GIOVANNI PISTONE

Intégrale stochastique faible et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-65
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A10_0>

SERIE : A
N° d'Ordre : 377
N° de Série : 43

THESE
présentée

DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. ..MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE..................

pour obtenir

le titre de DOCTEUR en TROISIEME CYCLE

Spécialité :

PAR

GIOVANNI PISTONE

Sujet de la Thèse :

INTEGRALE STOCHASTIQUE FAIBLE ET APPLICATIONS.

Soutenue le 30 juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM. METIVIER Président

GEYMONAT
JACOD Examinateurs
PELLAUMAIL

TABLE DES MATIERES

I N T R O D U C T I O N

Le travail ainsi présenté est une rédaction autonome d'un certain nombre de résultats obtenus sur l'intégrale stochastique et certaines applications aux équations différentielles stochastiques par Monsieur Métivier et nous, soit séparément, soit en collaboration.

Quelques résultats ont été déjà publiés ([16], [17], [18]) et nous y faisons références ; mais en règle générale, nous apportons des améliorations ou proposons des démonstrations nouvelles.

Dans le chapitre I, nous donnons une définition de l'intégrale stochastique basée sur la remarque que nous avons fait sur la nécessité d'avoir la possibilité d'intégrer les processus faiblement mesurables à valeurs opérateurs dans le cadre de l'intégrale de Kunita [11].

Dans le chapitre II, nous étudions certains cas d'équations d'évolution stochastiques à partir des méthodes introduites notamment par Curtain-Falb [4] et Bensoussan-Temam [2].

L'appendice concerne quelques notions de la théorie générale des processus de Meyer [19] et Dellacherie [6] qui sont utiles pour les chapitres I et II.

Je remercie vivement Monsieur Métivier sous la direction duquel ce travail a été réalisé

Je remercie également Messieurs Geymonat, Jacod et Pellaumail pour l'aide qu'ils m'ont apportée et pour avoir bien voulu faire partie du jury. Je remercie aussi Mesdames Cherriaux, Lanneau et Mouëzy pour le soin qu'elles ont apporté à la dactylographie du manuscrit.

Une partie du travail a été effectuée alors que l'auteur bénéficiait d'une bourse du CNR (Consiglio Nazionale delle Recerche) ; je remercie vivement Messieurs Rigamonti, Rettore du Politecnico di Torino, et Buzano, Directeur de l'Istituto Matematico, qui ont bien voulu autoriser le congé qui m'a permis d'accomplir ce travail.

CHAPITRE I

UNE FORMULE D'ISOMETRIE ET EXTENSION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE.

Sommaire.

Dans plusieurs travaux sur l'intégrale stochastique, notamment dans [1], [3], [10], des intégrales du type $\int \phi \, d\beta$ sont écrites, β étant un processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert E et ϕ étant un processus, à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ des applications linéaires bornées de $\mathbb{E}$ dans l'Hilbert $\mathbb{F}$ et faiblement mesurables.

L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ étant, pour $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ de dimension infinie, non séparable, $\int \phi \, d\beta$ n'est pas une intégrale au sens fort comme dans [4]. Nous développons ici les détails d'une définition de $\int \phi \, dM$, (M étant une martingale du second ordre dans $\mathbb{E}$) qui généralise la définition classique au cas de la faible mesurabilité. L'existence de $\int \phi \, dM$ vient alors de l'existence d'une semi-norme sur l'espace des processus faiblement mesurables telle que l'application $\phi \rightsquigarrow \int \phi \, dM$ soit une isométrie dans l'espace de Frechet des martingales du second ordre dans $\mathbb{F}$, cette semi-norme étant donnée par une formule explicite, à savoir

$$\|\phi\|^2_{M,t} = \int_{\Omega \times]o,t]} \|\phi \, Q\|_2^2 \, d\lambda$$

($\|\cdot\|_2$ norme de Hilbert-Schmidt des opérateurs).

On obtient ainsi un théorème de convergence dominée pour la topologie faible des opérateurs et la caractérisation de l'espace fermé des processus intégrables pour une martingale hilbertienne. (Ce problème a été posé par [10]).
Les références du chapitre sont indiquées au § 8.

La terminologie est précisée dans l'appendice ainsi que les hypothèses sur la "base stochastique" $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$. Partout $\mathbb{R}_+^* =]o,+\infty[$, $R_+ = [o,+\infty[$; $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ sont des espaces de Hilbert réels et séparables ; si u est un opérateur, u^x est l'adjoint de u .

Signalons les suivants abus de langage :

- le terme "martingale" signifie martingale de carré de la norme intégrable, continue à droite et pourvue de limites à gauche ("d-continue") ; si la martingale est seulement de norme intégrable, nous dirons "martingale intégrable" ;
- "processus continu" signifie : "presque sûrement continu", etc...

Nous avons essayé de ne pas sortir du cadre de la théorie $\mathcal{L}^2$ de l'intégrale stochastique

§ 1. Rappels sur les martingales hilbertiennes.

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert (réel et séparable) dont la norme sera notée $|.|$ et le produit scalaire $(.,.)$. $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ est l'espace vectoriel des martingales (pour la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$) à valeurs dans $\mathbb{E}$ nulles pour $t=0$. (Le temps 0 n'est pas dans $\mathbb{R}^*$, mais une martingale est d-continue, donc $M_o = \lim_{\varepsilon \to o} M_\varepsilon$ par définition et M_o est adapté pour $\mathcal{F}_o = \bigcap_t \mathcal{F}_t$; les remarques analogues sont sous-entendues dans la suite). Rappelons que $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ est un espace de Frechet dénombrablement hilbertien pour les formes bilinéaires $(M,N)_t = \mathbb{E}(M_t, N_t)$ et que la convergence d'une suite dans $\mathcal{M}(E)$ implique la convergence d'une sous-suite dans $\mathcal{L}^2$, uniformément en $t \leq t_o$ pour chaque t_o donné. L'espace $\mathcal{M}_c(\mathbb{E})$ des martingales continues est fermé dans $\mathcal{M}(\mathbb{E})$. L'espace $\mathcal{M}_b(\mathbb{E})$ des martingales bornées dans $\mathcal{L}^2$ (i.e. $\sup_t E\,|M_t|^2 < +\infty$) est dense dans $\mathcal{M}(E)$. Démontrons ceci. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{E})$ et soit $(\mathcal{G}_t)$ la famille naturelle de M, à savoir $\mathcal{G}_t = \sigma(M_u\ ;\ u \leq t) \cup Q$, Q étant la tribu des éléments de $\mathcal{F}$ triviaux pour $\mathbb{P}$. La famille $(\mathcal{G}_{t_+})$ est continue à droite. Soit M^n une famille de martingales bornées telles que $M_t^n = \mathbb{E}\left[M_n \mathbb{1}_{\{|M_n| \leq n\}} | \mathcal{G}_{t_+}\right]$. Alors, chaque M^n est dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{E})$ et $M^n \longrightarrow M$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}(E)$ soient λ et A respectivement, la mesure de Doleans de la sous-martingale $|M|^2$ et le processus naturel de λ. (cf. Appendice). Pour tout $B \times]s,t]$ prévisible, on a : $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B |M_t - M_s|^2\right] = \lambda(B \times]s,t]) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(A_t - A_s)\right]$ et l'application

$$\mathbb{1}_{B \times]s,t]} \rightsquigarrow (\mathbb{1}_B(M_{t \wedge u} - B_{s \wedge u}))_{u \in \mathbb{R}^+}$$

est une isométrie de l'espace $\mathcal{L}^2_{loc}(\Omega', \mathcal{P}, \lambda)$ (*) dans l'espace $\mathcal{M}(E)$, dont le prolongement à tout $\mathcal{L}^2_{loc}$ est l'intégrale stochastique $\phi \rightsquigarrow \int \phi\, dM$. Le symbole $\int_o^t \phi\, dM$ dénotera la valeur de la martingale $\int \phi\, dM$ au temps t. Pour tout t, on a $\int_o^t \phi\, dM = \int_o^{+\infty} \mathbb{1}_{\Omega \times]o,t]} \phi\, dM$. Soit T un temps d'arrêt ; le processus $\mathbb{1}_{]o,T]}$ est prévisible et on montre facilement que les processus $(M_{T \wedge t})$ et $\int \mathbb{1}_{]o,T]}\, dM$ sont indistinguables, donc que M_T est une martingale dans $\mathcal{M}(E)$, bien que, en général, $\mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}_{t^+}$.

(*) $\mathcal{L}^2_{loc}$ est l'espace associé aux semi-normes $\int_{\Omega \times]o,t]} \phi^2\, d\lambda$

La mesure de Doleans λ' de la martingale $\int \phi\, dM$ est $\phi^2.\lambda$ et son processus naturel A' est $\int \phi^2\, dA$.

§ 2. Processus naturel d'une martingale hilbertienne.

Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert réels séparables. L'espace $\mathcal{L}_o(\mathbb{E},\mathbb{F})$ des opérateurs compacts de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ doué de la norme uniforme et les éléments du type

$$e_i \tilde{\otimes} f_j : e \rightsquigarrow (e,e_i)\, f_j$$

forment un sous-ensemble total dans $\mathcal{L}_o(\mathbb{E},\mathbb{F})$, (e_i), (j_i) étant des bases orthonormées données de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ respectivement. Soient $\mathcal{L}_1(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F})$ respectivement l'espace des opérateurs de trace finie et des opérateurs de Hilbert-Schmidt. $\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_2^2 = \sum_i |u(e_i)|^2 = T_r(u^* \circ u)$ et $(e_i \tilde{\otimes} f_j)$ est une base orthonormée.

Etant donné $\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F}) \subset \mathcal{L}_o(\mathbb{E},\mathbb{F})$ avec injection dense et continue, le dual de $\mathcal{L}_o(\mathbb{E},\mathbb{F})$ s'identifie avec un sous-espace de $\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et ce sous-espace est (théorême de Shatter) l'espace $\mathcal{L}_1(\mathbb{E},\mathbb{F})$ qui est donc un Banach pour la norme $\|u\|_1 = \sup \{|Tr(v^* \circ u)| : v \in \mathcal{L}_o\ ,\ \|v\| \leq 1\}$. En plus, le dual de $\mathcal{L}_1$ s'identifie avec $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$; sur $\mathcal{L}(E,F)$, on a donc une topologie faible qui s'identifie avec la topologie de la convergence faible des opérateurs, à savoir :

a) $u_n \longrightarrow o$ faiblement.

b) $(u_n(x),y) \longrightarrow o$ pour tout $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$,

c) $\sup \|u_k\| < +\infty$ et $(u_n(e_i), e_j) \longrightarrow 0$

sont équivalentes (Hanh- Banach).

Les espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont respectivement équivalents aux produits tensoriels $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{F}$ et $E \hat{\otimes}_2 \mathbb{F}$, grâce à l'identification $x \otimes y \rightsquigarrow x \tilde{\otimes} y$.

Nous allons démontrer l'existence du processus croissant naturel de $M \in \mathcal{M}(\mathbb{E})$. ("croissant" au sens de la positivité des éléments de $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$).

Définition 1.

On dit que $\langle M \rangle$ est le processus croissant naturel de M si $\langle M \rangle$ est prévisible, croissant à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$, intégrable, d-continu, nul pour t=o et tel que $M^{\otimes 2} - \langle M \rangle$ soit une martingale intégrable.

La définition 1 est justifiée par la remarque qu'un tel processus est unique car une martingale prévisible et de variation bornée est nulle La proposition suivante montre l'existence de $\langle M \rangle$ et précise sa structure.

Proposition 1.

Il existe un processus prévisible C, à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$, positif, tel que $\mathrm{Tr}\, C = 1$ λ-presque partout et $\langle M \rangle = \int C\, dA$.

(C sera dit processus de covariance de M, ou bien covariance de M).

Démonstration :

Soit (e_i) une base orthonormée de $\mathbb{E}$ et soit $\lambda(i,j) = 1/4\, [\lambda(e_i + e_j) - \lambda(e_1 - e_j)]$, où, pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\lambda(x)$ est la mesure prévisible de la martingale réelle (M,x). Pour chaque couple ψ, ψ' d'éléments de $\mathcal{L}$ $(\Omega', \mathcal{P}, \lambda)$ on a $\int \psi\psi'\, d\lambda(i,j) = \mathbb{E}\left[(\int \psi\, dM, e_i)\ (\int \psi'\, dM, e_j)\right]$. Pour tout $\Gamma \in \mathcal{P}$, on a : $|\lambda(i,j)\ (\Gamma)| \leq (\Gamma)$, donc la mesure $\lambda(i,j)$ est absolument continue pour λ avec densité $C(i,j) = d\lambda(i,j)/d\lambda$ bornée en valeur absolue par 1. Pour λ-presque tout (ω,t) on a :

a) $|C(i,j)| \leq 1$:

b) $C(i,j) = C(j,i)$

c) $C(i,i) \geq 0$

d) $\sum_i C(i,i) = 1$

Montrons d). Etant donné $C(i,i) \geq 0$, il nous suffit de vérifier que pour tout Γ dans $\mathcal{P}$ on a : $\int 1\!\!1_\Gamma \sum_i C(i,i)\, d\lambda = \int 1\!\!1_\Gamma\, d\lambda$. On a :

$$\int \mathbb{1}_\Gamma \sum_i C(i,i)\, d\lambda = \sum_i \int \mathbb{1}_\Gamma\, d\lambda(i,j) = \Sigma\, \mathbb{E}\left[(\int \mathbb{1}_\Gamma\, dM, e_i)^2\right] = \int \mathbb{1}_\Gamma\, d\lambda.$$

Quitte à remplacer $[C(i,j)]$ par une suite de densités λ-équivalente, on a : a) - d) pour tout (ω,t). Soit $C = \sum_{i,j} C(i,j)\, e_i \otimes e_j$. C'est un processus à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$, prévisible, à valeurs symétriques et positifs, tel que $\|C\|_{1r} = 1$ pour tout (ω,t). Définissons $<M>_t = \int_o^t C_s\, d A_1$. Le processus $<M>$ est prévisible (C et A étant prévisibles), à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$, continu à droite et pourvu de limites à gauche et tous ses sauts sont contenus dans des sauts de A. On a

$$M_t^{\otimes 2} - <M>_t = \left[\sum_{i,j} (M_t, e_i)\,(M_t, e_j) - \int C\,(1,j)\, dt\right] e_i \otimes e_j .$$

D'après la définition de $C(i,j)$, $M^{\otimes 2} - <M>$ est une martingale intégrable car $e_i \otimes e_j\, [M^{\otimes 2} - <M>]$ sont des martingales intégrables.

Remarquons que le processus $<M>$ est unique ; autrement, la différence entre deux processus naturels serait une martingale intégrable à variation bornée et prévisible, donc la martingale nulle.

De l'unicité de A on tire, étant $\|<M>_t\|_1 = Tr<M>_t$, l'égalité $Tr<M> = A$. Le processus $<M>$ étant croissant au sens de la positivité dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$, sur chaque trajectoire $T_2<M>$ est la frontière variation de $<M>$. Pour tout processus réel tel que $\int \phi\, dM$ existe. on a :

$$< \int \phi\, dM > = \int \phi^2\, d<M> = \int \phi^2\, C\, dA = \int C\, dA' ,$$

où A' est le processus naturel associé à la martingale $\int \phi\, dM$ (dans la démonstration plus haut, on peut prendre $\lambda'(i,j) = \phi^2\, \lambda(i,j)$ donc, on peut prendre $C' = C$, étant $\lambda' = \phi^2.\lambda.$).

<u>Remarque</u> :

La démonstration plus haut est une démonstration sur un exemple du résulat suivant :

Soit μ une mesure positive à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$; alors $\mu << Tr\,\mu$, la densité $d\mu/dTr\,\mu$ existe et $Tr(d\mu/dTr\,\mu) = 1$ presque partout.

Proposition 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors, $< u(M) > = u^{\otimes 2} < M >$.

Démonstration :

Si $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $u \otimes v$ est l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}, \mathbb{F} \hat{\otimes}_1 \mathbb{F})$ défini par $u \otimes v : x \otimes y \rightsquigarrow u(x) \otimes v(y)$.

Etant $M^{\otimes 2} - < M >$ une martingale intégrable dans $\mathbb{E} \otimes_2 \mathbb{E}$, le processus $u^{\otimes 2} \; (M^{\otimes 2} - < M >) = (u(M))^{\otimes} - u^{\otimes 2} < M >$ est une martingale. D'après l'unicité du processus naturel, on a : $u^{\otimes 2} < M > = < u(M) >$.

§ 3. Processus faiblement prévisibles.

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert réels et séparables et soit V un espace de Banach, sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, tel que $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})} \leq K \| \cdot \|_{\mathbb{V}}$.

Définition 2.

