J. P. CONZE

Équirépartition et ergodicité de transformations cylindriques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2
« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 2, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___2_A2_0>

EQUIREPARTITION ET ERGODICITE DE TRANSFORMATIONS CYLINDIRQUES

JP CONZE

(Université de Rennes)

1 - Introduction

Nous étudions dans ce travail deux problèmes liés à la donnée de la rotation définie par un nombre irrationnel α et d'une fonction φ à valeurs dans un groupe G, définie sur $X = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ et constante par morceaux.

Le premier problème, qui se formule quand G est compact, est un problème d'équirépartition. Rappelons qu'une suite (u_n) d'éléments d'un groupe compact G est dite équirépartie, si, pour toute fonction h continue sur G, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} h(u_k) = \int_G h(g)dg \quad .$$

Nous cherchons ici des conditions sur φ pour que la suite $(\sum_0^{n-1} \varphi(X + K\alpha), n \in N)$ soit équirépartie dans G, pour tout $x \in X$. Cette propriété est étroitement liée à l'ergodicité du système défini sur $X \quad G$ muni du produit des mesures de Haar par $(x,g) \to (x + \alpha \,, \varphi(x)\, g)$.

Le deuxième problème que nous abordons est celui, plus difficile, de l'ergodicité de ce système quand G n'est pas compact. Il s'agit alors d'un système (transformation cylindrique) sur un espace de mesure infinie et son caractère ergodique met en jeu des propriétés des itérées de la rotation $x \to x+\alpha$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ plus fines que dans le cas compact. Nous nous bornerons ici au cas $G = \mathbb{Z}$, en utilisant une méthode propre au caractère discret de G mais susceptible de s'étendre à un cas plus général. Ces deux problèmes peuvent être formulés indépendemment l'un de l'autre, mais sont liés par le rôle que joue une équation fonctionnelle du type : $f(x+\alpha) = \varphi(x)\, f(x)$, où l'inconnue f est une fonction mesurable de X dans G .

Dans tout le travail, nous ferons des hypothèses très restrictives sur la fonction φ (essentiellement sur la nature arithmétique des points de discontinuité de φ), et également dans certains cas sur la nature arithmétique de α

Les résultats obtenus prolongent ceux de H. Furstenberg [2] et de W. Veech [7] , [7'] , en ce qui concerne le premier problème. Le problème de l'ergodicité des flots cylindriques a été traité dans un cas particulier par K. Schmidt [6] , et par A.B. Krigin [4] dans des cas particuliers pour $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

2.- Notations

Le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue μ est noté X . Il est commode d'identifier X à l'intervalle $[0,1[$, et, pour un réel y son image $y \bmod 1$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à sa partie fractionnaire notée $\{y\}$. Une fonction définie sur X est également identifiée à la fonction périodique de période 1 qui la prolonge sur $\mathbb{R}$.

Rappelons quelques résultats de la théorie des fractions continues (voir J.W.S. Cassels [1]).

Pour tout y réel, on pose $||y|| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |y-n|$.

Soit α un nombre irrationnel, $0<\alpha<1$. Soient (a_n) la suite des quotients partiels de α et (p_n/q_n) la suite des convergents de α . Pour $n \geqslant 2$, les rationnels p_n/q_n sont les "meilleures approximations" de α dans le sens suivant :

$$||k\alpha|| \geqslant ||q_n\alpha||, \text{ pour } 0 < |k| < q_{n+1} .$$

Les q_n sont premiers entre eux et reliés par les relations de récurrence :

$$q_{n+1} = a_n\, q_n + q_{n-1} \ , \ n \geqslant 1 .$$

La vitesse d'approximation de α par les p_n/q_n est donnée par les inégalités

$$\frac{1}{(a_n+2)q_n} \leqslant ||q_n\alpha|| \leqslant \frac{1}{q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_nq_n} \ , \ n \geqslant 1 \ .$$

Il en résulte que l'on est toujours dans l'un des cas suivants : ou bien la suite (a_n) tend vers l'infini, et dans ce cas on a :

$$\lim_n q_n \ ||q_n\alpha|| = 0 \ ;$$

ou bien il existe un nombre $c > 0$ et une sous-suite (q_{n_K}) de la suite des dénominateurs des convergents de α telle que

$$||q_{n_k}\alpha|| \geqslant \frac{c}{q_{n_k}} \ , \ k \geqslant 1 \ .$$

3.- Etude d'une équation fonctionnelle

Dans toute la suite, nous considérons une fonction φ définie sur X à valeurs dans un groupe topologique G . Nous ferons sur G et sur φ les hypothèses suivantes :

- G est un groupe topologique muni d'un métrique δ bi-invariante, c'est-à-dire telle que

  $$\delta(gh,gh') = \delta(hg,h'g) = \delta(h,h') \ ,$$

  pour tous h,h',g dans G . Les groupes topologiques abéliens, compacts, discrets sont des exemples de groupes topologiques possédant une métrique bi-invariante.

- La fonction φ est constante sur les intervalles d'extrémités t_i sur le cercle, $\varphi(x) = \lambda_i$, pour $x \in [t_i,t_{i+1}[$, $i = 1,\dots,s$ (avec la convention $s+1=1$). Il est naturel de supposer qu'on a $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ pour $i = 1,\dots,s$. Sauf mention contraire la fonction φ est supposée non constante, ayant donc au moins un point de discontinuité.

