JEAN-ETIENNE BERTIN

Sur les Q-anneaux de Matlis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 10, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A6_0>

SUR LES Q-ANNEAUX DE MATLIS

par

Jean-Etienne BERTIN

1. GENERALITES

Notations

Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau commutatif unitaire intègre qui n'est pas un corps, Q son corps des fractions, et K le R-module Q/R. On note H l'anneau $\mathrm{Hom}_R(K,K)$. Si M est un R-module sans torsion, on note Q-rg(M) la dimension sur Q de l'espace vectoriel $M \otimes_R Q$.

Introduction

Le point de départ de la théorie des Q-anneaux se situe dans l'étude de la cohomologie singulière des groupes abéliens, pour laquelle Kan et Whitehead [3] ont montré qu'il n'existe pas de groupe abélien M tel que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}$. Plus généralement, existe-t-il un R-module M tel que $\mathrm{Hom}_R(M,R) = 0$, et que $\mathrm{Ext}^1_R(M,R)$ soit R-isomorphe à un Q-espace vectoriel non nul de dimension finie ? On montre aisément qu'il en est ainsi si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_R(Q,R)$ est un Q-espace vectoriel non nul de dimension finie.

<u>Définition 1</u> : On dit que R est un <u>Q-anneau</u> si $\mathrm{Ext}^1_R(Q,R)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur Q. Plus précisément, étant donné un entier n positif ou nul, on dit que R est un <u>Q^n-anneau</u> si $\mathrm{Ext}^1_R(Q,R) \simeq Q^n$.

<u>Proposition 1</u> : Etant donné $n \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est un Q^n-anneau.

(ii) $Q\text{-rg}(H) = n+1$.

(iii) $H/R \simeq Q^n$.

Cela résulte de la suite exacte suivante ([5], th. 10) :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(Q,R) \longrightarrow 0.$$

Remarque 1 : Munissons R de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls de R forment un système fondamental de voisinages de 0. Alors H s'identifie au complété de R pour cette topologie. Lorsque R est un anneau de valuation, la topologie décrite ci-dessus et la topologie définie par la valuation coïncident, de sorte que tout anneau de valuation complet est un Q°-anneau (pour plus de détails, voir [4]).

Exemple 1 : Soit p un nombre premier. Nagata ([8], E 3.3) a donné un exemple d'anneau de valuation discrète R ayant les propriétés suivantes :

1) Le corps des fractions Q de R est de caractéristique p.
2) Si L désigne le corps des fractions du complété H de R, on a $[L:Q] = p$, et L est une extension radicielle de Q.

Alors R est un Q^{p-1}-anneau. Pour tout entier positif s, cet exemple peut être modifié de façon à fournir un Q^{p^s-1}-anneau de valuation discrète [2].

Remarque 2 : Jensen [2] a annoncé le résultat suivant :
l'ensemble des cardinaux de la forme $[\mathrm{Ext}^1_R(Q,R) : Q]$, où R est un anneau intègre noethérien de dimension 1 analytiquement non-ramifié en un idéal maximal au moins, et Q son corps des fractions se compose de tous les cardinaux infinis, de 0 et des nombres de la forme p^{s-1}, où p est un nombre premier, et s un entier positif. Cet ensemble reste inchangé si on impose à R d'être un anneau de valuation discrète.

2. SOUS-MODULES h-DIVISIBLES DE K ET IDEAUX PREMIERS DE H.

Dans ce numéro, R désigne un Q^n-anneau, pour $n \in \mathbb{N}$. Les résultats de ce numéro ont été démontrés par Matlis dans le cas où $n = 1$ [6].

Rappelons que H est un anneau commutatif ([5], th. 10), et notons Ass(H) l'ensemble des idéaux premiers associés à H (c'est-à-dire de la forme (0:f) pour un élément f de H convenable).

<u>Définition 2</u> : Un R-module M est dit h-<u>divisible</u> s'il existe un R-homomorphisme surjectif $N \longrightarrow M$, où N est un Q-module.

<u>Proposition 2</u> : Soit f un élément de H. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diviseur de zéro dans H.

(ii) $f(K) \neq K$.

(iii) $\mathrm{Hom}_R(Q, \mathrm{Ker}(f)) \neq 0$.

En particulier, H est intègre si et seulement si 0 et K sont les seuls sous-modules h-divisibles de K.

