PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GABRIEL PICAVET

Idéaux premiers de Goldman

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 11, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A7_0>

IDEAUX PREMIERS DE GOLDMAN

Gabriel Picavet

Le texte qui suit est un résumé de deux articles [P_1] et [P_2] . Toutefois , on trouvera quelques résultats qui ne figuraient pas dans les articles précités , ainsi qu'une bibliographie complétée . Les notations ou notions , non précisées sont celles de [B] et [Gr]

I Introduction et rappel de résultats

La situation suivante se présente souvent en algèbre commutative : A est un anneau intègre dont le corps des quotients K est de type fini sur A (au sens des algèbres) . On dit dans ce cas que A est un anneau de Goldman , ou encore , que c'est un G-anneau . Il est bien connu que l'on a la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit A un anneau intègre , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est un G-anneau

b) (O) est un point isolé de Spec(A)

c) l'intersection des idéaux premiers , non nuls , de A est différente de (O)

De plus ,|Artin -Tate|, si A est noethérien , les conditions précédentes sont équivalentes à

d) A est un anneau semi-local , de dimension inférieure ou égale à 1

On pourra consulter [Gi],[Gu],[K] , pour les démonstrations .

Par contre , dans le cas où A n'est pas noethérien , une caractérisation des G-anneaux reste à trouver , même si l'on suppose que Spec(A) est un espace noethérien [F - M] .

On peut , tout au plus , signaler l'article de [H] , dont le résultat principal semble être :

<u>Proposition 2</u> : Soit D un anneau intègre , de Prüfer , complétement intégralement clos , de caractère fini . Alors D est un G-anneau si et seulement si D a la propriété (T) de Gilmer et contient un idéal premier de hauteur 1 . Dans ce cas D est de dimension 1 et semi-local

<u>Définition</u> : Soit A un anneau , on dit que P élément de Spec(A) est un G-idéal (ou idéal premier de Goldman) si A/P est un G-anneau . L'ensemble des G-idéaux est désigné par Gold(A) .

Le résultat suivant est aussi bien connu :

<u>Proposition 3</u> : Soit A un anneau , alors $P \in$ Gold(A) si et seulement si il existe un idéal maximal de $A[X]$, au dessus de P .

On voit donc que Max(A) est contenu dans Gold(A) . L'égalité caractérise les anneaux de Jacobson . Cette remarque est à l'origine d'une démonstration rapide par Krull et Goldman du théorème des zéros de Hilbert .

Lorsque A est un G-anneau noethérien , on voit que que l'on a Spec(A) = Gold(A), en vertu de la remarque précédente . Ceci motive la définition :

<u>Définition</u> : Soit A un anneau , on dira que A est un G'-anneau si Spec(A) = Gold(A)

Bien entendu , si A est un G'-anneau intègre , alors A est un G-anneau . Je ~~ne~~ sais pas si la réciproque est vraie . Il suffirait de montrer que Gold(A) est stable par spécialisation: c'est vrai pour les G-anneaux connus .

II - Quelques caractérisations des G'-anneaux

Notons le lemme suivant :

Lemme1 : [P_2] . Soit P un idéal premier d'un anneau A , chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que P soit un G-idéal :

a) $\{P\}$ est une partie localement fermée de Spec(A) .

b) $V(P) - \{P\}$ est une partie fermée de Spec(A) .

c) $V(P) - \{P\}$ est une partie proconstructible .

d) P n'est pas l'intersection des idéaux premiers de A , strictement plus grands que lui .

A l'aide de ce résultat , on obtient des exemples de G'-anneaux :

1) Un anneau plat est un G'anneau . En effet , tout point de son spectre est fermé.

2) Les anneaux A , satisfaisant pour tout $P \in \mathrm{Spec}(A)$, le générisé de P , soit $g(P) = \mathrm{Spec}(A_P)$, est ouvert. La relation $\{P\} = V(P) \cap g(P)$ montre que dans ce cas tout P est localement fermé .