Un processus ϕ à valeurs dans $\mathbb{V}$ est faiblement prévisible si pour tout $e \in \mathbb{E}$ et $f \in \mathbb{F}$ le processus réel $(\phi e, f)$ est prévisible.

Pour toute mesure admissible λ, $\mathcal{L}^2_{loc} (\Omega', \mathcal{P}, \lambda ; \mathbb{V})$ est l'espace des processus faiblement prévisibles dans $\mathbb{V}$ tels que $\int_0^t \|\phi\|^2_{\mathbb{V}} d\lambda < +\infty$ pour tout t. (On suppose $v \longrightarrow \|v\|_{\mathbb{V}}$ mesurable pour la topologie faible : c'est vrai, si $\mathbb{V}$ est le dual d'un Banach séparable, par exemple si $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, ou bien si $\mathbb{V}$ est séparable).

Si $\mathbb{V}$ est séparable, chaque processus dans $\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{V})$ est la limite de processus du type $\sum_{k \leq n} \psi_k v_k$, avec ψ_k réel prévisible et $v_k \in \mathbb{V}$. Soit M une martingale dans $\mathcal{M}_b(E)$ de mesure prévisible λ et définissons :

$$\int \sum_{k \leq n} \psi_k v_k \, dM = \sum_{k \leq n} v_k \int \psi_k \, dM.$$

Quitte a remplacer (ψ_k) par une suite orthogonale pour λ, on a :

$$\mathbb{E}(\|\int_0^t \sum_{k \leq n} \psi_k v_k \, dM\|^2_{\mathbb{F}}) \leq K \sum_{k \leq n} \|v_k\|^2_{\mathbb{V}_n} \int_0^t \psi^2 \, d\lambda = k \int \| \sum v_k \psi_k \|^2_{\mathbb{V}_n} d\lambda \ ,$$

donc l'application $\phi \rightsquigarrow \int \phi \, dM$ se prolonge par densité et continuité en application de $\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{V})$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{F})$. Remarquons que cette définition d'intégrale stochastique n'est plus utilisable si $\mathbb{V}$ n'est pas séparable (par exemple, si $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$) et que l'on a perdu, par rapport au cas réel, la propriété d'isométrie

$$\mathbb{E} \| \int_0^t \psi \, dM\|^2 = \int \psi^2 \, d\lambda.$$

Pour une définition convenable de $\int \phi \, dM$ dans le cas $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, nous adopterons pour les processus ϕ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ la semi-norme naturelle $\mathbb{E}\left[\|\int_0^t \phi \, dM\|^2_{\mathbb{F}}\right]$.

<u>Proposition 3.</u>

Sont équivalentes :

a) ϕ est faiblement prévisible dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$;

b) pour tout $e \in \mathbb{E}$, ϕe est prévisible dans $\mathbb{F}$;

c) il existe une suite $(\phi^n_{h,k})_{h,k,n \in \mathbb{N}}$ de processus prévisibles réels telle que la suite

$$Y^n = \sum_{h,k \leq n} \phi^n_{h,k} \, \widetilde{e_h \otimes f_k}$$

converge vers ϕ faiblement pour tout $(\omega,t) \in \Omega'$ $[(e_i)$ et (f_i) étant des bases orthonormées de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ respectivement$]$.

La démonstration est triviale. Remarquons que si

$\Pi_n : e \rightsquigarrow \sum_{i \leq k} (e,e_i)\, e_i$ et $\Pi'_u : f \rightsquigarrow \sum_{k \leq n} (f,f_k)\, f_k$ alors $Y^n = \Pi'_n \circ \phi \circ \Pi_n$.

<u>Proposition 4.</u>

Soit M dans $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ et C sa covariance. Pour tout t, l'application :

$$\|\cdot\|_{M,t} : \phi \rightsquigarrow \left(\int_{\Omega \times]o,t]} \operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2} C \, d\lambda\right)^{1/2}$$

est une semi-norme sur l'espace des processus faiblement prévisibles à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Si ϕ_n est une suite qui converge faiblement vers 0, pour tout (ω,t), alors $\|\phi^n\|_{n,t} \longrightarrow 0$ si et seulement si $\operatorname{Tr} \phi^{r \otimes 2} C$ est uniformément intégrable pour λ sur $\Omega \times]o,t]$.

Remarque : Signalons des écritures équivalentes de $\operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2} C$ que l'on retrouve dans la littérature. Etant donné $(\phi^{\otimes 2} C)^{\sim} = \phi \circ \tilde{C} \circ \phi^*$, on a : $\operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2} C = \operatorname{Tr} \phi \circ \tilde{C} \circ \phi^* = \operatorname{Tr} \phi \circ \tilde{C}^{1/2} \circ (\tilde{C}^{1/2}) \circ \phi^*$, étant donné C auto-adjoint, d'où $\operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2} C = \|\tilde{C}^{1/2} \circ \phi^*\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{F},\mathbb{E})} = \|\phi \circ \tilde{C}^{1/2}\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F})}$.

Démonstration :

Soit u^n une suite dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ faiblement convergente vers u°. Alors, pour tout C de trace finie : $u^n \circ C \circ (u^n)^*$ est convergente vers $u^\circ \circ C \circ (u^\circ)^*$ pour la trace ; donc $\operatorname{Tr} \phi^{\times 2} C = \|\phi \circ \tilde{C}^{1/2}\|_2^2$ est un processus prévisible réel et $\|\phi\|_{M,t}$ est bien définie. En plus, $\|\cdot\|_{M,t}$ vient d'une forme bilinéaire, donc est une semi-norme. Si $\phi^r \longrightarrow 0$ faiblement, alors $T_r \phi^{\otimes 2} C \longrightarrow 0$ et, d'après l'uniforme intégrabilité, $\|\phi^r\|_{M,t} \longrightarrow 0$.

Proposition 5.

Soient $\Lambda(M)$ et $\varepsilon(M)$ respectivement l'espace des processus faiblement prévisibles dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ de semi-normes $\|\cdot\|_{M,t}$ finies et l'espace des éléments de $\Lambda(M)$ de la forme $\sum_{h,k \leq n} \phi_{h,k} e_h \tilde{\otimes} f_k$. Alors, $\varepsilon(M)$ est dense dans $\Lambda(M)$ et, si un des espaces $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ est de dimension finie, $\Lambda(M)$ est complet.

Démonstration :

Soient (Π_n), (Π'_n) respectivement les systèmes de projecteurs associés aux bases (e_i), (f_j). Soit $\phi \in \Lambda(M)$ et $\phi^n = \Pi'_n \circ \phi \circ \Pi_n$. Tout ϕ^n est dans $\varepsilon(M)$: étant $\operatorname{Tr}(\phi - \phi^n)^{\otimes 2} C = \operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2} C - \operatorname{Tr}(\phi^n)^{\otimes 2} C$, on a : $\operatorname{Tr}(\phi^n)^{\otimes 2} C \leq \operatorname{Tr}(\phi)^{\otimes 2} C$. En plus,

ϕ^n est faiblement convergente vers ϕ pour tout (ω,t), donc $\phi^n \longrightarrow \phi$ dans $\Lambda(M)$.

Si (ϕ^n) est une suite de Cauchy pour $\Lambda(M)$, alors $(\phi^n \circ \tilde{C}^{1/2})$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2_{loc}(\Omega', \mathcal{P}, \lambda\,;\, \mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{F}))$ qui est un espace complet. Soit $\Xi = \lim \phi^n \circ \tilde{C}^{1/2}$. Quitte à remplacer ϕ^n par une sous-suite, on a : $\phi^n \circ \tilde{C}^{1/2} \longrightarrow \Xi$ pour presque tout (ω,t). Pour (ω,t) fixé, on a : $\tilde{C}^{1/2} = \Sigma\, \lambda_i(\omega,t)\; x_i \tilde{\otimes} x_i$, (x_i) étant une base orthonormée (qui dépend de (ω,t)). Soit Π le projecteur $e \longrightarrow \Sigma (e,x_i)\; x : 1\!\!1_{\{\lambda_i \neq o\}}$. On a :

$$\| \phi^n \circ \tilde{C}^{1/2} - \phi^m \circ \tilde{C}^{1/2} \|_2^2 = \sum_i \lambda_i^2 \; |(\phi^n - \phi^m)\; e_i|^2_{\mathbb{F}} \, .$$

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, (il suffirait rang $\tilde{C}^{1/2}(\omega,t) < +\infty$), ceci implique que ϕ^n est de Cauchy dans $\mathcal{L}(\Pi\mathbb{E},\mathbb{F})$. Si $\mathbb{F}$ est de dimension finie, ceci implique que $\sup_n \|\phi^n\|_{\mathcal{L}(\Pi\mathbb{E},\mathbb{F})} < +\infty$; dans les deux cas, il existe un processus $\phi \in \mathcal{L}(\Pi\mathbb{E},\mathbb{F})$, tel que $\lim \phi^n = \phi \circ \Pi$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ faible. Or, $\phi \circ \Pi$ est prévisible et $\phi \circ \Pi \circ \tilde{C}^{1/2} = \phi \circ \tilde{C}^{1/2} = \Xi$.

Remarques.

a) Dans le cas général, on peut caractériser la limite d'une suite de Cauchy dans $\Lambda(M)$ en termes d'opérateurs non bornés de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ dont les domaines contiennent $\tilde{C}^{1/2}(\mathbb{E})$. cf. [16] et [18] .

b) On peut énoncer la propriété de Cauchy de la façon suivante : Soit (ϕ^n) de Cauchy pour $\Lambda(M)$ et telle que $\sup_n \|\phi^n\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} < +\infty$. Alors, la limite des ϕ^n est dans $\Lambda(M)$.

§ 4. Définition de l'intégrale stochastique.

Soit ϕ un élément de $\varepsilon(M)$: $\phi = \sum_{h,k\leq n} \psi_{h,k}\, e_h \tilde{\otimes} f_k$. D'après les propriétés du processus naturel, on a

$$\langle (M,e_h)\rangle = e_h^{\otimes 2} \langle M\rangle = (\langle M\rangle e_h,e_h) \leq \mathrm{Tr}\,\langle M\rangle = A \ ,$$

donc $\int \psi_{h,k}\, d(M,e_h)$ est bien défini. Définissons

$$\int \phi \; dM = \sum_{h,k\leq n} \int \psi_{h,k}\, d(M,e_h)\, f_k$$

et, si tous les termes sont bien définis,

$$\int \phi \; dM = \sum_{h,k\leq n} e_h \tilde{\otimes} f_k \left(\int \psi_{h,k}\, dM\right) .$$

Proposition 6.

L'application $\phi \rightsquigarrow \int \phi\, dM$ se prolonge en isométrie de $\Lambda(M)$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{F})$.

Démonstration :

$\varepsilon(M)$ étant un sous-espace dense de $\Lambda(M)$ et l'application $\phi \rightsquigarrow \int \phi\, dM$ étant linéaire, il suffit de vérifier l'énoncé pour un ϕ du type $\psi e_h \otimes f_k$. D'après les propriétés du processus naturel, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \int \psi\, e_h \otimes f_k\, dM\right\rangle &= \int \psi^2\, d\langle e_h \otimes f_k\, M\rangle \\ &= \int (\psi\, .e_h \otimes f_k)^{\otimes 2}\, C\, dA\end{aligned}$$

d'où la proposition.

L'intégrale stochastique est donc définie par la formule

$$\int \phi \; dM = \sum_{h,k} \int (\phi\; e_h\; f_k)\; d(M,e_h)\; f_k \ .$$

Proposition 7.

Soit ϕ faiblement continu à gauche, et uniformément borné dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Alors

$$\int \phi \; dM = \lim_{n} \sum_{k} \phi_{k/2^n}(M_{k+1/2^n} - M_{k/2^n}) \ .$$

Démonstration :

Appliquer la propriété de convergence dominée dans $\Lambda(M)$.

§ 5. La variation quadratique

Nous allons associer à chaque martingale M dans $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ un processus à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$ qui jouera le rôle de "variation quadratique", à savoir

$$[M]_t = \lim_n \sum_k \left(M_{\frac{k+1}{2^n} \wedge t} - M_{\frac{k}{2^n} \wedge t}\right)^{\otimes 2}$$

la limite étant prise dans le sens précisé plus bas. Bien que l'existence de la variation quadratique soit bien connue, nous reprenons ici les démonstrations avec un système d'hypothèses qui permet de travailler partout avec la notion d'intégrale stochastique que nous avons définie, i.e. la définition de type $\mathcal{L}^2$ pour les processus faiblement mesurables. Nous montrons que la variation quadratique est liée à un processus "densité" de la même façon que le processus naturel est lié à la covariance.

Définition 3.

Une martingale $M \in \mathcal{M}(E)$ est admissible (pour la variation quadratique) si la suite $|M^n|^2$, où (M^n) est la suite des approximations dyadiques

$$M^n_t = \sum_k M_{\frac{k}{2^n}} 1_{\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]},$$

est uniformément intégrable pour la mesure admissible λ sur tout $\Omega \times]o,t]$.
Si la martingale M est admissible, étant donné que $\mathrm{Tr}(M^n,.)^{\otimes 2} C \leq |M^n|^2$ et $M^n \to M^-$ dans E pour tout (ω,t), l'intégrale $\int(M^-,dM)$ est bien définie et $\int(M^n,dM) \to \int(M^-,dM)$ au sens de la métrique de l'espace des martingales réelles.
[On pourrait aussi bien prendre comme condition d'admissibilité la condition "$\mathrm{Tr}(M^n,.)^{\otimes 2}C$ uniformément intégrable"].

La définition 3 n'a pour but que de préciser une terminologie commode pour les énoncés qui vont suivre. Voici deux conditions suffisantes pour l'admissibilité.

Proposition 8.

Pour tout t soit $U_t = \sup_{s<t} |M_t|^2$. Si pour tout t $\mathbb{E}(U_t A_t) < +\infty$ A étant le processus réel naturel de la martingale M , ou bien si $\mathbb{E}(U_t |M_t|^2) < +\infty$, alors M est admissible.

Démonstration.

On vérifie aisément que le processus U est croissant et continu à gauche. Etant $U_t \geq |M^n|$ pour tout ω, t, n, si U est intégrable pour λ sur tout $\Omega \times]o,t]$, alors M est admissible. Soient U^n les approximations dyadiques de U . Etant $o \leq U^n \leq U^{n+1}$, le processus $U 1_{\Omega\times]o,t]}$ est intégrable si et seulement si (Beppo devi) on a $\sup_n \int_{\Omega\times]o,t]} U^n \, d\lambda < +\infty$.

D'après la définition de λ et de A on a

$$\int_{\Omega\times]o,t]} U^n d\lambda = \sum_k \mathbb{E}\left[U_{\frac{k}{2^n}} \left|M_{\frac{k+1}{2^n}\wedge t}\right|^2 - \left|M_{\frac{k}{2^n}\wedge t}\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[U_t |M_t|^2\right]$$

et analoguement $\int_{\Omega\times]o,t]} U^n d\lambda \leq \mathbb{E}[U_t A_t]$.

Remarquons que les hypothèses

a) A_t est borné presque surement pour tout t ;

b) $|M_t|$ est borné presque surement pour tout t ,

impliquent que M est admissible.

L'inégalité de Doob

$$E(U_t^2) \leq 16 \ \mathbb{E}|M_{t-}|^4$$

donne la condition suffisante

c) $E|M_{t-}|^4 < +\infty$ pour tout t .

En utilisant la condition a) on peut montrer que chaque martingale est "localement" admissible.

Proposition 9.

Soit $M \in \mathcal{M}(E)$ et soit A le processus réel croissant naturel de M. Il existe une suite (σ^n) de temps d'arrêt telle que $\sigma^n \uparrow +\infty$ et A_{σ^n} soient bornés, donc telle que les martingales arrêtées M_{σ^n} soient admissibles.

Démonstration.

Soit $\Gamma^n = \{A < n\} =]0,T^n[$, (T^n) étant une suite de temps d'arrêt croissante vers $+\infty$. Soit σ^n le temps d'arrêt défini par :

$$\sigma^n(\omega) = \max\{T^k(\omega) \; ; \; T^k(\omega) < T^n(\omega)\}$$

avec $T^o = 0$. Etant donné $\sigma^n < T^n$, on a $A_{\sigma^n} < n$. On a encore $\sigma^n \nearrow +\infty$ car l'ensemble $\bigcup_n \sigma^n(\omega)$ n'est pas fini pour presque tout ω et est contenu dans l'ensemble $\bigcup_n T^n(\omega)$.

Définition 4.

