P. Y. GLORENNEC

Estimation a priori des erreurs dans la résolution numérique d'équations différentielles stochastiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 1
« Séminaire de probabilités I », , p. 57-93
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___1_57_0>

ESTIMATION A PRIORI DES ERREURS DANS LA RESOLUTION NUMERIQUE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

par

P.Y. GLORENNEC

Thèse de 3e Cycle. Novembre 1977

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t,X_t)\ dC_t + b(t,X_t)\ dW_t$$

où C est un processus à variation bornée, W est une martingale de carré intégrable et les coefficients a et b sont lipschitziens. Il arrive fréquemment que la seule méthode pour étudier les solutions d'une telle équation soit de procéder par simulation.

Plus précisément, on considère un processus X^n qui est assez proche de X et qui est facile à étudier ; par exemple, on choisit un processus X^n qui admet des discontinuités sur les dyadiques d'ordre n et qui est constant ailleurs. C'est alors le processus X^n qu'on étudie par simulation.

L'objet de cette thèse est d'étudier la précision qu'on peut espérer obtenir par une telle méthode et, surtout, de donner une majoration a priori de l'écart entre X et X^n.

Les notations et conventions générales sont précisées au paragraphe A. On y donne aussi quelques lemmes préliminaires.

Au paragraphe B, on étudie le cas où les coefficients a et b sont "avec mémoire", les processus C et W étant "presque" à accroissements indépendants. La discrétisation est effectuée suivant les dyadiques d'ordre n et on donne une majoration a priori de

$$E \left\{ \sup_t ||X_t - X_t^n||^2 \right\}$$ qui semble assez fine ;

Si les coefficients a et b sont continus à droite par rapport au temps, on peut utiliser une discrétisation pure. Sinon, on utilise une "semi-discrétisation".

Dans toute la suite, à l'instant t, les coefficients a et b ne dépendent du processus X que par l'intermédiaire de la valeur de ce processus X à l'instant t (cas "sans mémoire").

Au paragraphe C, on ne suppose plus que C et W sont "presque" à accroissements indépendants ; la discrétisation est effectuée suivant des temps d'arrêt. L'idée essentielle consiste à exprimer $Z = (X^n - X)$ comme solution d'une équation différentielle linéaire (qu'on sait intégrer) où interviennent des "transformés" $\tilde{C}$ et $\tilde{W}$ de C et W, c'est-à-dire des processus tels que

$$\tilde{C}_t = \int_{]0,t]} Y^1_s . dC_s \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}_t = \int_{]0,t]} Y^2_s . dW_s$$

où Y^1 et Y^2 sont des processus prévisibles bornés par 1. Cette technique semble intéressante en elle-même.

Dans la première partie de ce paragraphe C, on étudie le cas à une dimension. Dans la deuxième partie, on considère le cas de processus à valeurs hilbertiennes. Dans les deux cas, on s'est limité au cas des processus continus.

Les hypothèses adoptées au paragraphe D sont assez restrictives : processus à trajectoires continues, et "presque" à accroissements indépendants, coefficients a et b différentiables (sans mémoire). L'objet du paragraphe est de préciser ce que peut apporter une discrétisation au 2e ordre, c'est-à-dire que, dans la discrétisation, on fait intervenir des termes qui sont des "infiniment petits d'ordre deux". Comme au paragraphe B, une majoration explicite de l'erreur quadratique est donnée.

Au paragraphe E, les coefficients a et b sont supposés continus (non nécessairement lipschitziens). L'objet du paragraphe est seulement de vérifier, suivant la méthode désormais classique de Strook Varadhan, que,

dans ce cas, la suite $(X^n)_{n>0}$ des approximations discrétisées converge en loi vers la loi du processus initial X. Dans ce cas, il n'a pas semblé possible d'obtenir de majoration a priori de l'erreur.

Je tiens à dire tout ce que ce travail doit à Monsieur J. PELLAUMAIL, Maître de Conférences à l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes. C'est lui qui inspira ce travail et qui, par ses conseils et ses encouragements constants, me permit de le mener à bien. Qu'il voie dans mes remerciements l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur M. METIVIER d'avoir bien voulu présider le Jury, et Messieurs DARMON, JACOD et KEANE qui ont accepté d'en faire partie.

Je remercie en plus Monsieur DARMON d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et de m'avoir donné quelques exemples pratiques d'équations différentielles stochastiques.

Je remercie enfin Madame J. MARTIN qui a eu la tâche ingrate de frapper de tels textes, ainsi que toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce document.

A | GENERALITES

A.1 - BASE INITIALE

Dans cette étude, on se donne une fois pour toutes une base probabilisée de processus, $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$, complète, continue à droite, avec :

$T = [0,1]$, intervalle unité de l'axe réel

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, espace probabilisé complet

$(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que, quel que soit t élément de T,
$\mathcal{F}_t = \bigcap_{n>0} \mathcal{F}_{t+1/n}$ et $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{F}$.

Cette base sera appelée la base initiale et sera notée B^I.

A.2 - PRODUIT TENSORIEL

Dans toute la suite, on se donnera également un espace de Hilbert H séparable. Le fait de supposer H de dimension finie n'aurait, le plus souvent, pas apporté de simplifications notables. De même, supposer H séparable facilite la présentation et ne constitue pas une restriction.

On notera $H \hat{\otimes} H$ le complété, pour la norme de Hilbert-Schmidt, du produit tensoriel de H par lui-même. Si x est un élément de H, on notera $x^{\otimes 2}$ le produit tensoriel de x par lui-même, considéré comme élément de $H \hat{\otimes} H$.

A.3 - BASE CANONIQUE (définition)

Soit D^H l'espace des fonctions définies sur T et à valeurs dans H.

Pour tout élément t de T, soit $\mathcal{D}^H_t$ la plus petite tribu sur

D^H qui rend mesurable les applications "coordonnées" $\omega \mapsto x_s(\omega)$ pour $s \leq t$. On pose $\mathcal{D}^H = \mathcal{D}^H_1$.

La famille $(D^H \times \Omega, \mathcal{D}^H \otimes \mathcal{F}, (\mathcal{D}^H_t \otimes \mathcal{F}_t)_{t \in T})$ *constitue une base de processus que l'on notera* B^H *et que l'on appellera la base canonique (pour les processus à valeur dans* H *et relativement à la base initiale* B^I *).*

A.4 - REMARQUES ET CONVENTIONS

a - La tribu des prévisibles de la base canonique est engendrée par les ensembles de la forme $]v,w] \times J \times F$, avec

u,v et w éléments de T tels que $u \leq v < w$

$J = \{x : x_u \in H_o\}$, H_o étant une partie borélienne de H,

$F \in \mathcal{F}_v$

Ceci se déduit immédiatement de la définition de la tribu des prévisibles (cf. [MP]) et de la définition de $\mathcal{D}^H_s$ ci-dessus.

b - Soit $a(t,x,\omega)$ un processus à valeur dans un espace de Banach K, prévisible relativement à la base canonique B^H.

Soient (t,ω) un élément de $T \times \Omega$, x et x' deux éléments de D^H tels que $x_s = x'_s$ pour $s<t$; on a alors :

$$a(t,x,\omega) = a(t,x',\omega)$$

En effet, ω, t, x et x' étant fixés, la classe $\mathcal{C}$ des processus a qui satisfont à cette propriété constitue un espace vectoriel et est stable pour les limites simples. De plus, $\mathcal{C}$ contient les processus de la forme indiquée en a) qui précède, donc $\mathcal{C}$ contient tous les processus prévisibles a.

Autrement dit, il suffit de connaître la "trajectoire" de x avant l'instant t pour que $a(t,x,\omega)$ soit défini (puisqu'on peut prolonger x comme on veut à partir de t). Ceci sera constamment utilisé dans la suite.

c - Dans le paragraphe B, nous aurons à considérer des processus $a(t,X_{\cdot}(\omega),\omega)$, où X est lui-même un processus : ce sera le cas "avec mémoire".

Pour alléger les notations, le symbole ω sera omis. On écrira donc seulement $a(t,X)$.

Notons que, dans ce cas, si a est un processus prévisible relativement à la base canonique B^H, et si X est un processus cadlag adapté relativement à la base initiale B^I, $a(t,X_{\cdot}(\omega),\omega)$ est un processus prévisible relativement à la base initiale (cf. [MP]).

d - Par contre, dans les paragraphes C, D et E, les "processus" $a(t,x,\omega)$ ne dépendront de x, à l'instant t, que par l'intermédiaire de la valeur x_t : ce sera le cas "sans mémoire". Dans ces paragraphes, le processus X sera toujours à trajectoires continues.

Il faut noter que, si X est un processus continu à valeurs dans H, adapté à la base B^I, $a(t,X_t(\omega),\omega)$ définit un processus à valeurs dans K, adapté à la base B^I, à trajectoires continues, et donc prévisible.

On le notera encore $a(t,X)$.

A.5 - SOLUTION FORTE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE (définition)

Soient $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$ deux processus à valeurs dans $\mathcal{L}(H,H)$ et prévisibles relativement à la base canonique B^H. (resp B^I pour le cas "sans mémoire").

Soient C et M deux processus à valeurs dans H, continus et adaptés à la base B^I.

On dit qu'un processus continu adapté à cette même base est solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t,X_t)\, d\, C_t + b(t,X_t)\, d\, M_t$$

et de condition initiale X_o ,

si, pour tout élément t de T,

$$X_t = X_o + \int_o^t a(s,X_s)\, d\, C_s + \int_o^t b(s,X_s)\, d\, M_s$$

ces intégrales étant des intégrales stochastiques,(cf. [MP]).

(Pour alléger l'écriture, le symbole ω, qui apparaît dans tous les processus considérés, a été omis).

A.6 - PROCESSUS BORNES OU LIPSCHITZIENS (définition)

Soit $a(t,x,\omega)$ un processus à valeur dans $\mathcal{L}(H,H)$, défini relativement à la base canonique B^H.

On dira que a est localement lipschitzien (resp. localement borné) s'il satisfait à la condition suivante :

(i) (resp (ii)) pour tout réel positif d, il existe une constante L_d (resp C_d) telle que, si (t,ω) est un élément de $T \times \Omega$, si (x,x') est un couple d'éléments de D^H, avec

$$\sup_{s \leq t} ||x_s|| \leq d \qquad \text{et} \qquad \sup_{s \leq t} ||x'_s|| \leq d$$

alors, on a :

$$||a(t,x) - a(t,x')|| \leq L_d \sup_{s\leq t} ||x_s - x'_s||_H$$

$$(\text{resp.}\ ||a(t,x)|| \leq C_d)$$

On dira que a est uniformément lipschitzien (resp. borné) si $L_\infty < +\infty$ (resp. $C_\infty < +\infty$).

Dans la suite, on considérera des processus a et b uniformément lipschitziens.

Pour le cas "sans mémoire", avec les mêmes conditions sur x et x', on aura la condition de Lipschitz usuelle :

$$||a(t,x) - a(t,x')|| \leqslant L_d ||x - x'||_H$$

A.7 - PROCESSUS VARIATION QUADRATIQUE

Soit W un processus cadlag à valeurs dans l'espace de Hilbert H (en général, dans la suite, W sera une martingale de carré intégrable).

Quand il est bien défini, on notera $\hat{W}$ le processus variation quadratique réel croissant associé à W, c'est-à-dire le processus positif, croissant, cadlag, défini à l'indistinguabilité près par :

$$\hat{W}_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} ||W_{t \wedge (k+1).2^{-n}} - W_{t\wedge k.2^{-n}}||^2$$

Ce processus $\hat{W}$ est tel que, pour tout processus prévisible b, à valeurs dans $\mathscr{L}(H,H)$, si W est une martingale de carré intégrable, on a :

$$E\left\{ ||\int_o^t b_s \, d\, W_s||^2 \right\} \leqslant E\left\{ \int_o^t ||b_s||^2 \, d\, \hat{W}_s \right\}$$

Si W est une martingale réelle continue, le processus variation quadratique (continu) associé sera aussi noté $\langle W,W\rangle$ ou, plus simplement, $\langle W\rangle$.

A.8 - CONVENTION : $\int_u^v = \int 1_{]u,v]}$

Dans les intégrales considérées par la suite (intégrales stochastiques ou intégrales par trajectoires), le symbole $\int_o^u A_s \, d\, B_s$ signifiera toujours qu'on intègre de o exclus à u inclus (u pouvant être un temps d'arrêt).

Autrement dit

$$\int_o^u A_s \, d\, B_s = \int_{]o,u]} A_s \, d\, B_s = \int 1_{]o,u]} . A_s . \, d\, B_s$$

Le processus X défini par $X_s = \int_o^s A_u \, d\, B_u$ pourra donc être choisi cadlag (quand il est bien défini).

A.9 - INEGALITE DE DOOB

Soit M une martingale cadlag, à valeurs dans l'espace de Hilbert H, de carré intégrable.

Pour tout temps d'arrêt u, on a :

$$E\left\{ \sup_{s\leqslant t} ||M_s||^2 \right\} \leqslant 4\, E\left\{ ||M_t||^2 \right\}$$

Si M est une martingale réelle, c'est l'inégalité de Doob. Si M est à valeurs dans H, il suffit de projeter sur une base orthonormale de H et d'appliquer l'inégalité de Doob à chaque projection.

A.10 - CONVENTION : $u = \inf\{...\}$

Etant donné deux temps d'arrêt v et w et un processus Y, on aura souvent à définir des temps d'arrêt u par :

$$u = \inf \left\{ t/t \geqslant v \ , \ t \leqslant w \ , \ ||Y_t|| > \varepsilon \right\}$$

Dans ce cas, si ω est un élément de Ω tel que l'ensemble ci-dessus est vide, il sera toujours convenu que l'on prend

$u(\omega) = w(\omega)$.

A.11 - INEGALITE DE "TYPE GRONWALD", CAS CONTINU

Soient a et b deux constantes positives. Soit f une fonction positive croissante, réelle, de variable réelle, telle que, pour tout couple $(t,\Delta t)$ de réels positifs, on ait :

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \leqslant a + b.f(t + \Delta t)$$

On a alors :

$f(t) \leqslant f(o)\, e^{bt} + \frac{a}{b}\,(e^{bt} - 1)$

ce qui implique, pour $o \leqslant bt \leqslant 1$:

$f(t) \leqslant f(o) + 2\, bt \left[f(o) + \frac{a}{b} \right]$

Démonstration

On peut majorer la fonction f par une fonction croissante dérivable g(t) telle que :

$$g'(t) = a + bg(t) \qquad \text{et} \qquad g(o) = f(o)$$

ce qui implique

$$g(t) = g(o)\, e^{bt} + \frac{a}{b}\,(e^{bt} - 1)$$

d'où les inégalités annoncées.

A.12 - INEGALITE DE "TYPE GRONWALD", CAS DISCRET

Soient a et b deux constantes. Soit f une fonction positive définie et croissante sur les diadiques d'ordre n.

On suppose que, quel que soit l'entier k, on a :

$$2^n \left\{ f\left[(k+1)\,2^{-n}\right] - f(k\ 2^{-n}) \right\} \leqslant a + b.f\left[(k+1)\,2^{-n}\right]$$

$$(\text{resp.} \quad \leqslant a + b.f\left[k\ 2^{-n}\right])$$

Soit t un dyadique d'ordre n. On suppose que l'on a :

$b \leqslant \frac{1}{5}\, 2^n$

On a alors :

$$f(t) \leqslant \left[f(o) + \frac{5}{4}\, a\, t\right] \exp\left(\frac{5}{4}\, bt\right)$$

$$(\text{resp. } f(t) \leqslant \left[f(o) + at\right] \exp\,(bt))$$

Pour le démontrer, il suffit de raisonner par récurrence sur k, en remarquant que l'inégalité donnée peut aussi s'écrire :

$$f\left[(k+1)\,2^{-n}\right] - f(k\ 2^{-n}) \leqslant \frac{5}{4}\, 2^{-n}\left[a + b.f(k\ 2^{-n})\right]$$

B | DISCRETISATION A INTERVALLES DE TEMPS CONSTANTS, CAS "AVEC MÉMOIRE"

B.1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans ce paragraphe B, on considère les hypothèses et notations suivantes. Soient donc :

- un espace de Hilbert H.
- un sous-espace $\mathcal{L}_a(H,H)$ de $\mathcal{L}(H,H)$, ce sous-espace étant muni d'une norme $||.||$ telle que, si k appartient à $\mathcal{L}_a(H,H)$ et si h appartient à H, $||k(h)||_H \leqslant ||k||.||h||_H$.
- une base initiale B^I comme indiquée en A.1.
- C et W, deux processus cadlag, à valeurs dans H, définis et adaptés relativement à la base B^I.

