F. BREZZI

Sur l'approximation par éléments finis de certaines inéquations variationnelles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A3_0>

SUR L'APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS DE CERTAINES INEQUATIONS VARIATIONNELLES

par F. BREZZI (*)

O - Le but de cet exposé est de présenter certains des résultats obtenus récemment en collaboration avec W.W. HAGER et P.A. RAVIART sur l'approximation par éléments finis des inéquations variationnelles.

On va examiner en détail seulement deux cas: le problème de l'"obstacle à l'intérieur" et le problème de l'"obstacle sur le bord". Seulement à la fin on fera quelques remarques sur des cas plus généraux.

1 - Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On va considerer ici seulement deux cas: Ω=polygone convexe et Ω = ouvert "regulier" (p.e. $\partial\Omega$ de classe C^2 avec Ω localement d'un seul coté de $\partial\Omega$).

Soit f une fonction définie dans Ω et que l'on va supposer "assez regulière". Pour fixer les idées on peut dire que la condition "$f \in C^1(\bar{\Omega})$" sera suffisante dans tous les cas que l'on va examiner, bien que certains résultats ne nécessitent en réalité que l'hypothèse "$f \in L^2(\Omega)$".

Soit K un convexe fermé de $H^1(\Omega)$, et considèrons le problème:

$$(1.0)\quad \begin{cases} \underline{\text{Minimiser sur}}\ K\ \underline{\text{la fonctionnelle}}: \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\text{grad } v|^2 + v^2)\,dxdy - \int_\Omega fv\,dxdy. \end{cases}$$

Il est bien connu que (1.0) peut également s'écrire:

$$(1.1.)\quad \begin{cases} \underline{\text{trouver}}\ u\ \underline{\text{dans}}\ K\ \underline{\text{tel que}}: \\ \int_\Omega (\text{grad } u.\text{grad}(v-u) + u(v-u))\,dxdy \geq \int_\Omega f(v-u)\,dxdy \\ \underline{\text{quelque soit}}\ v\ \underline{\text{dans}}\ K. \end{cases}$$

Il est également bien connu que, dans les hypothèses faites, (1.1.) admet une solution unique.

Pour approcher numériquement la solution de (1.1.) on se donne:

(1.2) un sous espace V_h, de dimension finie, de $H^1(\Omega)$,

(1.3) un convexe fermé K_h dans V_h,

(*) Politecnico di Torino e Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia.

et on considère le "problème approché" :

$$(1.4)\quad \begin{cases} \underline{\text{trouver}}\ u_h\ \underline{\text{dans}}\ K_h\ \underline{\text{tel que}}: \\ \int_\Omega (\text{grad}\, u_h . \text{grad}(v-u_h)+u_h(v-u_h))dxdy \geq \int_\Omega f(v-u_h)dxdy \\ \underline{\text{quelque soit}}\ v\ \underline{\text{dans}}\ K_h \end{cases}$$

Il est facile de voir que (1.4) a aussi une solution unique. Pour ce qui concerne l'évaluation de la distance entre u et u_h on a le théorème suivant.

Théorème 1. *Si u et u_h sont les solutions des problèmes* (1.1) *et* (1.4) *respectivement, on a pour toute v dans K et pour toute v_h dans K_h:*

$$(1.5)\quad ||u-u_h||_1^2 \leq DJ(u)(v-u_h)+DJ(u)(v_h-u)+||u-v_h||_1^2$$

où l'on a posé:

$$DJ(u)(\phi) = \int_\Omega (\text{grad}\, u.\text{grad}\, \phi+u\phi)dxdy-\int_\Omega f\phi dxdy;\quad ||\phi||_1^2=\int_\Omega (|\text{grad}\phi|^2+\phi^2)dxdy$$

Le "schéma d'approximation" (1.2)-(1.4) et le théorème 1 seront appliqués dans la suite à deux cas particulier de choix de K; la démonstration du théorème 1 se trouve, ainsi que toutes les démonstrations des résultats qui suivent, dans [3]. En particulier le théorème 1 est prouvé dans [3] sous des hypothèses plus générales que celles que l'on a emploié ici (comme on le verra au § 4), tandis que, sous cette forme, le théorème est essentiellement contenu dans [6].

