PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN MEMIN

Sur quelques problèmes fondamentaux de la théorie du filtrage

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 3
« Séminaire de probabilités », , p. 1-101
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___3_A3_0>

SUR QUELQUES PROBLEMES FONDAMENTAUX

DE LA THEORIE DU FILTRAGE

par

J. MEMIN

AVANT - PROPOS

Le but de ce travail est d'essayer de dégager en théorie du filtrage certains outils qui sont maintenant largement utilisés, et d'étudier systématiquement leurs propriétés. Les résultats généraux donnés sont dus principalement aux travaux de Kalman et Bucy, Kailath, Shyriaev et Liptzer, Ershov, Clark, Kalliampur, Kunita et Fujisaki.

Deux motivations essentielles nous ont guidé :

- D'une part il a semblé intéressant d'exposer ce qui était dispersé dans de nombreuses revues. Nous nous sommes limités au cadre d'un processus d'observation continu, obtenu par la superposition d'une fonction du signal que l'on veut estimer et d'un bruit que l'on suppose être un mouvement brownien, ou une martingale intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Ce cadre a suscité de multiples travaux, et la bibliographie donnée ici est loin d'être exhaustive.

- D'autre part nous avons abordé certaines questions ouvertes. La principale est celle de l'égalité conjecturée de la tribu des observations et de la tribu des innovations. Cette question abondamment étudiée ces dernières années a déjà donné lieu à plusieurs démonstrations erronées. Utilisant une idée exposée dans un polycopié de Liptzer et Shyriaev, j'ai cru trouver un argument déterminant avant d'y voir une faille. Cependant l'exploitation de cette idée outre la résolution du problème dans un cadre plus large que celui traité par Kailath, a permis de dégager de nouvelles directions de recherche qui pourraient se révêler fructueuses.

Deux axes d'étude préférentiels constituent les deux parties du travail :

La seconde partie traite du processus d'innovation : ses propriétés fondamentales, l'utilisation qu'en fait la théorie du filtrage.

La première partie moins classique développe à partir des travaux de Ershov, Liptzer et Shyriaev les propriétés de la représentation liant les processus d'observation et d'innovation. Le détail de présentation des paragraphes est donné en introduction à chaque partie.

Ce travail m'a été suggéré par Monsieur le Professeur Métivier, à partir de la lecture de plusieurs articles de Shyriaev et Liptzer. Tant sur le plan des idées que sur celui de la rédaction, ses conseils ont joué un rôle déterminant.Je lui exprime ici ma sincère gratitude.

Monsieur Keane a accepté de présider le jury auquel cette thèse est présentée. Je le remercie de cette marque d'intérêt.

Monsieur J. Pellaumail m'a beaucoup encouragé, son attention et sa disponibilité à mon égard, en particulier pendant le premier trimestre 1973-1974 m'ont grandement aidé. Qu'il soit remercié vivement.

Enfin, je remercie Mademoiselle Mouëzy pour le soin qu'elle a apporté à la dactylographie du manuscrit.

TABLE DES MATIERES

1ÈRE PARTIE :

SUR CERTAINES EQUATIONS STOCHASTIQUES

1.- Introduction et rappels

L'objet de cette première partie est d'étudier l'existence, l'unicité (dans un sens à préciser), et les propriétés des processus solutions de l'équation stochastique de type :

$$(1) \qquad Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y)\, ds + W_t \ .$$

Cette étude est motivée par le fait qu'en théorie du filtrage la représentation obtenue pour certaines classes de processus d'observation Y, à partir du processus d'innovation est justement du type (1) ; $\alpha(s,Y(\omega))$ est une version de l'espérance conditionnelle $E\left[H(s,\omega) \mid \mathcal{F}_s^Y\right]$ où $\mathcal{F}_s^Y$ désigne la tribu définie par les observations jusqu'à l'instant s et H une fonction du signal à estimer. Le coefficient α dépendant du passé, l'équation (1) n'est pas une équation stochastique de type "Ito" et les résultats donnés ne peuvent donc être considérés comme classiques. La plupart sont dus à Ershov [2] et à Liptzer-Shyriaev [3] et [4] qui ont, semble-t-il été les premiers à étudier intensivement cette équation (1) .

