J. P. CONZE

Sur la convergence d'une série liée à une équation fonctionnelle

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A4_0>

SUR LA CONVERGENCE D'UNE SERIE

LIEE A UNE EQUATION FONCTIONNELLE

J.P. Conze

1 - Introduction

Soit α un nombre irrationnel. Soit T_α la rotation définie par $x \to x+\alpha$ sur le cercle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons également T_α l'opérateur déduit de l'action de cette rotation sur les fonctions définies sur X .

Plusieurs questions de théorie ergodique, par exemple l'ergodicité de certains produits gauches, des propriétés d'équirépartition, sont liées à l'existence d'une solution mesurable non nulle ϕ de l'équation fonctionnelle

$$T_\alpha \phi = \phi f \quad (*)$$

où f est donnée.

Cette équation, pour des fonctions f assez régulières, met en jeu des propriétés arithmétiques de α . On sait montrer, dans des cas variés, que l'équation n'a pas de solution non nulle. Plus rarement, il est possible de construire des exemples non triviaux pour lesquels l'équation a une solution non nulle (cf. W. Veech [1]).

Les équations additives jouent également un rôle important. Il est clair que, si f est de la forme $f = \exp(2\pi ih)$, l'équation $(*)$ a une solution mesurable non nulle, dès que l'équation additive

$$T_\alpha \psi - \psi = h \quad (**)$$

a une solution mesurable ψ .

Nous nous proposons dans ce travail d'obtenir, dans un cas particulier, l'existence d'une solution pour l'équation additive (**), grâce à l'étude de la convergence d'une série de la forme $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^4}{n^2((n\alpha))^2}$. Ceci nous permet de retrouver partiellement le résultat de [1], et de répondre, négativement à une question formulée dans [2].

Notations.

On note μ la mesure de Lebesgue sur le cercle.

Dans toute la suite, α est un nombre irrationnel fixé, dont on note (a_k) la suite des quotients partiels, et (p_k/q_k) la suite des convergents.

Pour tout réel y, posons $((y)) = \inf_{p\in Z} |y-p|$.

Rappelons (cf. [3]) qu'on a entre les (q_k) et les (a_k) les relations de récurrence.

$$q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1} \quad , \quad k \geq 1 \quad ,$$

et que la suite (q_k) vérifie les inégalités :

$$((n\alpha)) \geq ((q_k\alpha)) \quad , \quad \text{pour} \quad 0 < |n| < q_{k+1} \quad , \quad k \geq 1 \quad ,$$

et $$\frac{1}{q_k+q_{k+1}} \leq ((q_k\alpha)) \leq \frac{1}{q_{k+1}} \leq \frac{1}{a_k q_k} \quad , \quad k \geq 1$$

Soit (b_k) une suite d'entiers telle que $|b_k| \leq a_k$, pour tout $k \geq 1$. Considérons, comme dans [1], les éléments $\beta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\beta = \sum^{\infty} b_k q_k \alpha$. Comme on a :

$$\sum_1^{\infty} ((b_k q_k\alpha)) \leq \sum^{\infty} |b_k| ((q_k\alpha)) \leq \sum_1^{\infty} {}^1/_{q_k} < \infty \quad ,$$

cette série définit bien un élément du cercle .

2 - Convergence d'une série

Théorème :

Soit $\beta = \sum_{1}^{\infty} b_k q_k \alpha$, vérifiant la condition $\sum_{1}^{\infty} |b_k|^4 / a_k < \infty$. Alors la série $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^4}{n^2((n\alpha))^2}$ converge.

Remarque : La condition du théorème équivaut à $\sum_{1}^{\infty} |b_k|^4 \, q_k/q_{k+1} < \infty$. Il est clair qu'il existe une infinité non dénombrable de valeurs β satisfaisant à la condition du théorème si et seulement si le nombre α n'est pas de type constant, c'est-à-dire si la suite des quotients partiels (a_k) est non bornée.

Nous montrons d'abord une série de lemmes élémentaires de majoration. Dans toute la suite, C désignera une constante "générique".