<u>Théorème 1</u> : Soit P un idéal premier faiblement associé à H (c'est-à-dire tel qu'il existe $f \in H$ pour lequel P soit un idéal premier minimal parmi ceux qui contiennent (0:f)). Alors $P \in \mathrm{Ass}(H)$, et il existe un sous-module h-divisible D de K tel que $P = \mathrm{Hom}_R(K,D)$.

<u>Corollaire 1</u> : Supposons H réduit ; alors Ass(H) a au plus n+1 élément, et tout élément de Ass(H) est un idéal premier <u>minimal</u> de H.

<u>Corollaire 2</u> : Supposons H non réduit ; alors Ass(H) a au plus n^2 éléments.

<u>Proposition 3</u> : Tout idéal J de H tel que $Q\text{-rg}(J) \leq n$ est inclus dans un élément de Ass(H). A fortiori tout idéal J de H tel que $J \quad R = 0$ est inclus dans un élément de Ass(H).

<u>Proposition 4</u> : Soit L l'anneau total des fractions de H ; alors $L \simeq H \otimes_R Q$.

3. UN CRITERE POUR QUE H SOIT UN ANNEAU REDUIT

Notons Γ la clôture intégrale de l'anneau intègre R. Supposons d'abord ue R soit un anneau local noethérien intègre de dimension 1 d'idéal maximal m ; alors H n'est autre que le complété de R pour la topologie m-adique, et Krull a montré que H est réduit si et seulement si Γ est un R-module de type fini (ce qui a lieu si et seulement si $\mathrm{Hom}_R(Q,\Gamma/R) = 0$).

Dans le cas d'un anneau intègre quelconque R, Matlis a montré que si $\mathrm{Hom}_R(Q,\Gamma/R) = 0$, alors H est réduit ([4], 8.10). Dans le cas d'un Q-anneau, on a la réciproque :

Théorème 2 : Soient R un Q-anneau, et Γ sa clôture intégrale. Alors H est réduit si et seulement si $\mathrm{Hom}_R(Q,\Gamma/R) = 0$.

Supposons donc H réduit, et soit $P \in \mathrm{Ass}(H)$. Alors $P = \mathrm{Hom}_R(K,D)$, où D est un sous-module h-divisible de K. Soient A le sous-R-module de Q tel que $R \subset A \subset Q$, et $A/R \simeq D$; alors A est un sous-anneau de Q([6], 1.8). Il existe donc un anneau de valuation V_P de Q tel que $A \subset V_P$. Posons $P' = \mathrm{Hom}_R(K,V_P/R)$. Alors $P \subset P'$ et $P' \cap R = 0$. Il résulte alors de la proposition 3 et du corollaire 1 au théorème 1 que $P = P'$. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_R(K,\Gamma/R) \subset \mathrm{Hom}_R(K, \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(H)} V_P/R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(H)} P = 0$$

puisque H est réduit ([1], chap. IV, §1, exercice 17). Puisque Γ/R est un R-module de torsion, on a donc $\mathrm{Hom}_R(Q,\Gamma/R) = 0$.

4. MODULES ETRANGERS

Dans ce numéro, A désigne un anneau unitaire, non nécessairement commutatif.

Définition 3 : Soient A un anneau, M un A-module, et $M_1,\ldots,M_n$ une suite de sous-A-modules de M. On dit que $M_1,\ldots,M_n$ est une suite de sous-A-modules étrangers de M si pour i de 2 à n, on a

$$M_i + \bigcap_{1 \leq j < i} M_j = M.$$

Lemme : Soient A un anneau, M un A-module, $M_1,\dots,M_n$ une suite de sous-A-modules étrangers de M. Alors :

(i) On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M \xrightarrow{p} \bigoplus_{i=1}^{n} (M/M_i) \longrightarrow 0$$

où p est la somme des projections canoniques $M \longrightarrow M/M_i$.

(ii) On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\alpha} M^{n-1} \longrightarrow 0$$

où δ est l'homomorphisme diagonal, et où $\alpha(x_1,\dots,x_n) = (x_1-x_2,\dots,x_1-x_n)$ pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

Exemple 2 : Soit $V_1,\dots,V_n$ une suite d'anneaux de valuation deux à deux indépendants d'un corps Q, et posons $R = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Alors $V_1,\dots,V_n$ est une suite de sous-R-modules étrangers de Q.