Désirant faire une exposition aussi systématique que possible, il nous est apparu nécessaire de les redémontrer complètement, en y apportant quelquefois des précisions d'écriture indispensables à la compréhension ou à la rigueur. En effet, un des aspects déroutants de cette étude est le fait qu'une base de processus n'est pas donnée une fois pour toutes. On change souvent d'espace probabilisé, ce qui introduit des problèmes de factorisation, on change aussi de famille de tribus ou encore de probabilité. Enfin les distinctions faites entre la tribu engendrée par une famille de variables aléatoires, la tribu complétée et la tribu engendrée par cette même famille de variables aléatoires et la famille des ensembles de mesure nulle sont indispensables à certains endroits.

Dans les paragraphes 1, 2, 3, sont contenus les rappels et des résultats que l'on peut trouver dans [2] , [3] . On démontre des réciproques à partir d'arguments connus [3] , [12] , [29] et [30] . Le paragraphe 4 étudie un problème d'égalité de tribus en utilisant une idée exprimée dans le polycopié [4] au cours d'une démonstration incomplète. La faille apparue suscite des questions apparemment non triviales. Comme direction de recherche, nous indiquons une étude intéressante de Ershov [17] . Le paragraphe 5 donne des résultats établis d'après [4] et indique clairement le rapport entre les propriétés d'égalité des tribus et l'existence de solutions fortes de (1) . Le paragraphe 6 aborde quelques généralisations des paragraphes 2 et 3 .

1.1.- <u>Données et notations</u>

c est l'espace des applications continues nulles en o, de $[o,1]$ dans $\mathbb{R}^q$; $\mathcal{B}_t^c$ est la tribu engendrée sur c par les applications $x \rightsquigarrow x(s)$, pour $s \leq t$; $\mathcal{B}^c = \mathcal{B}_1^c$.

β est la loi du mouvement brownien canonique sur $(c, (\mathcal{B}_t^c)_{o \leq t \leq 1})$. Une base de processus est un triplet $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ où $(\mathcal{F}_t)_{o \leq t \leq 1}$ est une famille croissante de tribus définies sur Ω ; $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, et P est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$; on supposera que la tribu $\mathcal{F}$ est P-complète , et que les tribus $\mathcal{F}_t$ contiennent les ensembles de P-mesure nulle de $\mathcal{F}$.

Dans ce chapître, Y et W désignent des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, à trajectoires continues, mesurables, définis sur une base que l'on précisera à chaque fois ;$\mathcal{F}_t^Y$ (resp :$\mathcal{F}_t^W$) désigne la tribu définie sur Ω , engendrée par les variables aléatoires Y_s (resp : W_s) pour $s \leq t$.

W désigne un mouvement brownien avec le sens suivant :

a) W est une martingale de carré intégrable

b) Le processus $\langle W^j , W^k \rangle$ à variation bornée associé au produit $W^j W^k$ de deux processus coordonnés de W est tel que pour tout $t, \langle W^j , W^k \rangle_t = \delta_{jk} . t$.

Rappelons que, utilisant un théorème de Paul Levy repris par Doob, les propriétés données sont équivalentes aux suivantes :

a') W est un processus défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{o\leq t\leq 1}$ à acroissements indépendants, normalement distribués de paramètres $(0, I(t-s))$, I étant la matrice identité dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)$.

b') $W_u - W_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tout u, s, t, avec $o\leq s\leq t<u\leq 1$.

(voir par exemple : Doob "Stochastic processes", pages 384, th11-9 et aussi [6] chapitre 4, th 9 p. 56) .

P_Y est la loi définie sur $(c,\mathcal{B}^c)$ par le processus Y .