Lemme 1 :

Soit f une fonction positive intégrable au sens de Riemann sur X . On a, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \int f d\mu$$

Preuve : Supposons d'abord f continue. Soit l un entier. On a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+kl)^2} \Big(\sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) \Big) .$$

D'après l'unique ergodicité de la rotation d'angle α, on a, uniformément en k :

$$\lim_{l} \frac{1}{l} \sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) = \int f d\mu .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour l assez grand, on a, pour tout k :

$$\frac{1}{l} \sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) \leq \int f d\mu + \varepsilon ,$$

d'où : $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+kl)^2} l\left(\int f d\mu + \varepsilon\right) \leq \frac{1}{N} \left(\int f d\mu + \varepsilon\right)$.

Le résultat s'étendimmédiatement par majoration aux fonctions intégrables au sens de Riemann positives.

Lemme 2 : (Koksma)

Soit f une fonction intégrable sur le cercle de variation $\mathrm{Var}(f)$ finie. Soit $q \geq 1$ un entier tel que $\cancel{q((q\alpha)) < 1}$. Alors on a, pour tout x :

$|q\alpha - p| < 1/q$ pour un entier p premier avec q.

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1} f(x+k\alpha) - q\int f d\mu\right| \leq \mathrm{Var}(f).$$

Lemme 3 : Soient p et N des entiers > 0.

$$\sum_{\{n \geq N\ ,\ n : ((n\alpha)) \leq 1/p\}} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{Np} \quad ;$$

$$\sum_{\{n \geq N\ ,\ n : ((n\alpha)) > 1/p\}} \frac{1}{n^2((n\alpha))^2} \leq \frac{Cp}{N}.$$

Preuve : La première somme s'écrit :

$\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} 1_{[-\frac{1}{p},\frac{1}{p}]}(n\alpha)$. L'inégalité résulte du lemme 1 appliqué à

$1_{[-\frac{1}{p},\frac{1}{p}]}$.

De même, la deuxième somme peut s'écrire :

$$\sum_{n \geq N} \sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{((n\alpha))^2} 1_{\left[\frac{l}{p},\frac{l+1}{p}\right]}(n\alpha).$$

D'après le lemme 1, cette somme est majorée par :

$$\sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{N} \left(\frac{p}{l}\right)^2 \frac{1}{p} \leq \frac{p}{N} \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^2}\right) = C\, \frac{p}{N}.$$

Lemme 4 :

$$\sum_{\{0 < n < q_k\ ;\ n : ((n\alpha)) \geq \frac{1}{p}\}} \frac{1}{((n\alpha))^2} < Cp(q_k+p)$$

Preuve : La somme étudiée s'écrit :

$$\sum_{0<n<q_k} \frac{1}{((n\alpha))^2} \sum_{l=1}^{p-2} 1_{[\frac{l}{p},\frac{l+1}{p}[}(n\alpha)$$

$$\leq p^2 \sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{l^2} \Big(\sum_{0<n<q_k} 1_{[\frac{l}{p},\frac{l+1}{p}[}(n\alpha)\Big) \leq p^2 (q_k/p + 2)\Big(\sum_{l=1}^{p-2} 1/l^2\Big) ,$$

d'après le lemme 2. D'où, la majoration cherchée.

Tout entier n tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$, qui n'est pas de la forme sq_k , pour $1 \leq l \leq a_k$, s'écrit $n = sq_k + r$, avec $1 \leq r < q_k$.

Lemme 5 :

Pour chaque valeur de s , $1 \leq s \leq a_k$, il y a au plus une valeur de n , de la forme $sq_k + r$, $1 \leq r < q_k$, telle que $((n\alpha)) < \frac{1}{4}\,\frac{1}{q_k}$.

Preuve : S'il existait deux valeurs distinctes de la forme sq_k+r_i , $i=1,2$, avec $(((sq_k+r_i)\alpha)) < \frac{1}{4}\,\frac{1}{q_k}$, $i=1,2$, on aurait $((r_0\alpha)) < \frac{1}{2}\,\frac{1}{q_k}$, pour un r_0 tel que $1 \leq r_0 < q_k$. Mais ceci contredit les inégalités

$$((r_0\alpha)) \geq ((q_{k-1}\alpha)) \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{q_k+q_{k+1}} \geq \frac{1}{2q_k}$$

Il existe donc au plus a_k valeurs de n , tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$, de la forme $sq_k + r$, $1 \leq r < q_k$, vérifiant $((n\alpha)) < \frac{1}{4}\,\frac{1}{q_k}$. Nous allons montrer que ces valeurs sont nécessairement grandes.

