Remarque</u> : Notons $A_n = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$, alors A_n est le processus croissant associé à la sous-martingale S_n^2 . En effet la décomposition de Doob de S_n^2 s'écrit :

$$S_n^2 = M_n + A_n$$

où (M_n) est une martingale définie par

$$M_0 = S_0^2 = 0 \qquad M_n - M_{n-1} = S_n^2 - E(S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})$$

et où (A_n) est un processus croissant défini par

$$A_0 = 0 \qquad A_n - A_{n-1} = E(S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}^2$$
$$= E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \ .$$

<u>Remarque sur les moments</u> : On peut supposer simplement l'existence des quantités telles que $E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})$ sans supposer celle des moments d'ordre 2 pour X_n .

D'autre part, si l'on suppose $X_n \in L^p$, on a aussi des théorèmes exprimés en termes de convergence de $\sum_n E(|X_n|^p | \mathcal{F}_{n-1})$ ou de conditions du même type. Dans le cas où $p \leq 1$, alors le résultat suivant :

$$\sum_1^n E(|X_n|^p | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty \quad \Longrightarrow \quad S_n \text{ converge p.s.}$$

est valable sans aucune hypothèse de type martingale ou autre sur $X_n (\in L^p)$.

c) <u>LFGN et estimations pour la convergence p.s.</u>

Au moyen du lemme de Kronecker, on obtient à partir de ce qui précède des résultats sur l'ordre de grandeur de S_n au sens p.s., la normalisation pouvant être faite soit au moyen de

$B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = ES_n^2$, soit au moyen de $A_n = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$

On a donc :

Si $0 < \alpha_n$ est une suite $\mathcal{F}_{n-1}$ - mesurable $\uparrow \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})}{\alpha_n^2} < \infty \implies \frac{S_n}{\alpha_n} \to 0$ p.s.

- En particulier, si $\psi \in \Psi_c$ (ensemble des fonctions positives croissantes t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\psi(n)} < \infty$), on peut appliquer ce théorème à $\alpha_n = \sqrt{A_n\ \psi(A_n)}$ qui est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable : en effet si l'on note $a_n = A_n - A_{n-1} = E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})$, la condition de l'énoncé s'écrit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n\ \psi(A_n)} < \infty$, ce qui est toujours vérifié comme on l'a déjà remarqué. Donc :

$\frac{S_n}{\sqrt{A_n\ \psi(A_n)}} \to 0$ p.s. si $\psi \in \Psi_c$

- On a aussi, par la même occasion, un critère pour la LFGN

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})}{n^2} < \infty \implies \frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.

(il suffit de poser $\alpha_n = n$)

Ceci est vrai en particulier si (X_n) est stationnaire, auquel cas on a même $\frac{S_n}{\sqrt{n}\,\psi(n)} \to 0$ p.s. lorsque $\psi \in \Psi_c$.

On verrait aussi que ces résultats ne s'étendent pas au cas où $\psi \in \cdot_d$

N.B. on pourrait faire ici des remarques analogues à celles du b) .

d) Théorème de la limite centrale

La première question qu'on peut se poser est la suivante : par quoi normaliser ? :

par $B_n = \sum_1^n EX_k^2 = ES_n^2$

par $A_n = \sum_1^n E(X_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$

ou par $C_n = \sum_1^n X_k^2$?

On pourrait alors espérer que $\frac{S_n}{\sqrt{A_n}}$, $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$, $\frac{S_n}{\sqrt{C_n}}$ convergent tous en loi vers $N(0,1)$ sous une condition raisonnable (style Lindeberg). On va voir que le problème est plus compliqué que ça.

Cas stationnaire

Traitons d'abord le cas particulier classique où $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingale stationnaire au sens strict et ergodique :

- Remarque préliminaire :

Posons $EX_n^2 = 1$ pour simplifier les notations, alors le théorème de Birkhoff appliqué à la suite stationnaire au sens strict X_n^2 ou $E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1})$ donne $\frac{A_n}{n} \to 1$ p.s. $\frac{C_n}{n} \to 1$ p.s. $(B_n = n)$.

Donc les trois normalisations donneront le TLC ensemble.

- On a le <u>théorème</u> suivant :

> Si (X_n) est une suite d'accroissements de martingale, stationnaire au sens strict et ergodique, on a, en posant $EX_n^2 = 1$:
>
> $$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$$

Il existe de nombreuses démonstrations de ce fait (cf par exemple [B] p.206, et [I]). On peut aussi, au moins dans le cas où $|X_n| \leq C$ p.s. où C est une constante en faire une démonstration très simple analogue au cas multiplicatif vu précédemment (le fait que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ p.s. grâce au théorème de Birkhoff simplifie même les choses) ; si les X_n ne sont pas bornées, on peut tronquer. (cf le théorème (2.3) de [ML1] p.621, par exemple).

<u>Cas non stationnaire</u>

- Contre-exemple :

Reprenons un exemple voisin du système multiplicatif non MS vu plus haut :

Soit (U_i, V_i) une suite de vecteurs aléatoires $(\in \mathbf{R}^2)$ indépendants, de même loi et centrés ; supposons pour simplifier que leur matrice de covariance est l'identité. Posons

$X_n = \frac{1}{2}\{(U_1 + \ldots + U_{n-1})V_n - (V_1 + \ldots + V_{n-1})U_n\}$ et

$\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n)$.

Il est facile de voir que $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \forall n$.

D'autre part, on montre aisément que

$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} EX_k^4 = 0(\frac{1}{n}) \to 0$: en d'autres termes, on a la condition de Lyapounov, donc celle de Lindeberg.

