PIERRE JAMET

Estimation de l'erreur d'interpolation pour des éléments finis quadrilatéraux qui peuvent dégénérer en triangles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A7_0>

ESTIMATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION POUR DES ELEMENTS FINIS QUADRILATERAUX QUI PEUVENT DEGENERER EN TRIANGLES

Pierre JAMET (*)

1 - INTRODUCTION

Nous allons considérer un élément fini quadrilatéral de type Q_1 et établir une estimation de l'erreur d'interpolation sous une condition plus faible que celle de Ciarlet et Raviart [2]. Tout d'abord, nous allons faire quelques rappels et introduire quelques notations.

Soit K un quadrilatère plan convexe de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3, M_4 distincts et soit :

1.1) $M = \xi(1-\eta)M_1 + \xi\eta M_2 + (1-\xi)\eta\, M_3 + (1-\xi)\ (1-\eta)M_4$,

un point quelconque de K, avec $(\xi,\eta) = \hat{M} \in \hat{K} = [0,1]^2$

Soit $\mathcal{G}$ l'application $\hat{M} \to M$ définie par (1.1). A toute fonction $\hat{\phi}$ définie sur $\hat{K}$ correspond biunivoquement une fonction ϕ définie sur K au moyen de la relation canonique $\phi(M) = \hat{\phi}(\hat{M}) = \hat{\phi}(\mathcal{G}^{-1}(M))$, $\forall\ M \in K$. Soient $\hat{Q}_1$ l'ensemble des fonctions $\hat{\phi}$ qui sont des polynômes de degré $\leqslant 1$ par rapport à chaque variable ξ et η séparément et $Q_1 = Q_1(K)$ l'ensemble des fonctions ϕ correspondantes. Soit Q l'opérateur d'interpolation qui fait correspondre à toute fonction u continue sur K la fonction Qu telle que :

1.2) $Qu \in Q_1$, $Qu(M_i) = u(M_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Le couple (K,Q) définit un élément fini de type Q_1.

Nous allons chercher à estimer l'erreur d'interpolation $u - Qu$ pour une fonction quelconque $u \in H^2(K) \subset C(K)$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$||u||_{m,p,k}$ = norme de u dans l'espace de Sobolev $W^{m,p}(K)$

Service M.A., Centre d'Etudes de Limeil, Commissariat à l'Energie Atomique, B.P. 27, 94190 VILLENEUVE St GEORGES

$|u|_{m,p,K}$ = semi-norme de u dans l'espace de Sobolev $W^{m,p}(K)$ obtenue en considérant seulement les dérivées d'ordre égal à m.

L'indice p est omis lorsqu'il est égal à 2, c'est-à-dire pour l'espace de Sobolev $H^m(K) = W^{m,2}(K)$.

Soient de plus :

h = diamètre de K

h' = longueur du plus petit côté de K

ρ = maximum du diamètre des cercles contenus dans K

β_i = angle de K correspondant au sommet M_i.

Ciarlet et Raviart [2] ont estimé l'erreur d'interpolation u - Qu sous les deux conditions suivantes :

1.3) $h'/h \geq \sigma_o > 0$

1.4) $|\cos \beta_i| \leq \sigma_1 < 1$ pour $1 \leq i \leq 4$,

où σ_o et σ_1 sont deux constantes. (voir également Strang et Fix [5])

Nous allons établir une estimation semblable à la leur, mais sous une condition plus faible. Notre résultat est le suivant :

<u>Théorème 1</u>

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition

1.5) $\rho/h \geq \sigma > 0$, où σ est une constante.

Alors, il existe une constante $C = C(\sigma)$ <u>qui dépend seulement de σ</u>, telle que :

1.6) $|u - Qu|_{m,K} \leq C\, h^{2-m}\, |u|_{2,K}$,

pour m = 0 et 1 et pour toute fonction $u \in H^2(K)$.