$\mathcal{Y}$ désigne le processus canonique correspondant à Y , défini sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c), P_Y)$.

$\bar{\mathcal{B}}_t^c$ (resp : $\bar{\mathcal{F}}_t^Y$, $\bar{\mathcal{F}}_t^W$) désignent les tribus complètées de $\mathcal{B}_t^c$ (resp : $\mathcal{F}_t^Y$, $\mathcal{F}_t^W$) relativement à des mesures de probabilités que l'on précisera.

$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\mathcal{Y}}$(resp :$\tilde{\mathcal{F}}_t^W$) est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t^{\mathcal{Y}}$(resp : $\mathcal{F}_t^W$) et la famille des ensembles de mesure P_Y-nulle (resp : P-nulle) de $\mathcal{B}_t^c$ (resp : de $\mathcal{F}_t^Y$) .

$\varphi \cdot P$ désigne la probabilité de densité φ par rapport à P . $||.||$ et $(.,.)$ désigne la norme habituelle et le produit scalaire associé dans $\mathbb{R}^q$.

Note : "Z est un processus sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$" implique en particulier l'adaptation de Z à la famille $(\mathcal{F}_t)$.

1.2.- Remarque : l'intégrale stochastique

Nous utilisons l'outil maintenant standard de l'intégrale stochastique (cf. pour une présentation générale [5] ; pour les rédactions récentes de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale continue [6] , [7] , [8] , pour une présentation dans le cadre des mesures vectorielles [11]) .

Le plus généralement nous considérons l'intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien.

1.3.- Le théorème de Girsanov

On rappelle le théorème suivant, maintenant classique :

1. 31. Théorème

Soit $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0\leq t\leq 1}$ une base de processus, Y et W deux processus mesurables définis sur cette base, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, satisfaisant les propriétés suivantes :

(A) W est un mouvement brownien q-dimensionnel

(B) $Y_t(\omega) = \int_0^t A(s,\omega)\, ds + W_t(\omega)$ P.p.s.

(C) A est une application de $[0,1] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^q$, mesurable, adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et telle que :

$$P\left[\int_0^1 ||A(s,\omega)||^2 \, ds < \infty\right] = 1$$

(D) $E\left[\varphi(\omega)\right] = 1$ où

$$\varphi(\omega) = \exp\left[- \int_0^1 \left(A(s,\omega), d\, W_s\right) - \frac{1}{2} \int_0^1 ||A(s,\omega)||^2 \, ds\right]$$

alors le processus Y est un mouvement brownien défini sur la base de processus $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \varphi . P)$.

Ce théorème a été énoncé et démontré par Girsanov en 1960 (voir : [1], [3] , [4]). Des généralisations ont été obtenues : cas de processus à valeurs dans un espace de Hilbert, cas où le mouvement brownien est remplacé par une martingale continue de carré intégrable.

1.32.- <u>Remarque</u>

Avec les hypothèses (A) et (C) du théorème, le processus $(\varphi_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ défini sur la base $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ par :

$$\varphi_t(\omega) = \exp\left[- \int_0^t \left(A(s,\omega), \, d\, W_s\right) - \frac{1}{2} \int_0^t ||A(s,\omega)||^2 \, ds\right]$$

est une martingale locale (voir [5] , [6] , [7]) ; c'est également une surmartingale (cf. [3] , [4] , [9]) ; avec en plus l'hypothèse (D) c'est une martingale (non nécessairement de carré intégrable).

1.33.- <u>Remarque</u>

L'hypothèse (C) n'implique pas (D) : on peut trouver un contrexemple dans [3] - remarque p. 864.

Il est alors important de connaître des conditions pour lesquelles (D) est réalisé. Deux cas importants démontrés dans [3] , [4] repris dans [9] nous permettent d'avoir (D) :

$\boxed{1}$ Il existe $\delta > o$ avec $E\left[\exp((\frac{1}{2}+\delta) \int_o^1 ||A(s,\omega)||^2 ds)\right] < \infty$.
Remarquons, ce qui sera utile pour la suite, que cette condition est remplie en particulier à chaque fois que $\int_o^1 ||A(s,\omega)||^2 ds$ est borné.