Le processus $[[M]]$ réel, croissant, d-continu, adapté, intégrable, est la variation quadratique réelle de la martingale M si pour tout temps d'arrêt σ tel que la martingale arrêtée M_σ soit admissible, on a

$$|M_{\sigma\wedge t}|^2 = 2 \int_o^t (M_\sigma^- , dM_\sigma) + [[M]]_{\sigma\wedge t}$$

Remarques :

a) la variation quadratique est évidemment unique

b) étant données $M_\sigma^- \, 1_{]o,\sigma]} = M^- \, 1_{]o,\sigma]}$ et $dM_\sigma = 1_{]o,\sigma]} \, dM_\sigma$ la formule précédente peut s'écrire

$$|M_{\sigma\wedge t}|^2 = 2\int_o^t (M^-, dM_\sigma) + [\![M]\!]_{\sigma\wedge t}$$

c) Soit (σ^n) une suite croissante de temps d'arrêt telle que M_{σ^n} soit admissible et $M_{\sigma^n} \to M$. Le processus

$$N_t = \lim_n \int (M^-, dM_{\sigma^n}) + |M|^2 \, 1_{\{\bigcup_n]o,\sigma^n]\}^C}$$

est une martingale intégrable qu'on peut noter

$$N_t = \int_o^t (M^-, dM)$$

bien que l'intégrale à droite ne soit pas définie dans le sens $\mathcal{L}^2$.

Proposition 10.

Pour toute $M \in \mathcal{M}(E)$ la variation quadratique $[\![M]\!]$ existe. Si la martingale M est admissible on a pour tout t

$$(*) \quad \lim_n \mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t} \Big| [\![M]\!]_s - \sum_k \Big|M_{\frac{k+1}{2^n}\wedge s} - M_{\frac{k}{2^n}\wedge s}\Big|^2\Big|^2\Big] = 0 \quad .$$

Si $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$ est le processus réel naturel de la martingale M , le processus $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle - [\![M]\!]$ est une martingale intégrable dont les trajectoires sont à variation bornée. Si M est continu, $\langle\!\langle M\rangle\!\rangle = [\![M]\!]$.

Démonstration :

Soit M admissible. Si (M^n) est la suite des approximations dyadiques de M^- on a

$$|M_t|^2 = 2\int_o^t (M^n, dM) + \sum_k \Big|M_{\frac{k+1}{2^n}\wedge t} - M_{\frac{k}{2^n}}\Big|^2$$

d'où, d'après la convergence de $\int(M^n, dM)$ vers $\int(M^-, dM)$ dans $\mathcal{M}(E)$ on a (*) et toutes les propriétés de $[\![M]\!]$.

Si M n'est pas admissible, soit (σ^n) une suite de temps d'arrêt telle que $M_{\sigma^n} \to M$ et M_{σ^n} soit admissible (avec $\sigma^n \leq \sigma^{n+1}$) . $[\![M]\!]$ est alors défini localement. Soit Y^n la variation quadratique réelle de M_{σ^n} . Si $\sigma^m \leq \sigma^n$ on a $Y^m = Y^n$ sur $]o,\sigma^m]$ et $[\![M]\!] = \lim_n Y^n \, 1_{]o,\sigma^n]}$ sur

$\bigcup_n]o,\sigma^n]$. Ailleurs $[[M]] = |M_t|^2$, . La variation quadratique est intégrable car

$$E\ [[M]]_t = \lim_n \mathbb{E}|M_{\sigma^n \wedge t}|^2 + \mathbb{E}\left[|M_t|^2\ 1_{\{t \in \bigcap_n]\sigma^n + \infty[\}}\right] = E\ |M_t|^2 \ .$$

Etant $|M_t|^2 - \langle\langle M\rangle\rangle_t$ une martingale intégrable $\langle\langle M\rangle\rangle - [[M]]$ est une martingale intégrable à variation bornée sur chaque trajectoire. Si M est continue, alors $\int(M^-, dM)$ est continue, donc $\langle\langle M\rangle\rangle - [[M]]$ est continue, donc $\langle\langle M\rangle\rangle = [[M]]$.

Passons à la version vectorielle de la variation quadratique. Pour tout $x, y \in E$, soit $x \overset{s}{\otimes} y = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$ le produit tensoriel symétrique de x et y . L'application $j : e \rightsquigarrow (f \rightsquigarrow e \overset{s}{\otimes} f)$ est une isométrie de E dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}\ \hat{\otimes}_2\ \mathbb{E})$, donc pour tout processus ϕ prévisible dans $\mathbb{E}$, tel que $\int_{\Omega \times]o,t]} |\phi|^2_E\, d\lambda < +\infty$, l'intégrale stochastique $\int \phi \overset{s}{\otimes} dM = j(\phi)dM$ est bien définie dans $\mathcal{M}(\mathbb{E}\ \hat{\otimes}_2\ \mathbb{E})$. (Il suffirait $\int_{\Omega \times]o,t]} (\tilde{C}\phi, \phi)d\lambda < +\infty$).

<u>Définition 5.</u>

Le processus $[M]$ à valeurs dans $\mathbb{E}\ \hat{\otimes}_1\ \mathbb{E}$, croissant au sens de la positivité dans $\mathbb{E}\ \hat{\otimes}_1\ \mathbb{E}$, d-continu adapté, intégrable est la <u>**variation quadratique**</u> de M si pour tout temps d'arrêt σ tel que la martingale M_σ soit admissible on a

$$(M_{\sigma \wedge t})^{\otimes 2} = 2 \int_o^{\sigma \wedge t} M^- \overset{s}{\otimes} dM + [M]_{\sigma \wedge t} \ .$$

<u>Remarque</u> :

Cette égalité est valable dans l'espace $\mathbb{E}\ \hat{\otimes}_2\ \mathbb{E}$ dans le sens $\int_o^{\sigma \wedge t} M^- \overset{s}{\otimes} dM = \int_o^t M^-_{\sigma^n} \overset{s}{\otimes} dM_{\sigma^n}$. On verra plus bas qu'on peut interpréter $t \to \int_o^t M^- \overset{s}{\otimes} dM$ comme martingale intégrable dans l'espace $\mathbb{E}\ \hat{\otimes}_1\ \mathbb{E}$.

<u>Proposition 11.</u>

Pour tout $M \in \mathcal{M}(\mathbb{E})$ la variation quadratique $[M]$ existe et est unique. Si σ est un temps d'arrêt tel que M_σ soit admissible on a pour tout t

$$(*)\quad \lim_n \mathbb{E} \sup_{s\leq t} \Big|\Big| [M]_{s\wedge\sigma} - \sum_k \big(M^\sigma_{\frac{k+1}{2^n}\wedge s} - M^\sigma_{\frac{k}{2^n}\wedge s}\big)^{\otimes 2}\Big|\Big|_2^2 = 0 \ .$$

Soit $\langle M\rangle = \int C \, d \langle\langle M\rangle\rangle$ le processus naturel de M . Alors le processus $\langle M\rangle - [M]$ est une martingale intégrable dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$ de variation bornée et, si M est continue, $\langle M\rangle = [M]$.

La variation quadratique est de la forme $[M] = \int D \, d \,[[M]]$, où D est un processus bien mesurable et $[[M]] = \mathrm{Tr}\,[M]$.

Remarque : Nous n'avons pas étudié le lien entre C et D .

Démonstration.

L'espace $\mathbb{E} \hat{\otimes}_2 \mathbb{E}$ étant un hilbert, la proposition se démontre exactement comme dans le cas réel sauf que toutes les propriétés sont interprétées dans l'espace $\mathbb{E} \hat{\otimes}_2 \mathbb{E}$. Il existe donc un processus unique $[M]$, à valeurs dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_2 \mathbb{E}$, croissant, adapté, intégrable et tel que

$$M_t^{\otimes 2} = 2 \int_0^t M^- \overset{s}{\otimes} dM + [M]_t$$

où l'intégrale stochastique est une martingale intégrable. D'après la positivité de $[M]_t$ on a

$$\mathbb{E}\big[||[M]_t||_1\big] = \mathrm{Tr}\,\mathbb{E}([M]_t) = \mathrm{Tr}\,\mathbb{E}(M_t^{\otimes 2}) = \mathbb{E}\,|M_t|^2$$

donc $[M]_t$ est presque surement dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$ et $\int M \overset{s}{\otimes} dM$ est une martingale intégrable dans $\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}$.

Soit (Π_n) un système de projecteurs de $\mathbb{E}$. Alors $\Pi_n^{\otimes 2}$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E} \hat{\otimes}_2 \mathbb{E} , \mathbb{E} \curlyvee \hat{\otimes}_1 \mathbb{E})$ et

$$(\Pi_n M_t)^{\otimes 2} = 2 \int_0^t \Pi_n M^- \overset{s}{\otimes} d(\Pi_n M) + \Pi_n^{\otimes 2} [M]$$

d'où, d'après l'unicité, $\Pi_n^{\otimes 2}[M] = [\Pi_n M]$ et

$$\mathrm{Tr}[M] = \lim \mathrm{Tr}\, \Gamma_n^{\otimes 2}\, [M] = -\lim_n 2\int(\Pi_n M^-, d\,\Pi_n M) + |M_t|^2$$
$$= -\lim_n 2\int(\Pi_n M^-, dM) + |M_t|^2 = [[M]]$$

$[M]$ étant croissant, un calcul analogue montre que $[[M]]$ est la fonction variation de la mesure $d[M]$ à valeurs dans $\mathbb{E}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{E}$, donc que $[M]$ est d-continu pour la topologie de $\mathbb{E}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{E}$, et que la densité D de la mesure $E\,[\int .d\,[M]]$ par rapport à la mesure $E\,[\int .\, d\,[[M]]]$ existe, c.q.f.d.

Etudions la structure de $[\int \phi\, dM]$. Pour tout u,v dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $u\otimes v$ est l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{E}, \mathbb{F}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{F})$ tel que $u\otimes v : x\otimes y \rightsquigarrow u(x)\otimes v(y)$.

$[M]$ étant croissant, sa variation sur chaque trajectoire est $\mathrm{Tr}\,[M]$ et la variation de la mesure μ est $\mu = \mathbb{E}[\int .\, d\,\mathrm{Tr}\,[M]]$. Soit $D = d\mu/d\mu'$. (cf. la remarque après la proposition 1). On a $[M]_t = \int_0^t D\, d\,\mathrm{Tr}\,[M]$, étant donné pour tout e_i

$$e_i\otimes e_i\,[M] = e_i\otimes e_i\quad D\, d\mathrm{Tr}\,[M]$$

et la variation quadratique de la martingale (M,e_i) étant unique.

Soit ϕ un élément de $\Lambda(M)$. Nous étudions la structure de $[\int \phi\, dM]$. Pour tout u,v dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, soit $u\otimes v$ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{E}, \mathbb{E}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{E})$ défini pour tout $x\otimes y$ par

$$u\otimes v\,(x\otimes y) = u(x)\otimes v(y)\ .$$

<u>Proposition 11.</u>

On a

$$[\int\phi\, dM] = \int \phi^{\otimes 2}\, d\,[M]$$

l'intégrale à droite étant définie par

$$\int\phi^{\otimes 2}\, d\,[M] = \int\phi^{\otimes 2}\, D\, d\,\mathrm{Tr}\,[M]$$

où $\phi^{\otimes 2} D$ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{F}\,\hat{\otimes}_1\,\mathbb{F}$.

Pour la démonstration nous faisons référence à [18] avec la remarque qu'il suffit de démontrer l'énoncé pour des ϕ fortement mesurables. Signalons seulement un cas particulier dont on aura besoin dans la suite.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ on a

$$u^{\otimes 2}(x \overset{s}{\otimes} y) = u^{s}(x) \overset{s}{\otimes} u^{s}(y) \quad ,$$

d'où on montre

$$u^{\otimes 2} \int M \overset{s}{\otimes} dM = \int u(M^{-}) \overset{s}{\otimes} d\, u(M)$$

§ 6. Formule de Ito. Cas continu

La formule de Ito pour une martingale vectorielle continue est bien connue. Nous reprenons ici les parties de la démonstration dans lesquelles interviennent les notions de processus faiblement prévisible et de covariance d'une martingale. Remarquons d'abord qu' une fonction ne doit pas nécessairement être de classe $c^{(2)}$ pour avoir une formule de Ito. Soit par exemple (β_t) un brownien réel et soit f_n une suite de fonction de classe $c^{(2)}$ dont les dérivées f'_n et f''_n soient bornées uniformément. On a

$$f_n(\beta_t) = f_n(o) + \int_o^t f'_n(\beta_s)\, d\,\beta_s + \frac{1}{2}\int_o^t f''_n(\beta_s)\, ds \quad .$$

Soit $f''_n \to f''$ partout et $f_n(o) \to f(o)$, f étant défini à partir de f'' .
On a

$$f(\beta_t) = f(o) + \int_o^t f'(\beta_s)\, d\,\beta_s + \frac{1}{2}\int_o^t f''(\beta_s)\, ds$$

mais f'' n'est pas nécessairement continue.

Dans le cas vectoriel avec dimension infinie, on peut démontrer la formule de Ito très faiblement sous des hypothèses qui n'impliquent pas la dérivabilité deux fois au sens de Frechet. Voici les hypothèses les plus maniables.

Définition 5.

Une application ϕ de $\mathbb{E}$ dans l'Hilbert $\mathbb{F}$ est régulière (pour la formule de Ito) si pour tout x, y dans $\mathbb{E}$ on a

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(y)(x-y) + \frac{1}{2}\,\phi''(y)(x-y)^{\otimes 2} + R(x,y) \ ,$$

où $|R(x,y)| = o(|x-y|^2)$ et

a) $\phi' : \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ faible

b) $\phi'' : \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E} \mathbin{\hat{\otimes}_1} \mathbb{E},\mathbb{F})$ est continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E} \mathbin{\hat{\otimes}_1} \mathbb{E},\mathbb{F})$ faible

c) ϕ' et ϕ'' sont uniformément bornées en norme.

Démontrons alors que si M est une martingale continue et si $\langle \dot{M} \rangle = \int C_s \, d\, A_s$ on a pour toute fonction régulière ϕ la <u>formule de Ito</u>.

$$\phi(M_t) = \phi(o) + \int_o^t \phi'(M_s) \, d\, M_s + \frac{1}{2} \int_o^t \phi''(M_s) \, C_s \, d\, A_s$$

Tous les lemmes sont bien définis : ϕ est continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, $\phi'(M)$ est un processus faiblement prévisible et borné, $\phi''(M)C$ est prévisible et borné dans $\mathbb{F}$. Soit (M^n) la suite des approximations dyadiques contenues à gauche de M. On a

$$\int \phi'(M^n) \, dM \to \int \phi'(M) \, dM$$

donc un calcul classique montre que

$$\phi(M_t) = \phi(o) + \int_o^t \phi'(M) \, dM + \lim_{n \to +\infty} U_t^n$$

où

$$U_t^n = \sum_k \frac{1}{2} \phi''(M_{\frac{k}{2^n}})(M_{\frac{k+1}{2^n} \wedge t} - M_{\frac{k}{2^n} \wedge t})^{\otimes 2} .$$

La martingale M étant continue on a $[M] = \int C \, d\, A$, d'où

$$M_t^{\otimes 2} = 2 \int_o^t M \overset{s}{\otimes} dM + \int_o^t C \, d\, A$$

et

$$(M_t - M_s)^{\otimes 2} = 2 \int_s^t (M_\tau - M_s) \overset{s}{\otimes} d\, M_\tau + \int_s^t C \, d\, A .$$

Cette dernière formule permet d'écrire U_t^n sous la forme

$$U_t^n = \sum_k \phi''(M_{\frac{k}{2^n}}) \int_{\frac{k}{2^n} \wedge t}^{\frac{k+1}{2^n} \wedge t} (M - M^n) \overset{s}{\otimes} dM + \frac{1}{2} \int_o^t \phi''(M^n) \, C \, dA .$$

Rappelons que l'intégrale $\int (M - M^n) \overset{s}{\otimes} dM$ est l'intégrale du processus à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E} \hat{\otimes}_2 \mathbb{E})$ défini par $e \to (M - M^n) \overset{s}{\otimes} e$; ce processus est au fait à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E})$ et la formule de la variation quadratique montre que l'intégrale $\int_a^b (M - M^n) \overset{s}{\otimes} dM$ est pour tout a et b un élément de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{E} \hat{\otimes}_1 \mathbb{E}}$.

Soit (Π_m) une suite complète de projecteurs de E ; pour tout

x dans $\mathbb{E}\hat{\otimes}_1\mathbb{E}$ on a $\Pi_m^{\otimes 2}x \to x$ donc, $\phi''(M_{\frac{k}{2^n}})\Pi_m^{\otimes 2}$ étant à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}\hat{\otimes}_2\mathbb{E},\mathbb{F})$

$$\phi''(M_{\frac{k}{2^n}})\int_{\frac{k}{2^n}\wedge t}^{\frac{k+1}{2^n}\wedge t}(M-M^n)\overset{s}{\otimes} dM = \lim_m \int_{\frac{k}{2^n}\wedge t}^{\frac{k+1}{2^n}\wedge t}\phi''(M_{\frac{k}{2^n}})\,\Pi_m^{\otimes 2}\,(M-M^m)\overset{s}{\otimes} dM$$

$$= \lim \int_{\frac{k}{2^n}\wedge t}^{\frac{k+1}{2^n}\wedge t}\left[\phi''(M^m)\right]^s (M-M^n)\, dM$$

où on dénote par u^s l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))$ tel que $u^s(x,y) = u(x\overset{s}{\otimes} y)$, u étant dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}\otimes_1\mathbb{E},\mathbb{F})$.

