R. Marie

# Une méthode analytique approchée pour réseaux de files d'attente généraux

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1977, fascicule 1
« Séminaire de probabilités I », , p. 103-111
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___1_103_0>

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX
FRANCE
Tél. (99) 36.48.15

Rapport N° 85

# * UNE METHODE ANALYTIQUE APPROCHEE
# POUR RESEAUX DE FILES D'ATTENTE GENERAUX

*par*

*R. MARIE*

SUMMARY

In this paper, we present an approximate solution for the asymptotic behaviour of relatively general queueing networks. In the particular case of networks with general service time distributions (i.e. : fixed routing matrix, one or many servers per station, FIFO discipline), the application of the method gives relatively accurate results in a very short time. The approximate stationary state probabilities are identified with the solution of a non linear system. The proposed method is applicable to a larger class of queueing networks (dependent routing matrix, stations with finite capacity...). In this case, the structure of the studied network must satisfied certain decomposability conditions.

RESUME

L'objet de ce rapport est de présenter une solution approchée du comportement asymptotique de réseaux de files d'attente assez généraux. Dans le cas particulier des réseaux à lois de service générales (i.e. : matrice de transition fixe, station à serveur unique ou non, discipline FIFO), l'application de la méthode fournit des résultats relativement précis en un temps très court ; les probabilités d'état asymptotique approchées sont identifiées à la solution d'un système d'équations non linéaires. La méthode proposée est également applicable à une classe beaucoup plus générale de réseaux de files d'attente (probabilités de transition dépendantes, stations à capacités limitées...). Dans ce cas, la structure du réseau étudié doit alors satisfaire à certaines conditions de décomposition.

* *Pour toute correspondance ou demande de tirés à part, écrire à*
*Raymond MARIE, IRISA, INSA, B.P. 14 A 35031 RESNNES CEDEX*

# UNE METHODE ANALYTIQUE APPROCHEE POUR RESEAUX DE FILES D'ATTENTE GENERAUX

## 1. INTRODUCTION :

Depuis plusieurs années, grâce à (et à cause de) l'informatique, un effort important est consacré à la recherche de solutions analytiques relatives à des réseaux de files d'attente de plus en plus généraux. Cependant, actuellement, on ne connaît de solution analytique exacte, pour de gros réseaux, que dans la mesure où ces réseaux satisfont les équations de "balance locale". C'est notamment le cas des réseaux dont les probabilités de transition sont fixes et dont les stations (à capacité non limitée) :

i) possèdent des lois de distribution de temps de service exponentielles,

ii) ou contiennent plus de serveurs que de clients,

iii) ou possèdent une discipline d'attente telle que le comportement de la station ayant une loi de distribution de temps de service non exponentielle, ne soit pas différent de celui qu'elle aurait avec une loi de distribution de temps de service exponentielle de même moyenne.

Ces restrictions justifient la recherche de méthodes approchées effectuée depuis quelques années. Ainsi, les techniques de diffusion ([1],[2]) et les techniques des "méthodes itératives" ([3], [4] ) permettent de traiter des réseaux dont les probabilités de transition sont fixes et dont chaque station est composée d'un serveur unique à loi de service générale. Ces méthodes fournissent les probabilités marginales de l'état asymptotique de chaque station ainsi que les grandeurs caractéristiques issues de ces probabilités.

Pour modéliser des réseaux plus généraux, on se tourne généralement vers la simulation ou vers les méthodes numériques ; chacune de ces méthodes étant limitée dans son emploi. La simulation permet d'étudier des réseaux complexes mais les contraintes de temps de calcul font que les résultats seront très imprécis si l'on veut étudier de gros réseaux. Les méthodes numériques (e.g. : [5]) fournissent des résultats précis mais sont plus vite limitées quant à la dimension du système étudié.

La méthode proposée dans ce rapport fournit une solution analytique approchée pour des réseaux de files d'attente assez généraux. Afin de faciliter la compréhension de la méthode, on étudie d'abord (§2), la méthode pour le cas particulier du réseau de filesd'attente fermé à lois de service générales et à serveur unique. Cette méthode repose sur la notion sous-jacente de taux de sortie conditionnel d'une station de loi générale. Les probabilités d'état asymptotique approchées sont identifiées à la solution d'un système d'équations non linéaires ; ce système étant résolu par une méthode itérative.

Le paragraphe suivant est consacré à la généralisation de la méthode ; on y montre quelles doivent être les structures des réseaux pour lesquels on peut appliquer la méthode proposée.

Le paragraphe 4 est consacré à l'étude des résultats de la méthode ainsi qu'à la conclusion.