Et pourtant $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ ne converge pas en loi vers $N(0,1)$.

En effet, des calculs élémentaires (non immédiats) ou d'autres méthodes nous permettent de démontrer que $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ converge vers une loi cosinus hyperbolique (cf [GKR] p.151). [Il s'agit en fait du théorème de la limite centrale pour des marches aléatoires sur le groupe de Heisenberg.]

On voit donc que pour obtenir le TLC pour les martingales, il faut des conditions plus fortes qu'avec les suites de v.a. indépendantes.

- <u>Qu'est que la condition de Lindeberg</u> ?

Au lieu d'employer la condition de Lindeberg classique, on peut employer diverses variantes, par exemple :

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \, 1_{(|X_k| > \varepsilon\sqrt{B_n})} \to 0 \quad \text{en probabilité}$$

ou

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2 \, 1_{(|X_k| > \varepsilon\sqrt{B_n})} | \mathcal{F}_{k-1}] \to 0 \quad \text{en probabilité}$$

ou

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{X_k^2}{B_n} \to 0 \quad \text{en probabilité}$$

etc.

Des liens entre ces diverses hypothèses sont donnés en particulier dans [Sc] p.120-4 et [ML1] p.621-2. Nous ne nous attarderons pas sur ces questions.

- <u>Lien avec la condition $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ en probabilité</u>

Dans le contre-exemple précédent, on peut voir que cette condition n'est pas réalisée.

Ainsi donc, pour les accroissements de martingales (contrairement au cas des v.a. indépendantes centrées) la condition de Lindeberg n'entraîne pas que $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \ (= \frac{C_n}{B_n}) \to 1$ en probabilité.

Précisons un peu un résultat qui est vrai par contre :

<u>Lemme</u> :

> Sans hypothèse de dépendance sur (X_n)
>
> Si $\overline{\lim} \ \frac{1}{B_n^2} \sum\sum_{i \neq j} EX_i^2 X_j^2 \leq 1$ $(\bar{*})$
>
> alors la condition de Lindeberg (classique) entraîne que
>
> $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ dans L^1

<u>Démonstration</u> : [K] lemme p.69 et 72 ou [ML1] p.624 lemme 2.15 sous des formes très peu différentes. ▨

<u>Remarques</u> : La condition $(\bar{*})$ est évidemment vérifiée pour les v.a. indépendantes centrées L^2 ; elle ne l'est pas dans le contre-exemple précédent, bien qu'il soit facile de voir que la $\overline{\lim}$ est bornée.

On voit donc que cette hypothèse $(\bar{*})$ n'est pas grossièrement superflue.

- Un énoncé

Il existe de nombreux énoncés assez voisins de TLC pour les martingales.

Nous citerons celui de [ML1] théorème 2.3 p.621 sous une forme un peu affaiblie :

> Si (X_n) est une suite d'accroissements de martingale L^2 vérifiant
>
> ∿ Lindeberg
>
> ∿ $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ en probabilité
>
> alors $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

Démonstration : proche de celle du cas multiplicatif vu précédemment (ceci englobe le cas stationnaire ergodique vu plus haut) . ∎

Remarques : - il est évident qu'on a alors $\frac{S_n}{\sqrt{C_n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$ a-t-on $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$?

- il n'y a pas à ma connaissance de condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ (ou les autres) $\xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

- pour des discussions sur les différentes normalisations voir aussi [R] .

e) Loi du logarithme itéré

Des questions naturelles analogues se posent : par quoi faut-il normaliser : $A_n, B_n, \ldots$? Quel rôle joue une condition telle que

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1 \quad \text{p.s. ?}$$

- Donnons pour commencer un résultat qui s'énonce simplement [N], p.153

Si $|X_n| \leq c$ p.s. où c est une constante, alors

$$\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2A_n \log \log A_n}} = 1 \quad \text{p.s. sur } \{A_\infty = \infty\}$$

Toujours avec des normalisations aléatoires, on peut donner des résultats plus raffinés, par exemple :

Si $* \ \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} E\left[X_k^2 \, 1_{\{|X_k| \leq \varepsilon\sqrt{A_k}\}} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] \to 0$ p.s.

$* \ \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\left|\frac{X_k}{\sqrt{A_k}}\right| 1_{\{|X_k| \geq \varepsilon\sqrt{A_k}\}} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] < \infty$ p.s.

$* \ \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{A_n}}\right)^4 1_{\{|X_n| \leq \varepsilon\sqrt{A_n}\}} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] < \infty$ p.s. $\forall \varepsilon > 0$

alors : $\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2A_n \log \log A_n}} = 1$ p.s. sur $\{A_\infty = \infty\}$

ou le corollaire suivant :

Si $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{A_n}}\right)^2 1_{\left\{\left|\frac{X_n}{\sqrt{A_n}}\right| > \frac{1}{\sqrt{\log A_n (\log \log A_n)^2}}\right\}} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] < \infty$ p.s.,

alors $\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2A_n \log \log A_n}} = 1$ p.s. sur $\{A_\infty = \infty\}$

Ces résultats se trouvent dans [JJS] sous des formes plus générales.

- Les résultats précédents étaient exprimés pour des normalisations aléatoires. On trouve dans [HS] p.429 sqq des résultats avec normalisations déterministes (par B_n) :

Si * $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left|\frac{X_n}{\sqrt{B_n}}\right| 1_{\{|X_n| \geq \varepsilon\sqrt{B_n}\}}\right] < \infty$

* $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{B_n}}\right)^4 1_{\{|X_n| < \varepsilon\sqrt{B_n}\}}\right] < \infty$

et * $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \to 1$ p.s. $(B_n \to \infty)$

alors $\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \log\log B_n}} = 1$ p.s.

