J. B GRAVERAUX

J. JACOB

Processus continus invariants par changement de temps

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 1
« Séminaire de probabilités I », , p. 94-102
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___1_94_0>

PROCESSUS CONTINUS INVARIANTS PAR CHANGEMENT DE TEMPS

Rapport N° 84

par

J.B. GRAVEREAUX et J. JACOD

0 - INTRODUCTION

On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues sur $[0,\zeta[$, où $\zeta = \inf(t: X_t = \Delta)$, Δ étant un point absorbant, et tel que les trajectoires ne soient constantes sur aucun intervalle $[t,\zeta[$ de longueur non nulle: on cherche à définir ce qui, dans ce processus, reste invariant par changement de l'échelle des temps.

Pour cela on utilise des changements de temps $(A_t)_{t\geq 0}$ continus à droite, croissants au sens large. Pour que le processus transformé "passe par les mêmes points dans le même ordre", il faudra exiger la croissance stricte de $A_.(\omega)$ sur le complémentaire de l'ensemble des paliers semi-ouverts $[r,s[$ où la trajectoire $X_.(\omega)$ est constante.

Dans une première partie, purement déterministe, on définit les ω-changements de temps, et une relation d'équivalence sur l'espace canonique Ω des trajectoires: $\omega, \omega' \in \Omega$ sont équivalents s'il existe un ω-changement de temps faisant passer de ω à ω'. On définit également une notion de "temps invariant", et la tribu des invariants, tribu dont les atomes sont les classes d'équivalence. On montre aussi que, se donner une classe d'équivalence, revient à se donner la suite (X_{R_α}), où les R_α sont les instants de sortie d'une famille dénombrable de boules convenablement choisies.

Dans la seconde partie, on applique ces résultats à la construction d'une probabilité P sur la tribu des invariants, à partir de la distribution conjointe des (X_{R_α}) ; on termine en donnant une condition nécessaire et suffisante (malheureusement difficile à utiliser) sur les distributions fini-dimensionnelles des (X_{R_α}) pour qu'une telle construction soit possible.

La continuité imposée à X n'est pas essentielle, mais simplifie considérablement certains énoncés. Nous espérons aborder le cas continu à droite ailleurs. Nous espérons aussi développer dans un article ultérieur des exemples, et notamment étudier le problème de la construction des classes de processus de Markov invariantes par changement de temps.

I - PARTIE DETERMINISTE

I-1. L'espace canonique. Soit E_0 un espace polonais muni de la distance d. On considère un point Δ extérieur à E_0, et on pose $E = E_0 \cup \{\Delta\}$ et $d(x,\Delta) = \infty$ pour tout $x \in E_0$.

Ω désigne l'ensemble des applications ω de $[0,\infty]$ dans E telles que: $\omega(t) = \Delta$ pour $t \geq \zeta(\omega) = \inf(t: \omega(t) = \Delta)$ (donc $\omega(\infty) = \Delta$), $\omega(.)$ est continue sur $[0,\zeta(\omega)[$ et non constante sur $[t,\zeta(\omega)[$ quel que soit $t < \zeta(\omega)$.

Un "palier" de la trajectoire ω est un intervalle (non réduit à un point) de longueur maximale sur lequel ω est constante. Au point ζ, ω peut ne pas avoir de limite à gauche, mais en aucun cas ζ n'est l'extrémité droite d'un palier.

On note $\overline{m}(\omega)$ le fermé de $[0,\infty]$ formé des points 0 et ∞, et du complémentaire de l'ensemble des paliers ouverts de la trajectoire ω.

On note $m(\omega)$ (resp. $n(\omega)$) le fermé droit (resp. fermé gauche) minimal de $[0,\infty]$ dont la fermeture est $\overline{m}(\omega)$: $m(\omega)$ (resp. $n(\omega)$) est aussi l'ensemble formé du point ∞ (resp. 0) et du complémentaire de l'ensemble des paliers semi-ouverts de la forme $[r,s[$ (resp. $]r,s]$).

Pour $r \in [0,\infty]$ on pose $r_g = \sup(t<r:\ t\in m(\omega))$ et $r_d = \inf(t>r:\ t\in m(\omega))$, avec les conventions $\sup(\emptyset)=0$ et $\inf(\emptyset)=\infty$. S'il y a lieu, on précisera $r(\omega,g)$ ou $r(\omega,d)$. Si $r \notin m(\omega)$ (resp. $n(\omega)$), l'intervalle contigu à $m(\omega)$ (resp. $n(\omega)$) contenant r est $[r_g,r_d[$ (resp. $]r_g,r_d]$).

On a $\zeta(\omega) \in n(\omega)$, et $\zeta(\omega) \in m(\omega)$ si et seulement si $\zeta(\omega) = \infty$. On a aussi $\zeta_g(\omega) = \zeta(\omega)$.

On note enfin $\overline{M}$, M, N les parties de $\Omega \times [0,\infty]$ de coupes respectives $\overline{m}(\omega)$, $m(\omega)$, $n(\omega)$. Si T est une application de Ω dans $[0,\infty]$ on note $[T]$ son graphe, et on pose $T_d(\omega) = T(\omega)(\omega,d)$ et $T_g(\omega) = T(\omega)(\omega,g)$.

I-2. Les changements de temps. Soit $\omega \in \Omega$.

DEFINITION: Un ω-changement de temps est une application $a : m(\omega) \longrightarrow [0,\infty]$ <u>qui est continue à droite et strictement croissante, et vérifie</u> $a(\infty) = \infty$.

(le seul intérêt de l'hypothèse $a(\infty) = \infty$ est de simplifier certains énoncés).

On note $CT(\omega)$ l'ensemble des ω-changements de temps. On définit $a^- : \bar{m}(\omega) \longrightarrow [0,\infty]$ par

$$a^-(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ a(r) & \text{si } r_g < r \\ \sup(a(s) : s \in m(\omega), s < r) & \text{sinon;} \end{cases}$$

a^- est croissante au sens large et continue à gauche; ce n'est pas un prolongement de a, car $a(r)$ et $a^-(r)$ peuvent différer si $r \in m(\omega) \cap n(\omega)$.

Enfin, on définit la <u>trajectoire changée de temps</u> ω^a en posant pour tout $t \in [0,\infty]$:

$$\rho_t = \inf(s \in m(\omega) : a(s) > t)$$
$$\omega^a(t) = \omega(\rho_t),$$

avec la convention: $\inf(\emptyset) = \infty$; il faudra montrer bien-sûr que $\omega^a \in \Omega$! Remarquons que $\rho_.$ est croissante et continue à droite, et que, $m(\omega)$ étant un ferme droit, on a $\rho_t \in m(\omega)$ pour tout t. On a aussi $\rho_t = \inf(s \in m(\omega) : a(s) \geq t)$ car a est strictement croissant sur $m(\omega)$.

Si besoin est, on précisera: $\rho_t(\omega, a)$.

Les propriétés suivantes, faciles à montrer, sont laissées au lecteur:

$$(1) \qquad \rho_t = r \iff a^-(r_g) \leq t \leq a(r) \quad \text{si } r \in m(\omega).$$

$$(2) \begin{cases} a^-((\rho_t)_g) \leq t \leq a(\rho_t) \\ \inf(t : \rho_t \geq s) = a^-(s_g) \\ \inf(t : \rho_t > s) = \begin{cases} a^-(s_g) & \text{si } s < s_d \\ a(s) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \rho_{a^-(r)} = r_d & \text{si } r \in \bar{m}(\omega) \\ \rho_{a(r)} = r & \text{si } r \in m(\omega) \end{cases}$$

Finalement, en utilisant la continuité de ω, on obtient:

$$(4) \begin{cases} \omega^a(a^-(r)) = \omega(r) & \text{si } r \in \bar{m}(\omega) \\ \omega^a(a(r)) = \omega(r) & \text{si } r \in m(\omega). \end{cases}$$

THEOREME 1 : <u>Si</u> $\omega \in \Omega$ <u>et</u> $a \in CT(\omega)$, <u>on a</u> $\omega^a \in \Omega$ <u>et</u> $\zeta(\omega^a) = a^-(\zeta(\omega))$.

<u>Démonstration</u>. Si $t < a^-(\zeta)$, on a $\rho_t < \zeta$ d'après (3), donc $\omega^a(t) \neq \Delta$. Si $t \geq a^-(\zeta)$ on a $\rho_t = \infty$, toujours d'après (3), donc $\omega^a(t) = \Delta$.