On a donc

$$U_t^n = \int_o^t\left[\phi''(M^n)\right]^s (M-M^n)\, dM + \frac{1}{2}\int_o^t \phi''(M^n)\; C\; d\, A$$

d'où, si M est admissible,

$$\lim_n U_t^n = \frac{1}{2}\int_o^t \phi''(M)\; C\; d\; A$$

et la formule de Ito. Il suffit encore de remarquer qu'il suffit de démontrer la formule pour une suite de martingales arrêtées (M_{T^n}) .

La formule passe à la limite pour une classe de fonctions limites de fonctions régulières au sens suivant.

Définition 6.

Une fonction ϕ est admissible (pour la formule de Ito) s'il existe une suite ϕ^n de fonctions régulières telles que $\phi_n(x) \to \phi(x)$ pour tout x dans $\mathbb{E}$ et si les suites $(\phi^n)'$ et $(\phi^n)''$ sont convergentes vers ϕ' et ϕ'' dans le sens

$$\left\{\left[(\phi^n)' - \phi'\right](M)\right\}^{\otimes 2} C \quad 0 \text{ dans } \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega',\mathcal{P},\lambda;\ \mathbb{F}\hat{\otimes}_1\mathbb{F})$$

$$(\phi^n)''(M)\; C \to \phi''(M)\; C \text{ dans } \mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{F}} \text{ faible .}$$

En fait, la première condition implique l'existence de $\int\phi'(M)\, dM$ et

$$\int(\phi^n)'(M)\, dM \to \int\phi'(M)\, dM\ ;$$

la deuxième implique l'existence de $\int \phi''(M)\, C\, d\, A$ et

$$\int_o^t (\phi^n)''\,(M)\; C\; d\; A \rightarrow \int_o^t \phi''(M)\; C\; d\; A$$

pour tout t .

§ 7. Intégration par parties

Proposition 12.

Soit ϕ une application de $\Omega' \times [a,b]$ (a,b réels) dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ faiblement mesurable pour la tribu produit $\mathcal{P} \otimes$ Borel $[a,b]$ et uniformément bornée en norme de $\mathcal{L}_t(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Pour tout t l'application $u \rightsquigarrow \int_o^t \phi_s(u) dM_s$ est mesurable de $[a,b]$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(\mathcal{F}_t)$ et l'application $(\omega,t) \rightsquigarrow \int_a^b \phi_t(\omega,u) du$ est un processus faiblement prévisible et uniformément borné dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. En plus on a l'égalité

$$\int_a^b (\int_o^t \phi_s(u)\, d\, M_s)\, du = \int_o^t (\int_a^b \phi_s(u)\, du)\, dM_s$$

Démonstration.

Si ϕ est fortement mesurable, c'est le théorème de Fubini pour l'intégrale vectorielle (*). Autrement on approche ϕ par $\phi \circ \Pi_n$, (Π_n) étant un système de projecteurs de $\mathbb{E}$. L'uniforme majoration permet de passer à la limite, c.q.f.d.

Signalons le cas particulier suivant. Soit X un processus faiblement prévisible dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et appliquons la formule de Fubini à $\phi_s(\omega,u) = 1_{]o,s]}(u)\, X_u(\omega)$. Si X est uniformément borné, on a

$$\int_o^t (\int_o^s X_u\, du)\, d\, M_s = (\int_o^t X_u\, du) M_t - \int_o^t X_u\, M_u\, du$$

Proposition 13.

Soit V un processus de la forme $V_t = v + \int_o^t A_u\, du$, A étant un processus faiblement prévisible dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Supposons V intégrable pour M. Alors on a

$$\int_o^t V_s\, d\, M_s = V_t\, M_t - \int_o^t A_u\, M_u\, du$$

Démonstration.

Soit $V_t^n = v + \int_o^t A_u^n\, du$, où A^n est une suite de processus bornés

(*) On démontre le théorème de Fubini pour un produit de deux mesures vectorielles dont l'une à variation bornée.

dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ telle que $A^n \to A$ dans $\mathcal{A}^J$ pour tout ω . On a

$$\int_o^t V_s^n \, d\, M_s = V_t^n M_t - \int_o^t A_u^n M_u \, du$$

et tous les termes passent à la limite.

Remarque :

Dans le chapitre 2 nous utiliserons plusieurs variantes de la formule d'intégration par parties que nous démontrerons cas par cas.

La démonstration de la formule plus générale nécessite de la définition de l'intégrale stochastique pour des martingales à valeurs dans un Banach et de la formule de Ito pour M discontinue. Nous ne développons pas ces notions.

§ 8. Commentaires bibliographiques

La construction de l'intégrale stochastique que nous avons donnée reprend la définition de mesure stochastique vectorielle de [14] , [15] , [20] et généralise la notion d'intégrale stochastique faible donnée pour le cas brownien par [4] et [5] . La généralisation au cas des martingales locales et des processus à valeurs opérateurs non-continus est faite dans [16] et [18] .

La notion de variation quadratique a été définie dans [14] pour le cas vectoriel ; les conditions d'admissibilité (proposition 4) sont dues à M. Métivier.

La formule de Ito pour une martingale hilbertienne se trouve dans [10] et [14] ; pour le cas non-continu, qui n'est pas traité ici, voir [8] .

C H A P I T R E II

APPLICATIONS AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

SOMMAIRE.

La construction de l'intégrale stochastique développée au chapitre I est motivée, entre autres, par la remarque suivante. Soit A un opérateur non borné dans un espace de Hilbert H et soit R_t le semi-groupe généré par A ; autrement dit supposons que $R_t\, x$ soit la solution unique de l'équation $dy/ds = Ay$ de condition initiale x. On sait que la solution du problème non homogène $dy/ds = Ay + f$ peut, dans certains cas, être écrite sous la forme $R_t\, x + \int_0^t R_{t-u} f(u)du$. Considérons un problème stochastique analogue :

$$(*) \qquad dY_s = AY_s\, ds + dM_s\ ,$$

M étant une martingale. On se demande si la solution est de la forme $R_t\, x + \int_0^t R_{t-u}\, dM_u$ et dans quel sens est prise l'intégrale stochastique. En général le processus (indépendant de ω) R_t n'est pas fortement mesurable en tant qu'application de R_+ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$. D'après la construction du chapitre I, le processus $\int_0^t R_{t-u}\, dM$ est bien défini si $t \longrightarrow R_t$ est faiblement mesurable et si $\int_{\Omega\times]0,t]} \mathrm{Tr}\, R_{t-s}^{\otimes 2}\, C\, d\lambda(s) < +\infty$ pour tout t.

Dans le cas où M est un processus de Wiener le problème (*) a été étudié notamment par [5] et [4]. Dans le cas général nous faisons référence à [18]. Au paragraphe 1 nous étudions le problème (*) en définissant une notion de solution au sens fort ; autrement dit on demande que AY soit défini pour tout (ω,t). Au paragraphe 2 nous étudions un cas d'équation d'évolution où A est un opérateur non linéaire ; en utilisant les méthodes de [2] et [22] nous nous intéressons à l'existence de la solution et aux propriétés de continuité des tra-

jectoires. Le résultat est le même que dans [17] sauf que la méthode d'approximation n'est pas la même.

Les méthodes et les résultats du paragraphe 2 s'appliquent en particulier aux équations linéaires considérées dans [1].

Rappelons les abus de langage :

- "martingale" sous entend l'intégrabilité du carré de la norme ;
- autrement on dira "martingale intégrable".

§ 1. Le cas linéaire.

1.1 Hypothèses générales. Problème.

Sont données une martingale M dans l'espace de Hilbert H (de norme $|.|$ et produit scalaire $(.,.)$) et un opérateur A sur H de domaine D.

Nous supposons A fermé ; D est alors douée de la norme associée au produit scalaire $(x,y)_D = (x,y) + (Ax,Ay)$, un espace de Hilbert tel que l'injection $D \longrightarrow H$ est continue.

Nous associons à A et M l'équation d'évolution stochastique

$$(1.1) \qquad d\,Y_t = A\,Y_t\,dt + d\,M_t \quad , \quad 0 \leq t \leq t_o \ .$$

Définition 1.

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs dans H, $\mathcal{F}_o$-mesurable. Un processus Y à valeurs dans H est une solution de l'équation (1.1) de condition initiale ξ si AX est défini presque partout pour la mesure $d\,P \times dt$ et si presque sûrement

$$(1.2) \qquad Y_t = \xi + \int_o^t A\,Y_u\,du + M_t \ ,$$

pour tout $0 \leq t \leq t_o$.

Le problème étant linéaire, nous supposerons dans la suite $\xi = 0$. Remarquons que la solution Y est, d'après l'égalité (1.2), d-continue (et continue si M est continue). D'autre part, si $\tilde{Y}$ est un processus tel que l'on ait l'égalité (1.2) pour presque tout t, alors le processus

$$(1.3) \qquad \check{Y}_t = \xi + \int_o^t A\,\tilde{Y}_u\,du + M_t$$

est d-continu et $Y = \tilde{Y}$ presque partout pour la mesure $dP \otimes du$, donc on a (1.2) pour tout t.

Supposons que A soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans H. Autrement dit : il existe une famille $(R_t)_{t \geq o}$ d'opérateur borné de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ telle que $R_o = I$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$, pour tout $h \in \mathbb{H}$ l'application $t \rightsquigarrow R_t h$ est continue de $[0,t_o]$ dans $\mathbb{H}$ et pour tout $d \in D$ on a

$$R_t d = d + \int_o^t A \circ R_u d \, du \tag{1.4}$$

l'application $u \longrightarrow A \circ R_u$ étant continue de $]0,t_o]$ dans $\mathbb{H}$. On sait (cf. [9]) que $\sup_{0 \leq t \leq t_o} \|R_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H},\, \mathbb{H})} < +\infty$ et $A \circ R_t d = R_t \circ A d$ pour tout $d \in \mathbb{D}$ et $t > 0$, d'où

$$\begin{aligned} \|R_t\|^2_{\mathcal{L}(\mathbb{D},\, \mathbb{D})} &= \sup \{|R_t d|^2 + |A \circ R_t d|^2 \ ; \ \|d\|_{\mathbb{D}} \leq 1\} \\ &= \sup \{|R_t d|^2 + |R_t \circ A d|^2 \ ; \ \|d\| \leq 1\} \qquad (1.5) \\ &\leq 2 \, \|R_t\|^2_{\mathcal{L}(\mathbb{H},\, \mathbb{H})} \end{aligned}$$

et $\sup_{0 \leq t \leq t_o} \|R_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{D},\, \mathbb{D})} \leq +\infty$.

Si M est une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{D})$, le processus (indépendant de ω) $R_{t-\cdot} \mathbf{1}_{]0,t]}$ est alors intégrable pour M et on a le théorème d'existence suivant :

<u>Proposition 1.</u>

Soit M une martingale dans $\mathcal{M}(D)$. Pour toute ξ dans $L^o_D(\Omega, \mathcal{F}_o, P)$ l'équation (1.1) a une solution unique à valeurs dans $\mathbb{H}$ et d-continue, donnée pour tout t par la formule

$$Y_t = \mathbb{R}_t \, \xi + \int_o^t \mathbb{R}_{t-u} \, d \, M_u. \tag{1.6}$$

Si $\xi \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$, alors $\mathbb{E}|Y_t|^2 < +\infty$ pour tout t.

<u>Démonstration.</u>

L'unicité résulte de l'unicité de la solution du problème homogène associé.

Soit $\tilde{Y}_t = \int_o^t R_{t-u} \, d \, M_u$. R_u étant borné uniformément dans $\mathcal{L}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$

on a $\sup_{t \leq t_o} E \|Y_t\|_D^2 < +\infty$, et

(1.7) $$A \tilde{Y}_t = \int_o^t A \circ R_{t-u} \, d M_u .$$

Etant donné $R_{t-u} = I + \int_u^t A \circ R_{s-u}$ du sur $\mathbb{D}$, on a

(1.8) $$\tilde{Y}_t = \int_o^t (I + \int_u^t A \circ R_{s-u} \, ds) \, d M_u .$$

La fonction $A \circ R_{s-u} \, \mathbb{1}_{\{u<s\leq t\}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(\mathbb{D}, \mathbb{H})$, donc, d'après la formule de Fubini,

(1.9) $$\tilde{Y}_t = M_t + \int_o^t (\int_o^t A \circ R_{s-u} \, dM_u) \, ds.$$

De (1.7)

(1.10) $$\tilde{Y}_t = \int_o^t A \tilde{Y}_s \, ds + M_t$$

et $\tilde{Y}$ est la solution cherchée. D'après la linéarité la solution de condition initiale ξ est bien (1.6).

En analysant la démonstration donnée on s'aperçoit que l'on peut considérablement affaiblir les hypothèses. Au fait les deux points essentiels sont (1.7) et la formule de Fubini.

Démontrons la formule de Fubini dans le cas d'opérateurs non-bornés.

Soit M une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ et soit ϕ une application de $[0,t_o] \times [0,t_o]$ à valeurs opérateurs bornés ou pas de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$. Nous dirons que $\int \phi(s) \, dM$ est bien définie pour tout s si $\phi^{\otimes 2}(s) \, C$ existe (i.e. si le domaine de $\phi^{\otimes 2}(s)$ contient, pour tout s, le rang de $(\omega,u) \rightsquigarrow C_u(\omega)$, et si il existe une suite (π_n) de projecteurs telle que

$$\int_{\Omega\times]0,t_o]} \mathrm{Tr} \, |\phi(s) \circ \pi_n - \phi(s)|^{\otimes 2} \, C \, d\lambda \longrightarrow 0$$

pour tout s, $\phi(s) \circ \pi_n$ étant un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{D})$. Si $\int \phi \, dM$ est bien définie, la suite de martingales dans $\mathcal{M}(D)$ donnée par $\int \phi \circ \pi_n \, dM$ est convergente vers un élément définissant $\int \phi \, dM$.

Proposition 2.

Soit $M \in \mathcal{M}(M)$ et $\phi(o)$ telle que $s \to \int \phi(s)\, dM$ soit bien défini.

Si

$$\int_o^{t_o} \int_{\Omega \times]0,t_o]} \operatorname{Tr} \phi^{\otimes 2}(s)\, C \, d\lambda \times ds < +\infty$$

alors l'application

$$(1.11) \qquad s \rightsquigarrow \int_o^t \phi(s)\, dM$$

est intégrable pour la mesure de Lebesgue et à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ et l'application

$$(1.12) \qquad \Psi(t) = (\omega,u) \rightsquigarrow \int_o^t \phi(s)\, ds$$

est telle que

$$\int \Psi(t)\, dM$$

et bien définie pour tout t.

En plus on a

$$(1.13) \qquad \int_o^{t_o} \Psi(t)\, dM = \int_o^{t_o} \left(\int_o^{t_o} \phi(s)\, dM \right) ds$$

Démonstration.

L'application $s \rightsquigarrow [\phi(s)]^{\otimes 2} C$ est mesurable de $[0,t_o]$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega \times [0,t_o], \lambda \,;\, \mathbb{D} \otimes_1 \mathbb{D})$ et donc (1.12) est bien défini par $\Psi(s) = \lim \int \phi \circ \pi_n \, dM$, mesurable et borné de $[0,t_o]$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{D})$, d'où (1.13). L'égalité (1.13) se déduit alors de la proposition 12 du chapitre 1 par projection et troncature, étant donné $(\phi \circ \pi_n)^{\otimes 2} C \, s_{\{\|\phi \, \pi_n\| \leq n\}} \longrightarrow \phi^{\otimes 2} C$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega \times [0,t_o], \lambda \otimes ds \,;\, \mathbb{D} \hat{\otimes}_1 \mathbb{D})$

■

Si on reprend alors mot par mot la démonstration de la propostion 1 dans le cadre de la proposition 2 on a le résultat suivant.

Proposition 3.

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ et $(R_t)_{t \geq 0}$ tel que (en tant que famille d'opérateurs non bornée de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$) l'on ait

$$(1.14) \qquad \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} \operatorname{Tr} (R_{s-u})^{\otimes 2} C \, d_s \, dF(u) < +\infty$$

où $F(u) = \mathbb{E} |M_u|^2$.