Théorème 1.-

Soit φ *une fonction de* X *dans* G *, constante par morceaux, dont les points de discontinuité* t_i *,* $i = 1,\ldots,s$ *, sont rationnels. Pour tout irrationnel* α*, l'équation fonctionnelle*

$$f(x+\alpha) = \varphi(x)\, f(x) \, , \qquad (*)$$

n'a pas de solution f *mesurable de* X *dans* G *.*

Preuve.-

Soient $t_i = r_i/d_i$, $i = 1,\ldots,s$, les points de discontinuité de α. Posons $d = d_1\ldots d_s$. Considérons la suite (q_n) des dénominateurs des convergents de α .

a) Traitons d'abord le cas où il existe une constante $c > 0$ et une sous-suite (q_{n_k}) telles que $q_{n_k} ||q_{n_k}\alpha|| \geq c$.

Posons m_k = partie entière de q_{n_k}/d . D'après les propriétés de q_n , on a :

$$||jd\alpha|| \geq ||q_{n_k}\alpha|| \geq c/q_{n_k} \, ,$$

pour $0 < |j| \leq m_k$.

Soit Γ_k la partition du cercle en les intervalles d'extrémités $\{t_i - j\alpha\}$, $i = 1,\ldots,s$, $0 \leq j < m_k$. Deux points quelconques distincts de cette forme sont à une distance $||t_i - j\alpha - (t_{i'} - j'\alpha)|| = ||\frac{w}{d} + u\alpha||$, avec u et w entiers, $0 < |u| < m_k$. Cette quantité est supérieure à $\frac{1}{d}\,||du\alpha|| > \frac{1}{d}\,\frac{c}{q_{n_k}} \geq \frac{c}{d^2 m_k}$.

Pour tout entier $\ell > 0$, posons

$$\varphi_\ell(x) = \varphi(x+(\ell-1)\alpha)\,\varphi(x+(\ell-2)\alpha)\ldots\varphi(x+\alpha)\,\varphi(x) \, .$$

La fonction φ_{m_k} est constante sur les éléments de la partition Γ_K . Quand la variable x franchit l'un des points $\{t_i - j\alpha\}$, le facteur $\varphi(x+j\alpha)$ correspondant présente une discontinuité d'amplitude $\delta_i = \delta(\lambda_i, \lambda_{i+1}$
Comme la métrique δ est bi-invariante, cette discontinuité est celle de

la fonction φ_{m_K} . Elle est au moins égale à $\delta_o = \inf_{i=1,\dots,s} \delta_i > 0$.

Soit f une solution mesurable de l'équation ($\ast$). Elle vérifie la relation $f(x+\ell\alpha) = \varphi_\ell(x)\cdot f(x)$, pour tout entier $\ell > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un fermé F dans X de mesure supérieure à $1-\varepsilon$ tel que la restriction de f à F soit uniformément continue. Soit $\eta > 0$ tel que les conditions $x,y \in F$, $||x-y||<\eta$ impliquent $\delta(f(x),f(y)) < \delta_o/_2$.

D'après la densité de la suite $(\{j\alpha\})$, il existe k_o tel que la longueur de chaque intervalle de la partition Γ_k , pour $k \geqslant k_o$, soit inférieure à $\eta/_2$. Considérons deux intervalles consécutifs J et J' de Γ_k , avec $k \geqslant k_o$. Si x et y sont deux points respectivement dans J et J' , tous deux dans l'ensemble $H = F \cap (F-\ell\alpha)$, on a les relations :

$$||x-y||<\eta,\ x,y \in F\ ,\ ||x+\ell\alpha-(y+\ell\alpha)||<\eta,\ x+\ell\alpha,\ y+\ell\alpha \in F\ ,$$

d'où simultanément les inégalités :

$$\delta(f(x),f(y)) < \delta_o/_2\ ,\ \delta(f(x+\ell\alpha),f(y+\ell\alpha)) < \delta_o/_2\ .$$

Mais, a, a', b, b' étant quatre éléments de G , on a, d'après l'invariance de δ et l'inégalité triangulaire :

$$\delta(a,a') \leqslant \delta(ab,a'b')+\delta(b,b').$$

On en déduit :

$$\delta(\varphi_{m_k}(x),\varphi_{m_k}(y)) \leqslant \delta(f(x+m_k\alpha),f(y+m_k\alpha))+\delta(f(y),f(x)) < \delta_o\ .$$

Cette inégalité contredit le fait que la distance entre les valeurs de φ_{m_k} sur J et sur J' est supérieure ou égale à δ_o .

On en déduit qu'étant donnés deux intervalles consécutifs de Γ_k , l'un des deux au moins est contenu dans le complémentaire de H . Le nombre d'intervalles de Γ_k contenus dans H^c est donc supérieur à la moitié du nombre total d'intervalles dans Γ_k , soit sm_k . Comme la longueur de chaque intervalle de Γ_k est minorée par $\frac{c}{d^2 m_k}$, on en déduit

$$\mu(H^c) \geqslant \frac{sc}{2d^2} > 0\ .$$

Ceci conduit à une contradiction, si on a pris $\varepsilon < \frac{sc}{4d^2}$.

b) Traitons maintenant le cas où la suite (q_n) vérifie $q_n\|q_n\alpha\| \to 0$, c'est-à-dire le cas où la suite des quotients partiels de α tend vers l'infini. On a donc $q_n^2|\alpha - p_n/q_n| = c_n \to 0$, pour une suite d'entier p_n . Supposons d'abord qu'on puisse extraire de la suite des (q_n) une sous-suite formée d'entiers premiers avec les dénominateurs des t_i . Notons encore (q_n) cette sous-suite.