D'autre part, $\rho_.$ étant continue à droite et ω étant continue sur $[0,\zeta[$, ω^a est continue à droite sur $[0,a^-(\zeta)[$. De plus, si t_n croit vers t et si $t < a^-(\zeta)$, ρ_{t_n} croit vers un limite s telle que $s \leq \rho_t < \zeta$. (2) entraine que $a^-(s_g) \leq t$ et que $t_n \leq a(\rho_{t_n})$ pour tout n, donc on obtient $t \leq \lim_{(n)}\uparrow a(\rho_{t_n}) \leq a(s_d)$. Or $a^-(s_g) \leq t \leq a(s_d)$, par suite $\rho_t = s_d$ d'après (1). Donc $\omega^a(t_n) = \omega(\rho_{t_n})$ tend vers $\omega(s) = \omega(s_d) = \omega^a(t)$, d'où la continuité de ω^a sur $[0,a^-(\zeta)[$.

Il reste à montrer que $a^-(\zeta)$ n'est pas l'extrémité droite d'un palier de ω^a. Comme $\zeta_g = \zeta$ il existe une suite (s_n) d'éléments de $m(\omega)$ croissant strictement vers ζ, avec $(\omega(s_n))$ non constant. En prenant $t_n = a(s_n)$, on voit que (t_n) croit strictement vers $a^-(\zeta)$ et que $\omega^a(t_n) = \omega(s_n)$ n'est pas constant, d'où le résultat.■

PROPOSITION 1 : a <u>est une bijection de</u> $m(\omega)$ <u>sur</u> $m(\omega^a)$.

<u>Démonstration</u>. D'abord, a est injective sur $m(\omega)$ car elle est strictement croissante. Soit $t \in m(\omega)$. Si $t = \infty$ on a $a(t) = \infty \in m(\omega^a)$. Si $t < \infty$ on a $t_d = t$, donc il existe une suite (t_n) d'éléments de $m(\omega)$ qui décroit strictement vers t avec $\omega(t_n) \neq \omega(t)$ pour tout n. Si $s_n = a(t_n)$ et $s = a(t)$, s_n décroit strictement vers s et $\omega^a(s_n) = \omega(t_n) \neq \omega(t) = \omega^a(s)$: donc $a(t) \in m(\omega^a)$.

Réciproquement, soit $s \in m(\omega^a)$. Si $s = \infty$ on a $s = a(\infty)$. Si $s < \infty$ il existe une suite (s_n) d'éléments de $m(\omega^a)$ décroissant strictement vers s avec $\omega^a(s_n) \neq \omega^a(s)$. ρ_{s_n} décroit (au sens large) vers ρ_s et $\rho_s < \rho_{s_n}$; donc $s = a(\rho_s)$ d'après (2) et s est l'image d'un élément de $m(\omega)$ par a.■

<u>I-3. Les classes d'équivalence</u>. Sur Ω on définit la relation R: $\omega R \omega' \iff (\exists a \in CT(\omega)$ avec $\omega' = \omega^a)$.

PROPOSITION 2 : R <u>est une relation d'équivalence</u>.

<u>Démonstration</u>. R est réflexive, car si on prend $a(r) = r$ pour tout $r \in m(\omega)$ on a $a \in CT(\omega)$ et $\rho_t = t_d$, donc $\omega^a(t) = \omega(t_d) = \omega(t)$.

R est transitive: en effet soit $\omega \in \Omega$, $a \in CT(\omega)$, $\omega' = \omega^a$, $a' \in CT(\omega')$. On pose $a'' = a' \circ a$; étant donné que $m(\omega')$ est l'image de $m(\omega)$ par a, et que a (resp. a') est continu à droite et strictement croissant sur $m(\omega)$ (resp. $m(\omega')$), il est immédiat que $a'' \in CT(\omega)$. Enfin si $r \in m(\omega)$, on a $\omega^{a''}(a''(r)) = \omega(r) = \omega'(a(r)) = (\omega')^{a'}(a''(r))$ d'après (4): donc $\omega^{a''} \circ a'' = (\omega')^{a'} \circ a''$ sur $m(\omega)$; mais $m(\omega^{a''})$ et $m((\omega')^{a'})$ sont l'image de $m(\omega)$ par a'', d'où l'on déduit que $\omega^{a''} = (\omega')^{a'}$.

R est symétrique: en effet si $\omega \in \Omega$, $a \in CT(\omega)$ et $\omega' = \omega^a$, on note a' l'application inverse de a, qui applique $m(\omega')$ sur $m(\omega)$. Il est clair que $a' \in CT(\omega')$, et $a' \circ a(r) = r$. Donc si $a'' = a' \circ a$, on a $a'' \in CT(\omega)$ et $\omega^{a''} = \omega$ d'après le début de la démonstration, ce qui entraine que $\omega = \omega'^{a'}$. ∎

I-4 Les éléments invariants. On commence par une liste de définitions, dans laquelle F désigne un ensemble quelconque. Comme un changement de temps ne conserve pas en général le point à l'infini, nous sommes conduits à considérer des processus définis sur l'intervalle $[0,\infty]$.

DEFINITION : (i) Une application $Z : \Omega \longrightarrow F$ est dite "invariante" (a-i) si $Z(\omega) = Z(\omega')$ pour tous ω, ω' tels que $\omega R \omega'$.

(ii) Un processus $Y : \Omega\times[0,\infty] \longrightarrow F$ est dit invariant (p-i) si: $\forall \omega\in\Omega$, $\forall a \in CT(\omega)$, $\forall t\in[0,\infty]$, $Y(\omega^a,t) = Y(\omega,\rho_t)$.

(iii) Une partie A de $\Omega\times[0,\infty]$ est un ensemble invariant (e-i) si l'indicatrice I_A est un p-i.

(iv) Une application $T : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ est un temps invariant (t-i) si c'est le début d'un ensemble invariant contenant $[T]$ et $[\zeta,\infty]$.

Le processus canonique $X(\omega,t) = \omega(t)$ est donc un p-i, et de même tout processus constant. $[\zeta,\infty]$ est un e-i. 0 et ζ sont des t-i. Si T est le début d'un e-i contenant $[T]$, alors $T\wedge\zeta$ est un t-i.

PROPOSITION 3 : Soit Y un p-i et $]s,t[$ un intervalle contigu à $\bar{m}(\omega)$. Alors $Y(.,\omega)$ est constant sur $[s,t]$.

Démonstration. On a $t \in m(\omega)$. On peut trouver un $a\in CT(\omega)$ tel que $a^-(s) = a(t)$, et on note u cette valeur. On a $u \in m(\omega^a)$ et $u(\omega^a,g) = u$ d'après (1) et la proposition 1. Soit $a' \in CT(\omega^a)$ tel que $(\omega^a)^{a'} = \omega$ et $\rho' = \rho(\omega^a,a')$. On a alors $a'^-(u) = s < t = a'(u)$ par la proposition 1, d'où $\rho'_r = u$ pour tout $r\in[s,t]$ d'après (1). Y étant un p-i, on a $Y(\omega,r) = Y(\omega^a,\rho'_r) = Y(\omega^a,u)$ pour tout $r\in[s,t]$. ∎

PROPOSITION 4 : Soit une application $T : \Omega\rightarrow[0,\infty]$. T est un t-i si et seulement si $[T]\subset N$ et si $T(\omega^a) = a^-(T(\omega))$ pour tous $\omega\in\Omega$, $a\in CT(\omega)$.

Démonstration. (i) Soit T le début d'un e-i A contenant $[T]$ et $[\zeta,\infty]$. D'après la proposition 3, $I_A(\omega,.)$ est constante sur tout $[s,t]$ tel que $]s,t[\cap\bar{m}(\omega) = \emptyset$; comme $T(\omega) = \inf(t: I_A(\omega,t) = 1)$ et $(\omega,T(\omega))\in A$ on a donc $T(\omega)\notin]s,t]$ si $]s,t[\cap\bar{m}(\omega) = \emptyset$: par suite $[T]\subset N$.

D'autre part soit $a\in CT(\omega)$ et $\rho = \rho(\omega,a)$. Si $t< a^-(T(\omega))$ on a $\rho_t < T(\omega)$ d'après (1), donc $I_A(\omega^a,t) = I_A(\omega,\rho_t) = 0$ et $T(\omega^a) \geq a^-(T(\omega))$. Si $t = a^-(T(\omega))$ on aura $\rho_t = (T(\omega))_d$, car $T(\omega)\in n(\omega)$, donc $I_A(\omega^a,t) = I_A(\omega,\rho_t) = I_A(\omega,(T(\omega))_d) = 1$; par suite $T(\omega^a) \leq a^-(T(\omega))$, et finalement $T(\omega^a) = a^-(T(\omega))$.