Alors (1.6) est la solution unique de l'équation (1.1) de condition initiale $\xi \in \mathcal{L}^\circ(\Omega, \mathfrak{F}_0, \mathbb{P}; \mathbb{D})$. Si en plus $\mathbb{R}_t(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ pour tout $t > 0$, on peut prendre ξ dans $\mathcal{L}^\circ(\Omega, \mathfrak{F}_0, \mathbb{P}; H)$.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $dF = d\lambda$ pour tout "processus" indépendant de ω.

§ 2. Le cas non-linéaire monotone.

2.1 Position du problème.

Rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle (pour les démonstrations cf. [3] et [12]).

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert réel séparable, dont la norme sera notée $|.|$ et le produit scalaire $(.,.)$. Soit $\tilde{A}$ une application de $\mathcal{F}$ son domaine $\mathfrak{D}(\tilde{A}) \subset \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.

Définition 1.

$\tilde{A}$ est un opérat~~eur~~ monotone si pour tout x, y dans le domaine $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ on a

$$(2.1) \qquad (\tilde{A}x - \tilde{A}y, x-y) \geq 0 .$$

On montre que la condition (2.1) est équivalente à la condition

(2.2) pour tout $x,y \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ et $\lambda > 0$, $|x-y| \leq |(x+\lambda \tilde{A}x) - (y+\lambda \tilde{A}y)|$.

Autrement dit, pour tout opérateur monotone $\tilde{A}$ et tout $\lambda > 0$ l'application $(I + \lambda \tilde{A})$ est une bijection dont l'inverse est une contraction (en général non stricte) dans H. L'application $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est dite <u>résolvante</u> de $\tilde{A}$. On a le cas plus utile quand J_λ est définie sur tout $\mathbb{H}$.

<u>Définition 2.</u>

$\tilde{A}$ monotone est <u>maximal</u> si $(I + \lambda A)$ est une surjection sur H pour tout $\lambda > 0$.

Dans la suite $\tilde{A}$ est toujours un opérateur maximal monotone.

Soit $\tilde{A}_\lambda = \tilde{A} \circ J_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ l'approximation de <u>Yoshida</u> de $\tilde{A}$. On montre que, pour tout λ, $\tilde{A}_\lambda$ est maximal monotone de domaine H et lipschitzien de paramètre $1/\lambda$.

Donnons l'exemple d'opérateur maximal monotone avec lequel on travaillera. Soit $\mathbb{V}$ un espace de Banach réel, réflexif, séparable, dont la norme sera notée $\|.\|$, tel que $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$, l'injection étant continue et $\mathbb{V}$ étant dense dans $\mathbb{H}$. On identifie $\mathbb{H}$ et son dual ; alors le dual $\mathbb{V}'$ de $\mathbb{V}$ s'identifie avec un sur-espace de $\mathbb{H}$, l'injection de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{V}'$ étant continue et $\mathbb{H}$ étant dense dans $\mathbb{V}'$. On notera $\| \ \|_*$ la norme de $\mathbb{V}'$ et $<.,.>$ la dualité entre $\mathbb{V}'$ et $\mathbb{V}$. Pour tout $v \in \mathbb{V}$ et $h \in \mathbb{H}$ on a $<h,v> = (h,v)$.

Soit A un opérateur de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}'$ tel que

(2.3) A est continu de $\mathbb{V}$ fort dans $\mathbb{V}'$ faible ,

(2.4) pour tout $x \in \mathbb{V}$, $\|Ax\|_* \leq c\,\|x\|^{p-1}$,

(2.5) pour tout $x \in \mathbb{V}$, $<Ax,x> \geq \alpha\,\|x\|^p$,

(2.6) pour tout $x, y \in \mathbb{V}$, $<Ax-Ay, x-y> \geq 0$,

p étant un réel > 2, α et c étant des réels positifs.

On montre que la condition (2.3) est équivalente, si (2.5) et (2.6) sont vérifiées, à la condition d'hémicontinuité et que $(I + \lambda A)$ est une surjection de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{V}'$. Si $\tilde{A}$ est la restriction de A à l'espace $\{x : Ax \in \mathbb{H}\}$, $\tilde{A}$ est maximale monotone.

Dans la suite A vérifie (2.3) - (2.6) et nous n'écrirons plus la tilde : par exemple A_λ signie $\tilde{A}_\lambda = \tilde{A} \circ J_\lambda$. Sous les hypothèses (2.3) - (2.6) on étudie dans [2] et [22] l'existence des solutions des équations du type

$$(2.7) \qquad Y_t = Y^o - \int_o^t A\, Y_s\, ds + M_t ,$$

où M est un processus à valeurs dans H satisfaisant des hypothèses convenables.

Ici nous étudions l'équation (2.7) sous l'hypothèse que M soit une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, par une méthode d'approximation "de Yoshida". Nous nous intéressons surtout aux propriétés des trajectoires du processus Y. Le résultat est énoncé plus bas. Remarquons que les mêmes méthodes s'appliquent, en particulier, au cas où $\mathbb{H}$ est de dimension finie, donnant lieu à un théorème d'existence des solutions des équations de Ito sans hypothèses de Lipschitz. Dans [22] et [2] on travaille aussi le cas où A dépend du temps. Nous n'étudierons pas ce cas.

<u>Définition 3.</u>

Soient M une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, A un opérateur vérifiant (2.3) - (2.6), y_o un élément de $\mathbb{H}$. Un processus Y est une solution de l'équation

$$(2.8) \qquad \begin{cases} dY = -AY\, ds + dM , & t \leq t_o \\ Y_o = y_o \end{cases}$$

si pour presque tout ω

$$(2.9) \qquad Y_t(\omega) = y_o - \int_o^t A\, Y_s(\omega)\, ds + M_t(\omega) \quad , \ t \leq t_o ,$$

$A\, Y_s(\omega)$ étant, presque partout, un élément de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{V}'}(0, t_o; ds)$. ( )

(*) AY est prise dans le sens suivant : l'ensemble $Q = \{(\omega, t) : Y_t(\omega) \notin \mathbb{V}\}$ est bien-mesurable et de mesure nulle pour $d\,\mathbb{P} \otimes ds$. Alors $AY = A(Y)$ sur Q^c et $= 0$ sur Q.

2.2 Existence et unicité.

L'idée est d'approcher Y, solution de (2.8), par une suite (Y^λ) de solutions des équations $dY^\lambda = - A_\lambda Y^\lambda ds + dM$, à savoir :

$$Y_t^\lambda = y_o - \int_o^t A_\lambda Y_s^\lambda ds + M_t . \tag{2.10}$$

A_λ étant lipschitsienne de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$, l'existence de (Y^λ) est donnée par le lemme suivant.

Proposition 1.

Soit $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ telle que

(2.11) pour tout $x, y \in \mathbb{H}$ $\quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x-y|$.

Il existe un processus Y à valeurs dans $\mathbb{H}$, adapté, d-continu, dans $\mathcal{L}^2_{loc}(d\,\mathbb{P} \otimes dt\ ;\mathbb{H})$ (*), unique tel que, pour tout y_o donné dans $\mathbb{H}$,

$$Y_t = y_o + \int_o^t \phi(Y_s)\, ds + M_t . \tag{2.12}$$

En plus Y vérifie

$$|Y_t|^2 = |y_o|^2 + 2 \int_o^t (Y_{s-}\ ,dM_s) + 2 \int_o^t (\phi(Y_s),Y_s)ds + \mathrm{Tr}\,[M]_t\ , \tag{2.13}$$

où l'intégrale stochastique est la martingale intégrable définie par $\int_o^{t\wedge\sigma} (Y_{s-}\ ,dM_s) = \int_o^t (Y_{s-}\ , dM_{\sigma\wedge s})$ pour tout temps d'arrêt σ tel que la martingale arrêtée M^σ soit telle que $\int_{\Omega\times]0,t]} \sup_{s<u} |M_{\sigma\wedge s}|^2\, d\lambda(u) < +\infty$; λ étant la mesure de Doléans de M.

Pour les notions liées à l'intégrabilité de $\sup_{s<u} |M_{\sigma\wedge s}|^2$, cf. chapitre 1, § 5.

(*) à savoir $\int_{\Omega\times]0,t]} |Y_u|^2\, d\,\mathbb{P} \otimes du < + \infty$ pour tout t.

Démonstration.

Soit (Y^k) la suite des itérées définies pour tout $t \leq t_o$ par

$$\text{(2.14)} \qquad \begin{cases} Y_t^o = y_o + M_t \\ Y_t^{k+1} = y_o + \int_o^t \phi(Y_s^k)\, ds + M_t . \end{cases}$$

Chaque Y^k est adapté et d-continu. D'après l'hypothèse (2.11) on peut supposer $|\phi(x\ )| \leq K(1 + |x|)$ pour tout $x \in \mathbb{H}$, d'où

$$\text{(2.15)} \qquad |Y^1 - Y^o| \leq K \int (1 + |M_s|)ds \leq K\, t_o\ (1 + \sup_{t<t_o} |M_t|)$$

Pour tout $k \geq 1$ on a

$$\text{(2.16)} \qquad |Y^{k+1} - Y^k| \leq K \int |Y_s^k - Y_1^{k-1}|\ ds$$

et d'après (2.15) et l'inégalité maximale de Doob

$$\text{(2.17)} \qquad \|Y^{k+1} - Y^k\|_{\mathcal{L}^2(d\,\mathbb{P}\,\otimes\, ds;\mathbb{H})} \leq \frac{(K\ t_o)^k}{k!}\ (2K\ t_o)(1 + 4\,\mathbb{E}\ |M_{t_o}|^2).$$

La suite (Y^k) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times [0,t_o]\ ;\ \mathcal{T}\ ,\ d\,\mathbb{P} \otimes ds\ ;\ \mathbb{H}) = \mathcal{L}^2_{t_o}(\mathbb{H})$. Soit $\tilde{Y}$ un processus bien-mesurable tel que $Y^k \longrightarrow \tilde{Y}$ dans $\mathcal{L}^2_{t_o}(\mathbb{H})$ et soit $Y_t = y_o + \int_o^t \phi(\tilde{Y}_s)ds + M_t$. Le processus Y est adapté et d-continu, et, étant $Y = \tilde{Y}$ pour presque tout (ω,t), Y est la solution sur $[0,t_o]$ de l'équation (2.12).

Comme la même démonstration marche pour une condition initiale dans $\mathcal{L}^2(\Omega,\ \mathfrak{F}_o, \mathbb{P};\ \mathbb{H})$, on peut prolonger la solution pour tout $t \geq 0$. Soit $U_t = \sup_{s<t} |M_s|^2$ et supposons $\int_{\Omega\times]0,t]} U\ d\ \lambda\ \ + \infty$ pour tout t. La martingale M est alors admissible (cf. chapitre 1, § 5) et

$$\text{(2.18)} \qquad |M_t|^2 = 2 \int_o^t (M_s^-, dM_s) + \operatorname{Tr}\,[M]_t$$

D'autre part, étant donné

$$Y_{t^-} = y_o + \int_o^t \phi(Y_{s^-})\, ds + M_t^- \tag{2.19}$$

on a

$$|Y_{t^-}|^2 \leq 3|y_o|^2 + 6\, t_o^2\, K \int_o^t (1 + |Y_{u^-}|^2) du + 3\, |M_t^-|^2 \tag{2.20}$$

donc ils existent deux constantes $C_1(t_o)$, $C_2(t_o)$ telles que

$$|Y_{t^-}|^2 \leq C_1(t_o) + C_2(t_o)\, U_t\ , \quad t \leq t_o\ , \tag{2.21}$$

et le processus $Y_{t^-} = Y^-$ est intégrable pour la martingale M.

D'après la formule d'intégration par parties et (2.8) on a

$$\left\{\begin{aligned} & 2 \int_o^t (Y^-, dM) = 2 \int_o^t \left(y_o + \int_o^s \phi(Y_u)\, du,\ dM_s\right) + \\ & \qquad + 2 \int_o^t (M^-,\ dM) = \\ & = 2\, (Y_t - M_t,\ M_t) - 2 \int_o^t (\phi(Y_s),\ M_s)\, ds + \\ & + |M_t|^2 - \mathrm{Tr}\ [M]_t \end{aligned}\right. \tag{2.20}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} |Y_t|^2 &= |Y_t - M_t|^2 + |M_t|^2 + 2\, (Y_t - M_t,\ M_t) = \\ &= |y_o|^2 + 2 \int_o^t (\phi(Y_s), Y_s - M_s) ds + 2 \int_o^t (\phi(Y_s), M_s)\, ds + \\ &\qquad + 2 \int_o^t (Y^-,\ dM) + \mathrm{Tr}\ [M]_t = \\ &= |y_o|^2 + 2 \int_o^t (Y^-,\ dM) + 2 \int_o^t (\phi(Y_s), Y_s)\, ds + \mathrm{Tr}\ [M]_t\ . \end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

Si M est générique dans $\mathcal{M}(\mathbb{E})$, il existe une suite de temps d'arrêt (σ^n) croissante et telle que

$$(2.22)\quad |Y_{t^n\wedge t}|^2 = |y_o|^2 + 2\int_o^t (Y^-,dM_\sigma u) + 2\int_o^{\sigma^n\wedge t}(\phi(Y_s),Y_s)ds + \mathrm{Tr}\,[M]_{\sigma^n\wedge t}$$

(même démonstration que plus haut ; la suite (σ^n) est définie au § 5 du chapitre 1) ; le processus N défini localement est tel que $N_{\sigma^n\wedge t} = 2\int_o^t (Y^-,dM_{\sigma^n})$ est intégrable et donc une martingale intégrable. ■

Reprenons l'étude de l'équation $dY = -AY_s\,ds + dM_s$. Soient (Y^λ) les solutions des équations

$$(2.23)\quad \begin{cases} dY^\lambda = -A_\lambda Y_s^\lambda\,ds + dM_s \\ Y_o^\lambda = y_o \end{cases}$$

D'après la définition de A_λ e la propriété (2.5) (dite "coercivité") on a, pour tout $y \in \mathbb{H}$,

$$(2.24)\quad \begin{cases} (A_\lambda y,y) = (A_\lambda y, J_\lambda y) + \lambda\,|A_\lambda y|^2 \geq \\ \geq \lambda|A_\lambda y|^2 + \alpha\|J_\lambda y\|^p \end{cases}$$

de (2.13) on tire

$$(2.25)\quad \begin{cases} |Y_t^\lambda| + \lambda\int_o^t |A_\lambda Y_s^\lambda|^2\,ds + \alpha\int_o^t \|J_\lambda Y_s^\lambda\|^p\,ds \leq \\ \leq |y_o|^2 + 2\int_o^t (Y_{s-}^\lambda,dM_s) + \mathrm{Tr}\,[M]_t . \end{cases}$$

Le terme à droite étant une sous-martingale positive, on a

$$(2.26)\quad \begin{cases} \sup\limits_{t\leq t_o} \mathbb{E}|Y_t^\lambda|^2 + \lambda\,\mathbb{E}\int_o^{t_o}|A_\lambda Y_s^\lambda|^2\,ds + \alpha\,\mathbb{E}\int_o^{t_o}\|J_\lambda Y_s^\lambda\|^p\,ds \leq \\ \leq |y_o|^2 + \mathbb{E}|M_{t_o}|^2 \end{cases}$$

et

(2.27) $$\mathbb{P}\{\sup_{t\leq t_o} |Y_t^\lambda| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \{ |y_o|^2 + \mathbb{E}\, |M_{t_o}|^2 \}.$$

Considérons les espaces réflexifs

- $\mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V}) = \mathcal{L}^p(\Omega\times[0,t_o], \mathcal{C}, d\,\mathbb{P}\otimes ds\ ;\mathbb{V})$
- $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\ ;\mathbb{H})$
- $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}') = \mathcal{L}^{p'}(\Omega\times[0,t_o], \mathcal{C}, d\,\mathbb{P}\otimes ds\ ;\mathbb{V}')$

$(1/p + 1/p') = 1)$.

La majoration (2.26) et

(2.28) $$\mathbb{E} \int_0^{t_o} \|A_\lambda\, Y_s^\lambda\|_*^{p'}\, ds \leq c^{p'}\ \mathbb{E} \int_0^{t_o} \|J_\lambda\, Y_s^\lambda\|^p\, ds$$

impliquent l'existence d'une suite (λ_k) telle que $\lambda_k \searrow 0$ et (en posant $Y^{\lambda_k} = Y^k$ etc.)

(2.29)
$$\begin{aligned} &Y^k_{t_o} \text{ converge dans } \mathcal{L}^2_{\mathbb{H}} \text{ faible ;}\\ &J_k\, Y^k \text{ converge dans } \mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V}) \text{ faible vers } \tilde{Y}\ ;\\ &A_k\, Y^k \text{ converge dans } \mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}') \text{ faible vers } \chi. \end{aligned}$$

Par définition de A_λ, on a $Y^k = \lambda_k\, A_k\, Y^k + J_k\, Y^k$, et d'après (2.29) $J_k\, Y^k \longrightarrow \tilde{Y}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H}) = \mathcal{L}^2(\Omega\times[0,t_o], \mathcal{C}, d\,\mathbb{P}\otimes ds\ ;\mathbb{H})$ faible. L'inégalité (2.24) dit que $\sqrt{\lambda_k}\, A_k\, Y^k$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H})$ donc $\lambda_k\, A_k\, Y^k \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H})$ fort et $Y^k \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H})$ faible.