Remarquons que les deux conditions (1.3) et (1.4) interdisent au quadrilatère K de dégénérer en triangle et qu'elles entraînent la condition (1.5) avec $\sigma = \sigma_o(1 - \sigma_1^2)^{1/2}$. Par contre, la condition (1.5) n'exclut pas la dégénérescence du quadrilatère K en un triangle puisque le rapport h'/h peut être arbitrairement petit et que le plus grand angle de K peut atteindre π.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur quelques résultats préliminaires qui font l'objet des sections 2 et 3 ; ces deux sections sont indépendantes. Le théorème 1.1 est démontré dans la section 4.

2 - CONTINUITE DE L'APPLICATION CANONIQUE $\hat{\phi} \to \hat{\phi}$ POUR UN QUADRILATERE QUELCONQUE

Lorsque le quadrilatère K satisfait les conditions de Ciarlet et Raviart (1.3) et (1.4), l'application canonique $\hat{\phi} \to \phi$ est continue de n'importe quel espace de Sobolev $W^{m,p}(\hat{K})$ dans l'espace correspondant $W^{m,p}(K)$. Ceci provient de ce que le jacobien J de la transformation $\mathcal{F}$ est borné inférieurement par une constante positive. Il n'en est pas de même lorsque le quadrilatère K satisfait seulement la condition (1.5). Par exemple, si l'un des angles de K est égal à π, le jacobien J s'annule au sommet M_i correspondant et il en résulte que si $\hat{\phi}$ est une fonction quelconque dans $W^{1,\infty}(\hat{K})$, les dérivées de ϕ ne sont pas bornées en général au voisinage de M_i, donc $\phi \notin W^{1,\infty}(K)$. Par contre, nous allons montrer que $1/\hat{J}$ est sommable dans $\hat{K}$ et que l'application $\hat{\phi} \to \phi$ est continue de $W^{1,\infty}(\hat{K})$ dans $H^1(K)$.

Lemme 2.1

Soit K un quadrilatère convexe quelconque de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3, M_4 distincts. Soient θ l'angle des deux diagonales M_1M_3 et M_2M_4 et O leur point d'intersection. Soit $a_i = |OM_i|$ = la distance du point O à chaque sommet M_i. Supposons $a_i > 0$ pour i = 1,2, 3 et $a_4 \geq 0$. Alors :

$$\text{2.1)} \qquad \iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1}\, d\xi\, d\eta < 2/\left(\sin\theta \, .\, a_2 \sqrt{a_1 a_3}\right)$$

DEMONSTRATION

Choisissons deux axes de coordonnées rectangulaires quelconques (OX,OY) dans le plan de K et soient deux axes de coordonnées auxiliaires (Ox,Oy) orientés selon les vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_1M_3}$ *et* $\overrightarrow{M_2M_4}$. *Soient* J_1 *le jacobien de la transformation* $(\xi,\eta) \to (x,y)$ *et* J_2 *le jacobien de la transformation* $(x,y) \to (X,Y)$. *On a* $J = J_1 J_2$ *et* $|J_2| = \sin\theta$.

(le signe de J_2 dépend du sens de la numérotation des sommets M_i).

D'autre part, on a d'après (1.1) :

$$\begin{cases} x = \xi(1-\eta)a_1 - (1-\xi)\eta\, a_3 \\ y = \xi\eta\, a_2 - (1-\xi)\,(1-\eta)\, a_4 \end{cases}$$

D'où : $\hat{J}_1 = a_1a_2\xi + a_2a_3\eta + a_3a_4(1-\xi) + a_4a_1(1-\eta) \geq a_2(a_1\xi + a_3\eta\,) \geq 0.$

On en déduit, après intégration en ξ :

$$\iint_{\hat{K}} |\hat{J}_1|^{-1}\, d\xi\, d\eta \leq \frac{1}{a_1a_2} \int_0^1 Log(1 + \frac{a_1}{a_3\eta})d\eta \,.$$

Puis, en utilisant l'inégalité $Log(1+t) < t^{1/2}$, $\forall t > 0$, on obtient :

$$|\hat{J}_1|^{-1}\, d\xi\, d\eta < 2/(a_2\sqrt{a_1a_3}) \quad ,$$

d'où l'on déduit immédiatement (2.1).