(ii) Supposons inversement que T vérifie $[T]\subset N$ et $T(\omega^a) = a^-(T(\omega))$. Soit $A = [T,\infty]$: on a $[T]\subset A$ et $[\zeta,\infty]\subset A$ (car $T\leq\zeta$), et T est le début de A. Il reste à voir que A est un e-i: mais on a, comme précédemment: $t < a^-(T(\omega)) = T(\omega^a) \Longleftrightarrow \rho_t < T(\omega)$, donc $I_A(\omega^a,t) = I_{\{T(\omega^a)\leq t\}} = I_{\{T(\omega)\leq \rho_t\}} = I_A(\omega,\rho_t)$. ∎

Si T est une application: $\Omega \rightarrow [0,\infty]$, et si $A\subset\Omega$, on pose:

$$T_A = \begin{cases} T & \text{sur } A \\ \zeta & \text{sur } A^c \end{cases}, \qquad \check{T} = \begin{cases} T & \text{sur } \{T\in N\} \\ T_g & \text{sur } \{T\notin N\} \end{cases}$$

$$\hat{T} = \begin{cases} T_d & \text{sur } \{T<T_d\wedge\zeta\in N\} \\ \zeta & \text{sur } \{T<T_d\wedge\zeta\in N\}^c . \end{cases}$$

Voici une série de propriétés dont la démonstration est laissée au lecteur.

PROPOSITION 5 : Soit S, T, T_n des t-i; soit Y (resp. Z) un p-i (resp. a-i) à valeurs dans F (resp. G) et f une application: $F\times G \longrightarrow H$.

(a) $S\wedge T$ et $S\vee T$ sont des t-i. Si $T_n\uparrow T'$ (resp. $T_n\downarrow T'$), alors T' (resp. $\check{T}'$) est un t-i. $\hat{T}$ est un t-i.

(b) $I_{\{S=T\}}$, $I_{\{S<T\}}$, $I_{\{T_g<T\}}$ sont des a-i.

(c) $[S,T]$, $[S,T[$, $]S,T]$, $]S,\hat{T}[$ sont des e-i.

(d) Si $A\subset\Omega$, T_A est un t-i si et seulement si $I_{A\cap\{T<\zeta\}}$ est une a-i.

(e) $f(Y,Z)$ est un p-i.

(f) $Y(.,T(.))$ est une a-i.

(g) Si A est un e-i, et $R = \zeta\wedge\inf(t\in A)$, alors R est un t-i.

Toutes ces propriétés sont bien-sûr à comparer aux propriétés des temps d'arrêt et processus usuels.

PROPOSITION 6 : Soit T un t-i et Y un processus à valeurs dans un espace métrique F muni de la distance d, et continu sur $[0,\zeta[$. Alors $S = \zeta\wedge\inf(t>T : d(Y_T,Y_t)\geq c)$ est un t-i.

Démonstration. Soit $A = [T,\infty]\cap([\zeta,\infty]\cup\{d(Y_T,Y)\geq c\})$; c'est un e-i contenant $[S]$ et $[\zeta,\infty]$, de début S (appliquer (c),(e),(f) de la proposition 5). ∎

I-5. Une représentation canonique. On va maintenant construire, pour chaque classe d'équivalence, un représentant "canonique".

Commençons par une série de notations. I désignera l'ensemble des "mots": un mot est défini comme une suite indexée par $\mathbb{N}^*$ d'éléments de $\mathbb{N}$, tous nuls à partir d'un certain rang. La suite identiquement nulle est notée $\underline{0}$. Pour un mot α, $\alpha(p)$ est sa p-ième coordonnée (ou lettre) et sa longueur est $|\alpha| = \sup(p : \alpha(p) \neq 0)$, donc $|\underline{0}| = 0$. Soit $I_p = \{\alpha \in I : |\alpha| \leq p\}$. On considère un point extérieur à I, qu'on note $\underline{\infty}$, et on pose $|\underline{\infty}| = 0$, $\bar{I} = I \bigcup \{\underline{\infty}\}$, $\bar{I}_p = I_p \bigcup \{\underline{\infty}\}$.

On définit sur $\bar{I}$ une relation d'ordre total $\leq$ telle que $\alpha < \underline{\infty}$ pour tout $\alpha \in I$, et dont la restriction à I est l'ordre lexicographique.

On aura encore besoin des notations suivantes: si $\alpha \in I$, si $n \in \mathbb{N}$ et si $p \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\alpha \underset{p}{\oplus} n$ le mot de coordonnées

$$\alpha \underset{p}{\oplus} n(q) = \begin{cases} \alpha(q) & \text{si } q < p \\ \alpha(q) + n & \text{si } q = p \\ 0 & \text{si } q > p. \end{cases}$$

Pour $p = 0$ on convient que $\alpha \underset{0}{\oplus} n = \underline{\infty}$. A un mot non nul on associe le mot $a(\alpha)$ de coordonnées

$$a(\alpha)(q) = \begin{cases} \alpha(q) & \text{si } q \neq |\alpha| \\ \alpha(q) - 1 & \text{si } q = |\alpha| \end{cases}$$

et on pose $a(\underline{0}) = \underline{0}$.

Remarquons qu'on a: $\alpha \underset{p}{\oplus} 1 = \inf(\beta \in \bar{I}_p : \alpha < \beta)$, et $a(\alpha) = \sup(\beta \in I_{|\alpha|} : \beta < \alpha)$ si $\alpha \neq \underline{0}$.

LEMME 1 : <u>Il existe une bijection strictement croissante</u> u <u>de</u> $\bar{I}$ <u>dans un sous-ensemble de</u> $[0,1]$, <u>telle que</u> $u(\underline{0}) = 0$, <u>que</u> $u(\underline{\infty}) = 1$, <u>et que</u> $u(\bar{I})$ <u>soit partout dense dans</u> $[0,1]$.

<u>Démonstration</u>. On considère une fonction h de $[0,\infty[$ dans $[0,1[$ qui croît strictement et continûment de 0 à 1 quand la variable croît de 0 à ∞ (par exemple $h(t) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctg}\, t$). On pose $u(\underline{0}) = 0$, $u(\underline{\infty}) = 1$, et pour $n \geq 1$, $p \geq 1$:

$$u(\alpha \underset{p}{\oplus} n) = u(\alpha) + [u(\alpha \underset{p-1}{\oplus} 1) - u(\alpha)]\, h(n),$$

formule qui permet de définir, par récurrence sur $|\alpha|$, la fonction u sur $\bar{I}$ tout entier. Cette formule montre aussi que u est strictement croissante. Enfin, le fait que l'image $u(\bar{I})$ est partout dense dans $[0,1]$ est trivial.∎

On fixera dorénavant une telle bijection u. Définissons maintenant, pour chaque $\alpha \in \bar{I}$, des applications R_α et S_α de Ω dans $[0,\infty]$ par

$$(5)\begin{cases} S_{\underline{0}}(\omega) = R_{\underline{0}}(\omega) = 0\,; \qquad S_{\underline{\infty}}(\omega) = R_{\underline{\infty}}(\omega) = \zeta(\omega)\,; \\ \text{si } p \geq 1,\ \alpha \in I_{p-1},\ n \geq 0,\ \gamma = \alpha \underset{p}{\oplus} n : \\ S_{\alpha \underset{p}{\oplus}(n+1)}(\omega) = \\ \zeta(\omega) \bigwedge \inf(t > R_\gamma(\omega) : d(\omega(R_\gamma(\omega)), \omega(t)) \geq 2^{-p}), \\ \text{où} \qquad R_\gamma(\omega) = \begin{cases} S_\gamma(\omega) & \text{si } S_\gamma(\omega) < \bigwedge_{q<p} R_{\alpha \underset{q}{\oplus} 1}(\omega) \\ \zeta(\omega) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

(on a ainsi une formule de récurrence sur $|\alpha|$).

D'après les propositions 5 et 6, les R_α et S_α sont des t-i. On pose encore:

$$I(\omega) = \{\alpha \in I : R_\alpha(\omega) < \zeta(\omega)\}$$
$$g(\omega) = \{R_\alpha(\omega) : \alpha \in \bar{I}\}.$$

On a:

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{g}(\omega) = \bar{m}(\omega) \bigcap [0, \zeta(\omega)] \\ \alpha \in I(\omega),\ \alpha < \beta \Longleftrightarrow R_\alpha(\omega) < R_\beta(\omega). \end{cases}$$

LEMME 2 : (a) <u>Soit</u> $\alpha \in \bar{I} \setminus \{\underline{0}\}$. <u>Si</u> $\sup(u(\beta) : \beta < \alpha, \beta \in I(\omega))$ <u>égale</u> $u(\alpha)$, <u>alors</u> $\omega(\zeta-)$ <u>n'existe pas, et</u> $\zeta(\omega) = \sup(R_\beta(\omega) : \beta < \alpha, \beta \in I(\omega))$.