## 2. ETUDE DU RESEAU FERME A LOIS DE SERVICE GENERALES :

Soit R un réseau fermé, composé de m stations, tel que :

i) la matrice des probabilités de transition $\mathcal{P}=(p_{ij})$ est fixe ; i.e. la probabilité $p_{ij}$ qu'un client quittant la station i entre dans la station j est indépendante de l'état du système.

ii) chaque station possède un serveur unique. La fonction de distribution $F_i(t)$ de la variable temps de service à la station i possède une transformée de Laplace rationnelle ; et la moyenne des temps de service est $\mu_i^{-1}$.

iii) la discipline d'attente est "premier arrivé-premier servi".

Soit $e = (n_1,n_2,\ldots,n_m)$ un état de R où $n_i$ est le nombre de clients dans la station i.

Par définition, on note $\lambda(n)/K/r$ une file d'attente M/K/r où le processus d'arrivée possède un taux conditionnel $\lambda(n)$ dépendant du nombre n de clients dans la station. K symbolise une loi de service à transformée de Laplace rationnelle.

*HYPOTHESE DE BASE :*

Mathématiquement, la méthode proposée consiste à faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse n° 1 : Une solution approchée des probabilités d'état asymptotique du réseau R est donnée par les probabilités définies à l'aide du système d'équations suivant :

(I)

$$P(e) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)}{C(N,m)} \qquad (1)$$

$$\nu_j(i) = \frac{x_j\, C_j(N-i,m-1)}{C_j(N-i+1,m-1)} \times \frac{Q_j(i-1)}{Q_j(i)} \qquad \begin{matrix} i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,m \end{matrix} \qquad (2)$$

où

a) $$A_j(n_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_j = 0 \\ \prod_{i=1}^{n_j} \nu_j(i) & \text{si } n_j > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

b) $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ est une solution de $x\,\mathcal{P}=x$

c) $$C(N,m) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m \\ \text{et } \sum_{i=1}^{m} n_i=N}} \left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)\right) \qquad (4)$$

d) $$C_v(u,m-1) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m \\ \text{et } \sum_{i=1}^{m} n_i=u \\ \text{et } n_v=0}} \left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}\right)\right) \qquad (5)$$

e) $Q_j(.)$ est la probabilité d'état asymptotique de la file $\lambda(i)/K/1$ ayant une loi de service identique à celle de la station j du réseau R et où :

$$\lambda(i) = \frac{x_j\, C_j(N-i-1,m-1)}{C_j(N-i,m-1)} \qquad (6)$$

*REMARQUES IMPORTANTES :*

• P(e) est aussi la probabilité d'état asymptotique d'un réseau "exponentiel" $R^*$ fermé contenant N clients dont chaque station j possède une loi de service exponentielle de taux dépendant $\nu_j(n_j)$, $n_j = 0,\ldots,N$, pour tout $j = 1,\ldots,m$. Toutes les grandeurs caractéristiques définies à partir de P(e) pourront donc être calculées comme pour un réseau exponentiel, à l'aide des algorithmes classiques (dans le mesure où on connaîtra les fonctions $A_j(.)$).

Physiquement, l'hypothèse n°1 revient à considérer que le comportement asymptotique réel du réseau R est proche de celui du réseau $R^*$. On utilise là, de façon sous-jacente, la propriété du flux de sortie conditionnel d'une file $\lambda(i)/K/1$. En effet, on a démontré par ailleurs (c.f. [4]) que, pour une telle file, on a :

$$\nu(i).Q(i) = \lambda(i-1).Q(i-1) \qquad (7)$$

cette relation étant introduite dans le système (I) par l'intermédiaire de la relation (2).

*PROPRIETES DE LA SOLUTION DU SYSTEME (I) :*

On met ici en évidence quelques propriétés du système (I) qui seront utilisées pour en chercher la solution.

Soit $\tilde{P}_j(i)$ la probabilité marginale approchée obtenue à l'aide du système (I) ; i.e :

$$\tilde{P}_j(i) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m \\ \text{et } \sum_{v=1}^{m} n_v=N \\ \text{et } n_j = i}} P(e)$$

compte tenu de la forme de produit de P(e), on a :

$$\tilde{P}_j(i) = \frac{\frac{x_j^i}{A_j(i)}\, C_j(N-i,m-1)}{C(N,m)}$$

ou encore :

$$\frac{\tilde{P}_j(i-1)}{\tilde{P}_j(i)} = \frac{A_j(i)}{A_j(i-1)} \times \frac{C_j(N-i+1,m-1)}{x_j\, C_j(N-i,m-1)}$$