Comme exemples plus concrets de ce type on a :

a) Les localisés $\mathbb{Z}_{(p)}$ de $\mathbb{Z}$ en un idéal premier $(p) \neq (0)$.

b) Un anneau de valuation dont le spectre est constitué par une chaîne dénombrable d'idéaux premiers $(0) \subset P_1 \ldots\ldots \subset P_n \ldots\ldots\ldots \subset M$, où M est l'idéal maximal et chaque P_{i+1} est successeur immédiat de P_i .

Ce dernier exemple montre qu'un G'-anneau n'est pas forcément de dimension finie .

Les anneaux ,dont le générisé de tout point est ouvert , ont des caractérisations topologiques et algébriques agréables : voir [P_2]. D'autre part de tels anneaux ont été considérés dans un cas particulier dans [Pa] : on y étudie des anneaux A , intègres , tels que pour toute extension $A \longrightarrow R$, où R est un anneau intégre on ait $\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ ouverte .

Puisque les G'anneaux représentent une généralisation des anneaux plats , on peut se demander si les G'-anneaux ne sont pas caractérisables par une propriété du premier ordre , du type $\forall a \in A \quad \exists x \in A$ tel que $a^2x = a$, comme c'est le cas pour les anneaux plats .

Il n'en est rien : soit $A = \mathbb{Z}_{(p)}$, comme dans l'exemple a) considérons un ultrafiltre U sur $\mathbb{N}$, non trivial , et l'ultra-produit $A^{\mathbb{N}}/U = B$; alors B est un anneau intègre pour lequel (0) n'est pas un G-idéal . Voir [P_2] pour la preuve .

<u>Proposition 2</u> : Soit A un anneau et X une partie de Spec(A) . Si X est rétrocompacte et satisfait $\bigcap$ Gold(A) $\subset$ X , alors X est proconstructible .

<u>Proposition 3</u> : Soit A un anneau et X une partie de Spec(A) , stable par spécialisation . Si toute partie de X qui est rétrocompacte est aussi proconstructible alors X est contenue dans Gold(A) .

Ces deux propositions sont démont~~rées~~ dans [P_2] et donnent la proposition :

<u>Proposition 4</u> : Un anneau A est un G'-anneau si et seulement si toute partie rétrocompacte de Spec(A) est proconstructible .

Une connaissance plus explicite des parties rétrocompactes d'un spectre d'anneau donnerait une caractérisation plus agréable . Toutefois on a :

<u>Corollaire</u> : [P_2] Soit A un anneau dont le spectre est noethérien . Alors A est un G'-anneau si et seulement si Spec(A) est un ensemble fini .

Signalons le résultat de [F - M] :

<u>Proposition 5</u> : Soit A un anneau , les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que A soit un G'-anneau et elles sont équivalentes :

a) Gold(A) est ouvert

b) Gold(A) est fermé

c) Gold(A) est localement fermé

La démonstration résulte immédiatement des faits suivants (cf. [P_2]) : le générisé de Gold(A) est Spec(A) , Gold(A) est très dense dans Spec(A) .

<u>Proposition 6</u> : [P_2] Un anneau de valuation est un G'-anneau si tout idéal premier non maximal , a un successeur immédiat et réciproquement .

Signalons , pour terminer ce paragraphe , qu'un G'anneau possède la condition de chaîne descendante sur ses idéaux premiers . Un G'-anneau possède t-il une caractérisation dans cet ordre d'idées ?

III - La G-topologie sur Spec(A)

Une façon d'exprimer qu'un idéal premier P d'un anneau A est un G-idéal est la suivante : si P est une intersection d'idéaux premiers Q_i de A , alors P est égal à l'un des Q_i . On peut étudier de manière systématique cette propriété :

Définition : Soit A un anneau et soit P un idéal premier de A . On dit que P est G-adhérent à une partie X de Spec(A) si P est une intersection déléments de X . On désigne par X^G l'ensemble des éléments de Spec(A) qui sont G-adhérents à X .

On vérifie facilement les faits suivants :

- $P \in X^G$ équivaut à $P \in \overline{X \cap V(P)}$
- l'opération $X \longrightarrow X^G$ est une fermeture topologique qui permet donc de définir sur Spec(A) une topologie : la G-topologie .