(b) <u>Si</u> $\alpha \in I(\omega)$, $u(\alpha) = \inf(u(\beta) : \beta > \alpha, \beta \in I(\alpha))$.

<u>Démonstration</u>. (a) Supposons l'hypothèse satisfaite. Il existe alors une suite (β_n) d'éléments de $I(\omega)$ telle que $u(\beta_n)$ croisse strictement vers $u(\alpha)$ quand $n \uparrow +\infty$. A partir d'un certain rang, on aura $u(a(\alpha)) < u(\beta_n) < u(\alpha)$, d'où nécessairement à partir d'un certain rang: $\beta_n(p) = \alpha(p)$ si $p < |\alpha|$, $\beta_n(p) = \alpha(p) - 1$ si $p = |\alpha|$, $\beta_n(p) = k_n$ si $p = |\alpha| + 1$, où $k_n \uparrow \infty$ quand $n \uparrow \infty$ (remarque: $\beta_n(p)$ est éventuellement non nul si $p \geq |\alpha| + 2$).

Par suite, si $\gamma_n = a(\alpha) \underset{q}{\oplus} 1 n$, avec $q = |\alpha| + 1$, et si $t_n = R_{\gamma_n}(\omega)$, (5) entraine que pour tout n on a $\gamma_n \in I(\omega)$ et $d(\omega(t_n), \omega(t_{n+1})) \geq 2^{-q}$; comme ω est continu sur $[0, \zeta(\omega)[$, il faut donc que $\lim_{(n)} \uparrow t_n = \zeta(\omega)$ et que $\omega(\zeta-)$ n'existe pas, d'où (a).

(b) Soit $s = R_\alpha(\omega)$, $t = (R_\alpha(\omega))_d$. Comme $\alpha \in I(\omega)$ et $\zeta_g = \zeta$, on a nécessairement $t < \zeta(\omega)$. Donc $\omega(s)$ est valeur d'adhérence de l'ensemble $\omega(]t, t+c])$ pour tout $c > 0$. Donc, pour p assez grand, $\alpha \underset{p}{\oplus} 1 \in I(\omega)$ et $\lim_{(p)} \downarrow u(\alpha \underset{p}{\oplus} 1) = u(\alpha)$ par construction, d'où le résultat.∎

DEFINITION: <u>On note</u> Ω_0 <u>l'ensemble des</u> $\omega \in \Omega$ <u>tels que</u> $\zeta(\omega) \leq 1$, <u>et</u> $R_\alpha(\omega) = u(\alpha)_g$ <u>pour tout</u> $\alpha \in I(\omega)$.

<u>Remarque</u>: si $\omega \in \Omega_0$ on a pour tout $\alpha \in I(\omega)$: $u(\alpha)_g \leq \sup(u(\beta) : \beta < \alpha, \beta \in I(\omega))$; or, d'après le lemme précédent, cette borne supérieure est strictement inférieure à $u(\alpha)$. On a donc $u(\alpha)_g < u(\alpha)$. Ceci étant encore vrai, évidemment, si $u(\alpha) > \zeta$, on a finalement $u(\alpha)_g < u(\alpha)$ pour tout $\alpha \in I$ tel que $u(\alpha) \neq \zeta$. On en déduit que le complémentaire de $\bar{m}(\omega)$ est partout dense.∎

Soit $\omega \in \Omega$. On définit une application a : $m(\omega) \longrightarrow [0,\infty]$ en posant:

$$(7)\quad a(t) = \begin{cases} u(\alpha) & \text{si } t = R_\alpha(\omega) < \zeta(\omega),\ R_\alpha(\omega) \in m(\omega), \\ \inf(a(s) : s > t, s \in g(\omega) \bigcap m(\omega)) & \text{si } t \in m(\omega) \setminus g(\omega) \\ +\infty & \text{si } t = \infty. \end{cases}$$

LEMME 3 : <u>On a</u> $a \in CT(\omega)$ <u>et</u> $\omega^a \in \Omega_0$.

<u>Démonstration</u>. Soit $t, t' \in m(\omega)$, $t < t'$. Il est évident que $a(t) \leq a(t')$. Supposons que $a(t) = a(t')$: d'après (7) il n'existe alors aucun α tel que $t < R_\alpha(\omega) \leq t'$, donc $t' = t_d$ d'après (6), contredisant ainsi le fait que $t = t_d$: donc a est

strictement croissante. Par ailleurs elle est continue à droite d'après le lemme 2-(b), donc $a \in CT(\omega)$.

Montrons enfin que $\omega^a \in \Omega_0$. D'abord $\zeta(\omega^a) = a^-(\zeta(\omega))$, qui est trivialement inférieur à 1. Comme chaque R_α est un t-i, on a $I(\omega^a) = I(\omega)$. On a $R_{\underline{0}}(\omega^a) = 0 = u(\underline{0})(\omega^a, g)$. Soit $\alpha \in I(\omega) \setminus \{\underline{0}\}$; si $t = \overline{R}_\alpha(\omega)$ on a $t_g = t$ (car $[R_\alpha] \subset N$) et $t < \zeta(\omega)$, donc le lemme 2 entraine que $a^-(t) < u(\alpha) \leq a(t)$; comme $R_\alpha(\omega^a) = a^-(t)$, la proposition 1 implique alors que $R_\alpha(\omega^a) = u(\alpha)(\omega^a, g)$. ■

LEMME 4 : <u>Soit</u> $\omega, \omega' \in \Omega_0$ <u>avec</u> $I(\omega) = I(\omega')$. <u>On a</u> $R_\alpha(\omega) = R_\alpha(\omega')$ <u>pour tout</u> $\alpha \in \overline{I}$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer le résultat pour $\alpha \in I(\omega) = I(\omega')$. Posons $t = u(\alpha)$, $s = t(\omega, g)$, $s' = t(\omega', g)$. On a $s < t$ et $s' < t$ car $\omega, \omega' \in \Omega_0$. Supposons que $s < s'$; comme $s' = s'(\omega', g)$ il existe $\gamma \in I(\omega')$ avec $\gamma < \alpha$ et $s < R_\gamma(\omega') < s'$ d'après (6); mais $\gamma \in I(\omega)$, donc comme $s < u(\gamma) < t$ il vient $R_\gamma(\omega) = u(\gamma)(\omega, g) = s$, ce qui contredit le fait que $s = R_\alpha(\omega)$ alors que $\gamma < \alpha$: donc $s' \leq s$, et on montre de même que $s \leq s'$, d'où $s = s'$. ■

THEOREME 2 : <u>Toute classe d'équivalence admet un représentant et un seul dans</u> Ω_0.

<u>Démonstration</u>. L'existence a été vue dans le lemme 3. Il reste à montrer que si $\omega, \omega' \in \Omega_0$ avec $\omega R \omega'$, on a $\omega = \omega'$. Comme chaque R_α est un t-i on a $I(\omega) = I(\omega')$, donc $g(\omega) = g(\omega')$ d'après le lemme 4. On a aussi $\omega(R_\alpha(\omega)) = \omega'(R_\alpha(\omega'))$ pour tout ω, et il en découle immédiatement que $\omega = \omega'$. ■

<u>I-6. Une autre caractérisation des classes d'équivalence</u>. On a vu que le point $\omega(R_\alpha(\omega))$ ne dépend que de la classe d'équivalence de ω. On peut se demander si la donnée de tous ces points ne suffit pas à déterminer cette classe, et on va voir que c'est en effet le cas.

Soit $V = E^I \times \{\Delta\}$. Si $v \in V$ on note $v = (v(\alpha))_{\alpha \in \overline{I}}$ ses coordonnées: on a $v(\underline{\infty}) = \Delta$.

Définissons maintenant l'application j : $\Omega \longrightarrow V$ par:

$$j(\omega)(\alpha) = \omega(R_\alpha(\omega)) \quad \text{si } \omega \in \overline{I}.$$

THEOREME 3 : <u>On a</u> $j(\omega) = j(\omega')$ <u>si et seulement si</u> $\omega R \omega'$.