On associe respectivement à C et W deux processus Q et V, cadlag, réels, positifs, croissants, définis et adaptés relativement à B^I.

On suppose que W est une martingale de carré intégrable, dont la variation quadratique, $\hat{W}$, est telle que :

pour tout couple (s,t) d'éléments de T, avec $s \leqslant t$, et pour tout élément ω de Ω, on a :

$$\hat{W}_t(\omega) - \hat{W}_s(\omega) \leqslant V_t(\omega) - V_s(\omega)$$

De même, si $A_t = \int_o^t d||C_s||$ désigne le processus variation totale de C, on suppose que pour tout couple (s,t) de T avec $s < t$ et pour tout ω de Ω :

$$A_t(\omega) - A_s(\omega) \leqslant Q_t(\omega) - Q_s(\omega)$$

On suppose que, pour tout couple (s,t) d'éléments de T, avec $s \leqslant t$, les variables aléatoires $(V_t - V_s)$ et $(Q_t - Q_s)$ sont indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$, c'est-à-dire que, pour toute variable aléatoire X, $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a :

$$E\left[X(V_t - V_s)\right] = E(X)\ E(V_t - V_s)$$

et $$E\left[X(Q_t - Q_s)\right] = E(X)\ E(Q_t - Q_s)$$

(si ces espérances sont bien définies).

On suppose aussi que pour tout couple (s,t) de T, avec $s < t$, on a :

$$E(V_t - V_s) \leqslant v(t-s)$$

$$E(Q_t - Q_s) \leqslant q_1(t-s)$$

$$A_t(\omega) \leqslant q_2$$

où v, q_1 et q_2 sont des constantes. On posera $q = q_1 q_2$.

Soient enfin $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$ deux processus à valeurs dans $\mathcal{L}_a(H,H)$, définis et prévisibles relativement à la base canonique B^H (cf. A.3), uniformément lipschitziens (cf. A.6).

On suppose que pour tout élément t de T, on a :

$$||a(t,x)||^2 \leqslant a_1 + a_2 \sup_{s \leqslant t} ||x_s||^2$$

$$||b(t,x)||^2 \leqslant b_1 + b_2 \sup_{s \leqslant t} ||x_s||^2$$

où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des constantes.

Notons que, sous ces hypothèses, l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t,X_t)\ dC_t + b(t,X_t)\ dW_t$$

admet une solution forte unique (cf.[ ]).

B.2 - PROPOSITION

Soit Q un processus satisfaisant aux conditions indiquées en B.1. Soit Y un processus prévisible positif. On a :

$$E \int_s^t Y_u\ dQ_u = \int_s^t E(Y_u)\ d\left[E(Q_u)\right] \leqslant q_1 \int_s^t E(Y_u)\ du$$

Démonstration

L'égalité est évidente si Y est de la forme

$$Y = 1_{H \times]v,w]}$$

avec $H \in \mathcal{F}_v$ et v et w éléments de T tels que $v < w$.

Elle est encore vraie dans le cas général, par linéarité et densité (théorème de Lebesgue).

L'inégalité se déduit immédiatement des propriétés de Q.

B.3 - MAJORATION PRELIMINAIRE D'UNE SOLUTION X

On considère les hypothèses et notations données en B.1.

Soit X un processus cadlag, adapté à la base initiale B^I, à valeurs dans H, tel que :

$$X_t = X_o + \int_o^t \left[a(s,X)\ dC_s + b(s,X)\ dW_s\right]$$

On a alors :

$$E\left[\sup_{s \leqslant t} ||X_s||_H^2\right] \leqslant 3\ E(||X_o||^2)\ \exp\left\{(3a_2 q + 12\ v\ b_2)t\right\} + \frac{3a_1 q + 12\ v\ b_1}{3a_2 q + 12\ v\ b_2}\left[\exp\left\{\left[3a_2 q + 12\ v\ b_2\right]t\right\} - 1\right]$$

Démonstration

Soit F le processus positif croissant cadlag, adapté à la base initiale B^I, défini par :

$$F_t = 3||X_o||^2 + 3\,q_2 \int_o^t ||a(s,X)||^2\, dQ_s$$
$$+\ 12 \int_o^t ||b(s,X)||^2\, dV_s$$

et soit f la fonction positive croissante définie par

$$f(t) = E(F_t)$$

On a :

$$\sup_{s \leq t} ||X_s||^2 \leq 3||X_o||^2 + 3 \sup_{s\leq t} ||\int_o^s a(u,X)\, dC_u||^2$$
$$+\ 3 \sup_{s\leq t} ||\int_o^s b(u,X)\, dW_u||^2$$

L'inégalité de Schwarz, appliquée "par trajectoires", puis la propriété "majorante" de Q donnent :

$$\sup_{s\leq t} ||\int_o^s a(u,X)dC_u||^2 \leq q_2 \int_o^t ||a(u,X)||^2\, dQ_u$$

De plus, le processus $\int_o^t b(s,X)\, dW_s$ est une martingale (puisque W est une martingale et que $b(.,X)$ est prévisible). On peut donc lui appliquer l'inégalité de Doob (cf. A.9), ce qui donne :

$$E\left\{\sup_{s\leq t} ||\int_o^s b(u,X)\, dW_u||^2\right\} \leq 4\, E\left\{||\int_o^t b(s,X)\, dW_s||^2\right\}$$
$$\leq 4\, E\left\{\int_o^t ||b(s,X)||^2\, d\hat{W}_s\right\}$$

On obtient finalement

$$E\left\{\sup_{s\leq t} ||X_s||^2\right\} \leq f(t)$$

Par ailleurs :

$$F_{t+\Delta t} - F_t = 3q_2 \int_t^{t+\Delta t} ||a(s,X)||^2 dQ_s + 12 \int_t^{t+\Delta t} ||b(s,X)||^2 dV_s$$

En raison des hypothèses B.1 et de B.2, on obtient :

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \leq 3q_1q_2\,[a_1 + a_2\, f(t+\Delta t)]$$
$$12\, v\,[b_1 + b_2\, f(t+\Delta t)]$$

On en déduit l'inégalité annoncée (cf. A.11)

B.4 - COROLLAIRE

Soient n et k deux entiers fixés.

On pose

$$K = \{t / k\, 2^{-n} \leq t < (k+1)\, 2^{-n}\}$$

On a alors, pour $(2a_2q + 8\, v\, b_2) \leq 2^n$

$$E\left\{\sup_{t \in K} ||X_t - X_{k2^{-n}}||^2_H\right\} \leq d(n)$$

avec $d(n) = 4.2^{-n}\,(q\,a_1 + 4\,v\,b_1)$

Démonstration

On commence par appliquer B.3 en notant que, dans le cas où $E(||X_o||^2) = 0$, les chiffres 3 et 12 peuvent être remplacés respectivement par 2 et 8. Ensuite on utilise l'inégalité $e^u - 1 \leq 2u$ pour $u \leq 1$.

B.5 - SEMI DISCRETISATION

On considère les hypothèses et notations indiquées en B.1. Soit X le processus tel que

$$X_t = X_o + \int_o^t a(s,X)\, dC_s + \int_o^t b(s,X)\, dW_s$$

Pour tout n, soit X^n le processus cadlag défini par récurrence sur k par :

$$X^n_o = X_o$$
$$X^n_s = X^n_{k2^{-n}} \quad \text{pour tout s tel que } k2^{-n} \leq s < (k+1)2^{-n}$$
$$X^n_{(k+1)2^{-n}} = X^n_{k2^{-n}} + \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} [a(s,X^n)\, dC_s + b(s,X^n)\, dW_s]$$

Pour alléger les notations, on pose

$$k2^{-n} = t_k$$
$$X^n_{k2^{-n}} = X^n_k$$

Soit $\sqrt{a_3}$ (resp. $\sqrt{b_3}$) la constante uniforme de Lipschitz associée au processus a (resp. b).

Alors, pour tout dyadique t d'ordre n :

$$E \sup_{s\ t} ||X_s - X^n_s||^2_H \leqslant \{4d(n)\ [qa_3 + 4vb_3]t\} \exp\{4(qa_3 + 4vb_3)t\}$$

avec $\quad d(n) = 4.2^{-n}(qa_1 + 4vb_1)$

<u>Démonstration</u>

1°/ On pose

$$y(k) = 2q_2 E\int_0^{t_k} ||a(s,X) - a(s,X^n)||^2\, dQ_s$$
$$+ 8E\int_0^{t_k} ||b(s,X) - b(s,X^n)||^2\, dV_s$$

alors, comme dans la démonstration de B.3, on obtient :

$$E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X^n_s||^2 \leqslant y(k)$$

2°/

$$y(k+1) - y(k) = 2q_2 E\int_{t_k}^{t_{k+1}} ||a(s,X) - a(s,X^n)||^2\, dQ_s$$
$$+ 8E\int_{t_k}^{t_{k+1}} ||b(s,X) - b(s,X^n)||^2\, dV_s$$
$$\leqslant 2\, q_1 q_2\, 2^{-n}\, E \sup_{t_k \leqslant s \leqslant t_{k+1}} ||a(s,X) - a(s,X^n)||^2$$
$$+ 8\, v\, 2^{-n}\, E \sup_{t_k \leqslant s \leqslant t_{k+1}} ||b(s,X) - b(s,X^n)||^2$$

Posons pour simplifier, n et k étant fixés :

$$K = \{t / t_k \leqslant t < t_{k+1}\}$$

et soit $\overline{X}$ le processus défini par :

$$\begin{cases} \overline{X}_s = X_s & \text{pour} \quad s \leqslant t_k \\ \overline{X}_s = X_k & \text{pour} \quad s \in K \end{cases}$$

alors :

$$||a(s,X) - a(s,X^n)||^2 \leqslant 2\, ||a(s,X) - a(s,\overline{X})||^2$$
$$+ 2\, ||a(s,\overline{X}) - a(s,X^n)||^2$$

En utilisant la condition de Lipschitz et l'inégalité B.4, ainsi que l'inégalité du 1°/, on a :

$$E \sup_{s \in K} ||a(s,X) - a(s,X^n)||^2 \leqslant 2a_3\, [d(n) + y(k)]$$

On procède de la même façon pour $E \sup_{s \in K} ||b(s,X) - b(s,X^n)||^2$. Cela donne donc :

$$y(k+1) - y(k) \leqslant 4.2^{-n}(qa_3 + 4\, v\, b_3)\ [d(n) + y(k)]$$

Et, d'après A.12, pour tout dyadique t d'ordre n :

$$y(t) \leqslant [4(qa_3 + 4\, V\, b_3)\ d(n)\ t]\ \exp\{4(qa_3 + 4\, v\, b_3)\ t\}$$

ce qui donne l'inégalité annoncée.

B.6 - <u>DISCRETISATION</u>

On considère les hypothèses et notations indiquées en B.1. On suppose de plus que les processus a et b satisfont à la condition de continuité suivante :

il existe deux constantes a_4 et b_4 telles que, pour tout couple (s,t) d'éléments de T et pour tout x de D^H, on a :

$$||a(s,x) - a(t,x)||^2 \leqslant a_4 \sup_{s \leqslant u \leqslant t} ||x_u - x_s||^2$$
$$||b(s,x) - b(t,x)||^2 \leqslant b_4 \sup_{s \leqslant u \leqslant t} ||x_u - x_s||^2$$

Soit X le processus tel que

$$X_t = X_o + \int_o^t \left[a(s,X)\, dC_s + b(s,X)\, dW_s\right]$$

Pour tout n, soit X^n le processus cadlag défini par récurrence sur k par :

$$\begin{cases} X_o^n = X_o \\ X_t^n = X_{k2^{-n}}^n \qquad \text{si} \quad k2^{-n} \leqslant t < (k+1)2^{-n} \\ X_{(k+1)2^{-n}}^n = X_{k2^{-n}}^n + a(k2^{-n},X^n)\left[C_{(k+1)2^{-n}} - C_{k2^{-n}}\right] \\ \qquad\qquad + b(k2^{-n},X^n)\left[W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k2^{-n}}\right] \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on posera, comme dans B.5 :

$$t_k = k2^{-n}$$

et $\quad X_k^n = X_{k2^{-n}}^n$

Soient $\sqrt{a_3}$ et $\sqrt{b_3}$ les constantes uniformes de Lipschitz associées aux processus a et b

(i.e. $||a(s,x) - a(s,y)||^2 \leqslant a_3 \sup_{u\leqslant s} ||x_u - y_u||^2$ et de même pour b)

On a alors, pour tout dyadique t d'ordre n :

$$E \sup_{s\leqslant t} ||X_s - X_s^n||_H^2 \leqslant \left[4(qa_4 + 4v\, b_4)\, d(n)t\right] \left\{\exp 4(qa_3 + 4v\, b_3)t\right\}$$

avec $\quad d(n) = 4.2^{-n}(qa_1 + 4\, v\, b_1)$

<u>Démonstration</u>

1°/ Pour alléger les notations, on définit les processus $\bar{a}$ et $\bar{b}$ par :

$$\bar{a}(s,x) = a(k2^{-n},x) \qquad \text{si} \quad t_k \leqslant s < t_{k+1}$$

$$\bar{b}(s,x) = b(k2^{-n},x) \qquad \text{si} \quad t_k \leqslant s < t_{k+1}$$

On a donc :

$$X_k^n = X_o^n + \int_o^{t_k} \left[\bar{a}(s,X^n)\, dC_s + \bar{b}(s,X^n)\, dW_s\right]$$

n et k étant fixés, on pose comme précédemment :

$$K = \{t / t_k \leqslant t < t_{k+1}\}$$

2°/ On pose

$$y(k) = 2q_2\, E\int_o^{t_k} ||a(s,X) - \bar{a}(s,X^n)||^2\, dQ_s$$

$$+ 8 \int_o^{t_k} ||b(s,X) - \bar{b}(s,X^n)||^2\, dV_s$$

Et on montre encore que

$$E \sup_{s\leqslant t_k} ||X_s - X_s^n||^2 \leqslant y(k)$$

3°/

$$y(k+1) - y(k) \leqslant 2q2^{-n}\, E \sup_{s\in K} ||a(s,X) - \bar{a}(s,X^n)||^2$$

$$+ 8\, v\, 2^{-n}\, E \sup_{s\in K} ||b(s,X) - \bar{b}(s,X^n)||^2$$

$$E \sup_{s\in K} ||a(s,X) - \bar{a}(s,X^n)||^2 \leqslant$$

$$2\, E \sup_K ||a(s,X) - \bar{a}(s,X)||^2 + 2\, E \sup_K ||\bar{a}(s,X) - \bar{a}(s,X^n)||^2$$

La première espérance se majore à l'aide de la continuité de a et de l'inégalité B.4, la deuxième à l'aide de la condition de Lipschitz et l'inégalité du 2°/. Cela donne :

$$E \sup_K ||a(s,X) - \bar{a}(s,X^n)||^2 \leqslant 2\left[a_4\, d(n) + a_3\, y(k)\right]$$

Et de la même façon :

$$E \sup_K ||b(s,X) - \bar{b}(s,X^n)||^2 \leqslant 2\left[b_4\, d(n) + b_3\, y(k)\right]$$

Finalement :

$$y(k+1) - y(k) \leqslant 4.2^{-n}(qa_4 + 4\, v\, b_4)\, d(n)$$

$$+ 4.2^{-n}(qa_3 + 4\, v\, b_3)\, y(k)$$

d'où en raison de A.12,

$$y(k) \leqslant \left[4(qa_4 + 4\ v\ b_4)\ d(n)\ t_k\right] \ \exp \left\{4(qa_3 + 4\ v\ b_3)\ t_k\right\}$$

Et l'inégalité est démontrée.

B.7 - DISCRETISATION ADAPTEE

Au chapitre suivant, nous verrons qu'au lieu d'opérer à intervalles de temps constants, on peut opérer à intervalles de temps aléatoires, ces temps successifs étant en fait des temps d'arrêt.

On peut aussi procéder de cette façon sous les hypothèses indiquées en B.1, mais ceci ne semble pas apporter d'améliorations intéressantes.

Plus précisément, dans tout ce qui précède, on peut remplacer t(k) par un temps d'arrêt u(k).