En particulier

Si (X_n) est stationnaire au sens strict et ergodique L^2 on a la LLI

cf [HS] cor 2,p.430.

On renvoie à [HS] et [JJS] pour les démonstrations et discussions.

- Y a-t-il des résultats indiquant le lien entre TLC et LLI ?

VII - A quoi sert la stationnarité ?

Nous insisterons assez peu sur cette question (voir l'exposé [RE] dans ce même volume). Nous donnerons simplement les résultats nécessaires à l'unité de cet article d'exposition.

Les définitions (stationnaire strict, stationnaire large, quasi-stationnaire) ont été données au chapitre III.

a) Rappels minimaux de théorie spectrale (cf [IL], chap.16)

Supposons (X_n) stationnaire large (L^2). Posons $EX_0 = 0$, $EX_0^2 = 1$. Alors il est facile de voir que $R_1(n) = E(X_m X_{m+n})$ est une fonction définie positive (avec $R_1(0) = 1$) : c'est donc la transformée de Fourier d'une probabilité μ sur le cercle. $R_1(n) = \hat{\mu}(n)$. Réciproquement, si μ est une probabilité quelconque sur le cercle, $\hat{\mu}(n)$ peut être interprétée comme la fonction de covariance d'une suite stationnaire large.

Or on sait que le comportement à l'infini de $R_1 = \hat{\mu}$ dépend de la régularité de la probabilité μ (discrète, diffuse, absolument continue...). Donnons simplement deux résultats connus. En notant $L_\infty(X)$ le sous-espace hilbertien de L^2 engendré par les combinaisons linéaires des $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on rappelle que (X_n) sera dit ergodique si l'opérateur de décalage (shift) U défini sur $L_\infty(X)$ par $UX_n = X_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ n'a pas d'éléments invariants.

On a alors, en notant comme toujours $ES_n^2 = B_n = n^2 R_2(n)$ $\left(\neq \sum_{k=1}^{n} EX_k^2\right)$:

* (X_n) ergodique $\iff$ μ n'a pas de masse en 0 $\iff$ $B_n = 0(n^2)$ [ou $R_2(n) \to 0$]

* μ a une densité $\Longrightarrow$ $(R_1(n) \to 0)$ c'est le lemme de Riemann-Lebesgue

b) Etude de la variance de S_n (cf [IL] , p. 321 ...)

(X_n) est toujours ici stationnaire large. $EX_0 = 0$.

- Donnons d'abord l'expression de $B_n = ES_n^2 = n^2 R_2(n)$

En développant ES_n^2 , on a :

$$B_n = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} (n-|j|)\, R_1(j) = n\, R_1(0) + 2 \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\, R_1(j)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}\, d\mu(\lambda) .$$

On peut en déduire quelques remarques simples : par exemple si les (X_n) sont orthogonales, alors $B_n = n$; la réciproque étant fausse. D'autre part, si $\sum |R_1(n)| < \infty$, alors $B_n \sim c\, n$ où c est la constante : $R_1(0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} R_1(j)$.

Enfin, on a toujours $B_n = 0(n^2)$

- Quelques résultats sur l'ordre de grandeur de B_n

Si $R_1(n) \to 0$, alors B_n converge vers une limite éventuellement infinie. La limite vaut $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}\, d\mu(\lambda)$. Elle est finie ssi $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ avec $Y_n = U^n Y$ $(Y \in L_\infty(X))$

Si μ a une densité continue p en 0 , alors $B_n \sim 2\pi p(0) n$

Si (X_n) est uniformément mélangeant et si $B_n \to \infty$, alors $B_n \sim n\, L(n)$ où L est une fonction à variation lente

On peut remarquer en outre que $R_1(n)$ et $R_2(n)$ sont en gros de même ordre ,lorsque la série $\Sigma|R_1(n)|$ ne converge pas.

- Le théorème de von Neumann

Le célèbre théorème de von Neumann dit que

$\frac{S_n}{n} \overset{L^2}{\to}$ projection de X_0 sur l'ensemble $\{X \in L^2 / UX = X\}$.

Cette limite est en particulier 0 si (X_n) est ergodique.

Ces quelques résultats donnent des réponses à la question: comment normaliser S_n (par une suite a_n) pour que $\frac{S_n}{a_n} \overset{L^2}{\to} 0$?

c) Etude de la convergence p.s. [Ga 1]

Nous exprimerons les résultats en termes de $R_1(n)$ et de $R_2(n) = \frac{B_n}{n^2}$, plutôt qu'en termes de mesures spectrales.

- critères de validité de la LFGN

* On sait que si (X_n) est stationnaire au sens strict L^1 , on a le théorème de Birkhoff : $\frac{S_n}{n} \overset{p.s.}{\to} E(X_0|\mathcal{J})$ ($\mathcal{J}$ tribu des invariants). En particulier, si (X_n) est ergodique $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s. (et ceci d'ailleurs seulement sous l'hypothèse L^1). Ce théorème n'est pas améliorable en général même si l'on suppose

$X_n \in L^2$ ou L^∞ cf [Kr]

* Dans le cas (X_n) stationnaire au sens <u>large</u>, on a le théorème suivant : $(i=1 \text{ ou } 2)$

> a) Si $\sum \frac{R_i(n) \log\log n}{n \log n} < \infty$, alors $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.
>
> b) et ce résultat est le meilleur au sens suivant : quand la série diverge, on <u>peut trouver une suite</u> (X_n) t.q. $E(X_m \bar{X}_{m+n}) = R_1(n)$ (idem avec R_2) t.q. $\frac{S_n}{n} \not\to 0$ p.s.