Soit, compte-tenu des équations (3) et (6) :

$$\frac{\tilde{P}_j(i-1)}{\tilde{P}_j(i)} = \frac{\nu_j(i)}{\lambda_j(i-1)} \qquad (8)$$

On obtient donc, en considérant les relations (2), (6) et (8) :

$$\frac{\tilde{P}_j(i-1)}{\tilde{P}_j(i)} = \frac{Q_j(i-1)}{Q_j(i)} \qquad (9)$$

ce qui implique l'égalité des probabilités :

$$\tilde{P}_j(i) = Q_j(i) \qquad i=0,\dots,N \qquad (10)$$

Compte-tenu de la forme de $P(e)$, on a encore :

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{N} i\, \tilde{P}_j(i) = N \qquad (11)$$

Cette relation, associée à la relation (10), permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{N} i\, Q(i) = N \qquad (12)$$

cette dernière relation montre que la somme des valeurs moyennes des clients des files $\lambda_j(i)/K_j/1$, $j=1,\dots,m$ est égale à N.

Par ailleurs, rappelons que, si l'on note $\check{P}_j(.)$ les probabilités marginales asymptotiques exactes de la station j, le taux d'utilisation de la station j s'écrit :

$$u_j = 1 - \check{P}_j(0)$$

Pour le type de réseau R que nous étudions ici, le théorème de Chang et Lavenberg c.f. [6]) montre que les taux d'utilisation des stations sont liés par la relation :

$$\frac{u_j}{u_i} = \frac{x_j\ \mu_j^{-1}}{x_i\ \mu_i^{-1}}$$

Montrons maintenant que les probabilités données par le système (I) sont telles que :

$$\frac{(1 - \tilde{P}_j(0))}{(1 - \tilde{P}_i(0))} = \frac{x_j\ \mu_j^{-1}}{x_i\ \mu_i^{-1}}$$

c'est-à-dire que les taux d'utilisation calculés (qui sont aussi ceux de $R^*$) sont dans le rapport des vrais taux d'utilisation du réseau R.

En effet, compte-tenu des relations (2), (6) et (10), si $\bar{\lambda}_j$ est le flux moyen traversant la station j, on a :

$$\bar{\lambda}_j = \sum_{k=0}^{N} \lambda_j(k).\tilde{P}_j(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_j(k).\tilde{P}_j(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \nu_j(k+1).\tilde{P}_j(k+1) = \sum_{k=1}^{N} \nu_j(k).\tilde{P}_j(k)$$

Mais, compte-tenu des algorithmes classiques de calcul sur les réseaux exponentiels, on a encore :

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_j(k).\tilde{P}_j(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_j^{\ k}}{A_j(k-1)} \times \frac{C_j(N-k,m-1)}{C(N,m)}$$

$$= x_j \sum_{k=1}^{N} \frac{x_j^{\ k-1}}{A_j(k-1)} \times \frac{C_j(N-1-(k-1),m-1)}{C(N,m)}$$

$$= x_j \sum_{v=0}^{N-1} \frac{x_j^{\ v}}{A_j(v)} \times \frac{C_j(N-1-v,m-1)}{C(N,m)}$$

$$= x_j\ \frac{C(N-1,m)}{C(N,m)}$$

On a donc :

$$\bar{\lambda}_j = x_j\ \frac{C(N-1,m)}{C(N,m)}$$

et $$\bar{\lambda}_i = x_i\ \frac{C(N-1,m)}{C(N,m)}$$

ou encore : $$\frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_i} = \frac{x_j}{x_i} \qquad (13)$$

De plus, il est clair que :

$$\bar{\lambda}_i = \mu_i(1-Q_i(0)) = \mu_i(1-\tilde{P}_i(0))$$

et $$\bar{\lambda}_j = \mu_j(1-Q_j(0)) = \mu_j(1-\tilde{P}_j(0))$$

D'où le résultat cherché :

$$\frac{(1 - \tilde{P}_j(0))}{(1 - \tilde{P}_i(0))} = \frac{x_j\mu_j^{-1}}{x_i\mu_i^{-1}} \qquad (14)$$