2 - On va considèrer maintenant le problème dit "de l'obstacle à l'intérieur". Plus précisément on choisit K de la façon suivante:

$$K = \{v | v \in H^1(\Omega), v \geq \psi\ \underline{\text{dans}}\ \Omega\ ,\ v=g\ \underline{\text{sur}}\ \partial\Omega\}$$

où ψ et g sont des fonctions données dans Ω et sur $\partial\Omega$ respectivement, "suffisamment régulières". Pour fixer les idées on va supposer que $\psi \in C^3(\bar{\Omega})$ et que g soit la restriction à $\partial\Omega$ d'une fonction, encore notée g, de $C^2(\bar{\Omega})$. Il est clair qu'en général des hypothèses plus faibles seront suffisantes (v. [3]).

On va supposer pour le moment, pour simplifier, que Ω soit un polygone. Soit alors $\{\mathcal{T}_h\}$ une suite regulière de triangulations de Ω (cfr. e.g. [5], [9]). On définit

(2.0) $V_h = \{v \mid v \in C^0(\bar{\Omega}),\ v_{|K} \in P_r \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$

pour r entier = 1,2, où P_r désigne l'espace des polynomes de degré $\leq r$.

Soient g_h et ψ_h les interpolées dans V_h de g et ψ respectivement. On pose:

(2.1) $K_h = \{v \mid v \in V_h, v_h \geq \psi_h$ aux noeuds[(1)], $v_h = g_h$ sur $\partial\Omega\}$

toujours dans les deux cas r = 1,2.

On a alors les résultats suivants.

Théorème 2. Si $r = 1$ on a :

(2.2) $||u-u_h||_1 \leq C|h| \; ||u||_{H^2(\Omega)}$

avec C constante indépendante de h.

Théorème 3. Si $r = 2$ on a :

(2.3) $||u-u_h||_1 \leq C|h|^{3/2-\varepsilon}(||u||_{W^{2,p(\varepsilon)}} + ||u||_{W^{3-\varepsilon,q(\varepsilon)}})$

pour tout $\varepsilon > 0$ avec $p(\varepsilon) \to \infty$ et $q(\varepsilon) \to 1$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le résultat du théorème 2 étant connu (cfr.[6]) on va se borner à donner une idée de la démonstration du théorème 3. On remarque d'abord que l'on doit supposer que la solution u ait la regularité suivante :

(2.4) $u \in W^{s,p}(\Omega) \quad s < 2+\frac{1}{p}, \quad 1 < p < \infty$

Ceci est sûrement vrai (cfr. [2]), si Ω est un ouvert "régulier", dans les hypothèses faites. Dans le cas Ω=polygone convexe, (2.4) doit par contre être considerée comme une hypothése.

On definit

(2.5) $\Omega_C = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega,\ u(x,y) = \psi(x,y)\}$,

(2.6) $\Omega_D = \Omega - \Omega_C = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega, u(x,y) > \psi(x,y)\}$

---

(1) Dans le cas r = 2 il sera suffisant de demander $v_h \geq \psi_h$ aux points "milieu des côtés".

et on sait que dans les hypothèses faites la "surface libre" ($\bar{\Omega}_C \cap \bar{\Omega}_D$) a une longueur finie.

On verifie aisément que

$$DJ(u)(v-u_h)+DJ(u)(v_h-u) =$$

$$= \langle w,v-u_h\rangle+\langle w,v_h-u\rangle \tag{2.7}$$

lorsque $v \in K$ et $u_h \in K_h$, avec $w = -\Delta u+u-f$;

on a en outre que

$$w \geq 0 \, , \; w = 0 \quad \text{dans } \Omega_D \, , \; w = -\Delta\psi+\psi-f \text{ dans } \Omega_C \, , \tag{2.8}$$

et donc $w \in L^\infty$.