Soient Δ_n la partition du cercle en les intervalles d'extrémités $\{t_i - j\, p_n/q_n\}$, $i=1,\ldots,s$, $j=0,\ldots,q_n-1$ et ψ_n la fonction définie par :

$$\psi_n(x) = \varphi(x+(q_n-1)p_n/q_n)\,\varphi(x+(q_n-2)p_n/q_n)\ldots\varphi(x+p_n/q_n)\,\varphi(x) .$$

Cette fonction est constante sur les éléments de la partition Δ_n , et, comme dans la première partie de la démonstration, on montre que les discontinuités de ψ_n sont d'amplitude supérieure à $\delta_o > 0$. Comme q_n est premier avec d , les intervalles de Δ_n ont une longueur supérieure à $\frac{1}{dq_n}$.

Montrons que les fonctions φ_{q_n} et ψ_n coïncident sur un ensemble de mesure grande. Soit $A_n = \{\varphi_{q_n} = \psi_n\}$. On a :

$$A_n^c \subset \bigcup_{j=0,\ldots,q_n-1} \{x : \varphi(x+j\alpha) \neq \varphi(x+j\, p_n/q_n)\} ,$$

d'où

$$\mu(A_n^c) \leqslant 2s \sum_{j=0}^{q_n-1} |j\alpha - j\, p_n/q_n| = 2s\, c_n \frac{q_n(q_n-1)}{2\, q_n^2} \leqslant s\, c_n \to 0 .$$

Considérons comme précédemment pour un $\varepsilon > 0$ un fermé F tel que la restriction de f à F soit uniformément continue. Soit $\eta > 0$ tel que les conditions $x,y \in F$, $\|x-y\| < \eta$ impliquent $\delta(f(x),f(y)) < \delta_o/2$.

Prenons n assez grand pour que les intervalles de la partition Δ_n soient de longueur inférieure à $\eta/2$. Etant donnés deux interval les consécutifs I et I' de Δ_n, si x et y sont deux points respectivement dans I et I' et simultanément dans $A_n \cap F \cap (F - q_n\alpha)$, on a, comme plus haut :

$$\delta(\varphi_{q_n}(x), \varphi_{q_n}(y)) < \delta_o .$$

Mais x et y étant dans A_n, on a également :

$$\varphi_{q_n}(x) = \psi_n(x) , \varphi_{q_n}(y) = \psi_n(y) ,$$

contrairement au fait que la discontinuité de ψ_n est d'amplitude supérieure à δ_o. Il en résulte, comme plus haut, que le complémentaire de l'ensemble $A \cap F \cap (F - q_n\alpha)$ a une mesure au moins égale à $\frac{sq_n}{2} \cdot \frac{1}{dq_n} = \frac{s}{2d}$, ce qui conduit à une contradiction, si on a choisi ε et n tels que : $2\varepsilon + sc_n < \frac{s}{2d}$.

c) Le cas général (sans hypothèse sur les propriétés de l'irrationnel α) résulte d'une modification de la méthode utilisée dans b).

Soient q_n et q_{n+1} deux dénominateurs successifs de la suite (p_n/q_n) des convergents de α. Comme ils sont premiers entre eux, il existe, d'après Bezout, des entiers a_n et b_n tels que $0 \leqslant a_n, b_n < d$ et $a_n q_n + b_n q_{n+1}$ est premier avec d. On peut de plus supposer qu'on a $b_n \geqslant 1$ (dans le cas contraire, on raisonnerait en utilisant une sous-suite de la suite (q_n) comme précédemment).

Posons $v_n = a_n q_n + b_n q_{n+1}$, $w_n = a_n p_n + b_n p_{n+1}$. De la relation $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \pm 1$, on déduit :

$$|\alpha - \frac{w_n}{v_n}| \leqslant \frac{1}{q_{n+1}\ q_{n+2}} + \frac{a_n}{q_{n+1}(a_n q_n + b_n q_{n+1})} \leqslant \frac{d}{q_{n+1}^2} .$$

Considérons une suite d'entiers (ℓ_n), dont la définition sera précisée par la suite. Soit B_n l'ensemble où coïncident les fonctions φ_{ℓ_n} et ϕ_n définie par

$$\phi_n(x) = \varphi(x + (\ell_n - 1)\frac{w_n}{v_n})\ \varphi(x + (\ell_n - 2)\frac{w_n}{v_n}) \ldots \varphi(x + \frac{w_n}{v_n})\ \varphi(x) .$$

On a $\mu(B_n^c) < sd\,(\frac{\ell_n}{q_{n+1}})^2$.

La fonction ϕ_n est constante sur les éléments de la partition Δ'_n du cercle déterminée par les points de la forme $\{t_i - j\,\frac{w_n}{v_n}\}$, $i=1,\ldots,s$, $j=0,\ldots,\ell_n-1$ et ses discontinuités sont d'amplitudes supérieure à $\delta_0 > 0$,. Comme v_n est premier avec d, les intervalles de Γ_n ont une longueur supérieure à $\frac{1}{dv_n}$.