Remarquons qu'on a aussi :

$$\tilde{P}_j(0) = 1 - x_j\mu_j^{-1} \times \frac{C(N-1,m)}{C(N,m)}$$

*RESOLUTION DU SYSTEME (I) :*

Le système (I) est résolu par la méthode itérative suivante :

$$
\begin{cases}
\nu_j^{(0)}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \mu_j & \text{si} \quad i > 0 \end{cases} \\
\nu_j^{(\ell)}(i) = \dfrac{x_j \, C_j^{(\ell-1)}(N-i,m-1)}{C_j^{(\ell-1)}(N-i+1,m-1)} \times \dfrac{Q_j^{(\ell-1)}(i-1)}{Q_j^{(\ell-1)}(i)}
\end{cases} \tag{15}
$$

$$i = 0,\dots,N$$

$$\text{et pour} \quad j = 1,\dots,m$$

On stoppe les itérations lorsque les relations (12) et (14) sont presque vérifiées, i.e. lorsque :

$$\left| \frac{N - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{N} i Q_j(i)}{N} \right| < \varepsilon \tag{16}$$

et

$$\left| \frac{r_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r_j}{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r_j} \right| < \varepsilon \quad i=1,2,\dots,m \tag{17}$$

$$\text{où } r_j = \frac{1 - Q_j(0)}{x_j \mu_j^{-1}} \quad j=1,\dots,m$$

Pour toutes les expériences realisées sur ce modèle, une telle initialisation a permis d'obtenir une solution en quelques itérations.

## 3. GENERALISATION :

Soit R un réseau ergodique fermé contenant N clients, dont les probabilités de transition peuvent être dépendantes, et composé de m files d'attente, certaines pouvant être de capacité limitée.

Avant d'énoncer la méthode pour un tel réseau, il est nécessaire d'introduire une décomposition du réseau en sous-réseaux et le calcul du flux entre sous-réseaux.

Soit $I = \{1,\dots,m\}$ l'ensemble des indices des stations de ce réseau.

La partition $\{J(k)\}_{1 \leq k \leq s}$ de I définit une décomposition de R en s sous-réseaux $R_1,\dots,R_k,\dots,R_s$. Le vecteur $e = (n_1,\dots,n_m)$ représentant l'état de R, le vecteur $e_k$ représente l'état de $R_k$.

Décomposons R en un nombre maximal S de sous-réseaux de telle sorte que :

i) les probabilités de transition dépendantes $p_{ij}(.)$ ne dépendent que de l'état $e_k$ du sous-réseau $R_k$ contenant la station j.

ii) si un client transite par un système à probabilités de transition conditionnelles inclus dans $R_k$, il faut, quel que soit le chemin suivi dans $R_k$, que ce client ait la même probabilité en sortant de $R_k$ d'entrer dans toute station j, $\forall j \in I \setminus J(k)$.

iii) si la station j appartenant à $R_k$ est à capacité limitée, les clients dirigés sur la station j ne doivent provenir que de stations appartenant à $R_k$.

Ainsi par exemple, on pourra avoir des sous-réseaux tels que ceux des figures 1, 2 et 3.

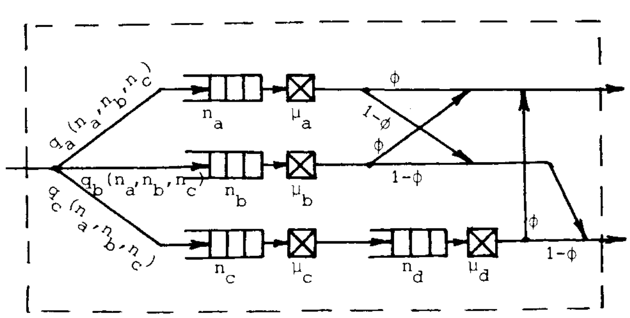



figure 1

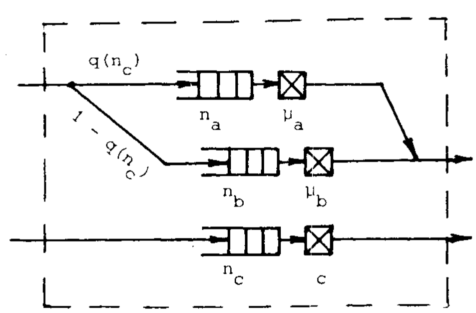



figure 2

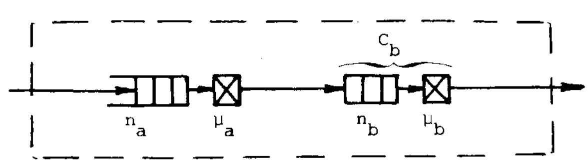



figure 3

Les conditions précédentes impliquent que les probabilités de transition $\Pi_{ij}$ entre les sous-réseaux doivent être indépendantes du nombre de clients à l'intérieur des sous-réseaux. Dans la mesure où $\exists S : S > 1$, on peut ainsi mettre en évidence une équation de conservation des flux entre sous-réseaux. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_S)$ le vecteur représentant, à un coefficient de proportionnalité près, les flux à travers les sous-réseaux $R_1, \ldots, R_S$ ; ce vecteur étant obtenu de la façon suivante :