Proposition 1 : Soit A un anneau et soit X une partie de Spec(A) :

a) On a la suite d'inclusions $X \subset X^G \subset X^C \subset \overline{X}$, où X^C est l'adhérence constructible de X (Cf. [P_2]) . En particulier , la G-toplogie, étant plus fine que la constructible , est donc séparée .

b) X est très dense dans X^G

c) X est G-fermée si et seulement si le sous espace X est sobre . Autrement dit X^G est le sous espace sobre associé à X (cf. [Gr])

d) Si X est rétrocompacte , on a $X^G = X^C$. En particulier X est proconstructible si et seulement si X est rétrocompacte et G-fermée .

Preuve : Pour a) et c) voir [P_2] .

b) Soit $O \cap F$ une partie localement fermée de Spec(A) et supposons que $X \cap O \cap F = \emptyset$. Puisque F est fermé , on a $F = \bigcup_{Q \in F} V(Q)$. On en déduit que pour tout élément Q de F on a : $X \cap O \cap V(Q) = \emptyset$. Donc , ou bien Q appartient à l'ouvert O ,et alors $Q \notin X^G$, ou bien $Q \notin O$. Il en résulte que

$F \cap O \cap X^G = \emptyset$. Ainsi X est très dense dans X^G .

d) Supposons X rétrocompacte et soit P un élément de X^G . Alors , quel que soit I idéal de type fini , contenu dans P , et quel que soit $f \in A - P$, on a $X \cap D(f)$ non inclus dans D(I) . Puisque $X \cap D(f)$ est quasi-compact , on voit que $X \cap D(f) \cap V(P)$ n'est pas vide pour tout $f \in A-P$. Il en résulte que P appartient à X^G .

Remarque : Une base d'ouverts pour la G-topologie est constituée par les parties localement fermées de Spec(A) . De façon plus précise , un système fondamental de G-voisinages de $P \in$ Spec(A) est constitué par les ensembles $V(P) \cap D(f)$ où f varie dans A-P . Ainsi un G-idéal n'est pas autre chose qu'un point G-isolé de Spec(A) . En fait le système fondamental de voisinages de P pour la G-topologie, ci-dessus, est formé d'ensembles à la fois G-ouverts et G-fermés : la G-topologie est donc une topologie d'espace éparpillé . L'ensemble $\left\{ V(P) , D(f) \right\}_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(A) \\ f \in A}}$ est une m-sous-base , ce qui dans la terminologie de [Ho], signifie que toute partie de la sous-base , ayant la propriété d'intersection finie , a une intersection non vide . En effet , les éléments de la sous-base sont des parties proconstructibles . Il résulte de [Ho] que Spec(A) muni de la G-topologie est un espace min-spectral, c'est à dire, est homéomorphe au spectre minimal d'un anneau .

Proposition 2 : Soit A un anneau , chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que A soit un G'-anneau :

a) Gold(A) est l'image d'un spectre d'anneau .

b) Spec(A) n'a pas de partie propre qui soit très dense .

La démonstration se trouve dans $[P_2]$, ainsi que d'autres propriétés de la G-topologie et ses applications .

Soit $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux , on dit , suivant [Gu] , que f est un G-morphisme si ${}^af(\mathrm{Gold}(A')) \subset \mathrm{Gold}(A)$.

Or ${}^af$ est toujours G-continue , puisqu'un G-idéal n'est autre qu'un point G-isolé on voit que lorsque ${}^af$ est G-ouverte , f est un G-morphisme .

Dans les deux cas de G-morphisme cités dans [Gu], à savoir f est entière ou f de type fini, il se trouve que ${}^af$ est G-ouverte. Lorsque f est de type fini cela résulte d'un lemme de [I] page 90 qui dit : pour tout $P' \in \mathrm{Spec}(A')$ et tout $a' \in A'$, notant $P = {}^af(P')$, il existe $a \in A$, tel que $V(P) \cap D(a) \subset {}^af(V(P') \cap D(a'))$.