On a les mêmes inégalités que précédemment si, pour tout k,

$$E \left\{ \sup_{s \leqslant u(k+1)} \|X_s - X_{u(k)}\|^2 \right\} \leqslant d(n)$$

ceci sera notamment le cas si, par exemple, on choisit :

$$u(k+1) = \inf \left\{ t : \|X_t - X_{u(k)}\|^2 > \frac{d(n)}{P(\left[u(k) < 1\right])} \right\}$$

B.8 - CAS DE CONDITIONS DE LIPSCHITZ LOCALES

En B.1, nous avons supposé que les conditions de Lipschitz étaient satisfaites globalement pour a et b, c'est-à-dire quels que soient x et x' éléments de D^H.

En pratique, cette condition est rarement satisfaite rigoureusement et on a seulement des conditions de Lipschitz en restriction au domaine

$$\sup_s \|x_s\| \leqslant n \quad , \quad \sup_s \|x'_s\| \leqslant n$$

pour les processus a et b.

Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut parfois déterminer n en sorte que, si X est solution de

$$X_t = X_o + \int_o^t \left[a(s,X)\ dC_s + b(s,X)\ dW_s\right]$$

alors $\quad P\left\{ \exists t : \|X_t\| \geqslant n \right\} \leqslant \varepsilon$.

On choisit donc ε compte-tenu de la précision que l'on souhaite, puis on se ramène à la situation du paragraphe B.1 en considérant les constantes $a_3(n)$ et $b_3(n)$.

On peut d'ailleurs vérifier, au cours de la simulation, que la norme du processus X ne dépasse n qu'avec la probabilité ε indiquée.

On peut améliorer ce qui précède comme suit :

B.9 - PROPOSITION

On considère les hypothèses et notations indiquées en B.1, moins l'hypothèse que a et b sont globalement lipschitziens : on suppose seulement qu'ils satisfont à la condition suivante :

il existe une suite de triplets de constantes $(K(k), a_3(k), b_3(k))_{k>0}$ telle que, pour tout k,

$$\sup_{s \leqslant t} \|x_s\| \leqslant K(k) \quad \text{et} \quad \sup_{s \leqslant t} \|x'_s\| \leqslant K(k) \quad \text{impliquent}$$

$$\|a(t,x) - a(t,x')\|^2 \leqslant a_3(k) \sup_{s \leqslant t} \|x_s - x'_s\|^2$$

et $\quad \|b(t,x) - b(t,x')\|^2 \leqslant b_3(k) \sup_{s \leqslant t} \|x_s - x'_s\|^2$

Soit X le processus tel que $X_t = X_o + \int_o^t \left[a(s,X)\ dC_s + b(s,X)\ dW_s\right]$

On suppose que, pour tout k, on a :

$$\text{Proba} \left\{ \exists t ; \|X_t\| \geqslant K(k) \right\} \leqslant \varepsilon(k)$$

On a alors, pour tout k *et pour tout* $\alpha > o$, *si* X^n *est défini comme en B.5*

$$\text{Proba}\left\{ \sup_{s \leq t} ||X_s - X^n_s||^2_H > \alpha \right\} \leq \varepsilon(k) + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{k} \left\{ d(n).t.g(j) \exp[t.g(j)] \right\}$$

avec, pour tout j,

$$g(j) = 4 \left[q a_3(j) + 4 \, v \, b_3(j)\right] \quad \varepsilon(j-1)$$

Démonstration

Soit $(u(k))_{k>o}$ la suite de temps d'arrêt définie par :

$$u(o) = o$$

et $$u(k) = \inf \left\{ t : ||X_t|| \geq K(k) \right\}$$

On raisonne alors comme en B.5 sur chaque intervalle stochastique $I(k) = \left]u(k-1), u(k)\right]$, ce qui donne :

$$E\left\{ \sup_{s \in I(k)} ||X_s - X^n_s||^2_H \right\} \leq \left[d(n).f(k).\Delta_k t\right] \exp\left[f(k).\Delta_k t\right]$$

avec $$f(k) = 4 \left[q a_3(k) + 4 \, v \, b_3(k)\right]$$

et $$\Delta_k t = \iint \left[u(k) - u(k-1)\right] dt \otimes dP(\omega) \leq t \, P\left\{ u(k-1) < t \right\}$$

or $$\text{Proba}\left\{ \sup_{s \in I(k)} ||X_s - X^n_s||^2_H \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\alpha^2} E\left\{ \sup_{s \in I(k)} ||X_s - X^n_s||^2_H \right\}$$

ce qui donne finalement :

$$\text{Proba}\left\{ \sup_{s} ||X_s - X^n_s||^2_H \geq \alpha \right\} \leq P\left[u(k) < 1\right] + \sum_{j=1}^{k} P\left\{ \sup_{s \in I(j)} ||X_s - X^n_s||^2_H > \alpha \right\}$$

$$\leq \varepsilon(k) + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{k} \left\{ d(n) \, g(j) t \, \exp\left[g(j) \, t\right] \right\}$$

C | DISCRETISATION ADAPTEE

C.1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans la première partie de ce paragraphe (C.1 à C.6) les processus utilisés seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On se donne donc :

- une base initiale B^I (cf. A.1)
- deux processus réels, C et M, continus, définis et adaptés relativement à B^I.
- deux autres processus réels, $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$, définis et adaptés relativement à B^I, uniformément lipschitziens. On est donc dans le cas "sans mémoire" (cf. A.4 et A.6). On suppose que a et b sont continus à droite par rapport à la 1ère variable.

On appelle $|C|$ le processus variation totale de C et on suppose que

$$E \int_{]o,1]} d|C_s| < +\infty$$

On suppose que M est une martingale de carré intégrable, de variation quadratique $\langle M \rangle$.

Par convention, on dira que Z est une transformée du processus cadlag X s'il existe un processus prévisible réel H, uniformément borné par 1, tel que :

$$Z_t = \int_{]o,t]} H_s \, dX_s$$

On utilisera alors souvent la propriété suivante :

$$\langle Z \rangle_t \leq \langle X \rangle_t$$

Enfin, $\langle Z,V \rangle$ représente, comme d'habitude, le processus "naturel" à variation bornée associé au couple de quasi-martingales (Z,V).

C.2 - PROPOSITION 1

Soient Z *et* V *deux quasi-martingales réelles continues.*

On pose $W_t = - V_t + \frac{1}{2} \langle V\rangle_t$

et $Y_t = \exp(-W_t) \int_o^t \exp(W_s) \left[dZ_s - d\langle Z,V\rangle_s\right]$

alors $Y_t = Z_t - Z_o + \int_o^t Y_s \, dV_s$

Démonstration

Soit $\phi(x,y)$ la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\phi(x,y) = xe^{-y}$$

Soient $U_t = Z_t - \langle Z,V\rangle_t$

et $K_t = \int_o^t \exp(W_s) \, dU_s$

La formule de Ito appliquée à $\phi(K_t,W_t)$ donne :

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi(K_t,W_t) - \phi(K_o,W_o) \\ &= - \int_o^t K_s \exp(-W_s) \, dW_s + \frac{1}{2} \int_o^t K_s \exp(-W_s) \, d\langle W\rangle_s \\ &\quad + \int_o^t \exp(-W_s) \, dK_s - \int_o^t \exp(-W_s) \, d\langle K_s,W_s\rangle \end{aligned}$$

or $\langle W\rangle_s = \langle V\rangle_s$, et la somme des deux premiers termes est égale à :

$$\int_o^t K_s \exp(-W_s) \, dV_s = \int_o^t Y_s \, dV_s$$

d'autre part

$$\int_o^t \exp(-W_s) \, dK_s = U_t - U_o = Z_t - Z_o - \langle Z,V\rangle_t$$

et $\langle K_t,W_t\rangle = \exp(W_t) \langle U_t,W_t\rangle = \exp(W_t) \langle Z_t,W_t\rangle$

$$\int_o^t \exp(-W_s) \, d\langle K_s,W_s\rangle = \langle Z,V\rangle_t$$

on a donc bien

$$Y_t = Z_t - Z_o + \int_o^t Y_s \, dV_s$$

C.3 - DISCRETISATION ADAPTEE, CAS REEL CONTINU

On considère les hypothèses et notations indiquées en C.1. On suppose de plus que C et M sont à trajectoires continues. Soit X le processus continu, unique à l'indistinguabilité près, adapté à la base initiale B^I et tel que

$$X_t = X_o + \int_o^t \left[a(s,X) \, dC_s + b(s,X) \, dM_s\right]$$

Soit $\varepsilon > o$ donné. On définit simultanément une suite $(u(k))$ de temps d'arrêt et un processus X^ε comme suit :

i) Soit $(u(k))_{k>o}$ la suite de temps d'arrêt définis par récurrence par :

$$u(o) = o$$

$$u(k+1) = \inf \left\{ t : \begin{array}{l} |a(t,X^\varepsilon_{t\wedge u(k)}) - a(u(k),X^\varepsilon)| > \varepsilon , \\ |b(t,X_{t\wedge u(k)}) - b(u(k),X^\varepsilon)| > \varepsilon , \\ |a(u(k),X^\varepsilon)| . |C_t - C_{u(k)}| > \dfrac{\varepsilon}{2 \sup(a_3,b_3)} , \\ |b(u(k),X^\varepsilon)| . |M_t - M_{u(k)}| > \dfrac{\varepsilon}{2 \sup(a_3,b_3)} \end{array} \right\}$$

On suppose que $P\left[\lim\limits_{k\to\infty} u(k) < 1\right] = 0$ (cf. C.6 ci-après)

ii) Soit X^ε le processus défini par récurrence sur k par :

$$X^\varepsilon_t(\omega) = \int_{]u(k),t]} \left[a(u(k)(\omega),X^\varepsilon,\omega) \, dC_s(\omega) + b(u(k)(\omega),X^\varepsilon,\omega) \, dM(\omega)\right] + X^\varepsilon_{u(k)(\omega)}(\omega)$$

pour (t,ω) appartenant à l'intervalle stochastique $|u(k), u(k+1)|$

alors a) si on pose $Y_t = X_t - X^\varepsilon_t$, Y_t est solution d'une équation différentielle stochastique du type $Y_t = \varepsilon Z_t + \int_o^t Y_s \, dV_s$

et b) $E\left\{\mathrm{Log}\sup|X_s - X_s^{\varepsilon}|\right\} \leqslant \mathrm{Log}\,\varepsilon + (2a_3+1)\,E\int_{]0,1]} d|C_s|$

$$+ (5+b_3^2)E\langle M\rangle_1 + 16(1+\sqrt{2})(2b_3+1)\left\{E\langle M\rangle_1\right\}^{1/2}$$

Démonstration

Pour alléger les notations, on désignera par $\bar{a}(s,x,\omega)$ et $\hat{a}(s,x,\omega)$ les processus définis sur la base B^I par :

$$\bar{a}(s,x,\ ) = a[u(k)\ (\omega), x, \omega]$$

et $$\hat{a}(s,x,\omega) = a[s, x_{s\wedge u(k)}, \omega]$$

si (s,Ω) appartient à l'intervalle stochastique $]u(k),u(k+1)]$. On définira de même $\bar{b}$ et $\hat{b}$.

Nous allons introduire quelques processus auxiliaires, Y, $\tilde{C}$, $\tilde{M}$, V et Z, ces processus étant tous pris nuls en zéro. On pose donc :

$$Y = X - X^{\varepsilon}$$

$$\tilde{C}_t = \int_{]0,t]} \frac{1}{a_3 Y_s}\,[a(s,X) - a(s,X^{\varepsilon})]\,dC_s$$

$$\tilde{M}_t = \int_{]0,t]} \frac{1}{b_3 Y_s}\,[b(s,X) - b(s,X^{\varepsilon})]\,dM_s$$

$$V_t = a_3\,\tilde{C}_t + b_3\,\tilde{M}_t$$

et $$Z_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_{]0,t]} [a(s,X^{\varepsilon}) - \bar{a}(s,X^{\varepsilon})]\,dC_s + [b(s,X^{\varepsilon}) - \bar{b}(s,X^{\varepsilon})]\,dM_s$$

On vérifie alors facilement que l'on a :

$$Y_t = \int_{]0,t]} Y_s\,dV_s + \varepsilon Z_t$$

D'après C.2, Y_t s'écrit donc :

$$Y_t = \exp(-W_t)\int_{]0,t]} \exp(W_s)\,[\varepsilon dZ_s - \varepsilon\, d\langle Z,V\rangle_s]$$

avec $$W_t = -V_t + \frac{1}{2}\langle V,V\rangle_t$$

Pour majorer $E\left\{\mathrm{Log}\sup|Y_t|\right\}$ nous allons procéder en deux étapes

- étude des processus $\tilde{C}_t$, $\tilde{M}_t$, V_t et Z_t (C.4)
- majoration finale de $E\left\{\mathrm{Log}\sup|Y_t|\right\}$ (C.5)

C.4 - ETUDE DES PROCESSUS UTILISES

$\tilde{C}_t$ (resp. $\tilde{M}_t$) est une transformée de C_t (resp. M_t). Cela résulte en effet de la construction de ce processus et de la condition de Lipschitz.

De même Z est une somme de transformées de C et M. En effet on peut écrire :

$$Z = Z^1 + Z^2 + Z^3 + Z^4$$

en posant :

$$\varepsilon Z_t^1 = \int_{]0,t]} [a(s,X^{\varepsilon}) - \hat{a}(s,X^{\varepsilon})]\,dC_s$$

$$\varepsilon Z_t^2 = \int_{]0,t]} [\hat{a}(s,X^{\varepsilon}) - \bar{a}(s,X^{\varepsilon})]\,dC_s$$

$$\varepsilon Z_t^3 = \int_{]0,t]} [b(s,X^{\varepsilon}) - \hat{b}(s,X^{\varepsilon})]\,dM_s$$

$$\varepsilon Z_t^4 = \int_{]0,t]} [\hat{b}(s,X^{\varepsilon}) - \bar{b}(s,X^{\varepsilon})]\,dM_s$$

Z_t^2 et Z_t^4 sont, par construction des temps d'arrêt u(k), des transformées de C et M. Par ailleurs, sur l'intervalle stochastique $]u(k), u(k+1)]$:

$$|a(s,X^{\varepsilon}) - \hat{a}(s,X^{\varepsilon})| \leqslant a_3|X_s^{\varepsilon} - X_{u(k)}^{\varepsilon}|$$

$$= a_3\left|\int_{u(k)}^{s} \bar{a}(s,X^{\varepsilon})\,dC_s + \bar{b}(s,X^{\varepsilon})\,dM_s\right|$$

$$\leqslant a_3\left\{|a(u(k),X^{\varepsilon})|\ |C_s - C_{u(k)}| + |b(u(k),X^{\varepsilon})|\ |M_s - M_{u(k)}|\right\}$$

Par construction des (u(k)) on a donc :

$$|a(s,X^{\varepsilon}) - \hat{a}(s,X^{\varepsilon})| \leqslant \varepsilon$$

et de la même façon

$$|b(s,X^{\varepsilon}) - \hat{b}(s,X^{\varepsilon})| \leqslant \varepsilon$$

Au total, Z est bien une somme de transformées de C et M.

C.5 - MAJORATION FINALE DE $E\left\{\text{Log} \sup |Y_t|\right\}$

Notons d'abord que l'on a :

$$\left|\int_0^t \exp(W_s)\,(dZ_s - d\langle Z,V\rangle_s)\right|$$

$$= \left|\sup_{u\leqslant t}\exp(W_u)\int_{]0,t]}\frac{\exp(W_s)}{\sup\exp(W_u)}\,(dZ_s - d\langle Z,V\rangle_s)\right|$$

$$\leqslant \sup_{u\leqslant t}\exp(W_u)\left\{|\bar{Z}_t| + \int_T d|\langle Z,V\rangle_s|\right\}$$

où $\bar{Z}_t$ est une transformée de Z_t.

On en tire :

$$\text{Log}\sup_{t\in T}|Y_t| \leqslant \text{Log}\,\varepsilon + 2\sup_t|W_t| + \text{Log}\left\{\sup_t|\bar{Z}_t| + \int_T d|\langle Z,V\rangle_s|\right\}$$

$$E\left\{\text{Log}\sup_t|Y_t|\right\} \leqslant \text{Log}\,\varepsilon + 2\,E\sup_t|W_t| + E\sup_t|\bar{Z}_t| + E\int_T d|\langle Z,V\rangle_s|$$

or $2\,E\sup_t|W_t| \leqslant 2\,E\sup_t|V_t| + E\langle V\rangle_1$

$$E\sup_t|V_t| \leqslant a_3\,E\sup_t|\tilde{C}_t| + b_3 E\sup_t|\tilde{M}_t|$$

$$\leqslant a_3\,E\int_T d|C_t| + 16\,b_3(1+\sqrt{2})\left\{E\langle M\rangle_1\right\}^{1/2}$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, $\bar{Z}$ peut s'écrire :

$$\bar{Z}_t = \int_{]0,t]}\left[H_s\,dC_s + J_s\,dM_s\right]$$

où H et J sont deux processus prévisibles uniformément bornés par 1.