En prenant pour v_h l'interpolé de u dans V_h on a alors aisément

$$\|u-v_h\|_1^2 \leq C|h|^{3-2\varepsilon} \|u\|^2_{W^{5/2-\varepsilon,2}} \, , \tag{2.9}$$

$$\langle w,v_h-u\rangle \leq \|w\|_{L^\infty}\|v_h-u\|_{L^1} \leq C \, |h|^{3-\varepsilon} \|w\|_{L^\infty}\|u\|_{W^{3-\varepsilon,1}}$$

Le seul terme à majorer dans (1.5) est alors

$$\langle w,v-u_h\rangle \; ; \tag{2.10}$$

on verifie aisément que, en prenant v=u on a :

$$\langle w,u-u_h\rangle=\langle w,u-\psi\rangle+\langle w,\psi-\psi_h\rangle+\langle w,\psi_h-u_h\rangle=$$

$$=\langle w,\psi-\psi_h\rangle+\langle w,\psi_h-u_h\rangle =$$

$$=\mathcal{O}(|h|^3)+\langle w,\psi_h-u_h\rangle \, .$$

Pour majorer le terme

$$\langle w,\psi_h-u_h\rangle = \int_\Omega w(\psi_h-u_h)\,dxdy \tag{2.12}$$

il faut partager Ω en plusieurs zones. On considère les zones suivantes:

(2.13)
$$Z_h^1 = \{\text{triangles contenus dans } \Omega_D\}$$
$$Z_h^2 = \{\text{triangles dans les quels } \psi_h<u_h\}$$
$$Z_h^3 = \{\text{triangles de } \Omega-Z_h^2 \text{ qui sont contenus dans } \Omega_c\}$$
$$Z_h^4 = \Omega-\{Z_h^1 \cup Z_h^2 \cup Z_h^3\}$$

Il est facile de voir que Z_h^4 est constitué par les triangles dans lesquels $\psi_h=u_h$ en quelques point et qui coupent la "surface libre".

Du fait que $w\geq 0$ et $w=0$ dans Ω_D on a immédiatement que:

(2.14) $$\int_{Z_h^1} w(\psi_h-u_h)\,dxdy=0; \quad \int_{Z_h^2} w(\psi_h-u_h)\,dxdy\leq 0$$

Une partie essentielle de la démonstration consiste à montrer que si K est un triangle de $\Omega - Z_h^2$ alors

(2.15) $$||\psi_h-u_h||_{L^2(K)} \leq C|h|\;||\psi_h-u_h||_{H^1(K)}$$

En considérant alors la projection $\tilde{w}$ de w sur l'espace des fonctions constantes par morceaux on a

(2.16) $$\int_{Z_h^3} w(\psi_h-u_h)\,dxdy = \int_{Z_h^3} (w-\tilde{w})(\psi_h-u_h)\,dxdy+\int_{Z_h^3}\tilde{w}(\psi_h-u_h)\,dxdy$$

On remarque maintenant que, desque $\psi_h\leq u_h$ aux points "milieux des côtés" on a, sur chaque K de Z_h^3, que ($\tilde{w}$ étant ≥ 0)

(2.17) $$\int_K \tilde{w}(\psi_h-u_h)\,dxdy \leq 0\ .$$

Par ailleurs on a

(2.18)
$$\int_{Z_h^3}(w-\tilde{w})(\psi_h-u_h)\leq C|h|^2||\psi_h-u_h||_{H^1(Z_h^3)} \leq$$
$$\leq C|h|^2(||\psi-\psi_h||_{H^1(Z_h^3)}+||u-u_h||_{H^1(Z_h^3)})\leq$$
$$\leq C|h|^2(\mathcal{O}(|h|^2)+||u-u_h||_{H^1(Z_h^3)}),$$