5. ANNEAUX SPECIAUX

Les résultats de ce numéro et des deux suivants relatifs aux Q^1-anneaux ont été démontrés par Matlis [6].

Définition 4 : Soit R un Q-anneau [resp. un Q^n-anneau]. On dit que R est un Q_I-anneau [resp. Q_I^n-anneau] si H est intègre, un Q_R-anneau [resp. Q_R^n-anneau] si H est réduit sans être intègre, et un Q_N-anneau [resp. Q_N^n-anneau] si H n'est pas réduit.

Définition 5 : Un anneau intègre R est dit spécial s'il existe des sous-anneaux $A_1,\dots,A_p$ de Q vérifiant les conditions suivantes :

1) On a $R \subsetneqq A_i \subsetneqq Q$ pour i de 1 à p, et $R = \bigcap_{i=1}^{p} A_i$.

2) $A_1,\ldots,A_p$ est une suite de sous-R-modules étrangers de Q.

3) Pour tout i de 1 à p, A_i est un Q_I-anneau.

<u>Proposition 5</u> : Un anneau R est un Q_R-anneau si et seulement s'il existe un anneau spécial S tel que $R \subset S \subset Q$ et qu'il existe $r \in R - \{0\}$ tel que $r(S/R) = 0$. En particulier, tout anneau spécial est un Q_R-anneau.

<u>Définition 6</u> : On dit que R est <u>h-local</u> s'il vérifie les conditions suivantes:

(i) Tout idéal premier non nul de R est inclus dans un seul idéal maximal de R.

(ii) Tout élément non nul de R n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux maximaux de R.

Par exemple, tout anneau intègre nothérien de dimension 1 est h-local.

<u>Théorème 3</u> : Soit R un Q_R^n-anneau, où n est un entier positif. Soient $P_1,\ldots,P_p$ les idéaux premiers associés à H. Pour i de 1 à p, notons A_i le sous-R-module de Q tel que $R \subset A_i$, que A_i/R soit un sous-R-module h-divisible de K et que $P_i = \mathrm{Hom}_R(K, A_i/R)$. Posons $S = \bigcap_{i=1}^{p} A_i$; alors :

(i) Pour i de 1 à p, A_i est un $Q_I^{d_i}$-anneau, l'entier d_i vérifiant $0 \leq d_i \leq n+1-p$, et $\sum_{n=1}^{p} d_i = n+1-p$.

(ii) Pour i de 1 à p, on a un isomorphisme d'anneaux de H/P_i sur $\mathrm{Hom}_{A_i}(Q/A_i, Q/A_i)$.

(iii) S est un Q^n-anneau spécial, entier sur R, et il existe $r \in R - \{0\}$ tel que $r(S/R) = 0$.

(iv) La clôture intégrale de R est l'intersection des clôtures intégrales des A_i, pour i de 1 à p.

(v) Pour i de 1 à p, notons L_i le corps des fractions de H/P_i, et soit L l'anneau total des fractions de H. Alors $L \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} L_i$.

(vi) Soit M un idéal maximal de R ; alors S a au plus p idéaux maximaux au-dessus de M, et S_M est un anneau h-local ayant au plus p idéaux maximaux.

(vii) R est spécial si et seulement si S a un unique idéal maximal au-dessus de chacun des idéaux maximaux de R, auquel cas R = S.

(viii) Si R est local, alors S est h-local et possède exactement p idéaux maximaux $N_1,\dots,N_p$ qu'on peut numéroter de sorte qu'on ait $A_i = S_{N_i}$ pour i de 1 à p.

<u>Corollaire</u> : Un anneau local intègre unibranche ne peut être un Q_R-anneau.

<u>Proposition 6</u> : Un anneau intègre R est h-local et spécial si et seulement si c'est un Q^n-anneau non local (pour n entier positif convenable) et si, pour tout idéal maximal M de R, R_M est un Q_I-anneau. Si tel est le cas, R a au plus n+1 idéaux maximaux.

6. <u>EXTENSIONS DE Q_I-anneaux.</u>

<u>Proposition 7</u> : Soit R un Q_I^n-anneau, pour $n \in \mathbb{N}$. Notons L le corps des fractions de H. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est entier sur R.