Alors $\quad E\sup_t|\bar{Z}_t| \leqslant E\sup_t\left|\int_{]0,t]}H_s\,dC_s\right| + E\sup_t\left|\int_{]0,t]}J_s\,dM_s\right|$

$$\leqslant E\int_{]0,1]}d|C_s| + 16(1+\sqrt{2})\left\{E\langle M\rangle_1\right\}^{1/2}$$

Enfin, $\quad E\int_T d|\langle Z,V\rangle_s| \leqslant E\langle Z\rangle_1 + E\langle V\rangle_1 \leqslant (4+b_3^2)\,E\langle M\rangle_1$

On en tire alors l'inégalité annoncée.

C.6 - ETUDE DES TEMPS D'ARRET

On va donner une condition suffisante pour que $P\left[\lim_{k\to\infty} u(k) < 1\right] = 0$.

On considère les hypothèses du théorème C.3 et on suppose que les processus a et b sont uniformément bornés : i.e., il existe une constante C telle que, pour tout élément (t,x,ω) de $T\times D^{\mathbb{R}}\times\Omega$, on a :

$$|a(t,x,\omega)|^2 + |b(t,x,\omega)|^2 \leqslant C$$

Alors $\quad P\left[\lim_{k\to\infty} u(k) < 1\right] = 0$

Démonstration

$$E\sup_{s\leqslant u(k)}|X_s^{\varepsilon}|^2 \leqslant 2\,E\left\{\sup_{s\leqslant u(k)}\left|\int_0^s \bar{a}(u,X^{\varepsilon})\,dC_s\right|^2\right\}$$

$$+ 2\,E\left\{\sup_{s\leqslant u(k)}\left|\int_0^s \bar{b}(u,X^{\varepsilon})\,dM_s\right|^2\right\}$$

$$\leqslant 2\,E\left\{\sup_{j\leqslant k}|a(u(j),X^{\varepsilon})|^2\left|\int_0^1 d|C_s|\right|^2\right\}$$

$$+ 8\,E\left\{\int_0^{u(k)}|\bar{b}(s,X^{\varepsilon})|^2\,d\langle M\rangle_s\right\}$$

soit

$$E\sup_{s\leqslant u(k)}|X_s^{\varepsilon}|^2 \leqslant 2\,C\left[E\int_0^1 d|C_s|^2 + 4\,E\int_0^1 d\langle M\rangle_s\right]$$

Il en résulte que $\quad P\left[\lim_{k\to\infty} u(k) < 1\right] = 0$

remarque : on aurait pu prendre comme condition

$$||a(t,x,\omega)||^2 + b(t,x,\omega)|^2 \leqslant C(1+\sup_{s\leqslant t}|x_s|^2)$$

C.7 - DISCRETISATION ADAPTEE, CAS HILBERTIEN : HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans la suite de ce paragraphe C, on se donne :

- un espace de Hilbert H, dans lequel le produit scalaire sera noté $(.|.)$
- un sous-espace $\mathcal{L}_a(H,H)$ de $\mathcal{L}(H,H)$; ce sous-espace est muni d'une norme $||.||$ telle que, si k appartient à $\mathcal{L}_a(H,H)$ et si h appartient à H,

$$||k(h)||_H \leq ||k|| \, . \, ||h||_H$$

- une base initiale B^I.
- deux processus C et M, à valeurs dans H, continus et adaptés à la base B^I.
- deux processus a et b, à valeurs dans $\mathcal{L}_a(H,H)$, uniformément lipschitziens, à trajectoires continues, adaptés à la base B^I.

On définit la notion de transformée d'un processus réel comme en C.1. Si X est un processus à valeurs dans H, on dira que $\tilde{X}$ est une transformée de X si $\tilde{X}$ est un processus réel, tel qu'il existe Y prévisible, à valeurs dans H, borné par 1, tel que

$$\tilde{X}_t = \int_o^t (Y_s|dX_s)$$

C.8 - PROPOSITION

Soit $\varepsilon > 0$ *et soient* Y *et* Z *deux quasi-martingales continues, à valeurs dans* H, *nulles en 0, adaptées à la base* B^I.

Soient A *et* B *deux processus prévisibles, à valeurs dans* $\mathcal{L}_a(H,H)$.

Soient C *et* M *deux processus continus, à valeurs dans* H *, définis et adaptés relativement à* B^I.

On suppose que l'on a :

i) $$Y_t = \varepsilon Z_t + \int_o^t A_s\, dC_s + \int_o^t B_s\, dM_s$$

ii) pour tout t , $||A_t|| \leq a_3 \, ||Y_t||$ et $||B_t|| \leq b_3 ||Y_t||$

Alors, on a :

$$||Y_t||^2 = \exp(-W_t) \int_o^t \exp(W_s) \, [dF_s - d<F,V>_s]$$

avec $$V_s = a_3 \tilde{C}_s + b_3 \tilde{M}_s + 2b_3^2 \tilde{\hat{M}}_s + \varepsilon \tilde{\bar{Z}}_s$$

où $\tilde{C}$, $\tilde{M}$, $\tilde{\hat{M}}$ et $\tilde{\bar{Z}}$ sont des transformées de C, M, $\langle M \rangle$ et Z respectivement

$$F_s = \varepsilon \tilde{Z}_s + 2\, \varepsilon^2 \, \hat{Z}_s \quad ,$$

où $\tilde{Z}$ et $\hat{Z}$ sont des transformées de Z et $\langle Z \rangle$

et $$W_t = -V_t + 1/2 <V>_t$$

Démonstration

On pose $K_t = ||Y_t||^2 = (Y_t|Y_t)$

Soit E la fonction de H dans R^+ définie par $F(h) = (h|h)$. En appliquant la formule de Ito à $F(Y_t)$ on trouve :

$$K_t - K_o = \int_o^t (Y_s|dY_s) + <Y_t>$$

soit $$K_t = \int_o^t (Y_s|A_s\, dC_s + B_s\, dM_s + \varepsilon dZ_s) + < \varepsilon Z_t + \int_o^t B_s\, dM_s >$$

On pose $$\tilde{C}_t = \int_o^t \left(Y_s | \frac{A_s\, dC_s}{a_3||Y_s||^2} \right)$$

$$\tilde{M}_t = \int_o^t \left(Y_s | \frac{B_s\, dC_s}{b_3||Y_s||^2} \right)$$

$$\bar{Z}_t = \int_o^t \left(\frac{Y_s}{||Y_s||} , dZ_s \right)$$

On vérifie immédiatement que $\tilde{C}$, $\tilde{M}$ et $\bar{Z}$ sont des transformées de C, M et Z respectivement.

De plus, $d<\varepsilon Z_t + \int_o^t B_s\, dM_s> \;\leq\; 2\, \varepsilon^2\, d<Z>_t + 2||B_t||^2\, d<M>_t$

puisque la variation quadratique de la somme est plus petite que deux fois la somme des variations quadratiques.

On choisit alors deux processus croissants $\hat{Z}$ et $\hat{M}$, tels que

$$d\hat{Z}_t \leqslant d\langle Z\rangle_t \qquad\qquad d\hat{M} \leqslant d\langle M\rangle_t$$

et tels que

$$\langle \varepsilon Z_t + \int_o^t B_s \, dM_s \rangle = 2\,\varepsilon^2\,\hat{Z}_t + 2b_3^2 \int_o^t ||Y_s||^2 \, \frac{||B_s||^2}{b_3^2||Y_s||^2}\, d\hat{M}_s$$

On pose alors

$$\tilde{\hat{M}} = \int_o^t \frac{||B_s||^2}{b_3^2||Y_s||^2}\, d\hat{M}_s$$

ce qui définit une transformée de $\hat{M}$.

On obtient donc $\quad K_t = \int_o^t K_s(a_3\, d\tilde{C}_s + b_3\, d\tilde{M}_s + 2b_3^2\, d\tilde{\hat{M}}_s)$

$$+\varepsilon\int_o^t (K_s)^{1/2}\, d\bar{Z}_s + 2\varepsilon^2\,\hat{Z}_t$$

On pose $\quad K_s^1 = (K_s)^{1/2} \wedge 1 \qquad$ et $\qquad K_s^2 = (K_s)^{1/2} - K_s^1$

alors $\quad \varepsilon \int_o^t (K_s)^{1/2}\, d\bar{Z}_s = \varepsilon\int_o^t K_s^1\, dZ_s + \int_o^t K_s \cdot \frac{K_s^2}{K_s}\, d\bar{Z}_s$

$$= \varepsilon\,\tilde{Z}_t = \varepsilon\int_o^t K_s\, d\tilde{\bar{Z}}_s$$

avec $\quad \tilde{Z}_t = \int_o^t K_s^1\, d\bar{Z}_s \qquad$ et $\qquad \tilde{\bar{Z}}_t = \int_o^t \frac{K_s^2}{K_s}\, d\bar{Z}_s$

($\tilde{Z}$ et $\tilde{\bar{Z}}$ sont bien des transformées de $\bar{Z}_t$).

finalement, on obtient

$$K_t = \int_o^t K_s\, dV_s + F_t$$

V et F étant définis plus haut.

On est alors dans les conditions d'application de la proposition 1, et, en posant :

$$W_t = -V_t + 1/2\,\langle V\rangle_t$$

on démontre la proposition.

C.9 - <u>THEOREME</u>

On considère les hypothèses de C.7.

Soit X *le processus continu, adapté à* B^I, *à valeurs dans* H *tel que*

$$X_t - X_o = \int_o^t a(s,X)\, dC_s + \int_o^t b(s,X)\, dM_s$$

Soit $\varepsilon > 0$ *donné.*

On définit simultanément une suite $(u(k))$ *de temps d'arrêt et un processus* X^ε *comme suit :*

i) $\quad u(o) = 0$

$$u(k+1) = \inf\left\{ t : \; \begin{array}{l} ||a(s,X^\varepsilon_{s\wedge u(k)}) - a(u(k),X^\varepsilon)|| > \varepsilon \;, \\ ||b(s,X^\varepsilon_{s\wedge u(k)}) - b(u(k),X^\varepsilon)|| > \varepsilon \;, \\ ||a(u(k),X^\varepsilon)||.||C_s - C_{u(k)}|| > \dfrac{\varepsilon}{2a_3 \vee b_3} \;, \\ ||b(u(k),X\;)||.||M_s - M_{u(k)}|| > \dfrac{\varepsilon}{2a_3 \vee b_3} \end{array} \right\}$$

ii) $\quad X_o^\varepsilon = X_o$

$$X_t^\varepsilon = X^\varepsilon_{u(k)} + \int_{u(k)}^t \left[a(u(k),X^\varepsilon)\, dC_s + b(u(k),X^\varepsilon)\, dM_s\right]$$

pour $t \in \,]u(k),u(k+1)]$

Alors, en posant $Y_t = X_t - X_t^\varepsilon$, Y_t^ε *est solution d'une équation différentielle du type*

$$Y_t = \varepsilon Z_t + \int_o^t [\, A_s\, dC_s + B_s\, dM_s \,]$$

et on a :

$$E\left\{ \text{Log} \sup_{s\; T} ||X_s - X_s^\varepsilon||_H^2 \right\} \leqslant \text{Log}\;\varepsilon + (4a_3 + 9\varepsilon + 2\varepsilon^2)\left\{ E\int_o^1 d|C_s| \right\}$$

$$+ 16\,(1+\sqrt{2})\,(4b_3 + 9\varepsilon + 2\varepsilon^2)\left\{E\langle M\rangle_1\right\}^{1/2}$$

$$+ (20\,b_3^2 + 48\,b_3^4 + 56\,\varepsilon^2 + 32\,\varepsilon^4)\; E\,\langle M\rangle_1$$

Démonstration

Pour simplifier l'écriture, on pose, pour $(s,\omega)\in]u(k),u(k+1)]$,

$\bar{a}(s,X,\omega) = a(u(k),X,\omega)$

et de même pour $\bar{b}$.

On peut alors écrire :

$$X_t^{\varepsilon} = X_o^{\varepsilon} + \int_o^t [\bar{a}(s,X^{\varepsilon})dC_s + \bar{b}(s,X^{\varepsilon})\ dM_s]$$

On pose $Y_t = X_t - X_t^{\varepsilon}$

$$Y_t = \int_o^t [a(s,X) - \bar{a}(s,X^{\varepsilon})]dC_s + \int_o^t [b(s,X) - \bar{b}(s,X^{\varepsilon})]\ dM_s$$

$$Y_t = \int_o^t [a(s,X) - a(s,X^{\varepsilon})]dC_s + \int_o^t [b(s,X) - b(s,X^{\varepsilon})]\ dM_s$$

$$+ \varepsilon\int_o^t \frac{1}{\varepsilon}[a(s,X^{\varepsilon}) - \bar{a}(s,X^{\varepsilon})]dC_s + \frac{1}{\varepsilon}[b(s,X^{\varepsilon})-\bar{b}(s,X^{\varepsilon})]dM_s$$

en posant

$A_s = a(s,X) - a(s,X^{\varepsilon})$

$B_s = b(s,X) - b(s,X^{\varepsilon})$

$$Z_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t [a(s,X^{\varepsilon}) - \bar{a}(s,X^{\varepsilon})]dC_s + [b(s,X^{\varepsilon}) - \bar{b}(s,X^{\varepsilon})]\ dM_s$$

on vérifie immédiatement la première partie de la proposition.

De plus, on se trouve dans les conditions d'applications de la proposition C.8. On en tire donc :

$$||Y_t||^2 = \exp(-W_t)\int_o^t \exp(W_s)\ [\varepsilon dF_s - d\langle F,V\rangle_s]$$

F, V et W étant définis comme dans C.8.

Le reste de la démonstration se fait alors comme dans C.3, soit, en détaillant :

$$\left[\int_o^t \exp(W_s)\ |dF_s - d\langle F,V\rangle_s|\right]$$

$$\leqslant \sup_{u\leqslant t} \exp(W_u)\left[\int_o^t \frac{\exp(W_s)}{\sup_{u\leqslant s}\exp(W_u)}[dF_s - d\langle F,V\rangle_s]\right]$$

$$\leqslant \sup_{u\leqslant t}\{\exp(W_u)\}\cdot\{\tilde{F}_t + \int_o^1 d|\langle F,V\rangle_s|\}$$

où $\tilde{F}_t$ est une transformée de F_t. On en tire :

$$\operatorname{Log}\sup_{s\leqslant t}||X_s - X_s||^2 \leqslant \operatorname{Log}\varepsilon + 2\sup_s|W_s| + \operatorname{Log}\{\sup|\tilde{F}_s| + \int_T d|\langle F,V\rangle_s|\}$$

soit

$$E\{\operatorname{Log}\sup_s ||X_s - X_s||^2\} \leqslant \operatorname{Log}\varepsilon + 2\,E\sup_s|W_s| + E\sup|\tilde{F}_s| + E\int_T d|\langle F,V\rangle_s|$$

Pour évaluer le second membre de cette dernière on va étudier successivement :

Z_t (C.10)

$E\sup_s|V_s|$ (C.11)

$E\sup_s|\tilde{F}_s|$ (C.12) et $E\int_T d|\langle F,V\rangle_s|$ (C.13)

C.10 - ETUDE DE Z_t

On a :

$$Z_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t [a(s,X^{\varepsilon}) - a(s,X^{\varepsilon})]\ dC_s + \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t [b(s,X^{\varepsilon}) - b(s,X^{\varepsilon})]\ dM_s$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t [a(s,X_s^{\varepsilon}) - a(s,X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)})]\ dC_s + \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t [a(s,X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)}) - a(u(k),X^{\varepsilon})]dC_s$$

or, par construction des temps d'arrêt u(k), on a :

$$||a(s,X_s^{\varepsilon}) - a(s,X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)})|| \leqslant a_3\ ||X_s^{\varepsilon} - X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)}||$$

$$||X^{\varepsilon}_s - X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)}|| \leqslant ||a(u(k),X^{\varepsilon})|| \, . \, ||C_s - C_{u(k)}||$$

$$+ ||b(u(k),X^{\varepsilon})|| \, . \, ||M_s - M_{u(k)}||$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{a_3 \; b_3}$$

d'où $\quad \frac{1}{\varepsilon} \; ||a(s,X^{\varepsilon}_s) - a(s,X^{\varepsilon}_{s\wedge u(k)})|| \leqslant 1$

et $\quad \frac{1}{\varepsilon} \; ||a(s,X^{\varepsilon}_s) - a(u(k),X^{\varepsilon}_{u(k)}|| \leqslant 1$

α_1 est donc la somme d'intégrales par rapport à C de processus, H et I, prévisibles, à valeurs dans $\mathcal{L}_a(H,H)$, dont la norme est uniformément bornée par 1. On obtient de la même façon que α_2 est la somme d'intégrales par rapport à M de processus, J et L, prévisibles, à valeurs dans $\mathcal{L}_a(H,H)$ de norme uniformément bornée par 1.