en utilisant de façon essentielle le fait que $u=\psi$ dans Z_h^3 et que $w \in H^1(\Omega_c)$. Ceci n'est plus vrai dans Z_h^4; dans cette zone alors on n'utilise plus le "truc" de retirer $\tilde{w}$ pour gagner un $\mathcal{O}(|h|)$ mais on utilise par contre le fait que 1) la mesure de Z_h^4 est $\mathcal{O}(|h|)$ et 2) dans Z_h^4, u et ψ sont "voisines". On a alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{Z_h^4} w(\psi_h-u_h)\,dxdy \leq C|h|^{1/2}||\psi_h-u_h||_{L^2(Z_h^4)} \leq \\
(2.19)\qquad &\leq C|h|^{3/2}\left(||\psi-\psi_h||_{H^1(Z_h^4)}+||\psi-u||_{H^1(Z_h^4)}+||u-u_h||_{H^1(Z_h^4)}\right) \leq \\
&\leq C|h|^{3/2}\left(\mathcal{O}(|h|^2)+\mathcal{O}(|h|^{3/2-\varepsilon})+||u-u_h||_{H^1(Z_h^4)}\right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la demonstration.

<u>Remarque</u>. On peut également montrer que les résultats des théorèmes 2 et 3 restent valables si l'on suppose que Ω est un ouvert régulier.

3 - Considérons maintenant un autre choix de K, qui correspond au "problème de l'obstacle sur le bord". Plus précisement, soit g la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction, encore notée g, de $C^2(\bar{\Omega})$; on définit

(3.0) $\quad K=\{v|v\in H^1(\Omega),\ v\geq g \text{ sur } \partial\Omega\}$

Dans ce cas il sera raisonnable de se borner au cas de Ω = ouvert borné "régulier". On sait alors que la fonction u qui réalise le le minimum de J(v) sur K appartient à $W^{1+\frac{2}{p},p}(\Omega)$ pour tout $p\geq 2$ cfr. [2]). En plus on a, ce qui sera très utile, que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (cfr. e.g. [7]).

Pour definir le problème approché on remarque d'abord qu'on va pas trianguler Ω directemant (ce qui serait impossible) mais on sera obligé de trianguler des polygones Ω_h inscrits dans Ω. La"différence" $S_h=\Omega-\Omega_h$ sera composée, pour chaque Ω_h donné, d'un nombre fini de "calottes". Sous des hypothèses très raisonables on aura que le nombre des calottes est $O(|h|^{-1})$ lorsque $h\to 0$. Sans rentrer dans les détails , on "définit" V_h de la façon suivante: on considère d'abord l'espace des fonctions linéaires par morceaux dans Ω_h (comme dans (2.0) pour r=1); chaque fonction de ce type doit ensuite être prolongée dans S_h; pour fixer les idées on choisit le prolongement par valeurs constants (pour chaque calotte) dans les directions perpendiculaires à la "corde". Soit g_h l'interpolée de g dans V_h; on pose

$$(3.1) \quad K_h = v | v \in V_h; \quad v \geq g_h \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Soit donc u_h la solution de (1.4), c'est-à-dire la fonction qui réalise le minimum de J(v) sur K_h; avant de donner le théorème de majoration de l'erreur,il faudra faire une hypothèse de régularité supplémentaire. Soit pour cela Γ_C la partie de $\partial\Omega$ où l'on a "u=g" et soit $\Gamma_D = \Gamma-\Gamma_C = \{p | p \in \Gamma, u(p)>g(p)\}$. L'ensemble $S=\Gamma_C \cap \bar{\Gamma}_D$ sera la "surface libre" du problème. L'hypothèse que l'on va faire est la suivante

(3.2) S <u>est constituée d'un nombre fini de points</u>.

Cette hypothèse est probablement toujours vérifiée si toutes les données sont analytiques(2); mais elle est sûrement bien verifiée également dans beaucoup de cas pratiques.

On a alors le théorème suivant

<u>Théorème</u> 4. <u>Dans les hypothèses faites on a</u> :

$$(3.3) \qquad \|u-u_h\|_1 \leq C|h|$$

<u>avec</u> C <u>constante indépendante de la décomposition</u>.

On va donner une idée de la démonstration; pour les détails on renvoie à [3] .