Le raisonnement déjà fait en (b) montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F tel que, pour n assez grand, la mesure du complémentaire de $B_n \cap F \cap (F-\ell_n\alpha)$ soit au moins égale à

$$\frac{s\ell_n}{2} \cdot \frac{1}{dv_n} > \frac{s}{4d^2} \quad \frac{\ell_n}{q_{n+1}}$$

On doit donc avoir :

$$sd\,(\frac{\ell_n}{q_{n+1}})^2 + 2\,\varepsilon \geqslant \frac{s}{4d^2} \quad \frac{\ell_n}{q_{n+1}} \qquad .$$

Prenons $\varepsilon < \frac{s}{128d^5}$. Alors le choix d'une suite (ℓ_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{2d^3}$ conduit à une contradiction.

Dans le cas où G est abélien, on peut, pour certains irrationnels α , utiliser une méthode qui s'applique à une classe plus générale de points de discontinuité t_i , et donne un renseignement utile sur le comportement des sommes $\sum\limits_{j=0}^{q_n - 1} (x+j\alpha)$.

<u>Lemme 1</u>

Supposons φ constante sur les intervalles $[t_i,t_{i+1}[$, $i=1,\ldots,s$, et ayant une discontinuité σ_i au point t_i. Pour tout entier $q > 0$ et tout indice i, il existe des ensembles B_i et B'_i dans X tels que :

(I) $\mu(B_i)$, $\mu(B'_i) \geqslant \inf \|q(t_p-t_i)\|$, *où* p *décrit les indices tels que* $qt_p \neq qt_i$, *mod 1* ,

(II) *la fonction* $\sum\limits_{j=0}^{q-1} \varphi(x+j/_q)$ *est constante sur* B *et sur* B' ;

(III) *la différence des valeurs prises par cette fonction sur* B'_i *et sur* B_i *est* $\Sigma\sigma_p$ *, où* p *décrit les indices tels que* $qt_p = qt_i$ *mod 1* .

Preuve.-

Posons $\psi(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x+j/_q)$. Cette fonction est invariante par translation par $1/_q$, et constante sur les éléments de la partition Δ en les intervalles d'extrémités $\{t_i - j/q\}$, $i=1,\dots,s$, $0 \leq j < q$.

Supposons que l'on n'ait pas $qt_p = qt_i$, mod 1, pour tout p . Soit $\{t_{i_o} - t_{o}/_q\}$ l'origine de l'intervalle de Δ , de mesure non nulle, dont t_i est l'extrémité (en parcourant le cercle dans le sens trigonométrique). Posons

$$B_i = \bigcup_{j=0}^{q-1} \left]\{t_{i_o} - (j_o+j)/_q\} \ , \ \{t_i - j/_q\}\right[\ .$$

Définissons de même B'_i en utilisant l'extrémité de l'intervalle de mesure non nulle de Δ dont t_i est l'origine. Les ensembles B_i , B'_i vérifient les conditions (I) et (II).

Le "saut" de ψ quand x passe d'un intervalle formant B_i à l'intervalle contigu formant B'_i est la somme des sauts de la fonction φ au passage des points t_p tels que $qt_p = qt_i$ mod 1 .

Nous devons maintenant introduire deux conditions de caractère technique reliant la nature arithmétique de la rotation α et celle des points de discontinuité de la fonction φ .

Définition.-

Nous dirons que le couple formé d'un nombre irrationnel α et de la famille $t_1,\dots,t_s$ des points de discontinuité de φ vérifie la condition (A) : s'il existe une suite strictement croissante (k_n) d'entiers et un indice i tels que

$s \sup_n k_n \, ||k_n \alpha|| < \inf_n ||k_n(t_p - t_i)||$, pour tout $p \neq i$,

la condition (A') : s'il existe une suite strictement croissante (k_n) d'entiers tels que

$s \sup_n k_n \, ||k_n \alpha|| < \inf_n ||k_n(t_p - t_i)||$, pour tout p et tout i , $p \neq i$.

Lemme 2.-

Sous la condition (A), il existe $\varepsilon_0 > 0$ et pour chaque n des ensembles C_n et C'_n tels que :

(I) $\mu(C_n)$, $\mu(C'_n) > \varepsilon_0$;

(II) *la fonction $\sum_0^{k_n - 1} \varphi(x + j\alpha)$ est constante sur C_n et sur C'_n ;*

(III) *la différence des valeurs prises par cette fonction sur C'_n et sur C_n est égale à la discontinuité σ_i de φ au point t_i .*

Preuve.-

Posons $\varepsilon_0 = \inf_{n, p \neq i} ||k_n(t_p - t_i)|| - s \sup_n k_n \, ||k_n \alpha||$.

Soit $A_n = \{ \sum_0^{k_n - 1} \varphi(x + j\alpha) = \sum_0^{k_n - 1} \varphi(x + j/k_n) \}$,

On a : $\mu(A_n^c) \leqslant s \, k_n ||k_n \alpha||$.

Soient B_i et B'_i les ensembles (dépendant de n) construits dans le lemme 1. Les ensembles $C_n = A_n \cap B_i$, $C'_n = A_n \cap B'_i$ vérifient les conditions de l'énoncé. ■

Théorème 2.-

Sous la condition (A), l'équation fonctionnelle

$$f(x+\alpha) = \varphi(x) + f(x)$$

n'a pas de solution f mesurable de X dans G.

Preuve.-

D'après la condition sur les k_n, on a $k_n\alpha \to 0 \bmod 1$. Soit f une solution mesurable de l'équation fonctionnelle. On peut, en extrayant au besoin une sous-suite supposer que $\delta(f(x+k_n\alpha), f(x)) \to 0$, pour presque tout x. Il en résulte que la somme $\sum_0^{k_n-1} \varphi(x+j\alpha)$ converge, pour presque tout x, vers l'élément neutre de G. Ceci est en contradiction avec la conclusion du lemme 2.