On pose donc :

$$Z_t = \int_o^t \Big\{(H_s + I_s) \, dC_s + (J_s + L_s) \, dM_s\Big\}$$

C.11 - <u>ETUDE DE</u> $E \sup\limits_s |V_s|$

$$E \sup |V_s| \leqslant a_3 \, E \sup |\tilde{C}_s| + b_3 \, E \sup |\tilde{M}_s|$$

$$+ 2 \, b_3^2 \, E \sup |\tilde{\tilde{M}}_s| + \varepsilon E \sup |\tilde{Z}_s|$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \beta_i$$

$$\beta_1 = a_3 \, E \sup \Big| \int_o^s \Big(Y_u | \frac{A_u \; dC_u}{a_3 ||Y_u||^2} \Big) \Big| \leqslant a_3 \, E \int_o^1 d|C_u|$$

où $|C|$ est la variation totale de C.

Pour évaluer β_2, on rappelle l'inégalité pour la martingale réelle W (cf. [MP]) :

$$E \sup_s |W_s| \leqslant 16 \; (1 + \sqrt{2}) \quad \big\{ E\langle W\rangle_1 \big\}^{1/2}$$

Alors :

$$\beta_2 = b_3 \, E \sup_s \Big| \int_o^s \Big(Y_u | \frac{B_u \; dM_u}{b_3 ||Y_n||^2} \Big) \Big| \leqslant 16 \; b_3 (1+\sqrt{2}) \; \big\{ E\langle\tilde{M}\rangle_1 \big\}^{1/2}$$

$$\beta_2 \leqslant 16 \; b_3 (1+\sqrt{2}) \; \big\{ E\langle M\rangle_1 \big\}^{1/2}$$

$$\beta_3 = 2 \, b_3^2 \; E \sup \int_o^s \frac{||B_u||}{b_3^2 ||Y_n||^2} \; d\langle M\rangle_u \leqslant 2 \, b_3^2 \, E \langle M\rangle_1$$

enfin

$$\beta_4 = \varepsilon \, E \sup_s \Big| \int_o^s \frac{K_u^2}{K_u} \Big(\frac{Y_u}{||Y_u||} | dZ_u \Big) \Big|$$

$$\leqslant \varepsilon \, E \sup \Big| \int_o^s \frac{K_u^2}{K_u} \Big(\frac{Y_u}{||Y_u||} \, | \, (H_u + I_u) \, dC_u \Big) \Big|$$

$$+ \varepsilon \, E \sup \Big| \int_o^s \frac{K_u^2}{K_u} \Big(\frac{Y_u}{||Y_u||} \, | \, (J_u + L_u) \, dM_u \Big) \Big|$$

$$\beta_4 \leqslant 2\varepsilon \quad E \int_o^1 d|C_u| + 32 \; (1 + \sqrt{2}) \; \big\{ E\langle M\rangle_1 \big\}^{1/2}$$

d'où
$$E \sup_s |V_s| \leqslant (a_3 + 2) \; E \int_o^1 d|C_u|$$

$$+ 16 \; (b_3 + 2\varepsilon) \; (1 + \sqrt{2}) \; \big\{ E\langle M\rangle_1 \big\}^{1/2}$$

$$+ 2 \, b_3^2 \; E\langle M\rangle_1$$

C.12 - <u>ETUDE DE</u> $E \sup |\tilde{F}_s|$

$$E \sup_{s\leqslant t} |\tilde{F}_s| = E \sup \Big| \int_o^s \frac{\exp(W_u)}{\sup\limits_{v\leqslant u} \exp(W_v)} \big[\varepsilon \, d\tilde{Z}_u + 2\varepsilon^2 \, d\bar{Z}_u\big] \Big|$$

$$= E \sup \Big| \int_o^s \frac{\exp(W_u)}{\sup \exp(W_v)} \big[\varepsilon \, K_u^1 + 2\varepsilon^2\big] \, d\bar{Z}_u \Big|$$

en rappelant que $d\overline{Z}_t = (\frac{Y_t}{||Y_t||}, dZ_t)$

On a donc :

$$E \sup_s |\tilde{F}_s| \leqslant \varepsilon \, E \sup_s \left| \int_o^s N_u \left(\frac{Y_u}{||Y_u||} \mid dZ_u \right) \right|$$

$$+ 2 \varepsilon^2 E \sup_s \left| \int_o^s P_u \left(\frac{Y_u}{||Y_u||} \mid dZ_u \right) \right|$$

avec P et N, processus prévisibles réels, uniformément bornés par 1.

En utilisant les résultats déjà acquis sur Z, on obtient :

$$E \sup_s |\tilde{F}_s| \leqslant (\varepsilon + 2\varepsilon^2) \left\{ E \int_o^1 d|C_u| + 16(1+\sqrt{2}) \quad E\langle M\rangle_1^{\ 1/2} \right\}$$

C.13 - MAJORATION DE $E \int_T d|\langle F,V\rangle_s|$

$$E \int_T d|\langle F,V\rangle_s| \leqslant E\langle F\rangle_1 + E\langle V\rangle_1$$

on a, en utilisant le fait que, si $\tilde{X}$ est une transformée de X, $\langle\tilde{X}\rangle \leqslant \langle X\rangle$,

$$\langle F\rangle_t = \langle \varepsilon\tilde{Z}_t + 2\varepsilon^2 \hat{Z}_t\rangle \leqslant 2\varepsilon^2 \langle\tilde{Z}_t\rangle + 8\varepsilon^4 \langle\hat{Z}_t\rangle$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \langle\overline{Z}_t\rangle + 8\,\varepsilon^4 \langle Z\rangle_t \leqslant (2\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4) \langle Z\rangle_t$$

soit

$$\langle F\rangle_t \leqslant (2\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4) \left\langle \int_o^t (J_s + L_s)\, dM_s \right\rangle$$

$$\leqslant 2(2\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4) \left\{ \left\langle \int_o^t J_s\, dM_s \right\rangle + \left\langle \int_o^t L_s\, dM_s \right\rangle \right\}$$

et $E\langle F\rangle_1 \leqslant 8\varepsilon^2(1 + 4\varepsilon^2)\, E\langle M\rangle_1$

Par ailleurs :

$$\langle V\rangle_t = \langle a_3 \tilde{C}_t + b_3 \tilde{M}_t + 2b_3^2 \hat{\tilde{M}} + \varepsilon Z_t \rangle$$

$$\leqslant 4 \left\{ b_3^2 \langle\tilde{M}\rangle_t + 4b_3^4 \langle\hat{\tilde{M}}\rangle_t + \varepsilon^2 \langle\tilde{Z}\rangle_t \right\}$$

$$\leqslant 4 \left\{ b_3^2 \langle M\rangle_t + 4b_3^4 \langle M\rangle_t + \varepsilon^2 \langle Z\rangle_t \right\}$$

d'où

$$E\langle V\rangle_1 \leqslant \left\{ 4b_3^2 + 16\, b_3^4 + 16\varepsilon^2 \right\} \quad E\langle M\rangle_1$$

et $$E \int_T d|\langle F,V_s\rangle| \leqslant (4b_3^2 + 16b_3^4 + 24\varepsilon^2 + 32\varepsilon^4) \quad E\langle M\rangle_1$$

C.14 - MAJORATION FINALE DE $E \left\{ \text{Log} \sup_s ||X_s - X_s^\varepsilon||_H^2 \right\}$

On avait, dans C.9,

$$E \left\{ \text{Log} \sup_s ||X_s - X_s||^2 \right\} \leqslant \text{Log}\, \varepsilon + 2\, E \sup |W_s|$$

$$+ E \sup |\tilde{F}_s| + E \int_T d|\langle F,V\rangle_s|$$

comme $E \sup_s |W_s| \leqslant 2\, E \sup |V_s| + E\langle V\rangle_1$

Compte-tenu des majorations précédentes, on démontre donc l'inégalité annoncée en C.9.

D | DISCRETISATION AU 2ÈME ORDRE

D.1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans tout ce paragraphe D, on se donne :

- un espace de Hilbert H.
- un sous-espace $\mathcal{L}_a(H,H)$ de $\mathcal{L}(H,H)$, muni d'une norme $||.||$ telle que, si k appartient à $\mathcal{L}_a(H,H)$ et si h appartient à H,

$$||k(h)||_H \leqslant ||k|| \cdot ||h||_H$$

- une base initiale B^I.
- C et W, deux processus continus, à valeurs dans H, définis et adaptés relativement à B^I.

On associe respectivement à C et W deux processus Q et V, réels, positifs, croissants, continus, définis et adaptés relativement à B^I.

On suppose que W est une martingale de carré intégrable dont la variation quadratique, $\hat{W}$, est telle que, pour tout couple (s,t) de T, avec s < t, et pour tout ω de Ω, on a :

$$\hat{W}_t(\omega) - \hat{W}_s(\omega) \leqslant V_t(\omega) - V_s(\omega)$$

De même, si $A_t = \int_o^t d||C_s||$ désigne la variation totale de C, on suppose que, pour tout couple (s,t) de T avec s < t, et pour tout ω de Ω, on a :

$$A_t(\omega) - A_s(\omega) \leqslant Q_t(\omega) - Q_s(\omega)$$

On suppose, comme en B.1, que V et Q vérifient de plus les propriétés suivantes : pour tout couple (s,t) de T avec s < t, pour tout ω de Ω , et pour toute variable aléatoire X, $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a :

$$E[X(V_t - V_s)] = E(X)\ E(V_t - V_s)$$

$$E[X(Q_t - Q_s)] = E(X)\ E(Q_t - Q_s)$$

$$E(V_t - V_s) \leqslant v(t-s)$$

$$E(Q_t - Q_s) \leqslant q_1(t-s)$$

$$A_t(\omega) \leqslant q_2$$

où v, q_1 et q_2 sont des constantes. On posera $q = q_1 q_2$.

Soient enfin deux processus $a(t,x,\omega)$ et $b(t,x,\omega)$, définis et adaptés relativement à B^I, continus, uniformément lipschitziens (de coefficients respectifs a_3 et b_3).

On suppose que a, b et leurs dérivées partielles par rapport à la première et à la deuxième variable, notées

$$\frac{\partial a}{\partial t}, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

sont uniformément bornés en (t,x,ω). C'est-à-dire qu'il existe des constantes a_1, a_5, a_6, a_7, b_1, b_5, b_6 et b_7 telles que :

$$||a(t,x)||^2 \leqslant a_1 \quad ; \quad ||b(t,x)||^2 \leqslant b_1$$

$$||\frac{\partial a}{\partial t}(t,x)|| \leqslant a_5 \quad ; \quad ||\frac{\partial b}{\partial t}(t,x)|| \leqslant b_5$$

$$||\frac{\partial a}{\partial x}(t,x)|| \leqslant a_6 \quad ; \quad ||\frac{\partial b}{\partial t}(t,x)|| \leqslant b_6$$

$$||\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(t,x)|| \leqslant a_7 \quad \text{et} \quad ||\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t,x)|| \leqslant b_7$$

D.2 - CALCUL INTUITIF

Dans ce paragraphe D, on se propose de voir dans quelle mesure il y a intérêt à effectuer une discrétisation où, à chaque étape,

$(X_t - X_s)$ soit déterminé avec une précision supérieure à celle adoptée aux paragraphes précédentes.

Pour expliquer pourquoi, dans ce paragraphe, on néglige certains termes et pas d'autres, on va d'abord procéder à une étude "intuitive" préliminaire.

On a, sous des hypothèses convenables :

$$X_{t+h} - X_t = \Delta X = \int_t^{t+h} a(s,X_s)\, dC_s + \int_t^{t+h} b(s,X_s)\, dW_s$$

$$= a(t,X_t)\,\Delta C + \frac{\partial a}{\partial t}(t,X_t)\int_t^{t+h}(s-t)\, dC_s + \frac{\partial a}{\partial x}(t,X_t)\int_t^{t+h}(X_s - X_t)\, dC_s$$

$$+ b(t,X_t)\, dW + \frac{\partial b}{\partial t}(t,X_t)\int_t^{t+h}(s-t)\, dW_s + \frac{\partial b}{\partial x}(t,X_t)\int_t^{t+h}(X_s - X_t)\, dW_s + R_1$$

$$= R + \sum_{k=1}^{8} H_k$$

où R est une variable aléatoire "négligeable" à l'ordre deux en ce sens que sa variance est de l'ordre de h^4 et où les variables $(H_k)_{k=1}^{8}$ sont définies par :

$$H_1 = a(t,X_t)\,\Delta C \quad ; \quad H_2 = \frac{\partial a}{\partial t}(t,X_t)\int_t^{t+h}(s-t)\, dC_s$$

$$H_3 = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\cdot a\right)(t,X_t)\int_t^{t+h}(C_s - C_t)\, dC_s$$

$$H_4 = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\cdot b\right)(t,X_t)\int_t^{t+h}(W_s - W_t)\, dC_s$$

$$H_5 = b(t,X_t)\,\Delta W \quad ; \quad H_6 = \frac{\partial b}{\partial t}(t,X_t)\int_t^{t+h}(s-t)\, dW_s$$

$$H_7 = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\cdot a\right)(t,X_t)\int_t^{t+h}(C_s - C_t)\, dW_s$$

$$H_8 = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\cdot b\right)(t,X_t)\int_t^{t+h}(W_s - W_t)\, dW_s$$

Si on étudie chacune des variables aléatoires $(H_k)_{k=1}^{8}$, on observe que :

$\mathrm{var}(H_1) \simeq h^2$ (i.e. la variance de H_1 est de l'ordre de h^2)

$\mathrm{var}(H_2) \simeq h^4$; $\mathrm{var}(H_3) \simeq h^4$

$\mathrm{var}(H_4) \simeq h^3$, et cette variable aléatoire H_4 ne correspond pas à une martingale

$\mathrm{var}(H_5) \simeq h$

$\mathrm{var}(H_6) \simeq h^3$ et H_6 correspond à une martingale

$\mathrm{var}(H_7) \simeq h^3$ et H_7 correspond à une martingale

$\mathrm{var}(H_8) \simeq h^2$

Dans la discrétisation "au premier ordre" (paragraphes précédents), on avait considéré seulement

H_1 , dont la variance est de l'ordre de h^2, mais qui ne correspond pas à une martingale,

et H_5, dont la variance est de l'ordre de h, mais qui correspond à une martingale.

Pour une discrétisation "au second ordre", il semble donc raisonnable de tenir compte des variables aléatoires dont la variance est de l'ordre de h^3, sauf si celles-ci correspondent à une martingale auquel cas on ne gardera que celles dont la variance est de l'ordre de h^2.

Ceci conduit donc à ne tenir compte que de H_1, H_4, H_5 et H_8, et à "négliger" les autres termes.

La proposition suivante va justement donner une majoration de l'erreur commise quand on approxime X_{t+h} par $X_t + H_1 + H_4 + H_5 + H_8$.