<u>Corollaire 2.1</u>

Soit K un quadrilatère convexe qui satisfait la condition (1.5). Alors, il existe une constante $C = C(\sigma)$ telle que :

$$2.2) \qquad \iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1}\, d\xi\, d\eta < C\, h^{-3/2}\, h'^{-1/2} \,,$$

où h est le diamètre de K et h' la longueur du plus petit côté.

<u>*DEMONSTRATION*</u>

Supposons que l'on a numéroté les sommets M_i de telle sorte que $a_4 = min\ \{a_i\ ;\ i = 1,2,3,4\}$ et $a_3 \leq a_1$.

On a : $min\ \{|M_1M_3|\ ,\ |M_2M_4|\} > \rho \geq \sigma h$,

i.e. $min\ \{a_1 + a_3,\ a_2 + a_4\} > \sigma h.$ *D'où :*

2.3) $\min \{a_1, a_2\} > \frac{1}{2}\,\sigma h.$

D'autre part, on a :

2.4) $a_3 \geq \frac{1}{2}\;|M_3M_4| \;\geq\; \frac{1}{2}\,h'$, *et*

2.5) $\theta \geq \theta_o = 2 \text{ Arc } \sin \frac{\sigma}{4}$.

En portant dans (2.1) les inégalités (2.3), (2.4) et (2.5), on obtient (2.2).

<u>Lemme 2.2</u>

Soit K un quadrilatère convexe quelconque. Quelque soit $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$, on a $\phi \in H^1(K)$ avec

2.6) $$|\phi|_{1,2,K} \leq C\,h\;|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}}\;\Big(\iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1} d\xi\, d\eta\Big)^{1/2} ,$$

où C est une constante.

<u>DEMONSTRATION</u>

Soient (OX,OY) deux axes de coordonnées rectangulaires dans le plan de K. Un calcul simple donne :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\dfrac{\partial \phi}{\partial X}} \\[2ex] \widehat{\dfrac{\partial \phi}{\partial Y}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial Y}{\partial \xi} \\[2ex] -\dfrac{\partial X}{\partial \eta} & \dfrac{\partial X}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial X_i}\right| \leq 2h\,|\hat{\phi}|_{1,\infty,K} \,/\, |\hat{J}| \qquad , \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2,\; X_1 = X,\; X_2 = Y.$$

On en déduit (2.6) en utilisant la formule d'intégration :

$$\iint_K \left|\frac{\partial \phi}{\partial X_i}\right|^2 dx\,dy = \iint_{\hat{K}} \left|\widehat{\frac{\partial \phi}{\partial X_i}}\right|^2 \hat{J}\, d\xi\, d\eta .$$

Remarque

Dans la démonstration précédente, nous n'avons pas utilisé le fait que $\hat{K}$ et K sont des quadrilatères. Le lemme 2.2 est valable pour un élément fini isoparamétrique quelconque pourvu que $1/\hat{J}$ soit sommable dans $\hat{K}$.

Du lemme 2.2 et du corollaire 2.1 on déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 2.2

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (1.5). Alors, pour toute fonction $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(K)$, on a $\phi \in H^1(K)$ et

2.7) $$|\phi|_{1,2,K} \leq C(\sigma)\left(\frac{h}{h'}\right)^{1/4} |\hat{\phi}|_{1,\infty,K},$$

où $C(\sigma)$ est une constante qui ne dépend que de σ.