Remarques :

1) Si les points de discontinuité t_i sont rationnels, la condition (A'), à fortiori (A), est vérifiée dès qu'il existe une suite (k_n) d'entiers premiers avec les dénominateurs des t_i et tels que $k_n\|k_n\alpha\| \to 0$. Cette dernière condition est vérifiée par presque tout α (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

2) Pour tout irrationnel α, les conditions (A') et (A) sont vérifiées par presque toute famille $(t_1, \ldots, t_s)$ de points de discontinuité de (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^s$).

En effet, pour tout irrationnel α, il existe une suite strictement croissante (k_n) d'entiers tels que $k_n\|k_n\alpha\| \leq 1/2$. Par un résultat classique de H. Weyl sur l'équidistribution [5], on sait qu'étant donnée une suite strictement croissante (k_n) d'entiers, on a, pour tout intervalle I de $[0,1[$ et presque tout t :

$$\lim_N \frac{1}{N} \Sigma 1_I(k_n t) = \mu(I) .$$

En prenant $I =]3/4,1[$, il n'est pas difficile d'en déduire pour presque toute famille $(t_1,\ldots,t_s)$ dans $\mathbb{R}^s$ une sous-suite (k_{n_m}) telle que

$$||k_{n_m}(t_j-t_i)|| > 3/4 \text{ , pour tout } i,j \text{ , } i\neq j \text{ , et tout } m.$$

3) La condition (A') sera utile dans le dernier paragraphe pour prouver l'ergodicité de la transformation cylindrique associée à α et φ .

4) On peut montrer que les conclusions du lemme 2 et du théorème 2 sont vérifiées dans un cas plus général (il est possible que pour certains indices i et p , on ait $q_n(t_i-t_p) \to 0 \bmod 1$) ; mais ceci conduirait à une discussion trop technique sur les valeurs de discontinuité de φ .

5) Dans le cas où φ est à valeurs dans $\mathbb{C}-\{0\}$, les conclusions des théorèmes 1 et 2 peuvent s'énoncer sous la forme suivante : l'équation $f(x+\alpha) = \varphi(x)\, f(x)$ n'a pas de solution f mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. Nous donnerons une formulation plus générale, en termes de représentations, de ce type au paragraphe suivant.

6) Le cas où φ est constante se traite de façon élémentaire s'il existe une solution mesurable de l'équation fonctionnelle; on est alors essentiellement dans le cas où φ est à valeurs dans le cercle unité, sa valeur constante étant de la forme $e^{2\pi ip\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}$, et f est égale, à une constante multiplicative près, à $e^{2\pi ipx}$.

7) La méthode employée dans le théorème 2 est celle de Katok - Stepin [3] , où est étudiée une équation fonctionnelle du type considéré ici. La méthode utilisée dans la première partie du théorème 1 est plus proche de celle utilisée par Veech dans [7].

4.- Equirépartition

Rappelons qu'une transformation T d'un espace compact X sur lui-même est dite uniquement ergodique, s'il n'existe qu'une mesure de probabilité sur X invariante par T. Si de plus T est minimale (l'orbite sous l'action de T de chaque point de X est dense), on dit que T est strictement ergodique.

Le lemme suivant est classique dans le cas où φ est continue (H. Furstenberg [2]).

Lemme 3.-

Soient X un espace compact, T une transformation continue uniquement ergodique sur X, avec unique mesure de probabilité invariante λ, G un groupe compact séparable. Soit φ une application de X dans G continue en dehors d'un ensemble fermé λ-négligeable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(I) *la transformation $S : (x,g) \mapsto (Tx, \varphi(x)g)$ est uniquement ergodique sur $X \times G$;*

(II) *la mesure produit $m = \lambda \times dg$ sur $X \times G$ est ergodique pour S ;*

(III) *pour toute fonction continue f sur $X \times G$ et tout couple (x,g) dans $X \times G$ on a :*

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N f(T^n x, \varphi(T^{n-1}x)\, \varphi(T^{n-2}x) \ldots \varphi(x)g) = m(f) ;$$

(IV) *pour toute représentation unitaire irréductible U de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$, l'équation fonctionnelle*

$$\phi(Tx) = U(\varphi(x))\, \phi(x) \quad , \qquad (\ast\ast)$$

n'a pas de solution non nulle parmi les applications mesurables ϕ de X dans $\mathrm{End}(\mathcal{H})$.

Preuve.-

a) Fixons $(x,g) \in X \times G$. Soit ν une mesure de Radon sur

$X \times G$ telle qu'il existe une suite strictement croissante (N_k) vérifian

$$\lim_k \frac{1}{N_k} \sum_1^{N_k} f(S^n(x,g)) = \nu(f) \text{ , pour toute } f \text{ continue sur } X\times G .$$

Montrons que ν est invariante par S.