a) si R ne contient que des probabilités de transition fixes $p_{ij}$ et si x est une solution de $x\mathcal{P} = x$, on a immédiatement :

$$\alpha_k = \sum_{j \in J(k)} x_j \left( \sum_{i \in I \setminus J(k)} p_{ji} \right) \qquad (18)$$

b) si R contient des probabilités de transition dépendantes (c.f. fig 1 et 2), alors il suffit de prendre pour chaque sous-réseau $R_k$ les probabilités $p'_{ij} = p_{ij}(e_k)$ pour un état $e_k$ arbitraire et de calculer la solution unique x', à un coefficient multiplicateur près, de $x'\mathcal{P}' = x'$ ; et compte tenu des conditions i) et ii) ci-dessus, on a encore :

$$\alpha_k = \sum_{j \in J(k)} x'_j \left( \sum_{i \in I \setminus J(k)} p'_{ji} \right) \qquad (18')$$

Si $S > 1$, la méthode proposée s'énonce, comme dans le § 2, à l'aide d'une hypothèse sur le comportement de R :

<u>Hypothèse n° 2</u> : Soit $\varepsilon = (N_1, \ldots, N_S)$ un état de R où $N_k$ est le nombre de clients dans le sous-réseau $R_k$.

Une solution approchée des probabilités d'état asymptotique du réseau R est donnée par les probabilités définies à l'aide du système d'équations suivant :

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{ll} P(\varepsilon) = \dfrac{\prod_{j=1}^{S} \left( \dfrac{\alpha_j^{N_j}}{A_j(N_j)} \right)}{C(N,S)} & (19) \\[2ex] \nu_j(i) = \dfrac{\alpha_j \, C_j(N-i,S-1)}{C_j(N-i+1,S-1)} \times \dfrac{Q_j(i-1)}{Q_j(i)} & (20) \\[1ex] \qquad i=1,\ldots,N \\ \qquad j=1,\ldots,S & \end{array} \right.$$

où :

$$\text{a)}\ A_j(N_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } N_j = 0 \\ \prod_{i=1}^{N_j} \nu_j(i) & \text{si } N_j > 0 \end{cases} \qquad (21)$$

b) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_S)$ est calculé selon la méthode exposée ci-dessus.

$$\text{c)}\ C(N,S) = \sum_{\substack{N_1,\ldots,N_S \\ \text{et } \sum_{i=1}^{S} N_i = N}} \left( \prod_{j=1}^{S} \left( \frac{\alpha_j^{N_j}}{A_j(N_j)} \right) \right) \qquad (22)$$

$$\text{d)}\ C_v(u,S-1) = \sum_{\substack{N_1,\ldots,N_S \\ \text{et } \sum_{i=1}^{S} N_i = u \\ \text{et } N_v = 0}} \left( \prod_{j=1}^{S} \frac{\alpha_j^{N_j}}{A_j(N_j)} \right) \qquad (23)$$

e) $Q_j(.)$ est la probabilité d'état asymptotique d'un réseau ouvert $R_j^O$ de structure identique à $R_j$, (et ayant les mêmes paramètres), soumis à un processus d'arrivée poissonnien de taux dépendant

$$\lambda_j(i) = \frac{\alpha_j C_j(N-i-1,S-1)}{C_j(N-i,S-1)} \qquad (24)$$

Ici, les probabilités $Q_j(.)$ peuvent être calculées selon la nature de $R_j$ soit par une méthode analytique exacte, ou approchée, soit par une méthode récursive élaborée sur le graphe markovien associé à $R_j^O$ (avec états fictifs dans le cas de lois de service générales), soit enfin par une méthode numérique.

*REMARQUE* :

Là encore, la relation (20) du système (II) permet d'utiliser une propriété du flux de sortie conditionnel de tout sous-réseau $R_j^O$, $j=1,\ldots,S$. Pour donner un sens physique à l'hypothèse n°2, nous allons maintenant énoncer cette propriété.

Soit $\mathcal{R}$ le système markovien irréductible et ergodique associé à $R_j^O$ ; soit E l'ensemble des états $\eta$ de $\mathcal{R}$.

Pour le système $\mathcal{R}$ considéré ici, il existe une partition $\{E_i\}_{0 \leq i \leq N}$ de E telle que :

$$\forall i, \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad |j| > 1 :$$

$$\text{Prob } \{\xi(t+dt) = i+j \mid \xi(t) = i\} = \sigma(dt)$$

où : $\sigma(dt)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à dt quand dt tend vers zéro.

$\xi(t)$ est le processus aléatoire associé aux états $E_i$ de la partition $\{E_i\}_{0\leq i\leq N}$.