(Bien entendu, quand la série diverge, il existe aussi des suites t.q. $R_1(n) = E(X_m X_{m+n})$ et pour lesquelles $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.)

Un exemple typique pour a) est $R_i(n) = \frac{1}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$ (ou $B_n = \frac{n^2}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}$) ,

et pour b) : $R_i(n) = \frac{1}{(\log\log n)^2}$.

On notera donc que la LFGN n'est pas toujours vérifiée même quand $R_i(n) \to 0$, même quand $B_n = o(n^2)$ i.e. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0$.

Remarquons aussi que pour l'exemple type du a), on peut écrire cette LFGN sous la forme $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}(\log\log B_n)^{2+\varepsilon}} \to 0$ p.s.

- <u>Qu'obtient-on sans hypothèse sur la suite stationnaire</u> ? [G..]

On a le résultat suivant :

$$\boxed{\frac{S_n}{n \log \log n} \to 0 \quad \text{p.s.}}$$

Par exemple, si $B_n \sim \frac{n^2}{(\log \log n)^{\varepsilon}}$, alors ceci s'écrit aussi $\frac{S_n}{\sqrt{B_n} (\log \log n)^{2+\varepsilon}} \to 0$ p.s.

- Estimations précises

Dans tous les cas, que (X_n) satisfasse la LFGN ou non, on peut se demander quelle est la meilleure (= la plus "petite") suite (a_n) t.q. $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ p.s. lorsque $R_1(n)$ ou $R_2(n)$ est donné. Le théorème suivant répond en partie à cette question:

> Si pour un $\alpha \in]0,1[$ et pour une fonction à croissante lente L, on a :
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_i(n)}{n^{1-\alpha}} L(n) < \infty, \quad \text{alors :}$$
>
> $$\frac{S_n}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} L(n)^{1/2} \to 0 \quad \text{P.s.,}$$
>
> cette estimation ne pouvant être améliorée en général

(c'est le corollaire du théorème 5C dans [Ga 1])

On trouvera d'autres résultats dans [Ga 2]

* Cas des suites quasi-stationnaires

Si (X_n) est quasi-stationnaire, $EX_n=0$, $EX_n^2=1$ et $E(X_m X_{m+n}) \leq \Phi_1(n) \searrow 0$

ou $E\left(\frac{1}{n} \sum_{k+1}^{k+n} X_k\right)^2 \leq \Phi_2(n) \searrow 0$,

alors on a des résultats un peu plus faibles en général que dans le cas stationnaire large (cf [Ga 1], théorème 7).

a) Si $\Sigma \frac{\Phi_i(n)}{n} < \infty$, alors $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$ p.s.

b) Si -- $= \infty$, alors il existe une suite quasi-stationnaire (X_n) telle que $\frac{S_n}{n}$ diverge p.s.

(il suffit de comparer au cas stationnaire large ci-dessus pour voir la différence)

On remarque que plus on se rapproche du cas orthogonal (c'est-à-dire plus la suite $\Phi_1(n)$ décroît rapidement), plus la différence entre le cas stationnaire large et le cas quasi-stationnaire s'amenuise.

On peut résumer grossièrement ces estimations par le tableau suivant: voir aussi [RE']

oθordres de grandeur de: $R_1(n)$ ou $\Phi_1(n)$	$R_2(n)$ ou $\Phi_2(n)$	cas stationnaire large $S_n = o(\quad)$	quasi-stationnaire $S_n = o(\quad)$
0	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}\,(\log n)^{\frac{3}{2}}\,(\log\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$	← idem
$\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha>1$	$\frac{1}{n}$	idem	
$\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha<1$	$\frac{1}{n^\alpha}$	$n^{1-\frac{\alpha}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$	$n^{1-\frac{\alpha}{2}}(\log n)^{\frac{3}{2}}(\mathrm{lln})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$
$\frac{1}{\log n(\log\log n)^{1+\varepsilon}}$			n
$\frac{1}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}$		n	non néc. o(n)
$\frac{1}{(\log\log n)^{2}}$		non nécessairement o(n)	
sans condition		n loglog n	$n(\log n)^{\frac{3}{2}}(\mathrm{lln})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$

d) Convergence en loi

Dans le même esprit que pour la remarque précédente, on peut dire très peu de choses pour la convergence en loi sans faire d'hypothèses de dépendance plus fines.

C'est pourquoi pour les théorèmes, nous renvoyons aux chapitres précédents et suivants.

Disons simplement que même dans le cas (X_n) stationnaire strict, avec $\mathcal{F}_{-\infty}$ triviale et $B_n \to \infty$, le TLC peut ne pas être vérifié (cf. [IL] section 19.5, p.384-9).

VIII - Cas des mélangales

Comme il s'agit d'une généralisation des accroissements de martingales il ne faut pas évidemment s'attendre ici à des résultats meilleurs que dans le chapitre VI. Par contre si ϕ_n décroît à une vitesse adéquate aux problèmes à traiter peut-être peut-on espérer aussi bien ?