Il est clair que ν se projette sur X en une mesure de probabilité invariante par T, donc se projette sur λ. Soit f continue sur $X \times G$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O dans X tel que $\lambda(O) > 1-\varepsilon$, et tel que $f\circ S$ coïncide sur $V = O \times G$ avec une fonction continue ψ. On peut également supposer que ψ vérifie

$$||\psi||_\infty \leq ||f\circ S||_\infty = ||f||_\infty$$

et que O est de frontière λ-négligeable. L'image $S^n(x,g)$ est dans V si et seulement si $T^n x$ est dans O. Comme T laisse invariante une unique mesure de probabilité sur X (propriété d'unique ergodicité), on sait que $T^n x$ est dans O pour une suite d'entiers n de densité égale à $\lambda(O) > 1-\varepsilon$. Il en résulte :

$$\lim_k \left|\frac{1}{N_k} \sum_1^{N_k} f(S^{n+1}(x,g)) - \frac{1}{N_k} \sum_1^{N_k} \psi(S^n(x,g))\right| \leq \varepsilon(||f||_\infty + ||\psi||_\infty) \leq 2\varepsilon||f||$$

D'autre part, on a :

$$|\nu(f\circ S)-\nu(\psi)| \leq 2||f||_\infty \nu(V^c) = 2||f||_\infty \lambda(V^c) \leq 2\varepsilon||f||_\infty .$$

On en déduit

$$|\nu(f\circ S)-\nu(f)| \leq 4\varepsilon||f||_\infty \quad ;$$

ce qui implique l'invariance de ν.

b) Il est clair que (I) implique (II). Montrons que (II) implic (I), et donc (III) d'après ce qui précède (et la séparabilité de G).

On procède classiquement de la manière suivante : soit ν une mesure invariante par S. Par régularisation à droite, on se ramène au ca où ν est invariante par S et absolument continue par rapport à m. L'ergodicité de m sous l'action de S prouve alors que ν est égale à m.

c) De la condition (III) on déduit, par intégration, que m est l'unique mesure de probabilité de $X \times G$ invariante par S. A fortiori, m est ergodique par l'action de S.

d) Il reste à montrer l'équivalence de (II) et de (IV). Soit U une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$, et soit ϕ une application mesurable non nulle de X dans End $(\mathcal{H})$ solution de l'équation (**). Alors la fonction $(x,g) \longrightarrow U^{-1}(g)\phi(x)$, à valeurs dans End $(\mathcal{H})$, est une fonction invariante par S non constante, et m n'est pas ergodique pour S.

Inversement, soit f une fonction mesurable sur $X \times G$, invariante par S. On peut supposer f bornée. A chaque représentation unitaire irréductible U de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$, associons la fonction ϕ_U définie par

$$\phi_U(x) = \int_G f(x,g)\; U(g)dg.$$

Si, pour toute U différente de la représentation triviale, ϕ_U est nulle presque partout, on déduit, G étant séparable, du théorème de Peter-Weyl, que f est constante.

Comme ϕ_U est une application mesurable de G dans End $(\mathcal{H})$ vérifiant (**), sous l'hypothèse (IV), on a $\phi_U = 0$ presque partout et donc f est constante, ce qui prouve (II). ∎

Théorème 3

Soient α *un nombre irrationnel,* φ *une fonction définie sur* $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *, constante sur les intervalles* $[t_i, t_{i+1}[$ *, à extrémités* t_i *rationnelles, à valeurs dans un groupe compact abélien séparable* G *, et telle que ces valeurs engendrent un sous-groupe dense dans G. Alors ou bien la transformation* S *:* $(x,g) \longrightarrow (x+\alpha, \varphi(x)\, g)$ *est strictement ergodique, avec pour unique mesure invariante* $dm = dx \times dg$*, et la suite*

$$(\varphi(x+n\alpha)\varphi(x+(n-1)\alpha)\ldots\varphi(x),\ n \in \mathbb{N})$$ *est équirépartie dans* G *, ou bien* S *a un facteur (non ergodique) défini sur* $X \times X$ *de la forme*

$$(x,y) \longrightarrow (x+\alpha,\ y+p\alpha)\ ,$$

pour un entier p *fixé.*

Preuve

Comme la mesure m charge les ouverts, la stricte ergodicité de S résulte de l'unique ergodicité de S. Soit χ un caractère de G . Si l'application $x \to \chi(\varphi(x))$ est constante, comme les valeurs prises par φ engendrent un sous-groupe dense de G , il est facile de construire un facteur de $X \times G$ isomorphe à $X \times X$ sur lequel, si l'équation fonctionnelle $\phi(Tx) = \chi(\varphi(x))\,\phi(x)$ a une solution mesurable non nulle, S se factorise en $(x,y) \to (x+\alpha,\ y+p\alpha)$, pour un entier p fixé, (cf. le raisonnement analogue dans Veech [7]).

Si l'on n'est pas dans cette situation, étudions l'équation fonctionnelle : $\phi(Tx) = \chi(\varphi(x))\phi(x)$.

On peut se ramener au cas où ϕ est à valeur dans le groupe des nombres complexes de module 1. Le théorème 1 permet de conclure que l'équation n'a pas de solution mesurable, On applique alors le lemme 3. ■

5.-Ergodicité de transformations cylindriques

Dans ce paragraphe, φ est une fonction définie sur $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, constante sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}[$, $i=1,\ldots,s$, à valeurs dans le groupe $\mathbb{Z}$.

Soit α un nombre irrationnel. Sur $X \times \mathbb{Z}$, la mesure m produi de la mesure de Lebesgue μ par la mesure de dénombrement sur Z est invariante par la transformation (dite cylindrique) $S : (x,k) \mapsto (x+\alpha, k+\varphi(x))$.

Rappelons que, par définition, le système $(X \times \mathbb{Z}, m, S)$ est ergodique si, pour tout ensemble A mesurable dans $X \times \mathbb{Z}$ tel que $S^{-1}A \subset A$ on a : $m(A) = 0$ ou $m(A^c) = 0$.