D.3 - MAJORATIONS PRELIMINAIRES

On considère les hypothèses et notations indiquées en D.1. Soit X le processus continu, adapté à la base initiale B^I, à valeurs dans H, tel que :

$$X_t = X_o + \int_o^t a(s,X)\ dC_s + \int_o^t b(s,X)\ dW_s$$

On a alors, pour s<t, les inégalités

i) $$E\left\{ \sup_{s\leq u\leq t} ||X_u - X_s||^4 \right\} \leq \frac{4^6}{3^3} vb_1^2\ (t-s)^2 + 8q_1^4\ a_1^2\ (t-s)^4$$

ii) $$\begin{aligned} E\Big\{ \sup_{s\leq u\leq t} ||X_u - X_s & - a(s,X)\ (C_u - C_s) - b(s,X_s)\ (W_u - W_s) \\ & - (b\ .\ \frac{\partial a}{\partial x})\ (s,X_s) \int_s^u (W_r - W_s)\ dC_r \\ & - (b\ .\ \frac{\partial b}{\partial x})\ (s,X_s) \int_s^u (W_r - W_s)\ dW_r||^2 \Big\} \end{aligned}$$

$$\leq \alpha_1(t-s)^3 + \alpha_2(t-s)^4 + \alpha_3(t-s)^5 + \alpha_4(t-s)^6$$

où les $(\alpha_i)_{i=1}^4$ sont des constantes qui seront explicitées à la fin de la démonstration.

Démonstration de i)

$$E \sup_{s\leq u\leq t} || \int_s^u |a(r,X_r)\ dC_r + b(r,X_r)|dW_r||^4$$

$$\leq 8 \left\{ E\ \sup_u ||\int_s^u a(r,X)dC_r||^4 + E\ \sup_u ||\int_s^u b(r,X)\ dW_r||^4 \right\}$$

mais $$||\int_s^u a(r,X)\ dC_r||^4 \leq \left\{\int_s^u dQ_r\right\}^3 \int_s^u ||a(r,X)||^4\ dQ_r \qquad \text{(Hölder)}$$

$$\leq [q_1(u-s)]^3\ q_1\ a_1^2\ (u-s)$$

et $$E\ \sup||\int_s^u b(r,X)\ dW_r||^4 \leq (\frac{4}{3})^4\ E||\int_s^t b(r,X)\ dW_r||^4 \qquad \text{(Doob)}$$

$$\leq (\frac{4}{3})^4\ 2.3v(t-s) \int_s^t E||b(r,X)||^4\ dr \qquad \text{(cf. [GS])}$$

D'où on tire l'inégalité annoncée.

Démonstration de ii)

$$\begin{aligned} E\Big\{ \sup_{s\leq u\leq t} ||X_u - X_s & - a(s,X_s)\ (C_u - C_s) - b(s,X_s)\ (W_u - W_s) \\ & - (\ b\ .\ \frac{\partial a}{\partial x}\ )(s,X_s) \int_s^u (W_r - W_s)\ dC_r \\ & - (\ b\ .\ \frac{\partial b}{\partial x}\ )(s,X_s) \int_s^u (W_r - W_s)\ dW_r||^2 \Big\} \end{aligned}$$

$$\leq 2\ \alpha_t + 2\ \beta_t$$

avec

$$\alpha_t = E\ \sup_u ||\int_s^u \left[a(r,X) - a(s,X) - (b.\frac{\partial a}{\partial x})(s,X)(W_r - W_s)\right]dC_r||^2$$

et

$$\beta_t = E\ \sup_u ||\int_s^u \left[b(r,X) - b(s,X) - (b.\frac{\partial b}{\partial x})(x,X)(W_r - W_s)\right]dW_r||^2$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz et en utilisant les propriétés de Q, on obtient :

$$\alpha_t \leq E\ \sup \left\{ \int_s^u dQ_r \int_s^u ||a(r,X) - a(s,X) - (b.\frac{a}{x})(s,X)\ \ (W_r - W_s)||^2\ dQ_r \right\}$$

$$\leq q_1^2\ (t-s) \int_s^t E||a(r,X) - a(s,X) - (b.\frac{\partial a}{\partial x})(s,X)\ \ (W_r - W_s)||^2\ dr$$

mais $$a(r,X) - a(s,X) = a(r,X_r) - a(s,X_r) + a(s,X_r) - a(s,X_s)$$

$$= (r-s)\ \frac{\partial a}{\partial t}$$

$$+ (X_r - X_s)\ \frac{\partial a}{\partial x}\ (s,X_s) + \frac{1}{2}\ (X_r - X_s)^{\otimes 2}\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

d'où $\quad a(r,X) - a(s,X) - (b.\frac{\partial a}{\partial x})\ (s,X)\ (W_r - W_s) =$

$$= (r-s)\ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x}\ (s,X_s)\ \int_s^r a(v,X)\ dC_v + \frac{1}{2}\ (X_r - X_s)^{\otimes 2}\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial x}\ (s,X)\ \int_s^r \left[b(u,X) - b(s,X)\right]\ dW_u$$

et donc :

$$\alpha_t \leqslant 2q_1^2\ (t-s)^2 \left\{ E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} \left|\left| (r-s)\ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} \int_s^r a(u,X)dC_u + \frac{1}{2}(X_r - X_s)^{\times 2}\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|\right|^2 \right.$$

$$\left. + E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} \left|\left| \frac{\partial a}{\partial x} \int_s^r \left[b(u,X) - b(s,X)\right]\ dW_u \right|\right|^2 \right\}$$

cela donne donc :

$$\alpha_t \leqslant 2q_1^2\ (t-s)^2 \left\{ 4a_5^2\ (t-s)^2 + 4a_6^2\ E \sup \left|\left|\int_s^r a(u,X)\ dC_u\right|\right|^2 \right.$$

$$+ a_7^2\ E \sup_r ||X_r - X_s||^4$$

$$\left. + 4v\ a_6^2\ E \int_s^t ||b(u,X) - b(s,X)||^2\ du \right\}$$

mais $\quad E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} \left|\left|\int_s^r a(u,X)\ dC_u\right|\right|^2 \leqslant q_1^2(t-s) \int_s^t ||a(u,X)||^2\ du$

$$\leqslant q_1^2\ a_1(t-s)^2$$

et $\quad E||b(u,X) - b(s,X)||^2 \leqslant 2\ E||b(u,X_u) - b(u,X_s)||^2$

$$+ 2\ E||b(u,X_s) - b(s,X_s)||^2$$

$$\leqslant 2\ b_3\ E \sup_{s\leqslant u\leqslant t} ||X_u - X_s||^2$$

$$+ 2\ E \left\{(u-s)\ \frac{\partial b}{\partial t}\right\}^2$$

$E||b(u,X) - b(s,X)||^2$

$$\leqslant 4\ b_3 \left\{ E \sup_u \left|\left|\int_s^u a(r,X)\ dC_r\right|\right|^2 + E \sup_u \left|\left|\int_s^u b(r,X)\ dW_r\right|\right|^2 \right\}$$

$$+ 2\ b_5^2\ (t-s)^2$$

$$\leqslant 4\ b_3\left[\ q_1^2\ a_1(t-s)^2 + 4v\ b_1(t-s)\ \right] + 2\ b_5^2\ (t-s)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\alpha_t \leqslant 2^2\ q_1^2 \left[a_5^2 + q_1^2\ a_1\ a_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\ a_7^2\ vb_1^2 + 2^4\ v^2\ a_6^2\ b_1\ b_3\right]\ (t-s)^4$$

$$+ 2^4\ q_1^2\ v\ a_6^2\left[2\ q_1^2\ a_1\ b_3 + b_5^2\right]\ (t-s)^5 + 2^4\ q_1^6\ a_1^2\ a_7^2\ (t-s)^6$$

De la même façon, en appliquant à β_t l'inégalité de Doob et en utilisant les hypothèses de D.1, on obtient :

$$\beta_t \leqslant 4\ E \int_s^t ||b(r,X) - b(s,X) - (b.\frac{\partial b}{\partial x})\ (s,X)\ (W_r - W_s)||^2\ dV_2$$

$$\leqslant 8\ v(t-s) \left\{ E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} \left|\left|(r-s)\ \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} \int_s^r a(u,X)\ dC_u + \frac{1}{2}\ (X_r - X_s)^{\otimes 2}\ \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right|\right|^2 \right.$$

$$\left. + E \sup \left|\left| \frac{\partial b}{\partial x} \int_s^r \left[\ b(u,X) - b(s,X)\ \right] dW_u \right|\right|^2 \right\}$$

$$\leqslant 8\ v(t-s) \left\{ 4\ b_5^2\ (t-s)^2 + 4b_6^2\ E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} \left|\left|\int_s^r a(u,X)\ dC_u\right|\right|^2 \right.$$

$$+ b_7^2\ E \sup_{s\leqslant r\leqslant t} ||X_r - X_s||^2$$

$$\left. + 4\ v\ b_6^2 \int_s^t E||b(u,X) - b(s,X)||^2\ du \right\}$$

soit finalement :

$$\beta_t \leqslant 2^5 v \left[b_5^2 + q_1^2\ a_1\ b_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\ v\ b_1^2\ b_7^2 + 2^4\ v^2\ b_1\ b_3\ b_6^2\right]\ (t-s)^3$$

$$+ 2^5\ v \left[q_1^2\ a_1\ b_3 + 2\ v\ b_5^2\ b_6^2\right]\ (t-s)^4 + 2^6\ q_1^4\ v\ a_1^2\ b_7^2\ (t-s)^5$$

D'où l'inégalité cherchée, avec :

$$\alpha_1 = 2^6 v \left[b_5^2 + q_1^2\, a_1\, b_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\, v\, b_1^2\, b_7^2 + 2^4\, v^2\, b_1\, b_3\, b_6^2\right]$$

$$\alpha_2 = 2^4\, q_1^2 \left[a_5^2 + q_1^2\, a_1\, a_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\, v\, b_1^2\, a_7^2 + 2^4\, v^2\, b_1\, b_3\, a_6^2\right] + 2^6\, v \left[q_1^2\, a_1\, b_3 + 2\, v\, b_5^2\, b_6^2\right]$$

$$\alpha_3 = 2^5\, q_1^2\, v\, a_6^2 \left[2 q_1^2\, a_1\, b_3 + b_5^2\right] + 2^7\, q_1^4\, v\, a_1^2\, b_7^2$$

$$\alpha_4 = 2^5\, q_1^6\, a_1^2\, a_7^2$$

D.4 - THEOREME D'APPROXIMATION

n étant fixé, on considère un découpage de $[0,1]$ par les dyadiques d'ordre n.

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$t_k = k\, 2^{-n}$$

$$X_k = X_{k.2^{-n}}$$

$$\bar{a}\,(u, X_u) = a(t_k, X_k) \qquad \text{pour} \quad u \in [t_k, t_{k+1}[$$

et de même pour b , $\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}$

enfin $\quad \bar{W}_u = W_{t_k} = W_k \qquad$ pour $\quad u \in [t_k, t_{k+1}[$

Pour tout **n**, *soit* X^n *le processus défini par :*

$$X_o^n = X_o$$

$$X_s^n = X_o^n + \int_o^s \left[\, \bar{a}(u, X^n)\, dC_n + \bar{b}(u, X^n)\, dW_u \right] + \int_o^s \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\right)(u, X^n)\, (W_u - \bar{W}_u)\, dC_u + \int_o^s \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}\right)(u, X^n)\, (W_u - \bar{W}_u)\, dW_u$$

Alors, pour tout k *, on a :*

$$E \left\{ \sup_{s \leq t_k} \| X_s - X_s^n \|^2 \right\} \leq \left\{ (\gamma_1\, 2^{-2n} + \gamma_2\, 2^{-3n} + \gamma_3\, 2^{-4n})\, t_k \right\} \exp \left\{ (\delta_1 + \delta_2 2^{-n})\, t_k \right\}$$

avec

$$\gamma_1 = 2^6\, q \left[a_5^2 + q_1^2\, a_1\, a_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\, a_7^2\, v\, b_1^2 + 4^2\, v^2\, a_6^2\, b_1\, b_3\right] + 2^8 v \left[b_5^2 + q_1^2\, a_1\, b_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\, b_7^2\, v\, b_1^2 + 4^2\, v^2\, b_6^2\, b_1\, b_3\right]$$

$$\gamma_2 = 2^7\, q\, v\, a_6^2\, (2\, q_1^2\, a_1\, b_3 + b_5^2) + 2^9\, v^2\, b_6^2 (2\, q_1^2\, a_1\, b_3 + b_5^2)$$

$$= 2^7\, v (2\, q_1^2\, a_1\, b_3 + b_5^2)\, (q\, a_6^2 + 4\, v\, b_6^2)$$

$$\gamma_3 = 2^7\, q_1^4\, (q\, a_7^2 + 4\, v\, b_7^2)$$

$$\delta_1 = 2^3\, (q\, a_3 + 4\, v\, b_3)$$

$$\delta_2 = 8\, v \left\{ q (b_1\, a_7^2 + b_3\, a_6^2) + 4\, v\, (b_1\, b_7^2 + b_3\, b_6^2) \right\}$$

Démonstration

$$X_s - X_s^n = \int_o^s [a(u,X) - \bar{a}(u,X^n)]\, dC_u + \int_o^s [b(u,X) - \bar{b}(u,X^n)]\, dW_u$$
$$+ \int_o^s \left[\left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\right)(u,X) - \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\right)(u,X^n)\right] (W_u - \bar{W}_u)\, dC_u$$
$$+ \int_o^s \left[\left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}\right)(u,X) - \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}\right)(u,X^n)\right] (W_u - \bar{W}_u)\, dW_u$$
$$- \int_o^s \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\right)(u,X)\, (W_u - \bar{W}_u)\, dC_u$$
$$- \int_o^s \left(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}\right)(u,X)\, (W_u - \bar{W}_u)\, dW_u$$

ou encore

$$X_s - X_s^n = \Big\{ X_s - \int_o^s \bar{a}(u,X)\, dC_u + \int_o^s \bar{b}(u,X)\, dW_u$$

$$- \int_o^s (\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})\ (u,X)\ (W_u - \bar{W}_u)\ dC_u$$

$$- \int_o^s (\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})\ (u,X)\ (W_u - \bar{W}_u)\ dW_u \Big\}$$

$$+ \Big\{ \int_o^s \Big[\bar{a}(u,X) - a(u,X^n)\Big]\ dC_u \Big\} + \Big\{ \int_o^s \Big[\bar{b}(u,X) - b(u,X^n)\Big] dW_u \Big\}$$

$$+ \Big\{ \int_o^s \Big[(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})\ (u,X) - (\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})(u,X^n)\Big]\ (W_u - \bar{W}_u)\ dC_u \Big\}$$

$$+ \Big\{ \int_o^s \Big[(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})\ (u,X) - (\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})(u,X^n)\Big]\ (W_u - \bar{W}_u)\ dW_u \Big\}$$

comme $(a+b+c+d+e)^2 \leqslant 8(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$, on pose

$$\frac{1}{8} E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X_s^n||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{5} G_i$$

avec :

$$G_1 \leqslant 2 \Big\{ q \int_o^{t_k} E||a(u,X) - \bar{a}(u,X) - (\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})\ (u,X)\ (W_u - \bar{W}_u)||^2\ du$$

$$+ 4\, v \int_o^{t_k} E||b(u,X) - \bar{b}(u,X) - (b.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})(u,X)\ (W_u - \bar{W}_u)||^2\ du \Big\}$$

On appelle K_1 ce second membre. De même :

$$G_2 \leqslant q \int_o^{t_k} E||\bar{a}(u,X) - \bar{a}(u,X^n)||^2\ du = K_2$$

$$G_3 \leqslant 4\, v \int_o^{t_k} E||\bar{b}(u,X) - \bar{b}(u,X^n)||^2\ du = K_3$$

$$G_4 \leqslant q \int_o^{t_k} \Big|\Big|\Big[(\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})\ (u,X) - (\bar{b}.\frac{\partial \bar{a}}{\partial x})\ (u,X^n)\Big]\ (W_u - \bar{W}_u)\Big|\Big|^2\ du = K_4$$

$$G_5 \leqslant 4\, v \int_o^{t_k} \Big|\Big|\Big[(\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})\ (u,X) - (\bar{b}.\frac{\partial \bar{b}}{\partial x})\ (u,X^n)\Big]\ (W_u - \bar{W}_u)\Big|\Big|^2\ du = K_5$$

Si on pose alors $y(k) = \sum_{i=1}^{5} K_i$

on voit que

$$\frac{1}{8}\ E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X_s^n||^2 \leqslant y(k)$$

il faut donc évaluer $y(k)$. Pour cela, on pose :

$$y(k+1) - y(k) = \sum_{i=1}^{5} J_i$$

et on va évaluer séparément chacune des expressions $(J_i)_{i=1}^{5}$.