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ désigne donc une mélangale :

$$||E(X_n|\mathcal{F}_{n-k})||_2 \leq \phi_k ||X_n||_2$$

a) Quelques mots sur la variance ES_n^2

On a vu au chapitre III que si (X_n) est stationnaire large, on a $R_1(n) \leq \phi_n$; ceci nous donne évidemment, par exemple, que si $\sum \phi_n < \infty$ alors $\frac{ES_n^2}{n} \to \sigma^2 = R_1(0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} R_1(j)$ convergent .

Mais cette remarque est grossière. Peut-on l'affiner ?

b) Convergence des séries, LFGN

En démontrant (assez facilement) un analogue de l'inégalité de Doob pour les mélangales, on peut obtenir : [ML 2]

> Si $(X_n, \mathcal{F}_n)$ est une mélangale de coefficient $\phi_n = 0(\frac{1}{\sqrt{n}\ \psi(n)^2})$ avec $\psi \in \Psi_c$ (cf chap.II) [condition proche de $\sum \phi_n^2 < \infty$] , alors : $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty \Longrightarrow S_n$ converge p.s.

Grâce au lemme de Kronecker, on a, sous la même condition, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} < \infty \implies (\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.}) \quad .$$

NB. Il est clair que ces résultats sont intéressants dans le cas non stationnaire ; car si (X_n) est quasi-stationnaire, on a vu au chapitre VII précédent que, sous des conditions beaucoup plus faibles sur ϕ_n , on obtient la LFGN .

c) TLC

On pourrait dire qu'en gros dès que $\phi_n = 0(\frac{1}{\sqrt{n}\ \psi(n)^2})$ où $\psi \in \Psi_c$, on a les mêmes résultats pour les mélangales que pour les martingales.

Donnons un résultat cf [ML4] th. 2.5,2.6 ; p.167

Si (X_n) est une mélangale stationnaire large $(EX_n = 0)$, de coefficients $\phi_n = 0(\frac{1}{\sqrt{n}\ \psi(n)^2})$ où $\psi \in \Psi_c$ et vérifie

$$\begin{cases} \{X_n^2\} & \text{uniformément intégrable} \\ \frac{ES_n^2}{n} \to \sigma > 0 & \end{cases}$$

alors $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi.

Si de plus $E\left[\frac{(S_{k+n}-S_k)^2}{n} | \mathcal{F}_{k-m}\right] \to \sigma^2$ dans L^1 ,

alors la limite est $N(0,1)$.

Il y a d'autres énoncés cf [ML5] th.2.4, p.617

Remarquons que la condition sur ϕ_n est proche de $\sum \phi_n^2 < \infty$ et que la condition suffisante classique pour que $\frac{ES_n^2}{n} \to \sigma^2 > 0$ est plus forte : $\sum \phi_n < \infty$.

Il serait certainement intéressant de discuter un peu la nécessité des hypothèses.

d) Il n'y a pas de résultat écrit sur la LLI pour les mélangales à notre connaissance, mais ça ne saurait probablement tarder.

IX - Propriétés de mélange

Les propriétés de mélange définies au chapitre III donnent des conditions d'indépendance asymptotique assez fortes sur la suite (X_n) , on peut donc espérer avoir des résultats proches de ceux qu'on obtient pour les v.a. indépdendantes.

a) Estimations de ES_n^2

On peut faire la même remarque que dans le cas des mélangales : si (X_n) est, disons, stationnaire au sens large, on a vu au chapitre III 4°) que

$R_1(n) \leq 2\,\phi_n^{1/2}$ si (X_n) est ϕ-mélangeante de coefficient ϕ_n

$R_1(n) \leq 4\,C^2 \alpha_n$ si (X_n) est α-mélangeante de coefficient α_n et t.q. $|X_n| \leq C$ p.s.

On en tire donc que si $\sum \phi_n^{1/2} < \infty$, ou $\sum \alpha_n < \infty$ $|X_n| \leq c$ p.s., alors

$$\frac{ES_n^2}{n} \to R_1(0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} R(j) \quad \text{(fini)}.$$

Problème : discuter la précision de ces résultats.

b) Convergence p.s.

Un problème intéressant est le suivant : peut-on faire mieux que l'application de la remarque précédente qui exige que α_n ou ϕ_n décroisse suffisamment rapidement ? On a le résultat suivant :

> Soit (X_n) une suite super-mélangeante (sans condition de vitesse sur ψ_n).
>
> Supposons qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $E X_n \leq c$ (constante) ; $EX_n = 0$ alors :
>
> $$\sum \frac{EX_n^2}{n^2} < \infty \implies \frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

En particulier, les conditions $E|X_n| \leq c$ et $\frac{EX_n^2}{n^2} < \infty$ dès que $EX_n^2 \leq c'$.

Il existe une démonstration assez simple de ce résultat : exceptionnellement, nous allons la reproduire car elle met l'accent sur le lien entre les accroissements de martingales et les suites mélangeantes (cf [S], p.139,th.3.3.2) :

Démonstration :

Elle s'appuie sur l'idée suivante : par un recentrage conditionnel de X_n, on se ramène au cas des accroissements de martingales.

* un calcul très simple nous donne que pour tout $n_0 \in N$ et tout $p \in [0,n_0[$ on a : en posant

$$\mathcal{G}_m = \sigma(X_{mn_0+p}, X_{(m-1)n_0+p}, \dots, X_{n_0+p}) \subset \mathcal{F}_{mn_0+p}$$

$$\left|E(X_{mn_0+p} \mid \mathcal{G}_{m-1})\right| \leq \psi_{n_0}\, E\left|X_{mn_0+p}\right| \leq c\, \psi_{n_0} \to 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors pour tout n_0 assez grand on a

$$\left| E(X_{mn_0+p} | \mathcal{G}_{m-1}) \right| \leq \varepsilon \quad .$$

* Fixons n_0. Pour avoir que $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s., il suffit de démontrer que pour tout $0 \leq p < n_0$, on a $\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} X_{mn_0+1} \to 0$ p.s.