Par application du théorème 1 on voit, par des simples calculs que

$$(3.4) \quad ||u-u_h||_1^2 \leq ||u-v_h||_1^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v_h-u)\,d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u_h)\,d\sigma$$

pour tout $v \in K$ et $v_h \in K_h$. On sait aussi que (cfr. e.g. [2]) l'on a $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans Γ_D.

Il faut maintenant choisir <u>soigneusement</u> v et v_h. En particulier on prend v=g et on a

$$(3.5) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(g-u_h)\, d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, (g-g_h)\,d\sigma = \mathcal{O}(|h|^2)$$

(2) Kinderlehrer, communication personnelle.

Le point essentiel est maintenant le choix de v_h. Pour cela on partage l'ensemble des noeuds en deux classes. Dans la première classe N_1 on met les noeuds qui sont à la frontière et tels que au moins une des deux calottes fermées qui les contiennent ait des points de S; dans l'autre classe N_2 on met les autres noeuds. On définit maintenant u_a dans V_h de la maniére suivante

$$(3.6)\quad \begin{cases} u_a = u & \text{aux noeuds de } N_2 \\ u_a = g & \text{aux noeuds de } N_1 \end{cases}$$

En choisissant alors $v_h=u_a$ on obtient:

$$(3.7)\quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v_h-u)\,d\sigma = \int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n}(v_h-u)\,d\sigma = \int_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial n}(v_h-g)\,d\sigma;$$

mais sur Γ_C on a $v_h=u_a=g_h$ (on a fait ce qu'il fallait pour cela) et donc

$$(3.8)\quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v_h-u)\,d\sigma = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(g_h-g)\,d\sigma = \mathcal{O}(|h|^2)$$

Il ne reste donc qu'à majorer le terme $||u-v_h||_1^2$ pour $v_h=u_a$.

D'abord il est assez facile de montrer que si u_I est l'interpolée de u dans V_h on a

$$(3.9)\quad ||u-u_I||_1^2 = \mathcal{O}(|h|^2),$$

et on est ramené à évaluer $||u_I-u_a||_1^2$. On remarque que u_I-u_a sera non nul seulement sur un nombre fini de triangles et de calottes, aux voisinages des points de S. Dès que $u\in W^{1,\infty}(\Omega)$ (et que u=g dans S, et g est régulière)on voit aisément que, dans les triangles et calottes intéréssées , les gradients de u_I et de u_a sont bornés dans L^∞.

D'où

$$(3.10)\quad ||u_I-u_a||_1^2 = \mathcal{O}(|h|^2)$$

dès que la surface totale des triangles et calottes est $\mathcal{O}(|h|^2)$.

De (2.4),(3.5),(3.8),(3.9), (3.10) on a le résultat.

Remarque. Dans [8] une majoration du type $\mathcal{O}(|h|^{3/4})$ est démontrée pour ce problème sans utiliser l'hypothèse (3.2). Ceci peut être également obtenu dans le cadre (beaucoup simple) que l'on a utilisé ici, en posant dans (3.4) $v_h=u_I$.

4 - En introduisant une fonctionnelle $j(v)$ convexe (et "non différentiable") sur $H^1(\Omega)$ on peut considérer, au lieu de (1.0) le problème, plus général.

$$(4.0)\quad \begin{cases} \underline{\text{Minimiser sur } K \text{ la fonctionnelle}}: \\ \qquad J(v) + j(v), \end{cases}$$

$J(v)$ étant encore defini comme dans (1.0) et K étant toujours un convexe fermé de $H^1(\Omega)$.

Si l'on approche K par K_h et si le problème discret

$$(4.1)\ \left\{ \underline{\text{Minimiser}}\ J(v)+j(v) \quad \underline{\text{sur}}\ K_h \right.$$

admet une solution, on a le théorème suivant qui généralise le théorème 1.

Théorème 5. Si u et u_h réalisent le minimum de $J(v)+j(v)$ sur K et K_h respectivement, on a :

$$\begin{aligned} ||u-u_h||_1^2 &\leq j(v)-j(u_h)+j(v_h)-j(u)+ \\ &+DJ(u)(v-u_h)+DJ(u)(v_h-u)+ \\ &+||u-v_h||_1^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour tout v dans K et v_h dans K_h.