<u>Démonstration</u>. D'après ce qu'on a vu précédemment, $\omega R \omega'$ entraine $j(\omega) = j(\omega')$. Réciproquement, si $j(\omega) = j(\omega')$, il suffit de montrer que $\omega = \omega'$ quand on suppose que $\omega, \omega' \in \Omega_0$: mais il suffit alors de recopier la preuve du théorème 2.

Nous allons maintenant déterminer l'image $j(\Omega)$ de Ω par l'application j. Si $v \in V$, on note $I(v)$ l'ensemble $\{\alpha : v(\alpha) \neq \Delta\}$.

DEFINITION : <u>Soit</u> V^o <u>l'ensemble des</u> $v \in V$ <u>tels que</u>:
(v-1) - <u>si</u> $\alpha \in I(v) \setminus \{\underline{0}\}$, <u>on a</u> $\beta = a(\alpha) \in I(v)$ <u>et</u> $d(v(\beta), v(\alpha)) = 2^{-|\alpha|}$;
(v-2) - <u>si</u> $\alpha \in I(v) \setminus \{\underline{0}\}$, <u>il existe</u> $n < \infty$ <u>tel que</u> $a(\alpha)\,\theta_{|\alpha|+1}\, n \notin I(v)$;
(v-3) - <u>si</u> $\alpha \in I(v)$, $\alpha < \beta$, $\beta \in I(v) \cup \{\underline{\infty}\}$, <u>il existe</u> $\gamma \in I(v)$ <u>avec</u> $\alpha < \gamma < \beta$.
(v-4) - <u>si</u> $\alpha \in I(v)$, $n \geq |\alpha|$, $\beta = \inf(\gamma > \alpha : \gamma \in I_n \cap I(v))$, <u>pour tout</u> $\gamma \in I(v)$ <u>avec</u> $\alpha \leq \gamma < \beta$ <u>on a</u> $\sup(d(v(\alpha), v(\delta)) : \delta \in I(v), \alpha \leq \delta \leq \gamma) < 2^{-n}$;
(v-5) - <u>si</u> $\alpha \in I(v)$, $n \geq |\alpha|$, $\beta = \inf(\gamma > \alpha : \gamma \in I_n \cap I(v))$, <u>et si</u> $\beta \in I(v)$, <u>on a</u> $d(v(\alpha), v(\beta)) \leq 2^{-n}$
(dans ces expressions, $\inf \emptyset = \underline{\infty}$).

PROPOSITION 7 : <u>On a</u> $j(\Omega) \subset V^o$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\omega \in \Omega$ et $v = j(\omega)$; on a $I(v) = I(\omega)$. (v-1) est immédiate à partir de (5) et du fait que ω est continue sur $[0, \zeta[$. (v-2) provient du fait que ω est limitée à gauche en $R_\alpha(\omega)$ si $\alpha \in I(v) \setminus \{\underline{0}\}$.

On démontre (v-3) par l'absurde: s'il n'existe pas de tel γ, alors nécessairement $(R_\beta(\omega))_g = R_\alpha(\omega) < R_\beta(\omega)$, ce qui est impossible car $R_\beta(\omega)$ est dans $n(\omega)$.

Montrons (v-4). D'après la définition même de β, on a $R_\beta(\omega) \leq S_{\alpha\,\theta_n 1}(\omega)$. D'autre part $R_\gamma(\omega) = \sup(R_\delta(\omega) : \delta \in I(\omega), \delta \leq \gamma) < R_\beta(\omega)$ d'après (5) pour tout γ tel que $\alpha \leq \gamma < \beta$ et $\gamma \in I(v)$. Donc $\sup(d(v(\alpha), \omega(s)) : R_\alpha(\omega) \leq s \leq R_\gamma(\omega)) < 2^{-n}$, d'où le résultat cherché en se restreignant aux $s = R_\delta(\omega)$.

Enfin, (v-5) suit immediatement de la continuité de ω et de l'inégalité $R_\beta(\omega) \leq S_{\alpha\,\theta_n 1}(\omega)$. ■

On va maintenant montrer que $j(\Omega) = V^o$. Pour cela on considère un $v \in V^o$, et on va construire un $\omega \in \Omega_0$ tel que $j(\omega) = v$. Si u est la fonction construite au lemme 1, soit $F = \{u(\alpha) : \alpha \in I(v)\}$. On pose $\zeta = \sup(t \in F)$, $F_n = \{u(\alpha) : \alpha \in I(v) \cap I_n\}$ et $\zeta_n = \sup(t \in F_n)$.

On pose également, pour $t \in [0, \underline{\infty}]$: $t^g = \sup(s < t : s \in F)$ et $t^d = \inf(s \geq t : s \in F)$. Remarquons que $0^g = 0$, et $(t^d)^d = t^d$.

On définit d'abord une application $y : F \longrightarrow E$ par $y(u(\alpha)) = v(\alpha)$ si $\alpha \in I(v)$.

LEMME 5 : (a) <u>On a</u> $\zeta \notin F$.
(b) <u>Si</u> $t \in F \setminus \{0\}$, <u>on a</u> $t^g < t$.

(c) Si $t < \zeta_n$, alors $F_n \cap [0,t]$ est fini; si F_n est infini, alors $\zeta_n = \zeta$.

(d) Si $t^g < t = t^d < \infty$, alors $t \in F$.

Démonstration. Pour obtenir (a) on suppose $\zeta \in F$: il existe $\alpha \in I(v)$ avec $\zeta = u(\alpha)$; (v-3) appliquée à α et $\beta = \underline{\infty}$ entraine l'existence de $\gamma \in I(v)$ avec $\alpha < \gamma < \beta$, ce qui contredit le fait que ζ est la borne supérieure de F.

Si $t = u(\alpha) \in F \setminus \{0\}$, d'après (v-2) il existe n tel que $\beta = a(\alpha)_{|\alpha|+1} \theta n \notin I(v)$. (v-1) entraine que si $\beta < \gamma < \alpha$, alors $\gamma \notin I(v)$, donc $t^g \leq u(\beta) < t$, donc on a (b).

(c) est montré par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 0$. Supposons (c) satisfaite par F_n. Soit $t < \zeta_{n+1}$. Si $\zeta_n = \zeta_{n+1}$, comme $F_n \cap [0,t]$ est fini, $F_{n+1} \cap [0,t]$ sera encore fini d'après (v-2). Si $\zeta_n < \zeta_{n+1}$, alors F_n est nécessairement finie (hypothèse de récurrence), donc $F_{n+1} \cap [0,\zeta_n]$ est finie par (v-2); il reste à considérer $F_{n+1} \cap]\zeta_n, t]$ si $\zeta_n < t < \zeta_{n+1}$: cet ensemble est fini car, par (v-1), $F_{n+1} \cap]\zeta_n, \infty[$ est constitué d'une suite croissante (éventuellement finie) tendant vers ζ_{n+1}. D'où la première partie de (c).

Si F_{n+1} est infini et $\zeta_n = \zeta_{n+1}$, on ne saurait avoir F_n fini, car d'après ce qui précède, $F_{n+1} \cap [0, \zeta_n]$ serait fini: donc $\zeta_{n+1} = \zeta$ d'après l'hypothèse de récurrence. Cette hypothèse entraine aussi que si F_{n+1} est infini et $\zeta_n < \zeta_{n+1}$, alors F_n est fini, donc on a $\zeta_n = u(\alpha) \in F_n$; de plus on a nécessairement $u(\alpha \theta_{n+1} m) \in F_{n+1}$ pour tout m, et $\zeta_{n+1} = u(\alpha \theta_n 1) \notin F$: d'où $\zeta_{n+1} =$ par (v-1).

(d) Soit $t^g < t = t^d < \infty$. Pour tout n assez grand il existe, d'après (c), $\alpha_n, \beta_n \in I(v)$ tels que $r_n = u(\alpha_n) < t \leq s_n = u(\beta_n)$, et $F_n \cap]r_n, s_n[= \emptyset$. Mais (v-1) implique l'existence de $q_n \leq n$ tel que $\beta_n(p) = \alpha_n(p)$ (resp. $\alpha_n(p) + 1$, resp. 0) si $p < q_n$ (resp. $p = q_n$, resp. $p > q_n$). Si $\sup q_n = \infty$, alors $s_n - r_n \searrow 0$, ce qui contredit le fait que $t^g < t$. Donc $\sup_{(n)} q_n = q < \infty$ et $s_n \in F_q$ pour tout n. D'après (c) la suite décroissante (s_n) est constante à partir d'un certain rang n_o, et comme $t = t^d$ on a $t = s_{n_o} \in F$. ∎

Il est clair que (v-4) et (v-5) sont équivalentes à:

(v-4') - $\forall n, \forall s \in F_n$, si $t = \inf(r \in F_n : r > s)$, alors $\forall r \in F \cap [s,t[$, $\sup(d(y(s), y(r')) : r' \in F \cap [s,r]) < 2^{-n}$.