Or $X_{mn_0+p} = \underbrace{X_{mn_0+p} - E(X_{mn_0+p} | \mathcal{G}_{m-1})}_{Y_m} + \underbrace{E(X_{mn_0+p} | \mathcal{G}_{m-1})}$

Le second terme est petit, et le premier est un accroissement de martingale (c'est étudié pour) : donc pour avoir la convergence p.s. cherchée, il suffit de démontrer que la suite d'accroissements de martingale $(Y_m, \mathcal{G}_{m-1})$ vérifie la LFGN.

* Or ceci n'est pas difficile, car

$$E(Y_m^2 | \mathcal{G}_{m-1}) = E(X_{mn_0+p}^2 | \mathcal{G}_{m-1}) - \left[E(X_{mn_0+p} | \mathcal{G}_{m-1}) \right]^2 \quad ,$$

donc si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} < \infty$, on a aussi $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{EX_{mn_0+p}^2}{m^2} < \infty$, et

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{E(X_{mn_0+p}^2 | \mathcal{G}_{m-1})}{n^2} < \infty \text{ p.s. , soit } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E(Y_m^2 | \mathcal{G}_{m-1})}{m^2} < \infty \quad \text{p.s.}$$

La suite Y_m vérifie donc le critère de la LFGN donné au chapitre VI pour les martingales L^2 . ∎

- Remarquons toutefois qu'une telle méthode ne semble pas donner un critère de convergence des séries super-mélangeantes du type :

$\sum EX_n^2 < \infty \Longrightarrow S_n$ converge p.s.

sans imposer des conditions supplémentaires sur ψ_n ou $E|X_n|$

- On pourrait aussi chercher à voir si on peut améliorer le théorème précédent (car α ou ϕ-mélangeant, affaiblissement de la la condition $E|X_n| \leq c$ ...)

c) <u>Convergence en loi</u>

Pour la plupart des problèmes on peut citer [IL]

- <u>Ce n'est pas si simple</u> !

Plaçons nous d'abord dans le cas où (X_n) est stationnaire strict, pour simplifier : on a vu plus haut que même si $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale et si $B_n \uparrow \infty$, $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ peut ne pas converger vers $N(0,1)$. On peut alors se demander ce qui se passe si l'on impose en plus à (X_n) une condition de mélange. Voici deux résultats qui montrent une différence et une ressemblance avec le cas iml : (cf [IL], th.12.1.1., p.316-9).

> Si (X_n) est stationnaire strict fortement mélangeante de coefficient α_n ; s'il existe deux suites $a_n \to \infty$ et b_n t.q. $\frac{S_n}{a_n} - b_n$ converge en loi, alors la limite est une loi stable.
> Si α est l'exposant de cette loi stable, alors $a_n \sim n^{1/\alpha} L(n)$, où L est à variation lente. En particulier si $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \to N(0,1)$, alors $B_n \sim n\,L(n)$ avec L à variation lente.

Mais, même si les (X_n) sont dans L^2, la convergence, s'il y a, ne se fait pas nécessairement vers la loi normale : (cf [IL] p.421)

Soit $0 < \alpha < 1$ Il existe des suites (X_n) stationnaire strict, fortement mélangeantes (de coefficient $\alpha_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$), t.q. $\lvert X_n \rvert \leq 1$ p.s. et $B_n \to \infty$, pour lesquelles $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{loi}$ loi stable d'indice $\alpha + 1$ $(\in]1,2[)$

Par contre si (X_n) est ϕ-mélangeante L^2, il n'existe pas à notre connaissance (mais il en existe peut-être...) de contre-exemple à la convergence de $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ vers la loi gaussienne.

Dans le cas non stationnaire, il est certainement possible d'obtenir des résultats ressemblant aux précédents, mais nous n'en connaissons pas.

- Une <u>CNS</u> (cf [IL], p.333-340, section 18.4)

La CNS indiquée dans cette référence porte non pas sur des coefficients tels que $R_i(n), \alpha_n, \phi_n, \ldots$, mais sur les v.a. S_n elles-mêmes : elle semble donc avoir un rôle plutôt technique : citons un cas particulier :

Si X_n est α-mélangeant et si $\frac{B_n}{n} \to \sigma^2 \to 0$, alors $\left(\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \xrightarrow{loi} N(0,1)\right) \iff \left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right)^2\right.$ uniformément intégrable)

- <u>Conditions suffisantes</u>

La plupart des conditions suffisantes connues peuvent être obtenues comme corollaires immédiats des résultats sur les mélangales :

Contentons nous d'en d'indiquer quelques-uns sous des formes qui ne sont pas les plus fines :

Soit (X_n) stationnaire large, $EX_n = 0$ et supposons que $\frac{ES_n^2}{n} \to \sigma^2 > 0$

Si l'on a en plus

- soit (X_n) ϕ-mélangeante t.q. $||X_n||_{2+\delta}$ borné (X_n^2 uniformément intégrable)

$$\phi_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\psi(n)}\right)^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \qquad \delta \geq 0$$

- soit (X_n) α-mélangeante t.q. $||X_n||_{2+\delta}$ borné

$$\alpha_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\psi(n)}\right)^{2\frac{2+\delta}{\varepsilon}} \qquad \delta > 0$$

où $\psi \in \Psi_c$

alors $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

<u>Remarques</u> : 1°) les conditions de décroissance des coefficients ϕ_n et α_n sont proches de $\sum \phi_n^{2.\frac{1+\delta}{2+\delta}} < \infty$ et $\sum \alpha_n^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$; or les conditions suffisantes classiques pour avoir $\frac{ES_n^2}{n} \to \sigma^2 > 0$ sont, on l'a vu : $\sum \phi_n^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} < \infty$ et $\sum \alpha_n^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$: elles coïncident donc à peu près dans le cas α-mélangeant.