Nous allons donner des conditions suffisantes sur α et φ pour que $(X \times \mathbb{Z}, m, S)$ soit ergodique.

Remarquons qu'une condition nécessaire, d'après le théorème ergodique, est que $\int_X \varphi d\mu = 0$. Nous supposerons cette condition vérifiée dans toute la suite. Cette condition implique la conservativité du système, voir A.B. Krigin [4] .

Un outil important dans ce paragraphe est l'inégalité suivante dûe à Denjoy-Koksma [5] , qui est classique dans l'étude des difféomorphismes du cercle.

Lemme 4.-

Soit ψ une fonction intégrable sur X à valeurs réelles de variation totale $Var(\psi)$ sur X . Soit $q \geq 1$ un entier tels que $q||q\alpha||<1$. Alors on a, pour tout x dans X :

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1} \psi(x+k\alpha) - q \int_X \psi d\mu\right| \leq Var(\psi) .$$

Théorème 4.-

Soit φ *définie sur* X *par* $\varphi(x) = 1$, $0 \leq x < 1/2$, $= -1$, $1/2 \leq x < 1$. *Pour tout irrationnel* α, *le système* $(X \times \mathbb{Z}, m, S)$, *défini par* $S(x,k) = (x+\alpha, k+\varphi(x))$ *est ergodique.*

Preuve.-

Dans toute la suite, les égalités ou inclusions entre ensembles dans X seront sous-entendues à un ensemble μ-négligeable près.

Soit A un sous-ensemble invariant par S et de mesure non nulle dans $X \times \mathbb{Z}$.

Pour j et a dans $\mathbb{Z}$, soient

$$B_j = \{x \in X \, ; (x,j) \in A\}$$

et

$$C_{j,a} = B_j \cap B_{j+a}^c .$$

Soit (k_n) une suite strictement croissante d'entiers impairs tels que $k_n \| k_n \alpha \| < 1$. Une telle suite existe car les dénominateurs de deux convergents successifs de α sont premiers entre eux. Comme $k_n\alpha \to 0 \bmod 1$, nous pouvons supposer, en remplaçant au besoin (k_n) par une sous-suite que $1_{C_{j,a}}(x+k_n\alpha) \to 1_{C_{j,a}}(x)$, pour tous $j,a \in \mathbb{Z}$, et presque tout x.

Soit $D_a = \{x : \sum_{0}^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha) = a$, pour une infinité d'indices $n\}$

Comme $k_n\alpha \to 0 \bmod 1$, cet ensemble est invariant par la rotation d'angle α, et donc de mesure 0 ou 1. Comme k_n est impair, D_a est vide pour a pair. D'après le lemme 5, on a :

$$\left| \sum_{0}^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha) \right| \leq 4 \quad ;$$

d'où $X = \bigcup_a D_a$, pour $a = \pm 1, \pm 3$.

Il en résulte que l'une au moins des deux situations est réalisée :

$\mu(D_1) = 1$, et dans ce cas, d'après $\varphi(x+\frac{1}{2}) = -\varphi(x)$, également $\mu(D_{-1}) = 1$;

ou

$\mu(D_3) = 1$, et, de même, également $\mu(D_{-3}) = 1$.

Dans le premier cas, nous allons montrer que $B_{j+1} = B_j$, pour tout entier j . Supposons qu'on ait $\mu(C_{j,1}) > 0$, pour un entier j . Soit $x \in C_{j,1} \cap D_1$. A partir d'un certain indice $n(x)$, on a $x+k_n\alpha \in C_{j,1}$, et donc $(x,j) \in A$ et $(x+k_n\alpha, j+1) \notin A$. Puisque $x \in D_1$, il existe un indice $n_0 \geqslant n(x)$ tel que

$$\sum_{0}^{k_{n_0}-1} \varphi(x+k\alpha) = 1 .$$

Ceci implique $S^{n_0}(x,j) = (x+k_{n_0}\alpha, j+1)$ et contredit l'invariance de A . On a donc $B_j \subset B_{j+1}$, pour tout j .

Un raisonnement analogue utilisant l'ensemble D_{-1} montre que, toujours dans le premier cas, on a également $B_j \subsetneq B_{j-1}$, pour tout j . Ainsi les ensembles B_j coïncident. Leur réunion est un ensemble de mesure positive invariant par la rotation d'angle α , donc égal à X . On a donc $B_j = X$, pour tout entier j , ce qui implique $A = X \times \mathbb{Z}$.

Raisonnons maintenant dans le cas où $\mu(D_3) = \mu(D_{-3}) = 1$. Comme précédemment, on en déduit l'égalité $B_j = B_{j+3}$, pour tout j .

Posons $\phi(x) = \{j \in \mathbb{Z} : (x,j) \in A\}$. Pour presque tout x , l'ensemble $\phi(x)$ est non vide et invariant par translation par l'entier 3 .

Si, pour un ensemble de mesure non nulle, $\phi(x)$ contient $\{0,1,2\}$, alors $\phi(x) = \mathbb{Z}$, pour presque tout x , et donc $A = X \times \mathbb{Z}$.