(v-5') - $\forall n, \forall s \in F_n$, si $t = \inf(r \in F_n : r > s)$ et si $t \in F$, alors $d(y(s), y(t)) \leq 2^{-n}$.

LEMME 6 : (a) y est continue à droite sur F et limitée à gauche le long de F.

(b) y est limitée à gauche le long de $F \cap]0, \zeta[$.

Démonstration. (a) Soit $u(\alpha_n) \in F$, décroissant vers t. On a $t < \zeta$, donc pour n assez grand, d'après le lemme 5 il existe $s_n, t_n \in F_n$ avec $s_n \leq t < t_n$ et $F_n \cap]s_n, t_n[= \emptyset$. Posons $p_n = \inf(q : u(\alpha_q) < t_n)$. On a $p_n < \infty$ et $\lim_{(n)} \uparrow p_n = \infty$. On applique (v-4') à s_n, d'où $d(v(\alpha_p), v(\alpha_q)) \leq 2^{-n+1}$ si $p, q \geq p_n$. La suite $(y(u(\alpha_n)))$ est de Cauchy dans E_o, donc convergente, et si de plus $t \in F$ on a également $d(y(t), v(\alpha_q)) \leq 2^{-n+1}$ pour $q \geq p_n$, donc $\lim_{(n)} y(u(\alpha_n)) = y(t)$.

(b) Soit $u(\alpha_n) \in F$ croissant vers $t < \zeta$. D'après le lemme 5 il existe $s_n \in F_n$ avec $F_n \cap]s_n, t[= \emptyset$ et $s_n < t$. On pose alors $p_n = \inf(q : u(\alpha_q) > s_n)$ et on termine comme pour (a). ∎

Les deux lemmes précédents montrent que la formule ci-dessous définit complètement l'application ω: $[0,\infty] \longrightarrow E$.

$$(8) \quad \omega(t) = \begin{cases} y(u(\alpha)) & \text{si } t < t^d = u(\alpha) \in F \\ \lim(\omega(s) : s \in F, s \searrow t) & \text{si } t = t^d < \zeta,\ t \notin F \\ \Delta & \text{si } t \geq \zeta \end{cases}$$

($t < t^d < \zeta$ entraine $t^d \in F$, car $(t^d)^d = t^d$, et par l'assertion (d) du lemme 5).

LEMME 7 : (a) On a $\omega \in \Omega$ et $\zeta(\omega) = \zeta$.

(b) Si $t^g = t$, alors $t(\omega, g) = t$.

(c) Si $t \in F$, $(t^g)^g = t^g = t(\omega, g)$ et $t = t(\omega, d)$.

(d) On a $F \setminus \{0\} \subset m(\omega)$ et $\overline{F} \cup \{\infty\} = \overline{m}(\omega)$.

Démonstration. (a) La continuité à droite de ω est évidente, d'après le lemme 6. De même si $t^g < t$, la continuité à gauche en t est évidente. Soit t tel que $0 < t = t^g < \zeta$. On sait déjà, d'après le lemme 6, que $\omega(t-)$ existe. Si $s_n = \sup(r \in F_n : r < t)$ et $t_n = \inf(r \in F_n : r \geq t)$, on a $s_n, t_n \in F_n$, $s_n < t \leq t_n$ d'après le lemme 5, et $s_n \uparrow t$, $t_n \searrow t^d$. D'où, en appliquant (v-5'): $d(\omega(s_n), \omega(t_n)) \leq 2^{-n}$; d'où $\omega(t-) = \omega(t^d) = \omega(t)$.

On a: $\omega(t) = \Delta \iff t \geq \zeta$ par construction, donc $\zeta(\omega) = \zeta$. Enfin pour voir que $\zeta(\omega, g) = \zeta$, on remarque que $\zeta^g = \zeta$ d'après le lemme 5; par suite $F \cap [\zeta - c, \zeta[$ contient une infinité de points pour tout $c > 0$; donc ω ne peut être constante sur cet ensemble, d'après (v-1): donc $\omega \in \Omega$.

(b) On refait exactement le raisonnement précédent avec un t quelconque au lieu de ζ.

(c) Si $t = u(\alpha) \in F$ et si $(t^g)^g < t^g$, on a $s = t^g = u(\alpha) \in F$; si γ vérifie $\beta < \gamma < \alpha$, on aura donc $\gamma \notin I(v)$, ce qui contredit (v-3), et par suite $(t^g)^g = t^g$. On applique alors (b) à $s = t^g$, pour obtenir $s(\omega, g) = s$, d'où $t(\omega, g) = s$ par (8). Pour montrer que $t(\omega, d) = t$, on considère $s = \inf(r \in F : r > t)$; d'abord, si $t < s$ on a $s^g = t < s = s^d < \infty$, donc $s \in F$ d'après le lemme 5(d); mais, de la même manière que ci-dessus, cela contredirait (v-3): donc $s = t$. Par suite $F \cap [t,t+c]$ contient une infinité de points, et ω ne saurait être constante sur $[t,t+c]$ d'après (v-1).

(d) $\overline{m}(\omega) \subset \overline{F} \cup \{\infty\}$ de manière évidente, et $F \setminus \{0\} \subset m(\omega)$ car $m(\omega) = \{t : t(\omega,d) = t\}$ et il suffit d'appliquer (c). On en déduit $\overline{m}(\omega) = \overline{F} \cup \{\infty\}$.

THEOREME 4 : j <u>est une bijection de</u> Ω_0 <u>sur</u> V^o.

<u>Démonstration</u>. Etant donné le théorème 3, il nous reste à vérifier que l'application ω définie par (8) appartient à Ω_0 et vérifie $j(\omega) = v$.

On a $\zeta(\omega) \leq 1$ de manière évidente. On va montrer par récurrence que tout $\alpha \in \overline{I}$ vérifie:

(9) $\alpha \in I(\omega) \longrightarrow R_\alpha(\omega) = (u(\alpha))(\omega,g)$,

(10) $\omega(R_\alpha(\omega)) = v(\alpha)$.

C'est évident pour $\alpha = \underline{0}$ et $\alpha = \underline{\infty}$. On suppose que ces relations sont vérifiées pour tout $\delta \in I_{p-1}$, ainsi que pour tout $\delta \in I_p$ avec $\delta \leq \alpha$, où $\alpha \in I_p$ est donné; on va montrer que $\alpha' = \alpha \oplus_p 1$ vérifie également (9) et (10), ce qui nous suffira.

Pour $q \leq p-1$, on pose $\beta_q = \alpha \oplus_q 1$; on a donc $\beta_0 = \underline{\infty}$.

Si $\alpha \notin I(v)$ on aura $\alpha' \notin I(v)$ d'après (v-1), soit $v(\alpha') = \Delta$. α vérifie (10), donc $R_\alpha(\omega) = \zeta(\omega)$, donc $R_{\alpha'}(\omega) = \zeta(\omega)$, donc $\alpha' \notin I(\omega)$ et $\omega(R_{\alpha'}(\omega)) = \Delta$: α' vérifie bien (9) et (10).

Dans la suite on supposera que $\alpha \in I(v)$ et on notera $s = R_\alpha(\omega) < \zeta(\omega)$, $v = u(\alpha) \in F_p$, $v' = u(\alpha')$ et $t = S_{\alpha'}(\omega)$. Rappelons que, par (9) et (10) appliqués à α, $\omega(r) = \omega(s) = v(\alpha)$ si $r \in [s,v]$, et que $s = v_g < v$ (lemmes 5(b) et 7(a)). On distingue deux cas:

(a) Supposons que $\alpha' \in I(v)$. (v-1), (8) et le lemme 5(a) entrainent: $t \leq v' < \zeta(\omega)$, $d(\omega(s),\omega(v')) = 2^{-p}$, et $t = \inf(r > s : d(\omega(s),\omega(r)) \geq 2^{-p})$. Soit $q \leq p-1$; si $R_{\beta_q}(\omega) = \zeta(\omega)$, on a $t < R_{\beta_q}(\omega)$ de manière évidente. Montrons qu'on a encore $t < R_{\beta_q}(\omega)$ si $R_{\beta_q}(\omega) < \zeta(\omega)$. En effet, on a alors $R_{\beta_q}(\omega) = (u(\beta_q))_g$, puisque β_q vérifie (9), donc si $t \geq R_{\beta_q}(\omega)$ on a $R_{\beta_q}(\omega) \leq v'$; mais, si on applique (v-3) à α' et β_q, on voit que d'après le lemme 7(c) on a $v' < (u(\beta_q))^g = u(\beta_q)(\omega,g) = R_{\beta_q}(\omega)$, ce qui est contradictoire. Par suite on a bien $t < R_{\beta_q}(\omega)$ pour tout $q \leq p-1$, donc $R_{\alpha'}(\omega) = t < \zeta(\omega)$ d'après (5). Le lemme 7(c) entraine encore $v'^g = v'(\omega,g)$; comme $t \leq v'$ et ω est constante sur $[v'^g,v']$, on a $t \leq v'^g$; supposons que $t < v'^g$ et appliquons (v-4') à v : on obtient que $t \in [v,v'^g[$ et $v'^g < v'$, donc $d(\omega(v),\omega(t)) < 2^{-p}$, ce qui contredit la définition de $S_{\alpha'}$. Finalement, on a montré que $t = v'^g = v'(\omega,g)$, donc aussi $\omega(t) = \omega(v'_g) = \omega(v')$, et α' vérifie (9) et (10).