On peut démontrer la même chose pour un morphisme entier (cf [P_2])

D'autre part, dans les deux cas suivants ${}^af$ est G-ouverte :

a) ${}^af$ est ouverte et injective

b) ${}^af$ est fermée et pour tout $P \in \mathrm{Spec}(A)$ la fibre ${}^af^{-1}(P)$ a ses éléments incomparables.

La démonstration, [P_2], se fait en utilisant la caractérisation d'une application continue ouverte : pour toute partie Z de Spec(A) on a ${}^af^{-1}(Z^G) = ({}^af^{-1}(Z))^G$.

Ainsi ${}^af$ est G-ouverte si et seulement si pour toute partie Z de Spec(A) et tout idéal premier P' de A' tels que ${}^af(P') = \bigcap_{Q \in Z} Q$, il existe une partie Z' de Spec(A') telle que $P' = \bigcap_{Q' \in Z'} Q'$ et satisfaisant ${}^af(Z') \subset Z$.

<u>Problème</u> : Un G-morphisme est-il toujours G-ouvert, comme les exemples précédents semblent l'indiquer ? On peut montrer que la notion de morphisme G-ouvert est stable pour le changement de base par un épimorphisme plat. En particulier, cette notion se localise. Je ne sais pas si la notion de G-morphisme se localise. Un exemple de G-morphisme ne se localisant pas donnerait donc un exemple de G-morphisme non G-ouvert.

Signalons, pour terminer, que la notion de G-anneau a été généralisée dans deux voies différentes dans [F] et dans [A].

BIBLIOGRAPHIE

[A] - ADAMS - RINGS WITH A FINITELY GENERATED TOTAL QUOTIENT RING - Canad. Math. Bull. - Vol 17 (1) , 1974 -

[B] - BOURBAKI - ALGEBRE COMMUTATIVE et TOPOLOGIE GENERALE - Hermann -

[F - M] - FONTANA et MAROSCIA - SUGLI ANELLI DI GOLDMAN - Boll. Un . Math. Ital.

[F] - FUJITA - A NOTE ON G($\mathcal{A}$)-DOMAINS AND HILBERT RINGS - Hiroshima Math. J. 5 , (1975) , 61-67 -

[Gi] - GILMER - MULTIPLICATIVE IDEAL THEORY - Dekker - 1972 -

[Gr] - GROTHENDIECK et DIEUDONNE - ELEMENTS DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE - Ch 1 - Springer Verlag - 1971 -

[Gu] - GUERINDON - ANNEAUX DE GOLDMAN - Seminaire Dubreil Pisot - 1969 - 1970 Exposé N° 9 - Secrétariat Mathématique - Paris -

[H] - HEDSTROM - G-DOMAINS AND PROPERTY (T) - Math. Nachr . - 56 - 1973 - pp 125 , 129 -

[Ho] - HOCHSTER - THE MINIMAL PRIME SPECTRUM OF A COMMUTATIVE RING - Can. J. Math. - Vol. XXIII , N° 5 , 1971 , pp. 749 , 758 -

[I] - IVERSEN - GENERIC LOCAL STRUCTURES OF THE MORPHISMS IN COMMUTATIVE ALGEBRA - Springer Verlag - Lectures Notes in Mathematics - N° 310 -1970

[K] - KAPLANSKY - COMMUTATIVE RINGS - Allyn and Bacon - 1970 -

[Pa] - PAPICK - TOPOLOGICALLY DEFINED CLASSES OF GOING DOWN DOMAINS - Thèse de Rutgers University - 1975 -

[P_1] - PICAVET - SUR LES ANNEAUX COMMUTATIFS DONT TOUT IDEAL PREMIER EST DE GOLDMAN - C.R. Acad. Sci. Paris , Sér. A-B , 280 (1975) A-1719 A-1721 -

[P_2] - PICAVET - AUTOUR DES IDEAUX PREMIERS DE GOLDMAN D'UN ANNEAU COMMUTATIF - Ann. Univ. Clermont - Ferrand , (1975) , pp. 265 , 272 -