En remplaçant éventuellement A par son complémentaire, nous pouvons donc, pour traiter le cas restant possible, supposer que, pour pre que tout x, seul l'un des entiers 0,1 ou 2 est dans $\phi(x)$. Soit f cet entier. La fonction f est solution mesurable de l'équation fonctionnelle $f(x+\alpha) = f(x)+\varphi(x) \bmod 3$. D'après le théorème 1, cette équation n'a pas de solution mesurable, ce qui fournit une contradiction ■

Remarque : le théorème précédent a été prouvé pour des valeurs particulières de α, et par une méthode différente, par K. Schmidt [6] et A.B. Krigin [4]

Dans le résultat qui suit, nous revenons à une forme plus générale pour la fonction φ, mais nous devons faire des hypothèses sur α et les points de discontinuité t_i de φ.

Théorème 5.-

Si le nombre irrationnel α *et les points de discontinuité* t_i *de la fonction* φ *vérifient la condition* (A'), *si le sous-groupe engendré dans* $\mathbb{Z}$ *par les différences* $\lambda_i-\lambda_{i+1}$, $i=1,\dots,s$ (*avec* $s+1=1$) *est* $\mathbb{Z}$, *le système* $(X\times\mathbb{Z},m,S)$ *défini par* $(x,k)\to(x+\alpha,k+\varphi(x))$ *est ergodique.*

Preuve.-

Une grande partie de la démonstration est analogue à celle du théorème 4.

Soit A un sous-ensemble de mesure non nulle et invariant par S de $X\times\mathbb{Z}$. Comme S est conservatif, on peut supposer A strictement invariant, c'est-à-dire tel que $(x,j)\in A$ si et seulement si $S(x,j)\in A$.

Soit à nouveau $B_j = \{x:(x,j)\in A\}$, $D_a = \{x: \sum_0^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha) = a$, pour une infinité d'indices $n\}$. Soit (k_n) la suite d'entiers donnés par la condition (A').

D'après le lemme 5, il existe M tel que la suite $\left|\sum_0^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha)\right|$ soit bornée par M pour tout x.

Les ensembles D_a , invariants par la rotation d'angle α , sont de mesure 0 ou 1 . Montrons qu'on ne peut avoir $\mu(D_a) = 0$, pour tout $a \neq 0$. En effet, dans ce cas, les sommes $\sum_0^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha)$ convergeraient vers 0 presque partout. Mais d'après la condition (A') et le lemme 2, il existe $\varepsilon_o > 0$ et des ensembles C_n et C'_n de mesures supérieures à ε_o sur lesquels $\sum_0^{k_n-1} (x+k\alpha)$ est constant, la différence des valeurs prises sur C'_n et C_n étant une constante non nulle. Ceci fournit une contradiction.

Soit $a \neq 0$ tel que $\mu(D_a) = 1$. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 4, on montre que, pour tout j , $B_j \subseteq B_{j+a}$, et de même, en utilisant la stricte invariance de A , $B_{j+a} \subseteq B_j$. On a donc l'égalité $B_j = B_{j+a}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Soit $\phi(x) = \{k \in \mathbb{Z} : (x,k) \in A\}$. On a prouvé qu'il existe $a \neq 0$ tel que $\phi(x)+a = \phi(x)$, pour presque tout x . On peut donc considérer que ϕ est une application de X dans l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

Comme $k_n\alpha \to 0 \bmod 1$, on a alors $\phi(x+k_n\alpha) = \phi(x)$, pour $n \geq n(x)$, où $n(x) < \infty$ pour presque tout x .

En reprenant la preuve du lemme 2, on déduit de la condition (A'), pour chaque indice i , l'existence d'un $\varepsilon_o > 0$, de sous-ensembles C_n^i , $C_n^{i'}$ et d'une constante u (que l'on peut supposer fixe grâce au lemme 5) tels que $\sum_0^{k_n-1} \varphi(x+k\alpha) = u+\lambda_i$ sur C_n^i , $= u+\lambda_i$ sur $C_n^{i'}$. En prenant n assez grand, on en déduit les égalités $\phi(x)+ u+\lambda_i = \phi(x)$ et $\phi(x)+ u+\lambda_{i+1} = \phi(x)$ sur des ensembles de mesure non nulle, donc de mesure 1 d'après l'ergodicité de la rotation. Donc pour presque tout x , $\phi(x)$ est invariant par translation par $\lambda_{i+1}-\lambda_i$, pour $i=1,\dots,s$. Comme les différences $\lambda_{i+1}-\lambda_i$ engendrent $\mathbb{Z}$, on en conclut que $\phi(x) = \mathbb{Z}$, pour presque tout x , et donc $A = X \times \mathbb{Z}$. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.W.CASSELS. *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge University Press (1957).

[2] H. FURSTENBERG. *Strict ergodicity and transformation on the torus.* Amer. J. Math. 83 (1961), 573-601.

[3] A.B. KATOK and A.M. STEPIN. *Approximations en théorie ergodique.* Usp. Mat. Nauk, 22 (1967), 81-106

[4] A.B. KRIGIN. *Exemple de Cascade cylindrique.* Vestnik Moscov. Univ., ser. mat. mech., n° 5, (1975), 26-31

[4'] ___________. *Exemples de cascades cylindriques ergodiques.* Mat. Zametki, 16, n° 6, (1974), 981-991.

[5] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER. *Uniform distribution of sequences,* Wiley (1974).

[6] K. SCHMIDT. *Ergodicity of a cylinder flow,* Preprint, Warwick, (1975)

[7] W. VEECH. *Finite group extensions of irrationnel rotations.* Preprint, (1975).

Jean-Pierre CONZE
Laboratoire de Probabilités
E.R.A. 250 du C.N.R.S.
Université de Rennes
B.P. 25 A
35031 RENNES Cedex

Octobre 1975 - Mars 1976