(b) Supposons maintenant que $\alpha' \notin I(v)$. Soit $\beta' = \inf(\gamma \in I_p \cap I(v), \alpha < \gamma)$. Comme $\alpha' \notin I(v)$, on a nécessairement $\beta' = \beta_q$ pour un $q \leq p-1$. Mais si $r = u(\beta')$, (v-4') entraine que $S_{\alpha'}(\omega) \geq r$, donc (5) entraine que $R_{\alpha'}(\omega) = \zeta(\omega)$, si bien que α' vérifie (9) et (10). ∎

II - PARTIE PROBABILISTE

<u>II-1. Introduction</u>. On note X le processus canonique $X_t(\omega) = \omega(t)$. On ne s'intéresse qu'aux propriétés du processus X qui sont indépendantes de l'échelle de temps considérée.

Par suite:

1°) Au lieu de considérer la tribu $\underline{\underline{F}} = \sigma(X_s : s \in [0,\infty])$ on considère $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}} \cap \underline{\underline{I}}$, où $\underline{\underline{I}} = \{A \subset \Omega : I_A \text{ est une a-i}\}$ est la "tribu des invariants".

2°) De la même façon, au lieu de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$, où $\underline{\underline{F}}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$, on considère la famille des $(\underline{\underline{G}}_\alpha)_{\alpha \in I}$, où $\underline{\underline{G}}_\alpha = \underline{\underline{F}}_{R_\alpha} \cap \underline{\underline{I}}$.

3°) A la place de la famille $\underline{\underline{T}}$ (resp. $\underline{\underline{T}}^+$) des temps d'arrêt relatifs à $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ (resp. $(\underline{\underline{F}}_{t+})_{t \geq 0}$), est définie dans [1] une famille d'applications de Ω dans $[0,\infty]$, contenant en particulier les R_α : on note $\underline{\underline{S}}$ cette famille de "temps d'arrêt invariants", pour laquelle les R_α et les tribus $\underline{\underline{G}}_\alpha$ jouent le rôle imparti dans la théorie classique aux temps constants $T = t$ et aux tribus $\underline{\underline{F}}_t$.

La donnée de $(\Omega, \underline{\underline{G}}, (\underline{\underline{G}}_\alpha)_{\alpha \in I}, (X_{R_\alpha})_{\alpha \in I})$ et d'une probabilité P sur $(\Omega, \underline{\underline{G}})$ constitue le "processus invariant par changement de temps X". Citons, sans démonstration, le résultat suivant, qui ne sera pas utilisé dans la suite.

PROPOSITION 7 : <u>Soit</u> T <u>une application</u>: $\Omega \to [0,\infty]$. <u>Pour que</u> $T \in \underline{\underline{S}}$ <u>il faut et il suffit que</u> T <u>soit un t-i vérifiant</u> $\{T < \zeta\} \in \underline{\underline{F}}$, $\hat{T} \in \underline{\underline{T}}$ <u>et</u> $T \wedge \zeta \in \underline{\underline{T}}^+$.

Remarquons que la famille $\underline{\underline{S}}$ n'est pas contenue dans $\underline{\underline{T}}^+$: en effet, si tout t-i appartenant à $\underline{\underline{T}}^+$ est aussi dans $\underline{\underline{S}}$, inversement $\underline{\underline{S}}$ contient des t-i qui ne sont pas dans $\underline{\underline{T}}^+$, et notamment des débuts d'intervalles contigus à $\overline{M}$. Ce qui précède justifie notre définition des t-i, dans laquelle N et non M joue un rôle privilégié.

Dans la suite de cet article, nous ne considérerons plus les tribus $\underline{\underline{G}}_\alpha$, mais seulement $\underline{\underline{G}}$.

II-2. Etude de la tribu $\underline{\underline{G}}$. Sur l'espace V^o on considère la tribu $\underline{\underline{V}}^o$ engendrée par les applications: $v \rightsquigarrow v(\alpha)$ de V^o dans E. On a la proposition suivante:

PROPOSITION 8 : On a $\underline{\underline{G}} = j^{-1}(\underline{\underline{V}}^o)$.

Démonstration. En utilisant (5) on vérifie (par récurrence sur $|\alpha|$) que les S_α et les R_α sont des $(\underline{\underline{F}}_{t+})$-temps d'arrêt (utiliser la continuité de X sur $[0,\zeta[$), donc X_{R_α} est $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Comme R_α est un t-i, X_{R_α} est aussi $\underline{\underline{I}}$-mesurable. Comme $j(\omega)(\alpha) = X_{R_\alpha}(\omega)$, on en déduit que $j^{-1}(\underline{\underline{V}}^o) \subset \underline{\underline{G}}$.

Réciproquement, pour montrer que $\underline{\underline{H}} = j^{-1}(\underline{\underline{V}}^o)$ contient $\underline{\underline{G}}$, on va considérer les atomes de la tribu $\underline{\underline{H}}$ et appliquer le théorème de Blackwell [2]: $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell, et $\underline{\underline{H}}$ est une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{F}}$, donc d'après ce théorème il nous suffit de montrer que tout atome de $\underline{\underline{G}}$ est réunion d'atomes de $\underline{\underline{H}}$. Soit donc $\omega, \omega' \in \Omega$; si ω et ω' appartiennent au même atome de $\underline{\underline{H}}$, le théorème 3 entraine que ω et ω' sont dans le même atome de $\underline{\underline{I}}$, donc aussi de $\underline{\underline{G}}$, d'où le résultat. ∎

En fait, on a un peu mieux:

PROPOSITION 9 : L'application $j : \underline{\underline{G}} \longrightarrow \underline{\underline{V}}^o$ est bijective, d'inverse j^{-1}.

Démonstration. D'après la proposition 8, l'application $k = j^{-1}$ de $\underline{\underline{V}}^o$ dans $\underline{\underline{G}}$ est surjective. Pour montrer l'injectivité, considérons $A \in \underline{\underline{V}}^o$ et $B = k(A)$, $B_0 = B \cap \Omega_0$. Le théorème 4 entraine que $j(B_0) = A$. Par suite on a $j(k(A)) = A$, pour tout $A \in \underline{\underline{V}}^o$: d'où l'injectivité de k et le fait que son inverse est j. ∎

II-3. Construction d'une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{G}})$. D'après la proposition 9, il est équivalent de construire une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{G}})$, ou une probabilité sur $(V^o,\underline{\underline{V}}^o)$. On notera donc avec la même lettre P une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{G}})$, ou son image par j sur $(V^o,\underline{\underline{V}}^o)$.

Si P est une telle probabilité, il est naturel de lui associer la famille $\mathbb{P} = (P_J : J$ partie finie de $\bar{I})$ des "distributions fini-dimensionnelles" de P : P_J est la probabilité sur $(E,\underline{\underline{E}})^J$ définie par

$$P_J\Big(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha\Big) = P\Big(\bigcap_{\alpha\in J}\{v : v(\alpha)\in A_\alpha\}\Big),$$

où les A_α sont des éléments de la tribu borélienne E de $\underline{\underline{E}}$.