Lemme 6 :

Soit $n = sq_k + r$, avec $1 \leq r < q_k$, $1 \leq s \leq a_k$. Alors la condition $((n\alpha)) < \frac{1}{4q_k}$ implique $s \geq \frac{1}{4}\, q_{k+1}$.

Preuve : Posons $s = a_k$. La condition $((n\alpha)) < \frac{1}{4q_k}$ entraîne :

$$((r\alpha)) < \frac{1}{4q_k} + \frac{s}{q_{k+1}} \leq (\lambda + \tfrac{1}{4})\,\frac{1}{q_k}$$

D'autre part, on a, pour $1 \leq r < q_{k-1}$:

$$((r\alpha)) \geq ((q_{k-2}\alpha)) \geq \frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}} \geq \frac{1}{q_k} \qquad 6)$$

et, pour $q_{k-1} \leq r < q_k$: $((r\alpha)) \geq ((q_{k-1}\alpha)) \geq \frac{1}{q_k+q_{k-2}} \geq \frac{1}{2q_k}$.

Dans le premier cas, on obtient : $\lambda > 3/4$, d'où $sq_k+r \geq \frac{3}{4} a_k q_k \geq \frac{1}{4} q_{k+1}$; dans le deuxième cas, on obtient : $\lambda \geq \frac{1}{4}$, d'où $sq_k+r \geq \frac{1}{4}a_k q_k+r \geq \frac{1}{4}(a_k q_k+q_{k+1}) = \frac{1}{4} q_{k+1}$

<u>Proposition</u> : Soit $\beta = \sum_1^\infty b_k q_k\alpha$ vérifiant la condition $\sum_1^\infty b_k^2/a_k < \infty$. Alors on a : $\sum_{n\neq 0, n\notin J} \frac{((n\beta))^2}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$, où $J = \{n=sq_k, s=1,\dots a_k \ ; \ k=1,2,\dots,\}$.

<u>Preuve</u> : Dans ce qui suit, il est commode de supposer les $b_i \geq 0$, les calculs n'opérant que sur les valeurs absolues. Remarquons que, si $\beta = \beta_1 + \beta_2$, on a : $((n\beta)) \leq ((n\beta_1)) + ((n\beta_2))$; d'où il résulte :

$$((n\beta)) \leq 2 \operatorname{Sup} \left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i \right) ((n\alpha)) \ , \ n \sum_{i=k}^{\infty} b_i ((q_i\alpha)) \right).$$

Notons $l(k)$ le plus grand indice $i \leq k - 1$ tel que $b_i \neq 0$, et $m(k)$ le plus petit indice $i \geq k$, tel que $b_i \neq 0$.

Soit j un indice tel que $b_j \neq 0$. La condition de la proposition vérifiée par β implique qu'on a : $\sum_1^\infty b_i/a_i = c_1 < \infty$ d'où

$$\sum_{i=1}^{j} b_i q_i \leq q_j(b_j + b_{j-1}/a_{j-1} + b_{j-2}/a_{j-2} + \dots + b_1/a_1)$$
$$\leq q_j(b_j+c_1) \ .$$

Comme $b_j \geq 1$, on a donc : $\sum_1^j b_i q_i \leq c b_j q_j$, où c est une constante indépendante de j .

De même, si l'on considère la somme $\sum_{i=j}^{\infty} b_i((q_i\alpha))$, avec $b_j \neq 0$, on a les majorations :

$$\sum_{i=j}^{\infty} b_i((q_i\alpha)) \leq b_j/q_{j+1} + b_{j+1}/q_{j+2} + \dots \leq$$
$$\leq \frac{1}{q_{j+1}} \left[b_j + b_{j+1}/a_{j+1} + b_{j+2}/a_{j+2} + \dots \right] \leq c\, b_j/q_{j+1} \ .$$

Ces inégalités, compte-tenu de l'inégalité obtenue plus haut, permettent d'écrire :

$((n\beta)) \leq C \sup (b_{l(k)}\, q_{l(k)}\, ((n\alpha))\ ,\ b_{m(k)} \frac{1}{q_{m(k)+1}}\, n)$, pour tout entier k .