3 - INTERPOLATION LINEAIRE DANS UN QUADRILATERE

Soit K un quadrilatère convexe de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3 et M_4. Soient h le diamètre de K, T le triangle de sommets M_1, M_2, M_3 et ρ_T le diamètre du cercle inscrit dans T. Supposons :

3.1) $\rho_T/h \geq \mu > 0$ où μ est une constante.

Soit P l'opérateur d'interpolation défini par :

3.2) $Pu \in P_1$, $Pu(M_i) = u(M_i)$ pour $i = 1, 2, 3$

et pour toute fonction u continue sur K, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1 par rapport à des coordonnées rectilignes quelconques dans le plan de K.

Pour toute fonction $u \in H^2(K)$, nous voulons estimer les semi-normes $|u - Pu|_{m,K}$ pour $m = 0$ et 1, et l'erreur ponctuelle $|u(M) - Pu(M)|$ en un point quelconque $M \in K$. Les constantes intervenant dans ces estimations ne devront dépendre que de μ.

Lemme 3.1

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (3.1). Alors, pour toute fonction $u \in H^2(K)$, on a :

$$3.3) \quad |u - Pu|_{m,K} \leq C(\mu) h^{2-m} |u|_{2,K} \quad ,$$

pour m = 0 et 1, où $C(\mu)$ est une constante qui ne dépend que de μ.

DEMONSTRATION

Le triangle T est l'image d'un triangle de référence fixe $\tilde{T}$ au moyen d'une transformation affine F. Posons $\tilde{K} = F^{-1}(K)$ et $\tilde{M} = F^{-1}(M)$, $\forall\, M \in K$. Soient $\tilde{u}$ et $\tilde{P}$ définis par $\tilde{u}(\tilde{M}) = u(M)$ et $\tilde{P}\,\tilde{u}(\tilde{M}) = Pu(M)$, $\forall\, M \in K$. Le quadrilatère $\tilde{K}$ est contenu dans le triangle $\tilde{T}_\mu$ déduit du triangle $\tilde{T}$ par une homothétie de centre M_2 et de rapport $1/\mu$. On peut donc appliquer le théorème de [3] qui donne une estimation de l'erreur d'interpolation dans une famille de domaines "uniformément connexes", en particulier dans une famille de domaines convexes et uniformément bornés. On obtient :

$$3.4) \quad |\tilde{u} - \tilde{P}\tilde{u}|_{m,\tilde{K}} \leq C_o(\mu)\; |\tilde{u}|_{2,\tilde{K}} \quad ,$$

pour m = 0 et 1, où C_o est une constante, <u>indépendante de $\tilde{K}$</u>, qui ne dépend que de μ. En utilisant ensuite un argument classique de Ciarlet et Raviart [1], on en déduit l'estimation (3.3).

Lemme 3.2

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (3.1). Soit M un point quelconque de K et $d = \min\{\, |M M_i|\ ;\ 1 \leq i \leq 3\}$. Alors, pour tout nombre réel α, tel que $0 < \alpha < 1$, il existe une constante $C = C(\alpha,\mu)$ qui ne dépend que de α et μ, telle que :

$$3.5) \quad |u(M) - Pu(M)| \leq C\, d^{\alpha} h^{1-\alpha} |u|_{2,K} \quad ,$$

$$\forall\, u \in H^2(K) \text{ et } \forall\, M \in K.$$

DEMONSTRATION

Nous allons d'abord démontrer (3.5) dans le cas $h = 1$. La condition (3.1) entraîne que tous les angles du quadrilatère K sont supérieurs à un angle $\beta_o = \beta_o(\mu)$. Soit G_o un triangle isocèle fixe qui admet deux angles égaux à $\beta_o/2$ et soit M_j le sommet de T le plus proche du point M. Il existe un triangle isocèle G semblable au triangle G_o, qui admet pour base le segment $M\,M_j$ et qui est contenu dans K. Soit un opérateur de prolongement $E_o \in \mathcal{L}\left(H^2(G_o),\ H^2(\mathbb{R}^2)\right)$. Il lui correspond par similitude un opérateur de prolongement $E \in \mathcal{L}\left(H^2(G),\ H^2(R^2)\right)$. Les normes des deux opérateurs E_o et E sont égales et ne dépendent que de β_o, c'est-à-dire de μ.