Dans notre problème, $E_i$ est l'ensemble des états de $\mathcal{R}$ tel qu'il y ait i clients dans le système.

En notant :

$Q(i)$ = probabilité asymptotique que l'état $\eta$ de $\mathcal{R}$ appartienne à $E_i$

$[\nu(i)dt+o dt] = \mathrm{Prob}\{\xi(t+dt)=i-1 \mid \xi(t) = i\}$

et compte tenu que :

$[\lambda(i)dt+o dt] = \mathrm{Prob}\{\xi(t+dt)=i+1 \mid \xi(t) = i\}$

on a la théorème suivant :

<u>théorème</u> : Pour le système $\mathcal{R}$, on a :

$$\lambda(i)\ Q(i) = \nu(i+1).Q(i+1) \qquad (25)$$

Ce théorème a été démontré dans [7].

*PROPRIETES DE LA SOLUTION DU SYSTEME (II) :*

De la même façon qu'au paragraphe 2, si on définit la probabilité semi-marginale :

$$\tilde{P}_j(i) = \sum_{\substack{N_1,\dots,N_S \\ \text{et } \sum_{v=1}^{S} N_v = N \\ \text{et } N_j = i}} P(\varepsilon)$$

on a encore :

$$\frac{\tilde{P}_j(i-1)}{\tilde{P}_j(i)} = \frac{\nu_j(i)}{\lambda_j(i-1)} \qquad (26)$$

Soit, compte tenu des relations (20) et (24) :

$$\frac{\tilde{P}_j(i-1)}{\tilde{P}_j(i)} = \frac{Q_j(i-1)}{Q_j(i)} \qquad (27)$$

ou encore :

$$\tilde{P}_j(i) = Q_j(i) \qquad i=0,\dots,N \qquad (28)$$

Ce qui implique, comme au § 2, que :

$$\sum_{j=1}^{S} \sum_{i=1}^{N} i\ Q(i) = N \qquad (29)$$

De même, en utilisant les relations (20), (24) et (28), on montre que :

$$\overline{\lambda}_j = \sum_{k=0}^{N} \lambda_j(k).\tilde{P}_j(k) = \alpha_j \frac{C(N-1,S)}{C(N,S)}$$

Soit encore :

$$\frac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_i} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \qquad i,j = 1,\dots,S \qquad (30)$$

*RESOLUTION DU SYSTEME (II) :*

On utilise une méthode itérative, semblable à celle du paragraphe 2. Selon la nature de R, l'initialisation (i.e. le calcul des suites $\{\nu_j^{(0)}(.)\ ,\ j = 1,\dots,S)$ est plus ou moins complexe.

$\nu_j^{(0)}(.)$ se calcule à l'aide d'un sous-réseau simplifié $R_j^S$ construit à partir de $R_j^o$ selon les règles suivantes :

i) Les lois de service de type K sont remplacées par des lois exponentielles (de même moyenne)

ii) les capacités limitées sont remplacées par des capacités illimitées

iii) les probabilités de transition dépendantes $p_{ij}(.)$ sont remplacées par les probabilités de transition fixes $p'_{ij}$ introduites précédemment.

Les suites $\{\lambda_j^{(0)}(i)\}$ sont alors obtenues rapidement à l'aide des algorithmes classiques des réseaux exponentiels.

Les itérations sont ensuite effectuées à l'aide de la relation :

$$\nu_j^{(\ell)}(i) = \frac{\alpha_j\ C_j^{(\ell-1)}(N-i,S-1)}{C_j^{(\ell-1)}(N-i+1,S-1)} \times \frac{Q_j^{(\ell-1)}(i-1)}{Q_j^{(\ell-1)}(i)} \qquad (31)$$

$$i=0,\dots,N \quad \text{et pour } j=1,\dots,S$$

Compte-tenu des relations (29) et (30), les tests d'arrêt sont les suivants :

$$\left| \frac{N - \sum_{j=1}^{S} \sum_{i=0}^{N} i\ Q_j(i)}{N} \right| < \varepsilon \qquad (32)$$

et

$$\left| \frac{r_i - \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{S} r_j}{\frac{1}{S} \sum_{j=1}^{S} r_j} \right| < \varepsilon \qquad i=1,\dots,S \qquad (33)$$

$$\text{où } r_j = \frac{\overline{\lambda}_j}{\alpha_j} \qquad j=1,\dots,S$$

*CAS DU RESEAU OUVERT :*

Dans le cas d'un réseau ouvert (dont le taux d'entrée $\lambda_o(n)$ peut dépendre du nombre de clients se trouvant dans le réseau) on obtient une solution approchée en étudiant le réseau fermé canonique possèdant un nombre de clients $\hat{N}$ suffisamment élevé pour que la probabilité de la station source $\tilde{P}_o(0)$ d'être vide soit négligeable.