Il est bien clair que le théorème ci dessus peut s'appliquer à des cas plus généraux que les problèmes d'obstacle (par exemple élasto-plasticité, fluides de Bingham etc.) et permet de retrouver, parfois de façon beaucoup plus simple, les majorations d'erreur correspondantes (cfr. toujours [3]).

Remarque- Dans beaucoup de cas pratiques, soit pour des problèmes de type général tels que (4.0) soit, plus fréquemment, pour les problèmes du type "obstacle", on est très intéressé à la connaissance de la "surface libre"; le résultat suivant, dû à Baiocchi-Pozzi (cfr. [1]) peut être parfois très utile à ce propos; en particulier il sera facile de voir son application immédiate aux cas des problèmes d'obstacle que l'on à traité ici.

Théorème 6 - Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et soient u et ψ deux fonctions de $C^0(\bar{D})$. Soit en outre $\{u_h\}$ une suite de fonctions continues telle que :

(4.3) $\quad ||u-u_h||_{L^\infty}=\varepsilon(h)\to 0$ lorsque $h\to 0$.

En posant alors:

$G = \{x | x \in D, \quad u(x)>\psi(x)\}$

$G_h= \{x | x\in D \quad u_h(x)>\psi(x)+\varepsilon_1(h)\}$

où $\varepsilon_1(h)$ est un infiniment petit, lorsque $h\to 0$, d'ordre inférieur à $\varepsilon(h)$, on a :

1) $G_h\subseteq G$ pour h suffisamment petit,

2) $\lim\limits_{h\to 0}$ (mesure $(G-G_h)) = 0$.

En ce qui concerne l'application de ce théorème il est facile de voir que, par exemple en dimension deux, si l'on connait une estimation de $u-u_h$ dans la norme de H^1 et si l'on sait que u est dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour un quelconque $p>2$ il est facile d'obtenir une estimation (bien que non optimale) de $u-u_h$ dans L^∞ par

$$||u-u_h||_{L^\infty}\leqslant C||u-u_h||_{W^{1,p}} \leqslant C(||u-v_h||_{W^{1,p}}+||v_h-u_h||_{W^{1,p}}) \leqslant$$

$$\leqslant C(||u-v_h||_{W^{1,p}}+C_1|h|^{-\frac{p-2}{p}}||v_h-u_h||_{H^1})\leqslant$$

$$\leqslant C(||u-v_h||_{W^{1,p}}+C_1|h|^{\frac{2-p}{p}}||u-v_h||_{H^1}+C_1|h|^{\frac{2-p}{p}}||u-u_h||_{H^1}).$$

Pour les détails on renvoie à [4].

BIBLIOGRAPHIE

1) C. BAIOCCHI-G.A. POZZI: "An evolution variational inequality related to a diffusion absorption problem" - (à paraitre sur Applied Mathematics and Optimization) - (1975).

2) H. BREZIS: "Seuil de régularité pour certains problèmes unilateraux" - C.R. Acad. Sc. Paris 273 (1971) pp. 35-37.

3) F. BREZZI-W.W. HAGER-P.A. RAVIART: "Error estimates for the finite element solution of variational inequalities - Part. 1: primal approach" (à paraitre)

4) F. BREZZI-G. SACCHI: "A finite element approximation of a variational inequality related to hydraulics" - (à paraitre sur "Calcolo").

5) P.G. CIARLET-P.A. RAVIART: "General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with application to finite element methods - Arch. Rat. Mech. Anal., 46 177-199 (1972).

6) R. FALK: "Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities" - Math. Comp. 28 (1974) pp. 963-971

7) J. FREHSE: "Two dimensional variational problems with thin obstacles" - Math. E. 143 (1975) pp. 279-288.

8) F. SCARPINI-M.A. VIVALDI: "Error estimates for the approximation of some unilateral problems" (à paraitre).

9) G. STRANG-G. FIX: "An analysis of the finite elements method"- Prentice Hall New York, (1973).