(ii) L est une extension radicielle de Q.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, soit $x \in H-R$ tel que $Q(x) = L$. Alors $R[x]$ est un L_N^n-anneau.

<u>Proposition 8</u> : Soient p un nombre premier, et R un Q_I^{p-1}-anneau intégralement clos ; notons A la fermeture intégrale de R dans le corps des fractions L de H. Si L est une extension séparable de Q, alors A est un L_R^{p-1}-anneau spécial.

7. CAS OU R EST NOETHERIEN DE DIMENSION 1

Soit R un Q-anneau noethérien de dimension 1 ; d'après Jensen [2], R est un anneau local. Si de plus, R est un Q_I^n-anneau pour $n \in \mathbb{N}$, d'après Matlis ([7], 7.1), la clôture intégrale Γ de R est un Q_I^n-anneau de valuation discrète et un R-module de type fini. Si de plus, R est un Q_I^n-anneau pour n entier positif, d'après Jensen [2], le corps résiduel de R n'est pas parfait.

Proposition 9 : Un Q-anneau R noethérien de dimension 1 ne peut être un Q_R-anneau. Autrement dit, R est analytiquement non ramifié si et seulement s'il est analytiquement irréductible.

Théorème 4 : Soient p un nombre premier, et R un Q_I^{p-1}-anneau noethérien de dimension 1. Alors Q est de caractéristique p, et le corps des fractions L de H est une extension radicielle de Q.

8. EXEMPLES

Exemple 3 : Soient p un nombre premier, et R le Q_I^{p-1}-anneau de l'exemple 1. Soit $x \in H-R$; alors Q(x) est égal au corps des fractions L de H, et d'après la proposition 7, R[x] est un L_N^{p-1}-anneau noethérien de dimension 1.

Exemple 4 (Jensen) : Soient p un nombre premier, et Q_p le corps des fractions de l'anneau $\hat{\mathbb{Z}}_p$ des entiers p-adiques. Alors le complété $\hat{\overline{Q}}_p$ de la clôture algébrique $\overline{Q}_p$ de Q_p pour la valuation v prolongeant à $\overline{Q}_p$ la valuation p-adique est un corps Q-isomorphe à $\mathbb{C}$. Donc l'anneau de valuation V_p de $\hat{\overline{Q}}_p$ pour v est un anneau de valuation complet de hauteur 1 de C (et donc un C_I^o-anneau) tel que $V_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_p$.

Exemple 5 : Soient $p_1,\ldots,p_d$ des nombres premiers deux à deux distincts, où $d \geq 2$. Avec les notations de l'exemple 4, $V_{p_1} \cap \ldots \cap V_{p_d}$ est un $\mathbb{C}_R^{d-1}$- anneau spécial.

Exemple 6 : Soient $p_1,\ldots,p_d$ des nombres premiers deux à deux distincts, où $d\geq 2$. Avec les notations de l'exemple 4, $V_{p_1} \cap \ldots \cap V_{p_d} \cap \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}_R^{2d-1}$-anneau spécial.

Exemple 7 (Jensen) : Soient p un nombre premier, et V_p l'anneau de l'exemple 4. Posons $R = V_p \cap \mathbb{R}$; alors R est un $\mathbb{R}_I^1$-anneau pour lequel $H = V_p$, et la fermeture intégrale A de R dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}_R^1$-anneau spécial.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. Algèbre commutative. Hermann, Paris.

[2] JENSEN C.U. On $Ext_R(A,R)$ for torsion-free A, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 831-834.

[3] KAN D.M. - WHITEHEAD G.W. On the realizability of singular cohomology groups, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 24-25.

[4] MATLIS E. Cotorsion modules Mern. Amer. Math. Soc. n° 49 (1964).

[5] MATLIS E. Torsion-free modules the University of Chicago Press (1972).

[6] MATLIS E. The theory of Q-rings Troms. Amer. Math. Soc. 187 (1974) 147-181.

[7] MATLIS E. 1-dimensional Cohen-Macaulay rings Lect. notes in Math. n° 327 Springer Verlag (1973).

[8] NAGATA M. Local rings. Interscience Tracts in Pure an Appl. Math. n° 13 Interscience New-York (1962).

Jean-Etienne BERTIN
Université de Caen
Rue du Gaillon
14032 - CAEN-CEDEX