## 4. RESULTATS ET CONCLUSION :

Bien que la convergence de la méthode de résolution présentée ici n'ait pas été prouvée mathématiquement, les nombreuses expériences réalisées avec différents modèles et différents paramètres n'ont pas permis de trouver un cas de non convergence.

Les essais (1) ont été conduits avec le souci de déterminer la vitesse de convergence et la précision de la méthode.

*VITESSE DE CONVERGENCE :*

Deux éléments doivent être examinés : le temps d'execution d'une seule itération et le nombre d'itérations.

Si le réseau R étudié est tel que S = m et $r_j=1$, le temps d'execution d'une seule itération est très court car :

a) comme il a déjà été dit, les suites $\{\lambda_i(n_i)\}$ sont calculées à l'aide d'un algorithme similaire à celui utilisé pour le calcul de la constante de normalisation d'un réseau exponentiel fermé (dont les stations possèdent des taux de service dépendants).

b) le calcul des probabilités marginales $\tilde{P}_i(n_i)$ est réalisé à l'aide de méthodes récursives.

Dans le cas où l'on utilise des méthodes numériques pour déterminer les probabilités d'état asymptotique des sous-réseaux $R_j^o$, c'est le temps de calcul de ces probabilités semi-marginales qui est prépondérant au niveau d'une itération.

Le nombre d'itérations dépend de M, de N, du type de sous-réseaux $R_k$, et de la valeur donnée à $\varepsilon$. En général, on a pris $\varepsilon = 10^{-4}$ ou $\varepsilon = 10^{-3}$. Selon le type de réseau testé, la méthode converge en 3 à 5 itérations dans le cas général ; mais parfois, dans des cas défavorables, le nombre d'itérations peut être plus élevé (e.g. : 18 itérations).

*PRECISION :*

Compte-tenu que la solution exacte ne peut être actuellement connue que par une méthode numérique (c.f; [5]), les études de précision de la méthode n'ont porté que sur de petits réseaux.

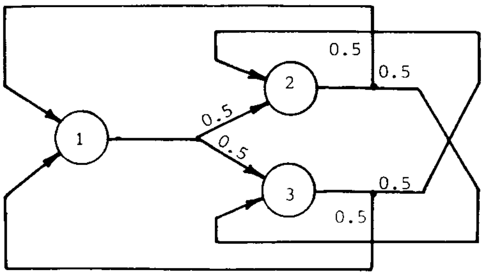
La méthode proposée ne peut avoir d'intérêt que si elle fournit des résultats plus précis que les résultats que l'on peut obtenir à l'aide d'une modélisation plus simple : celle des réseaux exponentiels. A cet égard, tous les essais effectués sont convainquants : les résultats de la méthode proposée sont nettement plus proches que ceux obtenus à l'aide du réseau exponentiel canoniquement associé au réseau R. L'exemple numérique de la page suivante illustre ce point de vue.

*CONCLUSION :*

La méthode approchée présentée dans ce rapport donne des résultats relativement précis et est applicable à une classe relativement grande de réseaux de files d'attente.

Les algorithmes ont été implantés pour des réseaux à probabilité de transition fixe. L'implantation des algorithmes relatifs aux réseaux à probabilité de transition dépendantes est en cours de réalisation.

(1) à ce jour, les essais n'ont été effectués que sur des réseaux ayant des probabilités de transition fixes.




| Paramètres \ Stations | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| type de loi | $H_2$ | $H_2$ | $E_2$ |
| moyenne | 1 | 1 | 1 |
| coeff. $K^2$ | 10 | 10 | 0,5 |

| | | N = 3 | | | N = 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Station | | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| $u_i$ | (a) | 0.499 | | | .533 | | |
| | (b) | 0.501 | | | .536 | | |
| | (c) | 0.600 | | | .667 | | |
| $\bar{n}_i$ | (a) | 1.036 | | 0.927 | 1.376 | | 1.245 |
| | (b) | 1.030 | | 0.940 | 1.363 | | 1.273 |
| | (c) | 1.000 | | 1.000 | 1.333 | | 1.333 |