A l'inverse de ce qui précède, il est naturel de partir d'une telle famille $\mathbb{P}$ de distributions fini-dimensionnelles. A l'aide du théorème de Kolmogorov, si cette famille $\mathbb{P}$ forme un système "compatible", on construit une probabilité P sur $(V,\underline{\underline{V}})$ (où $\underline{\underline{V}}$ est la tribu sur V engendrée par les applicat ons coordonnées) de distributions marginales $\mathbb{P}$. Il reste alors, après avoir montrer que $V^o \in \underline{\underline{V}}$, à trouver des conditions (nécessaires et suffisantes si possible) sur $\mathbb{P}$ pour que $P(V^o) = 1$.

Remarquons auparavant que, si la propriété $P(V^o) = 1$ ne dépend effectivement que de la famille $\mathbb{P}$ (puisque celle-ci détermine entièrement P), par contre elle ne s'exprime pas directement en général en fonction de cette famille $\mathbb{P}$. Cependant, dans le cas présent où nous avons supposer X continu sur $[0,\zeta[$, cette difficulté s'estompe (ce qui ne serait pas le cas si le processus X avait seulement des trajectoires continues à droite !)

Introduisons la notation suivante: si $\alpha,\beta \in \bar{I}$ avec $\alpha < \beta$, on désigne par $(J_n(\alpha,\beta))_{n\geq 2}$ une suite croissante, choisie de manière arbitraire parmi celles qui vérifient: $\alpha,\beta \in J_n(\alpha,\beta)$ et $\bigcup_{(n)} J_n(\alpha,\beta) = \{\delta \in \bar{I} : \alpha \leq \delta \leq \beta\}$. Soit $J'_n(\alpha,\beta) = J_n(\alpha,\beta) \setminus \{\alpha,\beta\}$.

THEOREME 5 : On a $V^o \in \underline{\underline{V}}$.

Démonstration. Pour tout $i \leq 5$ on note V_i l'ensemble des $v \in V$ qui vérifient les conditions (v-j) pour $j = 1,..,i$, de sorte que $V^o = V_5$. Le résultat découle alors des égalités suivantes, qui ne sont que des traductions immédiates des conditions (v-j), et qui sont mises sous une forme adaptée au théorème suivant:

$$C_\alpha = \{v(\alpha) = \Delta\}.$$

$$V_1 = \bigcap_{\alpha\in I\setminus\{\underline{0}\}} \big[C_\alpha + C_\alpha^c \cap \{v(a(\alpha) \neq \Delta, d(v(\alpha), v(a(\alpha))) = 2^{-|\alpha|}\}\big]$$

$$V_2 = V_1 \cap \Big[\bigcap_{\alpha\in I\setminus\{\underline{0}\}} \big[C_\alpha + C_\alpha^c \cap \lim_{(n)} \{v(a(\alpha)_{|\alpha|+1}\theta\, n) = \Delta\}\big]\Big]$$

$$V'_3 = V_2 \cap \Big[\bigcap_{\alpha,\beta\in\bar{I},\alpha<\beta} \big[C_\alpha \cup C_\beta + C_\alpha^c \cap C_\beta^c \cap \big(\bigcup_{(n)} \bigcup_{\gamma\in J'_n(\alpha,\beta)} C_\gamma^c\big)\big]\Big]$$

$$V_3 = V'_3 \cap \Big[\bigcap_{\alpha\in I} \big[C_\alpha + C_\alpha^c \cap \big(\bigcup_{(n)} \bigcup_{\gamma\in J'_n(\alpha,\underline{\infty})} C_\gamma^c\big)$$

$$V_4 = V_3 \cap \Big[\bigcap_{\alpha\in I} \big[C_\alpha + C_\alpha^c \cap \big(\bigcap_{n\geq|\alpha|} \bigcup_{\substack{0<p\leq|\alpha|-1 \\ \text{ou } p=n}} (A_{\alpha np} \cap B_{\alpha np})\big)\big]\Big]$$

où on pose:

$$\beta_q = \alpha \underset{q}{\theta} 1, \quad A_{\alpha n0} = \bigcap_{0<q\leq n} C_{\beta_q}, \quad A_{\alpha np} = \Big(\bigcap_{p<q\leq n} C_{\beta_q}\Big) \cap C_{\beta_p}^c,$$

$$B_{\alpha np} = \bigcap_{\gamma\in I,\alpha\leq\gamma<\beta_p} \Big[C_\gamma + C_\gamma^c \cap \lim_{a\downarrow 0}\uparrow \lim_{q\uparrow\infty}\downarrow \bigcap_{\delta\in J_q(\alpha,\gamma)} \big(C_\delta + C_\delta^c \cap \{d(v(\alpha), v(\delta)) \leq 2^{-n} - a\}\big)\Big]$$

$$V_5 = V_4 \cap \Big[\bigcap_{\alpha \in I} \Big[C_\alpha + C_\alpha^c \cap \Big[\bigcap_{n \geq |\alpha|} \Big[A_{\alpha n C} + \bigcup_{\substack{1 \leq p \leq |\alpha|-1 \\ \text{ou } p=n}} \big(A_{\alpha n p} \cap \{ d(v(\alpha), v(\alpha \theta_p 1)) \leq 2^{-n} \} \big) \Big]\Big]\Big]\Big]. \blacksquare$$

Si maintenant on écrit que $P(V_i) = 1$ pour tout $i \leq 5$, les V_i étant définis dans la preuve ci-dessus, on obtient le corollaire suivant (dans l'énoncé duquel chaque $J_n(\alpha,\beta)$ est fini).

THEOREME 6 : Soit $\mathbb{P} = (P_J)$ un système compatible de probabilités fini-dimensionnelles sur l'espace produit V. Pour que $\mathbb{P}$ soit associé à une probabilité P sur $(\Omega, \underline{\underline{G}})$, nécessairement unique, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions:

c-1: $\forall \alpha \in I \setminus \{\underline{0}\}$, $P_{\{a(\alpha),\alpha\}}[v(a(\alpha)) = \Delta \neq v(\alpha)] = 0$;

c-2: $\forall \alpha \in I \setminus \{\underline{0}\}$,
$P_{\{a(\alpha),\alpha\}}[v(\alpha) \neq \Delta, d(v(a(\alpha)), v(\alpha)) < 2^{-|\alpha|}] = 0$;

c-3: $\forall \alpha \in I \setminus \{\underline{0}\}$,
$\lim\downarrow_{(n)} P_{\{a(\alpha)\theta_{|\alpha|+1} n, \alpha\}}[v(\alpha) \neq \Delta \neq v(a(\alpha)\theta_{|\alpha|+1} n)] = 0$;

c-4: $\forall \alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$,
$\lim\downarrow_{(n)} P_{J_n(\alpha,\beta)}[v(\alpha) \neq \Delta \neq v(\beta), v(\gamma) = \Delta \ \forall \gamma \in J_n(\alpha,\beta)] = 0$;

c-5: $\forall \alpha \in I$,
$\lim\downarrow_{(n)} P_{J_n(\alpha,\underline{\infty})}[v(\alpha) \neq \Delta, v(\gamma) = \Delta \ \forall \gamma \in J_n(\alpha,\underline{\infty})] = 0$;

c-6: $\forall \alpha \in I$, $\forall n \geq |\alpha|$, $\forall p$ tel que $0 \leq p \leq |\alpha|-1$ ou $p = n$, si $\beta_q = \alpha \theta_q 1$, $\forall \gamma$ avec $\alpha \leq \gamma < \beta$, si enfin $L(q) = J_q(\alpha,\gamma) \cup \{\beta_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n\}$, on a:

$$\lim_{a \downarrow 0}\downarrow \lim_{q \uparrow \infty}\uparrow P_{L(q)}[v(\alpha) \neq \Delta,\ v(\beta_p) \neq \Delta \text{ si } p > 1,\ v(\beta_i) \neq \Delta \text{ pour } p < i \leq n,\ v(\gamma) \neq \Delta,\ v(\delta) \neq \Delta \text{ et } d(v(\alpha), v(\delta)) > 2^{-n} - a \text{ pour un } \delta \in J_q(\alpha,\gamma)] = 0 ;$$

c-7: $\forall \alpha \in I$, $\forall n \geq |\alpha|$, $\forall p$ tel que $1 \leq p \leq |\alpha|-1$ ou $p = n$, si $\beta_q = \alpha \theta_q 1$ et $L = \{\beta_p, \dots, \beta_n, \alpha\}$, on a:
$P_L[v(\alpha) \neq \Delta,\ v(\beta_i) = \Delta \text{ pour } p < i \leq n,\ v(\beta_p) \neq \Delta,\ d(v(\alpha), v(\beta_p)) > 2^{-n}] = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1 J. JACOD: Sur la théorie générale des processus. Sém. Proba II de Rennes, 1976.

2 P.A. MEYER: Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1966.