Soit w une fonction quelconque dans $H^2(G)$. D'après Lions ([4], théorème 3.4), il existe une constante $C_o = C_o(\alpha)$ telle que :

$$\begin{aligned}|w(M) - w(M_j)| &\leq C_o(\alpha)\ |M\,M_j|^\alpha\ \|Ew\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_o(\alpha)\ C_1(\mu)\ |M\,M_j|^\alpha\ \|w\|_{2,T}\ .\end{aligned}$$

En prenant $w = r_G(u - Pu)$, où r_G désigne la restriction à G, on déduit :

$$|u(M) - Pu(M)| = |w(M)| = |w(M) - w(M_j)| \leq C_o(\alpha)\ C_1(\mu) d^\alpha \|u-Pu\|_{2,K}.$$

D'où, en appliquant le lemme 3.1 avec $h = 1$,

$$|u(M) - Pu(M)| \leq C(\alpha,\mu) d^\alpha\ |u|_{2,K}.$$

L'estimation (3.5), avec $h > 0$ quelconque, s'en déduit par une simple similitude.

<u>Remarque</u>

Les lemmes 3.1 et 3.2 sont valables pour des domaines K qui ne sont pas des quadrilatères, en particulier pour des domaines convexes quelconques contenant le triangle T. On peut aussi considérer des opérateurs d'interpolation plus généraux comme dans [3].

4 - ERREUR D'INTERPOLATION POUR DES ELEMENTS FINIS QUADRILATERAUX DE TYPE Q_1

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.1. Soit un quadrilatère K qui satisfait la condition (1.5). Soit O le point d'intersection des deux diagonales M_1M_3 et M_2M_4 et soit a_i la distance du point O à chaque sommet M_i. On suppose que les sommets sont numérotés de telle sorte que $a_4 \leqslant a_i$, pour i = 1, 2 et 3. Alors, le triangle T de sommets M_1, M_2 et M_3 satisfait la condition (3.1) où μ est une constante qui dépend de σ . Soit P l'opérateur défini par (3.2) et soit ϕ la fonction définie par :

$$\phi \in Q_1 \ , \quad \phi(M_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1,\ 2,\ 3 \text{ et} \quad \phi(M_4) = 1.$$

On a : $\quad Qu - Pu = \big(u(M_4) - Pu(M_4)\big)\phi$, d'où :

$$(4.1) \quad |u - Qu|_{m,K} \leqslant |u - Pu|_{m,K} + |u(M_4) - Pu(M_4)| \ \ |\phi|_{m,K} \ .$$

Les trois termes du second membre sont majorés en appliquant respectivement le lemme 3.1, le lemme 3.2 avec $\alpha = 1/4$ et le corollaire 2.2. L'estimation (1.6) en résulte après avoir remarqué que l'on a :

$$d(M_4) = \min \{ \ |M_iM_4| \ ; \ i = 1,2,3 \ \} \leqslant C(\sigma)h',$$

où $c(\sigma)$ est une constante qui ne dépend que de σ (cette inégalité est une conséquence directe de (3.1)).

REFERENCES

[1] CIARLET P.G ; RAVIART P.A "General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods".
Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), 177-199.

[2] CIARLET P.G ; RAVIART P.A "Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods"
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972) 217-249

[3] JAMET P "Un théorème permettant d'estimer l'erreur d'interpolation dans un domaine variable"
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 281, Série A, 909-911, 1975.

[4] LIONS J.L "Problèmes aux limites dans des équations aux dérivées partielles"
Presses de l'Université de Montréal (1962)

[5] STRANG G ; FIX G.J "An analysis of the finite element method"
Prentice Hall (1973)

- : -