(cf [IL] section 18.5, [ML4]..)

- Notons encore que sous l'hypothèses (X_n) stationnaire strict, la condition $\sum \alpha_n^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} < \infty$ suffit pour avoir le TLC (cf [Go] [Sc])

2°) Les méthodes en général employées sont de deux sortes :

- approcher une suite mélangeante par une suite d'accroissements de martingales [Go], [Sc], [ML]...
- sommer les X_n par paquets astucieux de manière à approcher l'indépendance pour des v.a. d'indices éloignées.

3°) Pour des résultats plus précis sans hypothèses de stationnarité voir en particulier [ML5], p.618, 2.11...

d) Loi du logarithme itéré

Il serait fastidieux d'allonger la liste des énoncés. Renvoyons simplement à [JJS] section 8 et [HS] section 4 et aux références qui y sont indiquées.

Remarques : Il y a bien d'autres résultats de convergence p.s. ou de convergence en loi, sous des hypothèses de dépendances plus ou moins diversifiées (voir par exemple dans [S] pour des résultats de convergence p.s.)

- <u>le cas des "fonctions de mélange"</u> :

<u>Définitions</u> : Soit (ξ_n) une suite stationnaire strict. Rappelons que $H_\infty(\xi)$ est le sous-espace de L^2 des v.a. mesurables par rapport à la tribu $\sigma(X_n ; n \in Z)$ et que sur $H_\infty(\xi)$ est défini un opérateur unitaire U t.q. $U : \xi_n \to \xi_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Si $X_0 \in H_\infty(\xi)$, alors on s'intéresse à la suite $X_n = U^n X_0$:
Si (ξ_n) est une suite $\overset{\alpha}{\phi}$-mélangeante, on dit que (X_n) est fonction de $\overset{\alpha}{\phi}$-mélangeante [(X_n) peut être mélangeante ou ne pas l'être].

+ Des résultats sont donnés pour de telles suites par exemple dans [IL] section 18.6, [Go], [ML 4]... Ils peuvent souvent s'obtenir comme corollaires des résultats sur les mélangales.

- <u>le cas des chaînes de Markov</u>

Soit (ξ_n) une chaîne de Markov sur un espace E, f une fonction de E dans R, on pose $X_n = f(\xi_n)$, i.e. on étudie $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$.

Citons comme exemples de références :

[IL] section 19.1 et les renvois (Doob...) , [C], [Ma] [JJS]...

+ en général les résultats obtenus sont liés aux théorèmes et méthodes décrits dans le présent exposé.
  L'hypothèse faite sur la chaîne de Markov est en général quelque chose de voisin de la condition de Doeblin.

- <u>le cas des processus sous -additifs</u>

cf [Ki], [De], [Is]

Au lieu de supposer (X_n) stationnaire strict, on suppose une condition plus large.

X - Remarques sur les méthodes

Les quelques lignes qui suivent ont un caractère un peu arbitraire et vague: il s'agit seulement de donner quelques remarques simples de caractère limité.

Nous allons pour cela distinguer entre les "hypothèses larges" et les "hypothèses strictes" de dépendance (notions tout à fait approximatives)

1°) "Hypothèses larges"

Ce sont des hypothèses de type L^2 (stationnarité large, quasi-stationnarité, orthogonalité...), cf [RE].

- Sous ces seules conditions, on ne peut espérer de résultats très précis (TLC, LLI...) pour le comportement de S_n : on peut attendre seulement des "garde-fous" pour l'ordre de grandeur de S_n.

En général on estime pour cela la valeur de ES_n^2;

Pour avoir des renseignements sur le comportement p.s., on regarde les n de la forme 2^p, et on utilise des lemmes de majorations adaptés à ces subdivisions, selon des idées dues en particulier à Gal, Koksma...

Dans le cas stationnaire large, une utilisation astucieuse de la décomposition spectrale permet de dire plus: c'est en particulier la contribution de Gapochkine.

2°) - "Hypothèses strictes"

Ce sont des hypothèses portant davantage sur l'ensemble de la suite (X_n) et non pas seulement sur les propriétés de covariance.

a) Stationnarité stricte, sous-additivité

Ces hypothèses de type stationnarité permettent d'obtenir des résultats assez précis sur la LFGN, mais sont insuffisantes à elles seules pour le TLC ou la LLI.

Elles;permettent d'établir des lemmes maximaux à partir desquels on peut obtenir des théorèmes analogues au théorème de Birkhoff.

b) Hypothèses de dépendance assez fortes

= Pour obtenir le TLC, il faut des hypothèses plus fortes (indépendance asymptotique...).

On peut alors utiliser toutes les méthodes habituelles (transformées de Fourier, méthode des moments, théorème de Trotter...), mais en général on peut dse restreindre à l'étude des transformées de Fourier; un développement à l'ordre 2 de la fonction caractéristique de S_n normalisé suffit la plupart du temps.