De plus, il est clair que l'on peut remplacer dans la majoration l'un ou l'autre des termes de la parenthèse par 1, ce que nous ferons à plusieurs reprises.

Ces remarques montrent que, pour prouver la proposition, il suffit d'établir les convergences suivantes :

$$(1) \quad = \quad : \sum_k \sum_{\substack{n\notin J,\, q_k\leq n<q_{k+1} \\ n:((n\alpha)) < \frac{1}{q_{l(k)}}}} b^2_{l(k)}\, q^2_{l(k)} \frac{1}{n^2} < \infty \ ;$$

$$(2) \quad = \quad : \sum_k \sum_{\substack{n\notin J,\, q_k\leq n<q_{k+1} \\ n:((n\alpha)) \geq \frac{1}{q_{l(k)}}}} b^2_{l(k)} \frac{1}{n^2((n\alpha))^2} < \infty \quad ,$$

$$(3) \quad = \quad : \sum_k \sum_{n\notin J\cup J',\, q_k\leq n<q_{k+1}} b^2_{m(k)} \frac{1}{q^2_{m(k)+1}} \frac{1}{((n\alpha))^2} < \infty \quad ,$$

où $J' = \bigcup_{k=1}^{\infty} ([q_k, q_{k+1}[\cap \{n : ((n\alpha)) < \frac{1}{4\, q_k}\})$;

$$(4) \quad = \quad : \sum_{n\in J'} \frac{((n\beta))^2}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$$

On a, d'après le lemme 3 :

$$(1) \quad \leq \quad C \sum_k b^2_{l(k)}\, q^2_{l(k)} \frac{1}{q_k\, q_{l(k)}} \quad ,$$

$$(2) \quad \leq \quad C \sum_k b^2_{l(k)}\, q_{l(k)}/q_k \quad ,$$

et d'après le lemme 4 :

$$(3) \quad \leq \quad C \sum_k b^2_{m(k)} \frac{1}{q^2_{m(k)+1}}\, 4\, q_k(q_{k+1} + q_k)$$

$$\leq \quad C \sum_k b^2_{m(k)} \frac{q_k}{q_{m(k)+1}}$$

La convergence de chacune des trois sommes résulte de lhypothèse :

$$\sum_1^\infty b_k^2 / a_k < \infty$$

Il reste à montrer la convergence de (4) . Il suffit pour cela de prouver :

$$(5) \quad = \quad : \sum_k \sum_{n\varepsilon J', q_k \leq n < q_{k+1}} b^2_{1(k+1)} \; q^2_{1(k+1)} \; \frac{1}{n^2} \; < \; \infty \; ,$$

$$\text{et } (6) = \quad : \sum_k \sum_{n\varepsilon J', q_k \leq n < q_{k+1}} b^2_{m(k+1)} \; \frac{1}{q^2_{m(k+1)+1}} \; \frac{1}{((n\alpha))^2} \; < \; \infty$$

D'après les lemmes 5 et 6, on a :

$$(5) \quad \leq \quad \sum_k b^2_{1(k+1)} \; q^2_{1(k+1)} \; \frac{4a_k}{q^2_{k+1}}$$

$$\leq \quad C \sum_k b^2_{1(k+1)} \; q^2_{1(k+1)} \; / \; q_{1(k+1)+1}$$

Pour majorer (6), on observe qu'il y a au plus deux éléments $((n\alpha))$pour $q_k \leq n < q_{k+1}$ dans un intervalle de la forme $[\frac{1}{q_{k+1}}, \frac{1+1}{q_{k+1}}[$, où 1 est un entier . On peut donc écrire :

$$(6) \quad \leq \quad C \sum_k b^2_{m(k+1)} \; \frac{1}{q^2_{m(k+1)+1}} \; q^2_{k+1} \; \left(\sum_{1=1}^\infty \frac{1}{1^2} \right)$$

$$\leq \quad C \sum_k b^2_{m(k+1)} \; {}^{q_{k+1}}/q_{m(k+1)+1} \; - \; C \;_k \; b^2_{m(k+1)} \; \frac{q^2_{m(k+1)}}{q^2_{m(k+1)+1}}$$

La convergence de (5) et (6) résulte alors de l'hypothèse.