Soit

(2.30) $$Y_t = y_o - \int_0^t \chi_u\, du + M_t\ ;$$

Y est un processus adapté et d-continu dans $\mathbb{V}'$.

Il nous reste à démontrer que χ = AY sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $d\mathbb{P} \otimes ds$.

On a

$$(2.31) \qquad Y_t^k - Y_t = \int_0^t (\chi_u - A_k Y_u^k)\, du$$

Etant donné $Y^k \longrightarrow \tilde{Y}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H})$ faible et $A_k Y^k \longrightarrow \chi_u$ dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}')$ faible, on a $\int_0^t (\chi_u - A_k Y_u^k)\, du \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}')$ faible d'où $\tilde{Y} = Y_t$ sur un ensemble de mesure nulle pour $d\mathbb{P} \otimes ds$.

Analoguement on montre que $Y_{t_o}^k \longrightarrow Y_{t_o}$ dans $\mathcal{L}_H^2$ faible.

<u>Proposition 2.</u>

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ est telle que $\mathbb{E} \int_0^{t_o} ||M_u||^p\, du < +\infty$.

Supposons M localement bornée dans $\mathbb{V}$. Alors Y - M est continu dans $\mathbb{H}$ et

$$(2.32) \qquad \mathbb{E}|Y_t|^2 = |y_o| - 2\,\mathbb{E} \int_0^t \langle \chi_u, Y_u \rangle\, du + \mathbb{E}|M_t|^2$$

Sous les mêmes hypothèses on a χ = AY et

$$(2.32 \text{ bis}) \qquad \lim_{k \to +\infty} \mathbb{E} \int_0^{t_o} \langle A_k Y_s^k , Y_s^k \rangle\, ds = \mathbb{E} \int_0^t \langle AY_s, Y_s \rangle\, ds$$

<u>Démonstration.</u>

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate d'un théorème sur les espaces $W(0,t_o;\mathbb{V},\mathbb{V}')$ (cf. [13] et [2] pour les [illegible]cations aux équations stochastiques), que nous utiliserons sous la forme suivante

Soit $f' \in \mathcal{L}^{p'}([0,t_o],ds;\mathbb{V}')$ et $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds$

Si $f(0) \in \mathbb{H}$ et $\int_0^{t_o} \|f(s)\|^p\, ds < +\infty$, alors f est continue de $[0,t_o]$ dans H et

$$|f(t)|^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_0^t \langle f'(s), f(s) \rangle\, ds \quad .$$

Nous appliquons ce résultat à chaque trajectoire du processus Y - M. Alors Y - M est continu dans $\mathbb{H}$, Y est d-continu, tous ces sauts étant de de M et

$$(2.33) \qquad |Y_t - M_t|^2 = |y_o|^2 - 2 \int_o^t <\chi_u, Y_u - M_u> du$$

où $\qquad \mathbb{E} \int_o^{t_o} |<\chi_u, Y_u - M_u>| du < +\infty.$

On a encore

$$(2.34) \qquad \begin{cases} \mathbb{E}|Y_t|^2 = |y_o|^2 - 2 \, E \int_o^t <\chi_u, Y_u> du + \mathbb{E}|M_t|^2 + R(t) \\ \\ R(t) = 2\,\mathbb{E}(Y_t - M_t, M_t) + \mathbb{E} \int_o^t <\chi_u, M_u> du \end{cases}$$

Pour toute martingale M' bornée dans $\mathbb{V}$ on a, si $V_t = Y_t - M_t$ et (t_k^n) est un découplage de $[0,t_o]$

$$(2.35) \qquad \begin{cases} \mathbb{E}(V_t, M'_t) = \sum_k \mathbb{E}\,(V_{t_k^n} - V_{t_{k-1}^n}, M'_{t_k^n}) = \\ \\ \qquad = \mathbb{E} \int_o^t <\chi_u, \sum_k M'_{t_k^n} \mathbb{1}_{]t_{k-1}^n, t_k^n]}(u)> du \end{cases}$$

La martingale M' étant d-continue dans M et bornée dans $\mathbb{V}$, et donc d-continue dans $\mathbb{V}$ faible, le terme à droite de (2.35) est égal à $\mathbb{E} \int_o^t <\chi_u, M_u> du.$

Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt croissante vers $+\infty$ et telle que M_{S_n} soit uniformément bornée dans $\mathbb{V}$. On a :

$$(2.36) \qquad \begin{cases} \mathbb{E}(V_t, M_{S_n \wedge t}) = \mathbb{E} \int_o^t <\chi_u, M_{S_n \wedge u}> du \\ \\ = \mathbb{E} \int_o^t <\chi_u, M_u> \mathbb{1}_{]0,S_n]} du + \mathbb{E}(V_t \mathbb{1}_{\{S_n < t\}}, M_{S_n \wedge t}) \end{cases}$$

et, étant donné $V_t \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$, $M_{S_n \wedge t} \longrightarrow M_t$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$, $<\chi, M> \in \mathcal{L}^1(0,t_o;ds)$ on a $R(t)=0$.

Démontrons $\chi = AY$. Nous utiliserons seulement l'égalité (dite "de l'énergie") (2.32).

Etant donné $Y^k_{t_o} \longrightarrow Y_{t_o}$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$ faible, on a

$$\liminf_k \mathbb{E}|Y^k_{t_o}|^2 \geq \mathbb{E}|Y_{t_o}|^2 \tag{2.37}$$

et de (2.32) on tire

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\mathbb{E}\int_o^{t_o} \langle\chi_u, Y_u\rangle\, du = -\mathbb{E}\,|Y_{t_o}|^2 + |y_o|^2 + \mathbb{E}|M_{t_o}|^2 \\ \geq \limsup_k \{\, 2\,\mathbb{E}\int_o^{t_o} (A_k\, Y^k_s,\, Y^k_s)\, ds\, \} \end{array}\right. \tag{3.38}$$

D'après un calcul classique, en utilisant l'inégalité

$$\langle A_k\, Y^k_s,\, Y^k_s\rangle \geq \langle A_k\, Y^k_s, J_k\, Y^k_s\rangle \tag{3.39}$$

on montre que pour tout $\chi \in \mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$ on a

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}\int_o^{t_o} \langle\chi_s - AX_s,\, Y_s - X_s\rangle\, ds \geq \\ \geq \liminf_k \mathbb{E}\int_o^{t_o} \langle A_k\, Y^k_s - AX_s,\, J_k\, Y^k_s - X_s\rangle\, ds \geq 0 \end{array}\right. \tag{3.40}$$

et ceci implique $\chi = AY$ (cf. [2] pour un calcul analogue).

On a, d'après (3.38) et $\chi = AY$

$$\mathbb{E}\int_o^{t_o} \langle A\, Y_u,\, Y_u\rangle\, du \geq \limsup_k \mathbb{E}\int_o^{t_o} (A_k\, Y^k_u, Y^k_u)\, du. \tag{3.41}$$

Or d'après la monotonie (2.6) on a :

$$\mathbb{E}\int_o^{t_o} (A_k\, Y^k_u,\, Y^k_u)\, du \geq \mathbb{E}\int_o^{t_o} (A_k\, Y^k_u,\, Y_u)\, du + $$

$$+ \mathbb{E}\int_o^{t_o} \langle A\, Y_s,\, J_k\, Y^k_s - Y_s\rangle\, ds$$

Etant donné $A_k\, Y^k \longrightarrow AY$ dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}')$ faible et $J_k\, Y^k \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$ faible, (3.14) et (3.42) impliquent

(3.43) $$\mathbb{E} \int_0^{t_o} (A_k\, Y^k_u, Y^k_u)\, du \longrightarrow \mathbb{E} \int_0^{t_o} \langle AY_u, Y_u\rangle\, du.$$

(cf. [2] pour un calcul analogue).

Remarquons que la démonstration de la (3.43) peut se faire chaque fois que $Y^k_t \longrightarrow Y_t$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$ faible pour démontrer le même résultat avec t à la place de t_o.

En plus de (3.43) on tire que

(3.44) $$\mathbb{E}|Y^k_{t_o}|^2 \longrightarrow \mathbb{E}|Y_{t_o}|^2$$

donc $Y^k_{t_o} \to Y_{t_o}$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$ fort.

__Proposition 3.__

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, localement bornée dans $\mathbb{V}$ et telle que $\mathbb{E}\left[\int_0^{t_o} \|M_u\|^p\, du\right] < +\infty$. Alors le processus

(3.45) $$N_t = (Y_t - M_t, M_t) - \int_0^t \langle AY_u, M_u\rangle\, du$$

est une martingale intégrable, et

(3.46) $$|Y_t|^2 = |y_o|^2 - 2\int_0^t \langle AY_u, Y_u\rangle\, du - 2\, N_t + \mathrm{Tr}\, [M]_t\ .$$

__Démonstration.__

On est dans les hypothèses de la proposition 2, donc $V_t = Y_t - M_t$ est un processus continu dans $\mathbb{H}$ et on a (2.33) avec $\chi = AY$, à savoir

(3.47) $$|Y_t - M_t|^2 = |y_o|^2 - 2\int_0^t \langle AY_u, Y_u - M_u\rangle\, du.$$

On a encore, d'après la formule de la variation quadratique

(3.48) $$|Y_t|^2 = |y_o|^2 - 2\int_0^t \langle AY_u, Y_u\rangle\, du - 2\, N_t + \mathrm{Tr}\, [M]_t\ .$$

Le processus N est d-continu et adapté.

Soit $A \in \mathcal{F}_s$. Alors, si $M'_t = (M_t - M_s)\, \mathbb{1}_A$,

$$(3.49)\quad \begin{cases} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(N_t-N_s)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(V_t-V_s,M_t)\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \int_s^t \langle AY_u,Y_u\rangle\, du\right] = \\ \qquad = \mathbb{E}\left[(V_t-V_s,M_t')\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^t \langle AY_u,M_u'\rangle\, du\right] \end{cases}$$

d'où, d'après la démonstration de la proposition 2, $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(N_t-N_s)\right] = 0$, étant M' une martingale pour la famille $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq s}$.

Résumons les résultats obtenus. Nous donnons $\mathcal{Y}_o \in$ H.

<u>Proposition 4.</u>

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, localement bornée dans $\mathbb{V}$ et telle que $\mathbb{E}\int_o^{t_o} \|M_u\|^p\, du < +\infty$. Alors il existe un processus unique Y à valeurs dans $\mathbb{H}$, d-continu, dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{V};\mathbb{V})$, tel que

$$(3.50)\qquad Y_t = y_o - \int_o^t A\, Y_u\, du + M_t \quad \text{pour}\quad 0 \leq t \leq t_o .$$

En plus on a

$$(3.51)\qquad \mathbb{E}|Y_t|^2 = |y_o|^2 - 2\int_o^t \langle AY_u,Y_u\rangle\, du - 2\, N_t + \mathrm{Tr}\left[M_t\right]$$

où N est une martingale intégrable.

Soit Y' la solution de l'équation d'évolution associée à A, $y_o' \in \mathbb{H}$ et M' satisfaisant les mêmes hypothèses que M. On a

$$(3.52)\quad \begin{aligned} |Y_t-Y_t'|^2 &= |y_o - y_o'|^2 - 2\int_o^t \langle AY_u-AY_u',Y_u-Y_u'\rangle\, du - \\ &\quad - 2\, N_t' + \mathrm{Tr}\left[M-M'\right]_t \end{aligned}$$

où N' est une martingale intégrable.

<u>Démonstration.</u>

Nous avons démontré toutes les propriétés, sauf l'unicité, l'adaptation et (3.52). L'unicité résulte de l'unicité dans le cas M = 0. L'adaptation résulte du fait que Y est bien-mesurable et somme d'un processus continu dans $\mathbb{V}'$ et de M. La propriété (3.52) se montre en reprenant mot par mot la démonstration de la proposition 3.

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer un théorème général d'existence.

Remarquons d'abord que l'inégalité (2.52) est une condition de continuité pour l'application $M \longrightarrow Y$: d'après la monotonie et la coercivité de A on a

$$(2.53) \qquad |Y_t|^2 + 2\alpha \int_0^t \|Y_u\|^p \, du \leq |y_o|^2 - 2 N_t + \mathrm{Tr}\,[M]_t$$

et

$$(2.54) \qquad |Y_t - Y'_t|^2 \leq |y_o - y'_o|^2 - 2 N'_t + \mathrm{Tr}\,[M-M']_t .$$

Les deux termes à droite de (2.53) et (2.54) étant des sous-martingales positives et intégrables, on a

$$(2.55) \qquad \sup_{t \leq t_o} \mathbb{E}|Y_t|^2 + 2\,\alpha\,\mathbb{E} \int_0^{t_o} \|Y_u\|^p \, du \leq |y_o|^2 + \mathbb{E}\,|M_{t_o}|^2$$

et (inégalité maximale des sous-martingales)

$$(2.56) \qquad \mathbb{P}\,\{\sup_{t \leq t_o} |Y_t - Y'_t|^2 \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\{|y_o|^2 + \mathbb{E}|M_{t_o} - M'_{t_o}|^2\} .$$

Soit M une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$. Etant $M_{t_o} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$ et $\mathbb{V}$ étant dense dans $\mathbb{H}$, il existe une suite X^n de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{V}$ et bornées dans $\mathbb{V}$, telle que $X^n \longrightarrow M_{t_o}$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}$. Soit M^n la suite de martingales (de la famille $(\mathfrak{F}_{t+})$) d-continues dans $\mathbb{H}$ et telles que $M^n_{t_o} = X^n$. Chaque M^n est bornée dans $\mathbb{V}$:

$$(2.57) \qquad \begin{cases} \|M^n_t\| = \sup\limits_{\|x\|_* \leq 1} |(M^n_t, x)| = \sup\limits_{\|x\|_* = 1} |\mathbb{E}[(M^n_{t_o}, x)|\,\mathfrak{F}_{t+}]| \leq \\ \leq \mathbb{E}\,[\sup\limits_{\|x\|_* \leq 1} |(X^n, x)|\ |\,\mathfrak{F}_{t_o+}] \leq \|X^n\| . \end{cases}$$

En plus on a $M^n \longrightarrow M_{t_o \wedge o}$ dans l'espace des martingales $\mathcal{M}(\mathbb{E}\ \mathbb{H},(\mathfrak{F}_{t+}))$ par rapport à la famille continue à droite $(\mathfrak{F}_{t+})$.

L'idée est alors d'approcher la solution Y de l'équation d'évolution $dY = -AY_s\, ds + dM$ par les solutions Y^n des équations $dY^n = -AY^n{}_s\, ds + dM^n$, M^n étant la suite construite plus haut.

<u>Proposition 5.</u>

Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ et $y_o \in \mathbb{H}$. Il existe un processus Y, à valeurs dans $\mathbb{H}$, d-continu, dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{T};\mathbb{V})$, adapté, tel que

$$(2.58) \qquad Y_t = y_o - \int_o^t A\, Y_u\, du + M_t$$

à l'indistingabilité pour $0 \leq t \leq t_o$.
(Rappelons que $\mathcal{L}^p(\mathcal{T};\mathbb{V}) = \mathcal{L}^p(\Omega \times [0,t_o], \mathcal{T}, d\,\mathbb{P} \otimes du\ ;\ \mathbb{V}))$.

<u>Démonstration.</u>

L'unicité résulte de l'unicité dans le cas $y_o = 0$ et $M = 0$ et est une conséquence triviale de la formule de l'énergie dans $W([0,t_o]\ ;\mathbb{V},\mathbb{V}')$ et de la monotonie.

Remarquons que si Y est bien-mesurable, alors d'après (2.58) est adapté, étant donnée la somme d'une processus continu dans $\mathbb{V}'$ (et donc $(\mathfrak{F}_{t-})$ adapté) et de M.

Soit M^n une suite de martingales dans $\mathcal{M}(\mathbb{H},(\mathfrak{F}_{t+}))$ bornées dans $\mathbb{V}$ et telles que $M^n \longrightarrow M$.

D'après la proposition 4 il existe la suite Y^n des solutions des équations $dY^n = AY_s\, ds + dM^n$ de condition initiale y_o. (Ici et dans la suite la famille d'adaptation est toujours $(\mathfrak{F}_{t+})$).