D.5 - MAJORATION DE J_1

$$\frac{1}{2}\ J_1 = q \int_{t_k}^{t_{k+1}} E||a(u,X) - \bar{a}(u,X) - \bar{b}\ \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\ (u,X)(W_u - \bar{W}_u)||^2\ du$$

$$= 4v \int_{t_k}^{t_{k+1}} E||b(u,X) - \bar{b}(u,X) - \bar{b}\ \frac{\partial \bar{b}}{\partial x}\ (u,X)(W_u - \bar{W}_u)||^2\ du$$

en opérant comme dans D.3. ii), on obtient :

$$J_1 \leqslant \beta_1\ 2^{-3n} + \beta_2\ 2^{-4n} + \beta_3\ 2^{-5n}$$

avec

$$\beta_1 = 8q \Big[a_5^2 + q_1^2\ a_1\ a_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\ v\ a_7^2\ b_1^2 + 4^2\ v^2\ a_6^2\ b_1\ b_3\Big]$$

$$+ 32v \Big[b_5^2 + q_1^2\ a_1\ b_6^2 + \frac{4^5}{3^3}\ v\ b_7^2\ b_1^2 + 4^2\ v^2\ b_6^2\ b_1\ b_3\Big]$$

$$\beta_2 = 16\ v(2q_1^2\ a_1\ b_3 + b_5^2)\ \ (q\ a_6^2 + 4\ v\ b_6^2)$$

$$\beta_3 = 16\ q_1^4\ a_1^2\ \ (q\ a_7^2 + 4\ v\ b_7^2)$$

D.6 - <u>MAJORATION DE J_2 ET J_3</u>

$$J_2 = q \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\|\bar{a}(u,X) - \bar{a}(u,X^n)\|^2 \, du$$

$$= q\, 2^{-n} \; E\|a(t_k,X) - a(t_k,X^n)\|^2$$

$$\leqslant q\, a_3\, 2^{-n}\, E\|X_k - X_k^n\|^2 \;\leqslant\; 8\, q\, a_3\, 2^{-n}\, y(k)$$

et, de la même façon :

$$J_3 \leqslant 32\, v\, b_3\, 2^{-n}\, y(k)$$

D.7 - <u>MAJORATION DE J_4 ET J_5</u>

$$J_4 \leqslant q\, 2^{-n}\, E \sup_{t_k \leqslant u \leqslant t_{k+1}} \left\| \int_{t_k}^{u} \left[(b.\frac{\partial a}{\partial x})(t_k,X_k) - (b.\frac{\partial a}{\partial x})(t_k,X_k^n) \right] dW_u \right\|^2$$

$$\leqslant 4\, q\, v\, 2^{-n}\, E\left\| (b.\frac{\partial a}{\partial x})\; (t_k,X_k) - (b.\frac{\partial a}{\partial x})\; (t_k,X_k^n) \right\|^2$$

$$J_4 \leqslant 8\, q\, v\, 2^{-n} \Big\{ E\left\| b(t_k,X_k)\, \frac{\partial a}{\partial x}\, (t_k,X_k) - b(t_k,X_k)\, \frac{\partial a}{\partial x}\, (t_k,X_k^n) \right\|^2$$

$$+ E\left\| b(t_k,X_k)\, \frac{\partial a}{\partial x}\, (t_k,X_k^n) - b(t_k,X_k^n)\, \frac{\partial a}{\partial x}\, (t_k,X_k^n) \right\|^2 \Big\}$$

$$\leqslant 8\, q\, v\, 2^{-n} \Big\{ E\left\| b(t_k,X_k).(X_k - X_k^n).\, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right\|^2$$

$$+ b_3\, E\left\| \frac{\partial a}{\partial x}\, (t_k,X_k^n)\; .\; (X_k - X_k^n) \right\|^2 \Big\}$$

$$\leqslant 8\, q\, v\, 2^{-n} \{ b_1\, a_7^2 + b_3\, a_6^2 \}\; y(k)$$

et de la même façon :

$$J_5 \leqslant 16\, v^2\, 2^{-2n} (b_1\, b_7^2 + b_3\, b_6^2)\; y(k)$$

D.8 - <u>MAJORATION DE $y(k)$</u>

$$y(k+1) - y(k) \leqslant \beta_1\, 2^{-3n} + \beta_2\, 2^{-4n} + \beta_3\, 2^{-5n}$$

$$+ y(k).\left[8(q\, a_3 + 4\, v\, b_3) 2^{-n} + 8\, v\, 2^{-2n} \Big\{ q(b_1\, a_7^2 + b_3\, a_6^2) + 4\, v\, (b_1\, b_7^2 + b_3\, b_6^2) \Big\} \right]$$

Il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Gronwald vue en A.12 pour aboutir à l'inégalité annoncée.

E | CONVERGENCE EN LOI

E.1 - ESPACE CANONIQUE ET SOLUTION DU PROBLEME DES MARTINGALES

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des processus cadlag, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indexés par $T = [0,1]$.

Pour de tels processus, on appelle espace canonique, et on désignera par $D(T, \mathbb{R}^d)$, l'espace des applications cadlag de T dans $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de Skorohod. Chaque tribu $\mathcal{F}_t$ sur $\Omega = D(T, \mathbb{R}^d)$ est alors la tribu engendrée par les "applications coordonnées" $\omega \mapsto x_s(\omega)$, pour $s \leqslant t$.

Etant donné x_o, élément de $\mathbb{R}^d$, et deux fonctions a et b de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, on dit que P, loi de probabilité sur $D(T, \mathbb{R}^d)$, est une solution du problème des martingales $(x_o\ ;\ bb^*, a)$ si on a (cf. définition 5, chapitre 2 de [PR]), en désignant par X le processus canonique

i) $P\ [X_o = x_o] = 1$

ii) quel que soit $f \in C_K^\infty$,

$$f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t [f'(X_s).a(X_s) + f''(X_s).bb^*(X_s)]\ ds$$

est une martingale pour la probabilité P.

On sait alors (cf [PR]) que (X,P) correspond à une "solution en loi" de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(X_t)\ dt + b(X_t)\ dW_t$$

E.2 — THEOREME

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base de processus, avec $T = [0,1]$. Soit $(W_t)_{t \in T}$ un mouvement brownien associé, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Soit a une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$; soit b une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, telle que, en tout point, l'opérateur (symétrique) bb^* soit elliptique, en ce sens que, pour tout élément u de $\mathbb{R}^d$, $u\ bb^*\ u^* \geqslant 0$.

Soit x_o un élément de $\mathbb{R}^d$.

Pour tout n, on considère le processus X^n défini par :

$$\left.\begin{aligned} X_o^n &= x_o \\ X_t^n &= X^n_{k.2^{-n}} \end{aligned}\right\} \quad , \quad \text{si} \quad t \in [k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}]$$

et

$$X^n_{(k+1).2^{-n}} = X^n_{k.2^{-n}} + 2^{-n}\ a(X^n_{k.2^{-n}}) + b(X^n_{k.2^{-n}})(W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k.2^{-n}})$$

Alors, sur l'espace canonique $D(T, \mathbb{R}^d)$, *la suite* (P^n) *des lois des processus* (X^n) *converge, en loi, vers une loi* P, *solution du problème des martingales* $(x_o\ ;\ bb^*, a)$, *c'est-à-dire vers une "solution en loi" associée à l'équation différentielle stochastique :*

$$dX_t = a(X_t)\ dt + b(X_t)\ dW_t$$

Démonstration

1°/ La technique de démonstration est désormais standard. Elle consiste à prouver que :

a) la suite $(X_t^n)_{t \in T}$ est équi-tendue (dans l'espace canonique)

b) si P est la limite en loi d'une sous-suite de la suite $(P^n)_{n>o}$ des probabilités, définies sur l'espace canonique $D(T, \mathbb{R}^d)$, et associées à la suite $(X^n)_{n>o}$, alors Proba $\{C(T, \mathbb{R}^d)\} = 1$.

c) sous les mêmes conditions qu'au b), la limite P est une solution au problème des martingales $(x\ ;\ bb^*, a)$ associé aux fonctions a et b, comme indiqué en E.1.

Ceci suffit pour prouver le théorème. En effet, le problème des martingales considéré n'a qu'une seule solution P. Toute suite extraite de (P^n), qui converge, converge donc vers P, ce qui montre que la suite (P^n) elle-même est convergente.

De plus, la limite P est la loi d'un processus de diffusion associé aux fonctions a et $v = bb^*$, ce qui équivaut à la conclusion énoncée dans le théorème.

2°/ Pour prouver le a) et le b), il suffit de vérifier la condition suivante (cf. [PR]) :

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0, n \to \infty} \text{Proba} \left\{ \sup_{|t-s| \leq \delta} |X_t^n - X_s^n| > \varepsilon \right\} = 0$$

Or, en notant $\sum_s^t$ la somme sur les dyadiques d'ordre n compris entre s et t, on a :

$$|X_t^n - X_s^n| \leqslant 2^{-n} \sum_s^t |a(X^n)| + \sum_s^t |b(X^n)| \, |W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k.2^{-n}}|$$

Soient α et β les bornes respectives de a et b. Il vient :

$$P\left[\sup_{|t-s|<\delta} |X_t^n - X_s^n| > \varepsilon\right] \leqslant P\left[2^{-n} \sum_s^t \alpha > \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$+ \; P\left[\sup_k \left|W_{(k+1).2^{-n}} - W_{k.2^{-n}}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2 \sum_s^t \beta}\right]$$

Quels que soient ε et η, on peut donc trouver δ et N tels que, pour tout $n > N$:

$$P\left[\sup_{|t-s|<\delta} |X_t^n - X_s^n| > \varepsilon\right] < \eta$$

3°/ Il reste donc à vérifier la condition c).

Pour alléger la présentation, on va supposer que c'est la suite $(X^n)_{n>0}$ elle-même dont les lois $(P^n)_{n>0}$ convergent vers une loi P sur l'espace canonique.

La condition E.1.i) est évidemment vérifiée.

Pour vérifier la condition E.1.ii) on considère $f \in C_K^\infty$, deux éléments s et t de T tels que $s < t$, et une fonction réelle, g, définie sur l'espace canonique, $\mathcal{F}_s$-mesurable, bornée.

En notant Δ_k^n le saut (associé au processus X^n) au point $(k+1)2^{-n}$, la formule de Taylor donne :

$$\Delta_k^n [f(X^n)] = f'(X_{k.2^{-n}}^n) \, \Delta_k^n X^n + f''(X_{k.2^{-n}}^n) \, (\Delta_k^n X^n)^{\otimes 2} + R_k^n$$

$$\text{avec } ||R_k^n|| \leqslant \sup_x ||f'''(x)|| . ||\Delta_k^n X^n||^3$$

On a donc, en additionnant et en notant $\sum_s^t$ la somme sur les dyadiques d'ordre n compris entre s et t :

$$E\left\{g(X_\cdot^n) \left[f(X_t^n) - f(X_s^n)\right]\right\} = E\left\{\sum_s^t \Delta_k^n [f(X^n)]\right\}$$

$$= \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) f'(X_{k.2^{-n}}^n) . \Delta_k^n X^n\right] + \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) \, f''(X_{k.2^{-n}}^n) \, (\Delta_k^n X^n)^{\otimes 2}\right]$$

$$+ \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) \, R_k^n\right]$$

Compte-tenu de la construction de X^n et de la martingalité de W, on a aussi :

$$E\left\{g(X_\cdot^n) \left[f(X_t^n) - f(X_s^n)\right]\right\} = \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) \, f'(X_{k.2^{-n}}^n) \, a(X_{k.2^{-n}}^n) \, 2^{-n}\right]$$

$$+ \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) \, f''(X_{k.2^{-n}}^n) \, (bb^*) \, (X_{k.2^{-n}}^n) \, (\Delta_k^n W)^{\otimes 2}\right]$$

$$+ \sum_s^t E\left[g(X_\cdot^n) \, R_k^n\right] + \sum_s^t E(V_k^n)$$

avec $E(||V_k^n||) \leqslant d(2^{-n})^{3/2}$ où d est une constante.

Puisque la variable $\Delta_k^n W$ est indépendante de $\mathcal{G}_{k.2^{-n}}$, on a finalement :

$$E\left\{g(X_\cdot^n)\ [f(X_t^n) - f(X_s^n)]\right\} = \int_s^t h(X_{u-}^n)\ dt + \sum_s^t E(R_k^n + U_k^n)$$

avec $h(X_{u-}^n) = E\left\{g(X_\cdot^n).\ [f'.a + f''.bb^*]\ (X_{u-}^n)\right\}$

D'une part, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_s^t E(R_k^n + U_k^n) = 0$

D'autre part, l'hypothèse de convergence des lois (P^n) signifie très exactement que la suite $(h(X_{u-}^n))_{n>0}$ converge vers

$$h(\hat{X}) = E_P\left\{g.\ [f'.a + f''.bb^*]\ (\hat{X}_{t-})\right\}$$

où E_P désigne l'espérance, sur l'espace canonique, associée à la probabilité P, et $\hat{X}$ le processus canonique.

La suite de fonctions $u \mapsto h(X_{u-}^n)$ converge donc simplement vers la fonction $u \mapsto h(\hat{X}_u)$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire (en passant aussi à la limite dans le second membre) :

$$E\left\{g(\hat{X}).\ [f(\hat{X}_t) - f(\hat{X}_s)]\right\} = \int_s^t E\left\{g[f'.a + f''.bb^*]\ (\hat{X}_u)\ du\right\}$$

ce qui montre que $f(\hat{X}_t) - f(\hat{X}_s) - \int_s^t E\left\{(f'.a + f''.bb\ )\ (\hat{X}_u)\ du\right\}$ est une martingale.

F | ETUDE NUMERIQUE PAR DES METHODES DE SIMULATION

F.1 - GENERATIONS DE VALEURS NUMERIQUES AYANT UNE LOI DONNEE

Le plus pratique, pour obtenir des nombres au hasard, est de construire une série de nombres pseudo-aléatoires à grande période.

Pour obtenir un tirage pseudo-aléatoire dans la loi uniforme sur (0,1), on utilise la méthode de congruence multiplicative de Lehmer la formule s'écrit :

$$x_{n+1} = a\ x_n \quad (\text{mod } 2^m)$$

Pour un choix correct de a et x_o, la période de la série sera au maximum 2^{m-2} (cf. [S]).

Pour obtenir maintenant un tirage pseudo-aléatoire dans une loi gaussienne centrée et réduite, on a utilisé une méthode proposée par Marsaglia et Bray (cf [MB]).

Soient x et y deux nombres à distribution uniforme sur $[0,1]$.

$$z_1 = 2x - 1$$
$$z_2 = 2y - 1$$
$$s = z_1^2 + z_2^2$$

si $s \geq 1$, on rejette x et y et on fait un nouveau tirage sinon on pose :

$$w = (|\ -2 \log s\ |\ /s\ )^{1/2}$$
$$u_1 = w\ z_1$$
$$\text{et} \quad u_2 = x\ z_2$$

u_1 et u_2 correspondent alors à des variables gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes.

F.2 - LOI CONJOINTE DE $(W_{k+1} - W_k)$ et $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\, du$

Dans le paragraphe D (discrétisation au 2e ordre), on définit le processus X^n par :

$$X^n_{k+1} = X^n_k + a(t_k, X^n_k)\ (C_{k+1} - C_k) + b(t_k, X^n_k)\ (W_{k+1} - W_k)$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial x}(t_k, X^n_k)\ b(t_k, X^n_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\ dC_u$$

$$+ \frac{\partial b}{\partial x}(t_k, X^n_k)\ b(t_k, X^n_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\ dW_u$$

Afin de simplifier la simulation, on a pris dans les exemples

$$C_t = t$$

et pour processus (W_t) le mouvement brownien.