Démonstration du Théorème.

D'après la proposition, il nous suffit de prouver la convergence :

$$\sum_{n\varepsilon J} \frac{((n\beta))^4}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$$

soit $$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{a_k} \frac{((sq_k\beta))^4}{s^2 q_k^2((sq_k\alpha))^2} < \infty$$

En utilisant le même type de majoration que dans la proposition, on se ramène à la convergence de :

$$(7) = : \sum_k b^2_{1(k)} \; q^2_{1(k)} \; \frac{1}{q_k^2} \; \left(\sum_{s=1}^{a_k} \frac{1}{s^2}\right) \quad ,$$

et de $$(8) = : \sum_k b^4_{m(k)} \; \frac{1}{q^4_{m(k)+1}} \; \left(\sum_{s=1}^{a_k} \frac{s^2 q_k^2}{s^2} \; q^2_{k+1}\right) \quad .$$

On a :

$$(7) \leq C \sum_k b^2_{1(k)} \; q^2_{1(k)}/q_k^2 \leq C \sum_k b^2_{1(k)} \; q_{1(k)}/q_k \quad ,$$

$$\text{et } (8) \leq C \sum_k b^4_{m(k)} \; \frac{a_k \, q_k^2 \, q^2_{k+1}}{q^4_{m(k)+1}} \leq C \sum_k b^4_{m(k)} \; {}^{q_k}/q_{m(k)+1} \quad :$$

La convergence de (7) et (8) résulte alors de l'hypothèse $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^4/a_j < \infty$.

Remarques: 1) Par des majorations analogues, on obtient facilement que la convergence de $\sum_{n\neq 0} ((n\beta))^4/_{n^2((n\alpha))^2}$ résulte de l'une des hypothèses suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{2+\varepsilon}/a_k^{\varepsilon} < \infty \quad \text{pour un } \varepsilon \text{ tel que } 0 < \varepsilon < 1 \;;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^3 \log a_k}{a_k} < \infty \quad ;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{3+\varepsilon}/a_k < \infty \quad , \quad \text{pour un } \varepsilon > 0 \;.$$

De plus, la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{2+\varepsilon}/a_k^{\varepsilon}$, pour un ε , $0 < \varepsilon < 1$ implique la convergence de $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^{2+\varepsilon}}{n^2((n\alpha))^2}$. Il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout α de type non constant, une infinité de nombres β tels que la série $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^{2+\varepsilon}}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$ converge .

2) Le cas $\varepsilon = 0$ est exceptionnel de ce point de vue . En effet, soit β tel que $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^{2}}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$. Montrons , suivant la méthode simple donnée dans [4] par Petersen, qu'on a nécessairement $\beta = p\alpha$, pour un entier p .

Considérons la fonction $h = 1_{[0,\beta[} - \beta$. Ses coefficients de Fourier sont $\frac{1}{2\pi i n}(e^{2\pi i n\beta}-1)$. L'existence d'une solution $\psi \in L^2$ de l'équation fonctionnelle $T_\alpha\psi - \psi = h$ résulte immédiatement de la convergence de la série $\sum_{n\neq 0} \frac{|e^{2\pi i n\beta}-1|^2}{n^2|e^{2\pi i n\alpha}-1|^2}$, soit encore de la convergence de $\sum_{n\neq 0} \frac{((n\beta))^{2}}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$. On est donc dans le cas de l'existence d'une solution mesurable ψ de l'équation $T_\alpha\psi - \psi = h$. Posons $\phi = \exp(2\pi i\psi)$. On a $\exp(2\pi i h) = e^{-2\pi i\beta}$, d'où $T_\alpha\phi = e^{-2\pi i\beta}\phi$. Ainsi $e^{2\pi i\beta}$ est une valeur propre de la rotation d'angle α et donc $\beta = p\alpha$ pour un entier p .