Quitte à passer à une sous-suite de (2.54), (2.56) et de l'inégalité $\|Ay\|_* \leq C\,\|y\|^{p-1}$ on voit qu'il existe un processus Y à valeurs dans $\mathbb{H}$, d-continu, dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$ et $\mathcal{L}^\infty([0,t_o];\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}})$ tel que $Y^n \longrightarrow Y$ en probabilité dans H uniformément en $t \leq t_o$, dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$ faible, dans $\mathcal{L}^\infty([0,t_o],\mathcal{L}^2_{\mathbb{H}})$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};\mathbb{H})$ fort et en plus que la suite AY^n est faiblement convergente dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}')$ faible, soit $AY^n \longrightarrow \chi$.

Il nous reste à démontrer $\chi = AY$.

[Remarquons que, si A est linéaire (respectivement strictement monotone, i.e. telle que pour tout x, $y \in W$ on ait $\langle Ax-Ay, x-y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^p$) alors on a $AY^n \longrightarrow AY$ dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{C};\mathbb{V}')$ fort (respectivement faible)]

Démontrons $\mathbb{E}\int_o^t \langle AY^n_u, Y^n_u\rangle\, du \longrightarrow \mathbb{E}\int_o^t \langle\chi_u,Y_u\rangle\, du$ (cf. [2]).

La monotonie et (2.52) impliquent que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

(2.59) $$0 \leq \mathbb{E}\int_0^t \langle AY^n_u - AY^m_n, Y^n_u - Y^m_u\rangle du \leq \varepsilon \quad \text{si } u,m \geq n(\varepsilon)$$

d'où (en simplifiant l'écriture)

(2.60) $$\langle AY^n,Y^n\rangle \geq \langle AY^n,Y^m\rangle + \langle AY^m,Y^n\rangle - \langle AY^m,Y^m\rangle$$

et

(2.61) $$\langle AY^m,Y^m\rangle \leq \varepsilon - \langle AY^u,Y^u\rangle + \langle AY^m,Y^n\rangle + \langle AY^n,Y^m\rangle.$$

Le (2.60) et (2.61) on a

(2.63) $$\langle AY^m,Y^m\rangle \leq \varepsilon + \langle AY^n,Y^n\rangle$$

d'où $\limsup_m \langle AY^m,Y^m\rangle \leq \varepsilon + \liminf_n \langle AY^n,Y^n\rangle$ et, ε étant arbitraire, l'existence de $\lim_n \langle AY^n,Y^n\rangle$. On peut donc passer à la limite dans (2.59) pour avoir

(2.64) $$0 \leq 2\left[\lim_n \langle AY^n,Y^n\rangle - \langle\chi,Y\rangle\right] \leq \varepsilon\ ,$$

d'où $\lim_n \mathbb{E}\int_o^t \langle AY^u_n, Y^u_n\rangle du = \mathbb{E}\int_o^t \langle\chi_n,Y_n\rangle du.$

D'après (2.46) on a, étant donné $\mathbb{E}|Y_t^n|^2 \longrightarrow \mathbb{E}|Y_t|^2$,

$$(2.65) \qquad \mathbb{E}|Y_t|^2 = |y_o|^2 - \mathbb{E}\int_o^t <\chi_u, Y_u> du + \mathbb{E}\,|M_t|^2 .$$

Pour tout $X \in \mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$ on a, de $(AY^n, Y) \longrightarrow <X,Y>$,

$$(2.66) \qquad \begin{cases} \mathbb{E} \int_o^{t_o} <\chi_u - A\,X_u, Y_u - Y_u> du = \\ = \lim \mathbb{E} \int_o^t <AY_u^n - AX_u, Y_u^n - X_u> du \geq 0 \end{cases}$$

d'où (cf [12]) $\quad \chi = AY$.

Remarque.

Au cours de la démonstration nous avons démontré l'égalité de l'énergie (2.65). En plus il est facile de démontrer que les inégalités (2.55) et (2.56) restent vraies pour M, M' quelconques ainsi que l'inégalité

$$(2.67) \qquad \mathbb{E}\int_o^{t_o} |Y_u - Y'_u|^2 du \leq \{|y_o - y_o|^2 + \mathbb{E}\,|M_{t_o} - M'_{t_o}|^2\} .$$

Cette remarque permet de démontrer des théorèmes d'existence dans le cas des équations du type $dY_s = -AY_s\, ds + \phi(Y)\, dM$.

Proposition 6.

Soit $\mathbb{G}$ un espace de Hilbert et M une martingale dans $\mathcal{M}(\mathbb{G})$ de covariance C et mesure prévisible $\lambda = X\,.\,d\,\mathbb{P} \otimes du$ (i.e. martingale de type de Doob cf. ch. 1).

Etant donnés $y_o \in H$ et $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{G};\mathbb{H})$ demi-continu (i.e. continu de $\mathbb{H}$ fort dans $\mathcal{L}(\mathbb{G};\mathbb{H})$ faible), uniformément bornée et telle que, pour $x, y \in \mathbb{H}$

$$(2.68) \qquad \mathrm{Tr}(\phi(x) - \phi(y))^{\otimes 2}\, C \leq K\,|x-y|^2 ,$$

il existe un processus unique Y, à valeurs dans $\mathbb{H}$, d-continu, dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{C};\mathbb{V})$, adapté, tel que

$$(2.69) \qquad Y_t = y_o - \int_o^t AY_u\, du + \int_o^t \phi(Y_{u-})\, dM_u .$$

Démonstration.

Soient Y^n les itérées définies par

$$(2.70)\qquad \begin{cases} Y^o_t = y_o - \int_o^t AY^o_u\,du \\ Y^{n+1}_t = y_o - \int_o^t AY^{n+1}_u\,du + M^{n+1}_t \\ M^{n+1}_t = \int_o^t \phi(Y^n_{u-})\,dM_u \end{cases}$$

Si on démontre que Y^n est convergente dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{C};H)$ on a terminé, car alors $M^n \longrightarrow M$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ et, d'après la remarque précédente et les techniques de la démonstration de la proposition 5 on a $Y^u \longrightarrow Y$ et (2.69) avec toutes les propriétés de régularité.

Or on a, pour un $L > 0$,

$$(2.71)\qquad \mathbb{E}|Y^1_t - Y^o_t| \leq \mathbb{E}\,|M^1_{t_o}|^2 \leq L,$$

étant borné. En plus

$$(2.72)\qquad \begin{cases} \mathbb{E}|Y^{n+1}_t - Y^n_t|^2 \leq \mathbb{E}|M^{n+1}_t - M^n_t|^2 = \int_{\Omega\times]0,t_o]} (\phi(Y^n_u) - \phi(Y^{n-1}_u))^{\otimes 2}\, C \\ \leq K \int_o^t \mathbb{E}|Y^n_u - Y^{n-1}_u|^2\,du \end{cases}$$

d'où la propriété de Cauchy de la suite (Y^n) et donc de la suite (M^n) (cf. chapitre 1).

L'équation (2.69) a été étudiée par [22] sous l'hypothèse $\phi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{G};\mathbb{H})$ avec condition de Lipshitz sur les projections.

APPENDICE

SUR LES MESURES PREVISIBLES

SOMMAIRE.

Dans cet appendice nous précisons notre terminologie et les hypothèses sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ adaptées aux problèmes traités dans les chapitres I et II. Nous avons ainsi donné des démonstrations rapides de quelques résultats de théorie générale des processus qui sont utiles pour la construction de l'intégrale stochastique.

Signalons que la proposition 4 (existence du processus croissant naturel) est démontrée en travaillant sur la tribu bien-mesurable, ce qui simplifie certaines parties de la démonstration de [20]. Notre démonstration repose sur l'existence d'un prolongement "naturel " d'une mesure sur la tribu prévisible à une mesure sur la tribu bien-mesurable. (cf. [21] pour le résultat de prolongement pour les mesures vectorielles). Notre rédaction est en grande partie constituée de rappels d'après [19], [6] et [20] ; néanmoins nous avons essayé de mettre en évidence les propriétés de type pseudo-topologique (cf. proposition 2) et le lien entre la tribu prévisible et la tribu bien-mesurable.

§ 1. Rappels sur la tribu prévisible.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F} = \vee\, \mathcal{F}_t$ et que tous les ensembles de mesure nulle soient dans $\mathcal{F}_t$ pour tout t. (Ici $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$). On pose $\mathcal{F}_0 = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$. La "base stochastique" $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*})$ est fixée dans la suite et porte toutes les variables aléatoires dont on parlera.

Un temps est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$: comme nous n'avons pas fait l'hypothèse de continuité à droite de la famille de tribu, nous faisons l'abus de langage d'appeler temps d'arrêt un temps tel que $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t > 0$. Ceci équivaut à $\{T < t\} \in \mathcal{F}_{t}$, à $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ et à l'adaptation du processus continu à gauche $(1_{\{T<t\}})_{t\in\mathbb{R}_+^*}$. Soit $\mathcal{P}$ la tribu engendrée par les rectangles $A \times]s,t]$, où $0 \leq s \leq t < +\infty$ et $A \in \mathcal{F}_s$, sur $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que chaque $A' \times]s,t]$ avec $A \in \mathcal{F}_{t^+}$ est dans $\mathcal{P}$: donc la tribu $\mathcal{P}$ (dite tribu prévisible) ne dépend pas des hypothèses de continuité sur la famille $(\mathcal{F}_t)$.

Chaque processus prévisible est adapté à la famille $(\mathcal{F}_{t^-})$. Un processus presque-sûrement continu à gauche et adapté est prévisible (i.e. $\mathcal{P}$-mesurable) et on montre que la tribu prévisible est engendrée par les processus (presque-sûrement) continus et adaptés : nous laisserons tomber dans la suite ces précisions qui seront partout sous-entendues). Les processus continus sur $\mathbb{R}_+^*$ étant définis d'une façon naturelle pour $t = 0$ (en restant adapté, car on a posé $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0+}$) on appellera encore tribu prévisible la tribu engendrée sur $\Omega \times [0,+\infty[$ par les processus continus.

L'exemple fondamental de processus prévisible est le suivant : soit T un temps ; l'application indicatrice de l'intervalle stochastique $]0,T]$

est continue à gauche et est un processus prévisible si et seulement si elle est adaptée, à savoir si T est un temps d'arrêt.

Définition 1.

Un ensemble prévisible A est

a) borné s'il existe un t tel que $A \subset \Omega \times]0,t]$;

b) pseudo-fermé s'il existe un processus (adapté) continu X tel que $A = \{X = 0\}$;

c) pseudo-compact si on a a) et b) ;

d) pseudo-ouvert si son complémentaire est pseudo-fermé.

Dans la suite nous écrirons p-fermé pour pseudo-fermé et analoguement p-compact, p-ouvert. La définition 1 n'a pour but que de permettre une terminologie efficace dans les démonstrations qui vont suivre.

Les classes d'ensembles précisées jouissent des propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 1.

Soient $\mathcal{K}, \mathcal{O}, \mathcal{C}$ respectivement la classe des prévisibles p-compacts, la classe des p-ouverts et la classe des p-fermés. On a

a) $\mathcal{K}, \mathcal{O}, \mathcal{C}$ sont fermés pour les réunions et intersections finies ;

b) $\mathcal{K}_\delta = \mathcal{K}, \quad \mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}, \quad \mathcal{C}_\delta = \mathcal{C}$

c) $\mathcal{K}_\sigma \supset \mathcal{O}, \quad \mathcal{C}_\sigma \supset \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}_\delta \supset \mathcal{C}$.

Démonstration.

On peut supposer le processus X_t, définissant le fermé $\mathcal{C}_t = \{X_t = 0\}$, borné entre 0 et 1. On a alors, par exemple,

$$\bigcap_i \{X_i = 0\} = \{\sum_i 2^{-i} X_i\}$$

donc $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{K}$; les autres démonstrations sont analogues. ∎

Soit $C = \{X = 0\}$, $0 \leq X \leq 1$, un p-fermé ; le temps $D = \inf \{t = X_t = 0\}$ est un temps d'arrêt que l'on appelle début de C. Le graphe $[D]$ d'un tel temps d'arrêt est prévisible, étant donné $[D] =]0,D] \cap C$. D'une façon générale nous définissons :

Définition 2.

Un temps S est prévisible si l'intervalle stochastique $]0,S[$ est un élément de $\mathcal{P}$.

Dans ce cas on a $\{\Delta \leq t\} \in \mathcal{F}_{t-}$ pour tout $t > 0$.

Soit S un temps et soit (T^n) une suite de temps d'arrêt telle que $\lim_{n \to +\infty} Y^n = S$ et $T^n < S$ sur $\{T > 0\}$. On a $]0,S[= \bigcup_n]0,T^n]$, donc S est prévisible. La réciproque de cette propriété est démontrée dans le corollaire de la proposition 2.

§ 2. Définition de mesure admissible.

Définition 3.

Une mesure admissible est une mesure λ sur $(\Omega', \mathcal{P})$ positive, **nulle** sur chaque prévisible évènement et finie sur chaque prévisible borné.

L'exemple suivant est le prototype de mesure admissible (cf. proposition 4). Soit A un processus presque-sûrement croissant, nulle pour $t = 0$, continu à droite, intégrable pour tout t (non nécessairement adapté). On vérifie que $\lambda : \Gamma \rightsquigarrow \mathbb{E}[\int \mathbb{1}_\Gamma \, dA]$ est une mesure admissible. Un cas intéres-

sant est donné par $A_t = \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$ où T est un temps presque-sûrement non-nulle.
Pour tout temps prévisible S on a :

$$\lambda([S]) = \mathbb{P}\,[0 < T = S < +\infty]$$

Proposition 2.

Soit λ une mesure admissible. Pour tout B dans la tribu $\mathcal{P}^\lambda$ complétée de $\mathcal{P}$ pour λ on a :

$$\lambda(B) = \sup_{K \subset B, K \in \mathcal{K}} \lambda(K).$$

Démonstration.

Il suffit de considérer une mesure bornée. Si λ est borné la régularité à l'intérieur par rapport au p-compact est équivalente à la régularité à l'extérieur par rapport aux p-ouverts, à savoir

$$\lambda(B) = \inf_{C \supset B, C \in \mathcal{O}} \lambda(C).$$

Soit λ^* le second membre ; étant donnée $\mathcal{O}$ fermée pour les réunions dénombrables et pour les intersections finies, λ^* est une mesure extérieure. Or $\mathcal{O}$ engendre $\mathcal{P}$, d'où la proposition.

Corollaire.

Soit S un temps prévisible. Il existe une suite de temps d'arrêt (T^k) telle que $\lim_{k \to +\infty} T^k = S$ et $T^k < S$ sur $\{S > 0\}$ presque partout.

Démonstration.

Si $S = +\infty$, alors $T^n = n$. Si $\mathbb{P}[S < +\infty] > 0$, soit λ la mesure admissible associée au processus croissant $A_t = \mathbb{1}_{\{S \leq t\}}$ et soit K^n une suite de p-compacts telle que $\lambda(K^n) \longrightarrow \lambda([S])$ et $K^n \subset [S]$. Chaque $K^n = \{X^n = 0\}$ coïncide avec son début S^n, donc $[S^n] = K^n = \{X^n = 0\}$ et $S' = \bigwedge_n S^n$ est un temps prévisible presque-sûrement égal à S sur $\{0 < S < +\infty\}$ car

$\mathbb{P}[0 < \bigwedge_n S^n = S < +\infty] = \lambda(\bigcup_n [S^n]) = \lambda([S]) = \mathbb{P}[0 < S < +\infty]$. Quitte à remplacer (X^n) par une suite définissant encore (K^n) et telle que $X^n = X^{n+k}$ sur $\{S^n < +\infty\}$ pour tout k, les suites $(S^{n,k})_k$ des débuts des ensembles p-fermés $\{X^n \leq 1/k\}$ sont telles que la suite $T^k = \bigwedge_n S^{n,k}$ satisfait l'énoncé.

§ 3. Prolongement d'une mesure admissible. Mesures prévisibles.

Définition 4.

La tribu bien-mesurable est la tribu, notée $\mathcal{T}$, engendrée sur Ω' par les ensembles de la forme $]0,T[$, où T est un temps d'arrêt borné.

Il est bien connu que la tribu $\mathcal{T}$ est engendrée par les processus adaptés à la famille $(\mathcal{F}_{t+})$ continus à droite et pourvus de limites à gauche. (On pourrait aussi bien définir $\mathcal{T}$ sur $\Omega \times [0,+\infty[$ grâce à la continuité à droite des processus et à la condition $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0+}$).

Proposition 3.

Soit λ une mesure admissible. Pour tout temps d'arrêt T il existe un temps prévisible T' dont le graphe est contenu dans le graphe de T et tel que $\lambda([T'])$ est égal à la mesure intérieure de $[T]$.

Démonstration.

D'après la proposition 2 il existe une suite de p-compacts (K^n) telle que $K^n \subset [T]$, $K^n \subset K^{n+1}$ et $\lim \lambda(K^n)$ = mesure intérieure de $[T]$. Chaque K^n coïncide avec son début D^n, d'où $T' = \bigwedge_n \Delta^u$.