Il est donc nécessaire de connaître la loi conjointe de

$$X = W_{k+1} - W_k \quad \text{et} \quad Y = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\ du$$

En posant $h = 2^{-n}$, la matrice de covariance de X et Y s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} h & h^2/2 \\ h^2/2 & h^3/3 \end{pmatrix}$$

On sait qu'il existe alors une matrice de passage unitaire, P, et deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, X' et Y', telles que :

$D = \text{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2)$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A

$$A = {}^tP\ D\ P$$

$$\binom{X}{Y} = {}^tP \binom{X'}{Y'}$$

X' suit la loi $N(0, \sqrt{\lambda_1})$ et Y' la loi $N(0, \sqrt{\lambda_2})$ avec

$$\lambda_1 = \frac{h}{6}\ \left(3 + h^2 + \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}\ \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{6}\ \left(3 + h^2 - \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}\ \right)$$

Tous calculs faits, en appelant V_1 et V_2 les vecteurs propres orthonormés du changement de base, on obtient :

$$X = \frac{h}{||V_1||}\ X' + \frac{h^2 - 3 + \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}}{3||V_1||}\ Y'$$

et
$$Y = \frac{h}{||V_2||}\ X' + \frac{h^2 - 3 - \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}}{3||V_2||}\ Y'$$

avec
$$||V_1||^2 = h^2 + \frac{1}{9}\ \left(h^2 - 3 + \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}\ \right)$$

et
$$||V_2||^2 = h^2 + \frac{1}{9}\ \left(h^2 - 3 - \sqrt{h^4 + 3h^2 + 9}\ \right)$$

Pour h"assez petit", on peut approximer (X,Y) par le couple (X",Y") tel que

$$X'' = X' + \frac{h}{2}\, Y'$$

$$Y'' = \frac{h}{2}\, X' - Y'$$

Enfin on a :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\ dW_u = \frac{1}{2}\ (W_{k+1} - W_k)^2 - \frac{h}{2}$$

La mise en oeuvre de la simulation ne nécessite donc bien que la connaissance du couple (X,Y) dont la matrice de covariance , A, est donnée.

F.3 - ESTIMATION D'UN PROCESSUS STOCHASTIQUE

En règle générale, quand le processus cherché est quelconque (non stationnaire, par exemple) il est nécessaire de disposer, à différents instants t, d'un échantillon de taille suffisamment grande, n.

Cet échantillon est obtenu à partir de n simulations, dont l'indépendance est assurée par des initialisations différentes des générateurs de séries pseudo-aléatoires. Cf. F.1.

Si $X_i(t)$ représente une réalisation possible de X(t), on peut alors estimer :

$$\overline{X(t)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$$

De plus, si $(X_i(t'))_{i=1}^{n}$ représente un échantillon de même taille de X à l'instant t', on peut aussi estimer l'auto-covariance de X entre t et t' par l'approximation :

$$\mathrm{cov}\,(X(t),X(t')) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\,X_i(t') - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\sum_{i=1}^{n} X_i(t')\right\}$$

Il se pose donc un problème pour le choix de la taille de l'échantillon. Dans la pratique, on peut considérer que le nombre de simulations est suffisant en faisant, par exemple, un test de χ^2 sur deux réalisations indépendantes du même processus.

Mais dans cette étude, il se pose un autre problème : ce n'est pas un processus X que l'on simule, mais une approximation, X^n ou X^{ε}, de ce processus : l'étude de la validité de l'approximation de X par X^n ou X^{ε} a fait l'objet des précédents paragraphes.

F.4 - ETUDE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE LINEAIRE

Si on considère le processus (X_t) défini par

$$\begin{cases} X_t = \exp\,(W_t) \\ X_o = 1 \qquad \text{P.p.s.} \end{cases}$$

la formule de Ito appliquée à X donne immédiatement :

$$\begin{cases} dX_t = \frac{1}{2}\,X_t\,dt + X_t\,dW_t \\ X_o = 1 \end{cases}$$

soit, en reprenant les notations des paragraphes B et D :

$$dX_t = a(t,X_t)\,dt + b(t,X_t)\,dW_t$$

$$X_o = 1$$

avec
$$a(t,X_t) = \frac{1}{2}\,X_t$$

$$b(t,X_t) = X_t$$

Les formules de discrétisation donnent alors :

au premier ordre (cf. B.6)

$$\begin{cases} X_{k+1}^n = X_k^n + 2^{-n-1}\,X_k^n + X_k^n(W_{k+1} - W_k) \\ X_o^n = 1 \end{cases}$$

et au 2e ordre (cf. D.4)

$$\left[\begin{aligned} X_{k+1}^n &= X_k^n + 2^{-n-1}\,X_k^n + X_k^n(W_{k+1} - W_k) - \frac{1}{2}\,X_k^n\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_u - W_k)\,du \\ &\quad - X_k^n\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_u - W_k)\,dW_u \\ X_o^n &= 1 \end{aligned}\right.$$

On peut améliorer les majorations données en B.6 et D.4 en reprenant les calculs, sur ce cas particulier, comme suit :

F.4.1 - Majorations pour la discrétisation au 1er ordre

On pose $\quad E \sup_{s\leq t_k} ||X_s - \mathbf{X}_s^n||^2 \leq y(k)$

avec $\quad y(k) = \frac{17}{2}\int_0^{t_k} E||X_A - \overline{X}_s^n||^2\,ds$

$$\overline{X}_s^n = X_i^n \qquad \text{si} \qquad s \in [t_i, t_{i+1}[$$

$$y(k+1) - y(k) = \frac{17}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E||X_s - X_k^n||^2\,ds$$

$$\leq 17.2^{-n}\,y(k) + 17\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left|\left|\int_{t_k}^{s}\frac{1}{2}\,X_u + X_u dW_u\right|\right|^2 ds$$

soit :

$$y(k+1) - y(k) \leq 17.2^{-n}\,y(k) + 34\;E\sup_{t_k\leq s\leq t_{k+1}}||X_n||^2\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\frac{1}{4}(s-t_k)^2 + (s-t_k)\right]ds$$

$$E\,\mathrm{Sup}_{s\leq t_k}||X_s - X_s^n||^2 \leq \left\{\frac{17}{2}\,2^{-n}(6+2^{-n})\;E\sup_{u\leq t_k}||X_u||^2\;t_k\right\}\exp\,(17\,t_k)$$

pour n = 8 on a $\quad E\sup_{s\leq\frac{1}{2}}||X_s - X_s^n||^2 \leq 163\;\;E\sup||X_u||^2$

pour n = 10 on a $\quad E\sup_{s\leq\frac{1}{2}}||X_s - X_s^n||^2 \leq 40\;\;E\sup||X_u||^2$

pour n = 12 on a $\quad E\sup_{s\leq\frac{1}{2}}||X_s - X_s^n||^2 \leq 10\;\;E\sup||X_u||^2$

pour n = 15 on a $\quad E\sup_{s\leq\frac{1}{2}}||X_s - X_s^n||^2 \leq 1{,}3\;\;E\sup||X_u||^2$

La convergence est donc assez lente et peu satisfaisante.

F.4.2 - Majorations pour la discrétisation au 2e ordre.

On pose $\frac{1}{5}\ E \sup_{s \leq t_k} ||X_s - X_s^n||^2 \leq y(k)$

avec
$$y(k) = \frac{17}{2} \int_0^{t_k} E||X_u - \overline{X}_u - \overline{X}_u(W_u - \overline{W}_u)||^2\, du$$
$$+ \frac{17}{4} \int_0^{t_k} E||\overline{X}_u - \overline{X}_u^n||^2\, du$$
$$+ \frac{17}{4} \int_0^{t_k} E||(\overline{X}_u - \overline{X}_u^n)(W_u - \overline{W}_u)||^2\, du$$

on en tire
$$y(k+1) - y(k) \leq \left[\frac{85}{12} 2^{-3n} + \frac{17}{24} 2^{-4n}\right] E \sup_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} ||X_u||^2 + \frac{5.17}{8} (2+2^{-n}) 2^{-n}\, y(k)$$

soit
$$E \sup ||X_s - X_s^n||^2 \leq \left\{\left(\frac{425}{12} 2^{-2n} + \frac{85}{24} 2^{-3n}\right) t_k\ E \sup ||X_u||^2 \right\} \exp\left\{\frac{85}{8} (2+2^{-n})\, t_k\right\}$$

Pour n = 8 on a $E \sup_{s \leq \frac{1}{2}} ||X_s - X_s^n||^2 \leq 11{,}36\ E \sup ||X_u||^2$

pour n = 10 on a $E \sup_{s \leq \frac{1}{2}} ||X_s - X_s^n||^2 \leq 0{,}70\ E \sup ||X_u||^2$

pour n = 12 on a $E \sup_{s \leq \frac{1}{2}} ||X_s - X_s^n||^2 \leq 0{,}04\ E \sup_x ||X_u||^2$

l'accélération de la convergence est donc appréciable par rapport à une discrétisation au 1er ordre.

F.4.3 - Résultats numériques

La solution exacte de l'équation
$$\begin{cases} dX_t = \frac{1}{2} X_t\, dt + X_t\, dW_t \\ X_o = 1 \end{cases}$$
étant connue, il est possible de calculer une partition de $\mathbb{R}^+$ en points $(x_i)_{i=1}^{9}$ tels que, pour t = 1 :

Proba $\{X_1 \in]0, x_1]\} = 0{,}10$

Proba $\{X_1 \in]x_i, x_{i+1}]\} = 0{,}10$ pour i = 1, 9

Proba $\{X_1 \in]x_9, +\infty[\} = 0{,}10$

Le générateur gaussien a été testé sur cette partition et on a les résultats suivants :

N \ n_i										
350	36	29	35	35	33	44	34	33	40	31
400	45	44	33	31	37	37	34	44	52	43
450	44	38	48	46	43	48	39	51	54	39

où n_i représente l'effectif dans la catégorie

et N le nombre de simulations.

Soit n'_i l'effectif théorique dans la catégorie. On a :
$$n'_i = \frac{N}{10}$$

On sait alors que $S = \sum_{i=1}^{10} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ suit une loi de χ^2 à 9 degrés de liberté telle que

$P[\chi^2 \geq 3{,}32] = 0{,}95$

$P[\chi^2 \geq 16{,}92] = 0{,}05$

Or, pour N = 350 , S = 4,51

pour N = 400 , S = 9,35

pour N = 450 , S = 6,55

Les écarts observés ne sont donc pas significatifs.

La discrétisation au premier ordre a donné les résultats suivants, pour 400 simulations.

h \ n_i											χ^2
2^{-7}	36	57	33	28	52	36	31	50	36	41	21,4
2^{-7}	35	40	28	39	39	31	45	49	47	47	11,4
2^{-8}	41	35	37	42	40	43	40	44	46	32	4,1
2^{-8}	44	33	40	38	36	43	42	40	37	47	2,75
$(3.2^7)^{-1}$	36	36	32	42	49	39	53	29	42	42	11,70
2^{-9}	33	41	36	43	41	37	43	50	43	33	6,3
2^{-9}	36	39	36	46	43	36	43	48	40	33	5,40

Quant à la discrétisation au 2e ordre, toujours pour 400 simulations, on a les résultats suivants :

h \ n_i											χ^2
2^{-7}	34	60	30	32	51	33	33	53	35	39	25,35
2^{-7}	35	40	28	34	45	32	38	54	47	47	19,8
2^{-8}	41	35	37	44	39	49	38	40	42	35	4,15
2^{-8}	43	34	39	42	38	46	42	38	36	48	5,95
$(3.2^7)^{-1}$	36	36	31	45	47	41	51	29	44	40	10,15
2^{-9}	34	42	34	39	44	37	45	51	39	35	6,85
2^{-9}	37	40	35	43	45	36	43	50	37	34	5,95

On constate donc, à l'aide du test d'ajustement du χ^2, que les résultats obtenus par simulation avec un pas de 2^{-7} ne sont pas satisfaisants (au 1er et au 2e ordre) ; par contre, ces résultats sont très satisfaisants pour un pas de 2^{-8} ; on constate donc qu'on peut se contenter d'un pas plus grand que celui donné par les majorations théoriques.

F.5 - ETUDE DE LA "BOUCLE DE PHASE"

On veut étudier l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = -2 \sin X_t \, dt + dW_t \\ X_o \text{ donné} \end{cases}$$

Avec les notations habituelles, on a

$$\begin{cases} a(t,X_t) = -2 \sin X_t \\ b(t,X_t) \equiv 1 \end{cases}$$

Les formules de discrétisation s'écrivent alors :

au premier ordre :

$$\begin{cases} X^n_{k+1} = X^n_k - 2^{-n+1} \sin X^n_k + W_{k+1} - W_k \\ X^n_o = X_o \end{cases}$$

et au deuxième ordre :

$$\begin{cases} X^n_{k+1} = X^n_k - 2^{-n+1} \sin X^n_k + (W_{k+1} - W_k) - 2 \cos X^n_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_k)\,du \\ X^n_o = X_o \end{cases}$$

F.5.1 - Majorations a priori pour la discrétisation au 1er ordre

En reprenant les techniques de E.6, on a :

$$E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X^n_s||^2 \leqslant y(k)$$

avec $y(k) \leqslant 2^5 (2^{-n} + 2^{-2n}) t_k \exp (2^3 t_k)$

On trouve alors

$$\begin{aligned} E \sup_{s \leqslant \frac{1}{2}} ||X_s - X^n_s||^2 &\leqslant 3{,}42 && \text{pour } n = 8 \\ &\leqslant 0{,}85 && \text{pour } n = 10 \\ &\leqslant 0{,}21 && \text{pour } n = 12 \\ &\leqslant 0{,}05 && \text{pour } n = 14 \end{aligned}$$

F.5.2 - Majorations a priori pour la discrétisation au 2e ordre

On pose

$$\frac{1}{3} \, E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X^n_s||^2 \leqslant y(k)$$

avec

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) = {} & 4 E \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\sin X_s - \sin X_k - \cos X_k (W_u - W_k)||^2 \, du \\ & + 4 E \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\sin X_k - \sin X^n_k||^2 \, du \\ & + 4 E \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||(\cos X_k - \cos X^n_k)(W_u - W_k)||^2 \, du \\ & \leqslant 12.2^{-n} (1 + 2^{-n}) \, y(k) + \frac{2^5}{3} \left(1 + \frac{4^4}{3^2}\right) 2^{-3n} + 2^8.2^{-5n} \end{aligned}$$

d'où

$$E \sup_{s \leqslant t_k} ||X_s - X^n_s||^2 \leqslant \left[2^5 \left(1 + \frac{4^4}{3^2}\right) 2^{-2n} + 3.2^8.2^{-4n} \right] t_k \exp \left[12 (1 + 2^{-n}) \, t_k \right]$$

On trouve alors :

$$E \sup_s ||X_s - X_s^n||^2 \leqslant 2{,}9 \quad \text{pour } n = 8$$

$$\leqslant 0{,}18 \quad \text{pour } n = 10$$

$$\leqslant 0{,}01 \quad \text{pour } n = 12$$

là encore, on constate une amélioration des approximations en utilisant la discrétisation au 2e ordre.

F.5.3 - Résultats numériques

Dans le cas de la boucle de phase, on peut résoudre l'équation de Fokker-Planck qui s'écrit ici :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-2\sin(x)\,P(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P(t,x)\right]$$

Le programme de résolution de cette équation existe, ce qui va permettre de comparer les résultats obtenus par simulation avec les résultats attendus.

La moyenne et la variance de la solution ont été calculées en différents instants, à partir d'une discrétisation au second ordre avec 400 simulations. Cela donne les tableaux suivants :

- pour la moyenne :

h \ t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
2^{-7}	1	0,666	0,420	0,294	0,189	0,125	0,032	0,015	0,002
2^{-8}	1	0,640	0,451	0,273	0,169	0,090	0,089	0,063	0,061
résultats par F.P	1	0,658	0,430	0,284	0,187	0,124	0,082	0,054	0,040

- pour la variance :

h \ t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
2^{-7}	0	0,175	0,241	0,255	0,283	0,304	0,314	0,331	0,309
2^{-8}	0	0,182	0,233	0,271	0,266	0,282	0,267	0,272	0,319
résultats par F.P	0	0,186	0,266	0,294	0,304	0,305	0,303	0,302	0,300

REFERENCES

[D] DELLACHERIE
"Capacités et processus stochastiques". Springer Verlag. 1972.

[GS] GIHMAN ET SKOROKOD
"Stochastic differential equations". Springer Verlag. 1972.

[M] MEYER P.A.
"Séminaire de Probabilité X". Université de Strasbourg.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag. 1976.

[MB] MARSAGLIA ET BRAY
"A convenient method for generating normal variables".
Siam Rev. Vol. 6, pp. 260-264.

[MP] METIVIER M. ET PELLAUMAIL J.
"Notions de base sur l'intégrale stochastique". Rapport N° 61. IRISA.1976.

[PR] PRIONNET P.
"Processus de diffusion et équations différentiables stochastiques".
Ecole d'été de Probabilités de Saint Flour. 1973.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag.

[S] SENNE K.D.
"Machine independant Monte Carlo evaluation of the performance of dynamic stochastic systems".
J. Stochastics, Vol. 1, pp. 215-238.

- : -