Nous allons appliquer des raisonnements analogues à d'autres équations fonctionnelles.

3 - Equations fonctionnelles

Soient γ_1 et γ_2 deux nombres réels. Considérons la différence entre la fonction caractéristique de l'intervalle $1_{[0,\gamma_1[}$ et sa translatée par γ_2 sur le cercle , soit
$h = 1_{[0,\gamma_1[} - 1_{[\gamma_2,\gamma_1+\gamma_2[}$.

Les coefficients de Fourier de h sont donnés par
$\hat{h}(n) = \frac{1}{2\pi in}(e^{2\pi in\gamma_1}-1)(e^{2\pi n\gamma_2}-1)$. Il est facile d'en déduire que l'équation fonctionnelle

$$T_\alpha \psi - \psi = h \quad (**)$$

possède une solution $\psi \in L^2$, si et seulement si la série
$\sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{((n\gamma_1))^2((n\gamma_2))^2}{n^2((n\alpha))^2}$ converge. D'après le théorème, cette série converge si les nombres γ_1 et γ_2 sont de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i \alpha$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^4/a_i < \infty$ (ou sous les conditions de la remarque 2). Si α est de type non constant, il existe donc une infinité non dénombrable de valeurs de γ_1 et de valeurs de γ_2 telles que l'équation $(**)$ ait une solution $\psi \in L^2(X)$.

Ceci répond, par la négative, à une question de [2] : l'existence d'une solution de $(**)$ dans L^2 n'implique pas que γ_1 ou γ_2 est de la forme $p\alpha$, avec p entier (cf. remarque 2) Par contre, on sait, d'après [5] , que l'existence d'une solution dans L^∞ de $(**)$ implique que γ_1 ou γ_2 est un multiple entier de α.

L'équation (**) peut être utilisée pour résoudre l'équation multiplicative $T_\alpha \phi = \phi f$ (*) ,

avec $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x < 2t \\ -1 , & 2t \leq x < 1 \end{cases}$ où t est un réel fixé $0 < t < 1$.

On a $f = \exp \pi i (1_{[0,t[} - 1_{[t,2t[})$. Il résulte donc du théorème que, si $t = \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i \alpha$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^4/a_i < \infty$, l'équation (*) a une solution mesurable non nulle. On retrouve ainsi, partiellement (par exemple si les b_i sont bornés), le résultat de W. Veech [1] , qui établit l'existence d'une solution mesurable non nulle ϕ pour l'équation (*), sous la condition $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|/a_i < \infty$

On peut demander si l'existence d'une solution mesurable de l'équation additive (**) résulte de la condition $\sum_{i=1}^{\infty} b_i/a_i < \infty$. Une réponse positive montrerait que la solution de l'équation multiplicative est l'exponentielle d'une solution de l'équation additive, sous l'hypothèse utilisée dans [1].

Remarque : Soit g définie par

$g(x) = 1_{[0,s[} - 1_{[s,1[} + 1_{[0,t[}$, avec $t = 1 - 2s \pmod 1$. On a encore : $\exp \pi i g = f$, et l'équation fonctionnelle $T_\alpha \psi - \psi = g$ a une solution ψ dans L^2 si et seulement si la série $\sum \frac{((ns))^4}{n^2 ((n\alpha))^2} < \infty$, compte-tenu de l'inégalité $|2e^{2\pi ins} + e^{-4\pi ins} - 3| \leq 16 \sin^2 \pi ns$.

Références :

[1] W. Veech : Strict ergodicity and the Kronecker-Weyl Theorem mod 2, Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 1-33 .

[2] K. Petersen : The spectrum and commutant of a certain weighted translation operator, Math. Scand. 37 (1975), 297-306 .

[3] J.W. Cassels : An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press (1957) .

[4] K. Petersen : On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory, Compositio Math. 26 (1973) 313-317 .

[5] L. Shapiro : Irregularities of distribution in dynamical systems Recent Advances in topological dynamics, Springer-Verlag, (1973), 249-252 .

CONZE Jean-Pierre
Département de Mathématiques
Laboratoire de Probabilités
Avenue du Général Leclerc
35042 Rennes
France