La démonstration du TLC dans le cas multiplicatif (inspirée de Salem et Zygmund) semble jouer un rôle assez central.

Si on a des conditions de mélange, il y a deux méthodes classiques pour étudier S_n normalisé:

- la méthode de Bernstein qui consiste, dans le calcul de S_n , à sommer par paquets de manière à obtenir, après normalisation, d'une part des paquets négligeables, d'autreppart des paquets dont les indices sont suffisamment espacés pour être considérés comme presque indépendants,
- la méthode de Gordine, qui consiste à approcher une suite mélangeante par une suite d'accroissements de martingale.

Les travaux de Mc Leish introduisent une notion (mélangale) qui comporte comme cas particulier à la fois les suites mélangeantes et les accroissements de martingale.

= Pour la LLI, il faut combiner des idées "du style LFGN" (lemmes maximaux, étude de S_n pour des n de la forme c^k avec c 1...) et des idées "du style TLC" (remplacer les X_n par des v.a. gaussiennes avec une approximation suffisante: vitesse de convergence, plongement de Skorokhod...) , mais en raffinant!

3°) - Le caractère arbitraire et vague de la distinction entre "hypothèses larges" et "hypothèses strictes" tient par exemple au fait que certaines hypothèses sont un peu intermédiaires (par exemple la multiplicativité...), que les structures de dépendance ont des liens avec les conditions de moments, etc. (cf en particulier S , p. 23-30, p.234-254)

BIBLIOGRAPHIE

[A] G. ALEXITS Convergence problems of orthogonal series Pergamon Oxford (1961)

[B] P. BILLINGSLEY Convergence of probibability measures Wiley-New-York (1968)

[C] D. COGBURN The CLT for Markov processes 6^e symposium de Berkeley (1972) volII, p.

[De] Y. DERRIENNIC Sur le théorème ergodique sous-additif CRAS t.281 (1975) p. 985-8

[Dv] A. DVORETZKY Asymptotic normality for sums of dependent random variables 5^e symposium de Berkeley vol II (1972) p.513-535 et MR 54 = 3808

[Ga1] V.F. GAPOCHKINE Critères de validité de la LFGN pour des classes de processus stationnaires au sens large... Th. of proba. XXII, n°2, (1977) p.295-318 (en russe)

[Ga2] V.F. GAPOCHKINE Estimations précises de la LFGN... Usp. Math. Nauk, XXXI,5 (1976) p.233-4 (en russe)

[Go] M. GORDINE The CLT for stationary processes Soviet Math Dokl. 10 (1969) p.1174-6

[GKR] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE Marches aléatoires sur les groupes de Lie Lecture Notes n° 624 Springer Verlag

[H] P. HALL Martingale invariance principles Ann. prob. 5, n°6, (1977) p. 875-887

[HS] C. HEYDE, D. SCOTT Invariance principles for the LLI for martingales... Ann.Prob. 1,n°3,(1973) p. 428-436

[I] I.A. IBRAGIMOV A CLT for a class of dependent random variables Th.of Proba. (1962) p.83-89

[IL] I.A. IBRAGIMOV, Yu LINNIK Independent and stationarity sequences of random variables (1971) Wolters-Noordhoff

[Is] H. ISHITANI A subadditive process and its applications... Publ. RIMS Kyoto Univ. 12 (1977) p.565-575

[JJS] N. JAIN, F. JOGDEO, W. STOUT Upper and lower functions for martingales and mixing processes Ann. Prob. 3,n°1 (1975) p.119-145

[Ki] J.F.C. KINGMAN Subadditive ergodic theory Ann. Prob. 1 (1973) p. 883-909

[Ko] J. KOMLOS A CLT for multiplicative systems Canad. Math. Bull. 16, n°1, (1973),p. 67-73

[Kr] J. KRENGEL Recent progress in ergodic theorems Astérisque n°50, (1977) p. 151-192

[Ma] N. MAIGRET Théorème de la limite centrale fonctionnel pour une chaîne de Markov récurrente Harris positive Thèse de 3^{e} cycle (Orsay) (1977)

[ML1] D. Mc LEISH Dependent CLT and invariance principles Ann. Prob; 2, n°4 (1974), p.620-8

[ML2] " A maximal inequality and dependent strong laws Ann.Prob. 3,n°5, (1975),p.829-839

[MK3] " A CLT with conditioning on the distant past Canad. Math. Bull. 18,n°2,(1975), p.245-7

[ML4] " Invariance principles for dependent variables Zeit. für Wahr. 32 (1975), p.165-178

[ML5] " On the invariance principles for non stationary mixingales Ann. prob. 5, n°4, (1977), p. 616-621

[N] J. NEVEU Martingales à temps discret Masson (1972)

[P] V. PETROV Sums of independent random variables Ergebnisse n°82, Springer Verlag (1975)

[Re] R. REBELLEDO Remarque sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues II CRAS t. 285 (1977) p.517-520

[RE] J. ROUSSEAU-EGELE La loi forte des grands nombres pour les suites stationnaires (ce même volume)

[RE'] " Sur un théorème d'équidistribution forte CRAS t. 286 (1978) p.567-9

[Ro] H. ROOTZEN On the functional CLT for martingales Zeit. für Wahr. 38 (1977) p.199-210

[Sc] D. SCOTT CLT for martingales and for processes with stationary increments using a Skorokhod representation approach Adv.Appl. Prob; 5 (1973) p.119-137

[S] W. STOUT Almost sure convergence Academic Press (1974)