$u_i$ : taux d'utilisation de la station i

$\bar{n}_i$ : nombre moyen de clients dans la station i

(a) : solution de la méthode

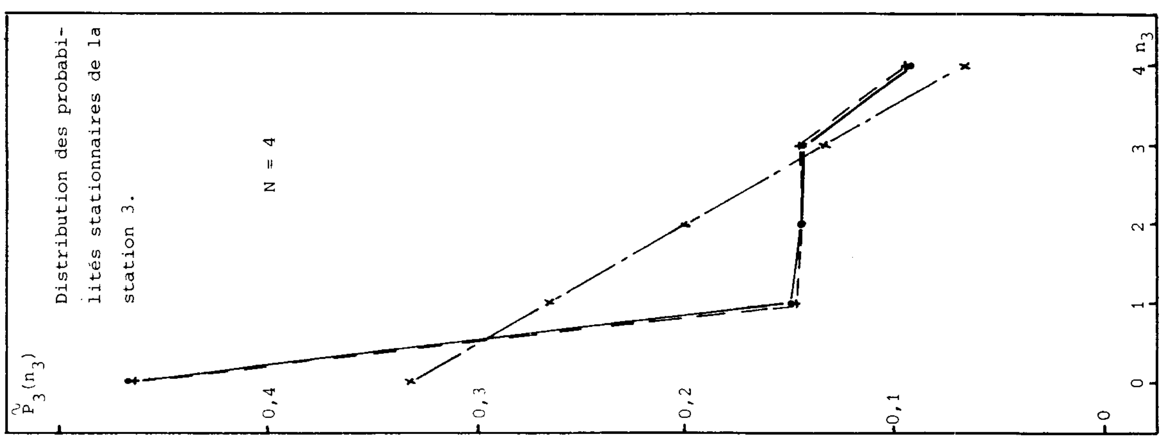
(b) : solution exacte

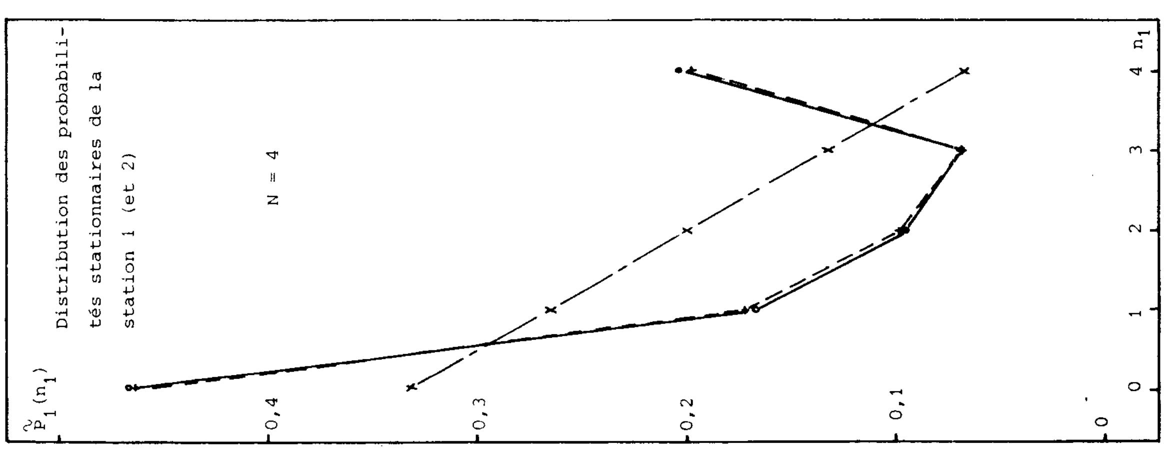
(c) : solution du modèle exponentiel.

—·— résultats du modèle exponentiel

– – – résultats exacts

o—o— résultats de la méthode



# R E F E R E N C E S

[1] H.KOBAYASHI
*Application of the diffusion approximation to queueing Networks, Part 1 : Equilibrium Queue distributions*
J. ACM. Vol. 21, n° 2, April 74, pp. 316-328.

[2] E.GELENBE
*On approximate Computer System Models*
J. ACM. Vol. 22, n° 2, April 1975, pp. 261-269.

[3] K.M. CHANDY, U. HERZOG, L. WOO
*Approximate Analysis of general Queueing Networks*
IBM J. Res. Develop. Jan. 75, pp.43-49.

[4] R.A. MARIE
*Méthodes itératives de Résolution de Modèles Mathématiques de Systèmes Informatique*
RAIRO. bleue, à paraître

[5] W.J. STEWART
*MARCA : Markov Chain Analyser*
Rapport IRISA. Publication interne n° 45. RENNES. Juin 1976.

[6] A. CHANG, SS. LAVENBERG
*Work-rates in closed Queueing Networks with general independant servers*
IBM Research Report RJ 989, 1972.

[7] R.A. MARIE and W.J. STEWART
*A Hybrid Iterative-Numerical Method for the Solution of a General Queueing Network.*
IIIè Symposium on Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems - Bonn 1977.