Remarque.

Si λ est en particulier la mesure associée à $1\!\!1_{\{T\leq t\}}$ alors $\lambda(\,[T']) = \mathbb{P}[0 < T' = T < +\infty]$ et T' est le "plus grand" temps prévisible dont le graphe est contenu dans le graphe de T. Le temps prévisible T' qu'on vient de définir s'appelle partie prévisible de T et $\mathbb{T}' = T_{\{T'\neq T<+\infty\}}$ est un temps d'arrêt dit partie imprévisible de T. Un temps d'arrêt dont la partie prévisible est vide s'appelle totalement imprévisible.

Définition 5.

Un temps d'arrêt T est totalement inaccessible si pour tout temps prévisible S on a $\mathbb{P}[T = S < +\infty] = 0$.

Dans le reste du paragraphe nous étudions le problème suivant : étant donnée une mesure admissible λ existe-t-il une mesure $\tilde{\lambda}$ sur $\mathcal{G}$ prolongeante λ et qui ne change pas les graphes des temps d'arrêt totalement inaccessibles ? Dans quel cas on a unicité du prolongement ?

Rappelons le théorème suivant (cf. [20]) : pour toute mesure admissible λ il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisible telle que $\cup[T_n]$ contienne tous les graphes des temps prévisibles changés par λ . Autrement dit chaque λ est de la forme $\lambda = \lambda_c + \sum_n \lambda_n$ où λ_c est une mesure admissible diffuse (i.e. qui ne change pas les graphes des temps prévisibles) et chaque λ_n est une mesure concentrée sur $[T_n]$. La mesure λ_c, partie diffuse de λ, est l'unique mesure diffuse telle que $\lambda - \lambda_c$ soit portée par une réunion de graphes de temps prévisibles.

Proposition 4.

Soit λ une mesure admissible. Il existe une mesure $\tilde{\lambda}$ sur $\mathcal{G}$ de la forme $\tilde{\lambda}_c + \mathbb{E}\,[\int \cdot\, dA^d]$ qui prolonge λ et qui ne change pas les graphes des temps totalement inacessibles, $\tilde{\lambda}_c$ étant diffuse et A^d étant un processus croissant, continu à droite et prévisible.

En plus $\tilde{\lambda}$ est le seul prolongement de λ à $\mathcal{G}$ qui ne change pas les graphes des temps d'arrêt totalement inacessibles si et seulement si tout temps d'arrêt dont le graphe est contenu dans un graphe de temps d'arrêt changé par λ est prévisible.

<u>Démonstration</u>.

Soit $\lambda = \lambda_c + \sum \lambda_n$, où λ_c est la partie diffuse de λ et λ_n ne change que le temps T^n. Il existe un prolongement canonique unique $\tilde{\lambda}_c$ qui est une mesure diffuse sur $\mathcal{G}$ (cf. [21]). Pour tout T^n soit $\mathcal{G}_n$ la tribu des éléments $B \in \mathcal{F}$ tels que T^n_B est un temps prévisible, et soit Q^n la densité de la mesure $B \longmapsto \lambda_n([T^n_B])$ par rapport à la mesure $\mathbb{P}$. La mesure $\tilde{\lambda}_n = \mathbb{E}\left[\cdot \int Q^n \, d\, 1\!\!1_{[T^n,+\infty[}\right]$ prolonge λ_n et ne change pas les graphes des temps totalement inacessibles. En plus le processus croissant $A^n = Q^n 1\!\!1_{[T^n,+\infty[}$ est prévisible, puisque Q^n est $\mathcal{G}_n$-mesurable. Si $A^d = \sum A^n$, A^d est prévisible et la mesure $\lambda_c + \mathbb{E}\left[\int \cdot \, d\, A^d\right]$ est le prolongement annoncé.

La construction de A^n montre que s'il existe un temps d'arrêt S tel que $\lambda(T^n_{[S=T<+\infty]}) > 0$ et tel que $T^n_{[S=T<\infty]}$ ne soit pas prévisible alors le prolongement construit sur la tribu $\mathcal{G}_n \vee [S = T < +\infty]$ n'est pas égal à $\tilde{\lambda}_n$.

D'autre part supposons que chaque temps d'arrêt dont le graphe est contenu dans un graphe changé par λ soit prévisible. Soit $\mathcal{V}$ la classe des réunions dénombrables de graphes de temps totalement imprévisibles. Chaque $U[S^n] \subset \mathcal{V}$ est de mesure intérieure nulle : soit U un temps prévisible inclu dans $U[S^n]$. Si $[U]$ est changé par λ alors $U_{[S^n=U]}$ est prévisible s'il est

changé et $U_{[S^n=U]} \subset [S^n]$, d'où $\mathbb{P}\,[S^n=U] = 0$ car $[S^n]$ est imprévisible.
D'où une contradiction.

Le prolongement de λ à $\mathcal{S} \cup \mathcal{V} = \mathcal{C}$ est alors unique d'après un lemme de théorie de la mesure (cf. 19).

Proposition 5.

Soit A un processus croissant, intégrable, continu à droite, prévisible (resp. bien-mesurable). Si la mesure $\mu = \mathbb{E}\,[\int .\, dA]$ est nulle sur $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$) alors $A = 0$. Soit λ une mesure sur $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$) de la forme $\lambda_c + \mathbb{E}\,[\int .\, d\,A^d]$, où λ_c est diffuse et A^d est un processus de sauts, alors la décomposition est unique.

La démonstration résulte de $A_t^2 = \int_0^t (A_{s-} + A_s)\, d\, A_s$ et de l'unicité de la partie diffuse d'une mesure.

Définition 6.

Une mesure μ sur $\mathcal{C}$ est prévisible si $\mu/\mathcal{P}$ est admissible et si sa partie discontinue est de la forme $\mu_d = \mathbb{E}\,[\int .\, d\,A^d]$ avec A^d prévisible.

§ 4. Désintégration d'une mesure prévisible. Processus croissant prévisible.

Proposition 4.

Soit λ une mesure admissible. Il existe un processus A croissant, intégrable (i.e. $\mathbb{E}\ A_t < +\infty$ pour tout t), continu à droite, nulle pour $t = 0$, unique, tel que $\tilde{\lambda} = \mathbb{E}\,[\int .\, dA]$ sur la tribu bien-mesurable soit le prolongement prévisible de λ.

Démonstration.

a) Unicité. L'unicité résulte de la proposition 5.

b) Lemme. Soit T un temps d'arrêt borné et soit

$$C^n = \sum_k (\mathbb{1}_{\{T > \frac{k+1}{2^n}\}})^+ \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]},$$ où X^+ est la martingale continue

à droite telle que $X_t^+ = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+}]$. Chaque C^n est continu à droite et borné entre 0 et 1. On a $\mathbb{1}_{\{T>t\}} C_t^n = C_t^n$, donc $C^n = 0$ sur $[T,+\infty[$, d'où $\mathbb{1}_{\{T>t\}} \geq C_t^n \geq 0$. Analoguement on vérifie que $C^{n+1} \geq C^n$; donc la suite $B^n = \mathbb{1}_{\{T>t\}} - C^n$ est non-négative, décroissante et nulle sur $[T,+\infty[$. Soit σ^n le temps d'entrée de B^n dans $[0,\varepsilon[$. On a $T \geq \sigma^n \geq \sigma^{n+1}$. Démontrons que $\sigma' = \bigwedge_n \sigma^n = 0$ presque-sûrement. Sur $\{t < \sigma'\}$ on a $t \leq \sigma^n$ et $B^n \geq \varepsilon$, donc $\mathbb{E}[B_t^n] \geq \varepsilon\, \mathbb{P}\{t < \sigma'\}$. Or B_t^n est convergente vers zéro dans $\mathcal{L}^1$, donc $\mathbb{P}\{t < \sigma'\} = 0$ et $\sigma' = 0$ presque-sûrement. Remarquons encore $B_{t-}^n = \mathbb{1}_{\{T\geq t\}} - \sum_k (\mathbb{1}_{\{T > \frac{k+1}{2^n}\}})^- \,1_{\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}$, où X^- est la martingale continue à gauche telle que $X_t^- = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t-}]$. Le résultat qu'on va utiliser est alors : pour tout temps d'arrêt borné T il existe une suite σ^n de temps d'arrêt, décroissante vers 0 telle que (B_{t-}^n) est $\leq \varepsilon$ sur $]\sigma^n,+\infty[$.

c) <u>Construction de A</u>. Soit λ_t la mesure sur $(\Omega,\mathcal{F})$ définie par $\lambda_t(H) = \int H^- \,1_{]0,t[}\, d\lambda$. La mesure λ_t est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Soit $\tilde{A}_t = d\lambda_t / d\mathbb{P}$. La fonction aléatoire $\tilde{A}$ est, à une modification près, le processus A. On vérifie que $\tilde{A}_t \geq \tilde{A}_s$ pour $t>s$ presque-sûrement et que $\tilde{A}_t$ est $\mathcal{F}_{t-}$-mesurable. Il existe une modification de $\tilde{A}$, soit A_t^-, continue à gauche, croissante, adaptée à $(\mathcal{F}_{t-})$ telle que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_H A_t^-] = \int H^- \,1_{]0,t[}\, d\lambda$. Soit $A_t = A_{t+}^-$. Alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_H A_t] = \int H^- \,\mathbb{1}_{]0,t]}\, d\lambda$. Pour tout K dans $\mathcal{F}_s$ on a

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_K(A_t - A_s)] = \int K^- \,\mathbb{1}_{]s,t]}\, d\lambda = \lambda(K\times]s,t])$, car $K_u^- = \mathbb{1}_K$ pour tout $u > s$. En conclusion la mesure $\lambda' = \mathbb{E}[\int .dA]$ est égale à λ sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$.

d) <u>Application du lemme b)</u>. Nous allons montrer que $\lambda'(]0,T]) = \tilde{\lambda}(]0,T[)$ pour tout temps d'arrêt borné T. D'après les propositions 4 et 5 il nous suffit de considérer le cas où λ est diffuse. Le processus $\mathbb{1}_{\{T>t\}}$ est continu à droite et borné, donc

$$\lambda'(]0,T[) = \lim_{n\to+\infty} \sum_k \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T > \frac{k+1}{2^n}\}} \left(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}} \right)\right] ,$$

d'où $\lambda'(]0,T[) = \lim_{n\to+\infty} \int X^n \, d\lambda$, avec

$$X^n = \sum_k (\mathbb{1}_{\{T > \frac{k+1}{2^n}\}})^- \, 1_{\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} .$$

Or, $\lambda(]0,T]) = \int X^n \, d\lambda + \int (\mathbb{1}_{\{T\geq t\}} - X^n) \, d\lambda =$

$$= \int X^n \, d\lambda + \int_{]0,\sigma^n]} (\mathbb{1}_{\{T\geq t\}} - X^n) \, d\lambda + \int_{]\sigma^n,T]} (1_{\{T\geq t\}} - X^n) \, d\lambda$$

et $\lim \int X^n \, d\lambda = \lambda(]0,T])$. Mais λ est diffuse , donc $\lambda(]0,T]) = \lambda(]0,T[)$ et $\lambda = \lambda'$. En plus A est continue.

e) A est prévisible. Le processus A est de la forme

$$A = A^c + A^d$$

où A^c est continue et A^d est prévisible d'après la proposition 4.

Remarques.

La démonstration que l'on a donnée est inspirée de [20] ; mais, comme on a défini les mesures prévisibles sur la tribu $\mathcal{Z}$, certains détails sont simplifiés.

Dans certains cas, la construction du processus A est encore plus simple : soit par exemple λ une mesure prévisible absolument continue par rapport à la mesure μ restriction de $d\,\mathbb{P} \otimes dt$ à $\mathcal{Z}$. Soit $X = d\lambda/d\mu$. Alors $A_t = \int_0^t X_u \, du$ est un processu prévisible, continu, tel que $\lambda = \mathbb{E}[\int .dA]$. Dans ce cas la tribu $\mathcal{Z}$ est contenue dans la tribu $\mathcal{P}^\lambda$ complétée de $\mathcal{P}$ pour λ .

§ 5. Mesure de Doléans associée à une sous-martingale positive.

Soit Y une sous-martingale positive bornée dans $\mathcal{L}^1$, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Pour tout prévisible du type $A \times]s,t]$, définissons $\lambda(A \times]s,t]) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_t - Y_s)]$. La fonction λ se prolonge sur l'algèbre de Boole $\mathcal{P}^o$ engendrée par les rectangles $A \times]s,t]$. Chaque élément Γ de $\mathcal{P}^o$ est réunion de rectangles disjoints : $\Gamma = \bigcup A_i \times]s_i,t_i]$. Pour tout ε il existe des ensembles du type $A_i \times [s_i^*,t_i]$ tels que $s_i < s_i^*$ et $\lambda(\Gamma) \leq \sum_i \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(Y_{t_i} - Y_{s_{i-}^*})] + \varepsilon$. Chaque $K^\varepsilon = \bigcup A_i \times [s_i^*,t_i]$ est un prévisible fermé de début $\Delta^u = \sum' s_i^* \mathbb{1}_{A_i}$. Or si Γ^n est une suite dans $\mathcal{P}^o$, telle que $\Gamma^n \downarrow \emptyset$ on peut choisir des compacts K^n du type précédent tels que $K^n \downarrow \emptyset$ et $\lambda(\Gamma^n) \leq \frac{1}{n} + \mathbb{E}[Y_\infty - Y_{D^n}]$. Mais $D^u \dashrightarrow +\infty$ et $\lambda(\Gamma^n) \searrow 0$, donc λ est une mesure prévisible bornée.

C'est évident que la même démonstration (cf. [6]) et [7]) marche sous des hypothèses plus générales.

Nous utiliserons seulement le cas où $Y = M^2$ et M est une martingale continue à droite, pourvue de limites à gauche et de carré intégrable. Précisons seulement la terminologie : la mesure λ associée à M^2 sera appelée la <u>mesure de Doléans</u> de M et le processus croissant A associé à λ le <u>processus croissant naturel</u> de M. Analoguement pour $Y = \|M\|^2$, M étant une martingale hilbertienne.

REFERENCES

1 A. BENSOUSSAN - Filtrage optimal des systèmes linéaires.
Dunod (1971), Paris.

2 A. BENSOUSSAN, R. TEMAM - Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires.
Israël J. Math. (1972) 11, 95-129.

3 BREZIS - Opérateurs maximaux monotones. North Holland (1973).

4 R.F. CURTAIN, P.L. FALB - Stochastic differential equations in Hilbert spaces.
J. differential equations (1971) 10, 412-430.

5 Yu. L. DALETSKII - Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them.
Russian math. Surveys (1967) 22, 1-53.

6 DELLACHERIE - Capacités et processus stochastiques.

7 C. DOLEANS - Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D).
Zeit. W. Theorie 9 (1968), 309-314.

8 GRAVEREAUX, PELLAUMAIL - Formule de Ito pour les processus non continus à valeurs dans un espace de Banach.
Annales I.H.P. Vol. X, 4, (1974).

9 E. HILLE, R.S. PHILLIPS - Functional analysis and semi-groups.
A.H.S. Cooloquium Publication 31.

10 H. KUNITA - Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert space.
Nagoya Math. J. (1970) 38, 41-52.

11 H. KUNITA, WATANABE - On square integrable martingales.
Nag. Math. J. 30 (1967) 209-245.

12 J.L. LIONS - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Dunod (1969), Paris.

13 J.L. LIONS, P. PEETRE - Sur une classe d'espaces d'interpolation. Institut des Hautes Etudes, 19 (1964), 5-68.

14 M. METIVIER - Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif.
Theory of probability and its application 19 (1974), 577-606.

15 M. METIVIER - Intégrale stochastique par rapport à des martingales hilbertiennes.
C.R. Acad. Sc. Paris 276, 1009-1012.

16 M. METIVIER, G. PISTONE - Intégrale stochastique de processus à valeurs opérateurs non-continus. A paraître dans C.R. Acad. Sc. Paris.

17 M. METIVIER, G. PISTONE - Sur une équation d'évolution stochastique considérée par A. BENSOUSSAN et R. TEMAM. A paraître.

18 M. METIVIER, G. PISTONE - Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques. A paraître.

19 P.A. MEYER - Probabilités et potentiel.
Hermann (1966).

20 J. PELLAUMAIL - Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Dool - Meyer.
Astérisque n° 9 Soc. Math. de France (1973).

21 J. PELLAUMAIL - Un lemme élémentaire de théorie de la mesure.
Séminaires de Math. de Rennes (1973).

22 A. PARDOUX - Equations aux dérivées partielles stochastiques monotones.
C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A 275, 101-103.

23 K. YOSHIDA - Functional analysis.
Springer-Verlag (1968).