$\boxed{2}$ Le processus A est indépendant du mouvement brownien W .

2.- Théorèmes d'équivalence et d'absolue continuité des lois P_Y et $\mathcal{B}$

2.1.- Proposition [[2] , théorème 1]

Avec les hypothèses (A), (B), (C) et (D) du théorème de Girsanov, énoncées au paragraphe précédent, la loi P_Y du processus Y est équivalente à la loi $\mathcal{B}$ du mouvement brownien canonique, et dans l'espace $(c, \mathcal{B}^c)$ les densités sont données par les relations :

2.11.- $$\frac{d\beta}{dP_Y}(x) = E\left[\varphi \,|\, Y = x\right]$$

2.12.- $$\frac{dP_Y}{d\beta}(x) = \tilde{E}\left[\varphi^{-1} \,|\, Y = x\right]$$

$\tilde{E}[\cdot|\cdot]$ désignant l'espérance conditionnelle obtenue en prenant la loi de probabilité $\tilde{P} = \varphi P$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

Démonstration.

Y définit une application de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(c, \mathcal{B}^c)$; soit P_Y (resp : $\tilde{P}_Y$) la probabilité image de P (resp : $\tilde{P}$) par cette application ; le théorème de Girsanov montre que $\tilde{P}_Y = \beta$.

$\tilde{P} << P$ implique $\beta << P_Y$ et $\frac{d\beta}{dP_Y}(x) = E[\varphi(\omega) \mid Y = x]$ P_Y . p.s.

D'autre part, on peut définir l'intégrale stochastique $Z'_t = \int_0^t A(s,\omega)\, d\, W_s$, W étant une quasi martingale relativement à la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\tilde{P})$ avec : $W_t = Y_t - \int_0^t A(s,\omega)\, ds$. D'après le lemme 2.6. on a $Z'_t = Z_t$ $\tilde{P}$.p.s. où $Z_t = \int_0^t A(s,\omega)\, d\, W_s$, W étant cette fois mouvement brownien sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$. On obtient en conséquence :

$$\varphi(\omega) > 0 \quad P.p.s. \quad \text{et} \quad \tilde{P}.p.s. \quad \text{et :}$$

$P << \tilde{P}$ implique $P_Y << \beta$ avec $\frac{dP_Y}{d\beta}(x) = \tilde{E}[\varphi^{-1}(\omega) \mid Y = x]$ β.p.s.

2.2.- Corollaire

Avec les hypothèses (A), (B) et (C) la loi P_Y est absolument continue par rapport à la loi β du mouvement brownien.

Démonstration.

On peut obtenir une P-modification $\tilde{A}$ de A ayant les mêmes propriétés de mesurabilité et telle que $t \rightsquigarrow \int_0^t ||\tilde{A}(s,\omega)||^2\, ds$ soit continue (voir démonstration du théorème 2.8.).

Soit alors $T_n(\omega) = \sup\{t : \int_0^t ||\tilde{A}(s,\omega)||^2\, ds < n\}$, T_n est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$. Le processus A^n défini par $A^n(t,\omega) = 1_{T_n \geq t}(\omega)\ \tilde{A}(t,\omega)$ est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$.

Définissons alors le processus Y^n sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que :

$$Y^n_t(\omega) = \int_0^t A^n(s,\omega)\, ds + W_t(\omega) \ .$$

Comme d'après (C) , $A^n \longrightarrow \tilde{A}$ P.p.s. on a $Y^n \longrightarrow Y$ P.p.s.

D'après la remarque 1.33(1) et la proposition précédente, P_{Y^n} est équivalente à β . Soit $F \in \mathcal{B}^c$.

$$P_Y[F] = P[\omega : Y(\omega) \in F] = P\Big[\bigcup_n [\{\omega : Y(\omega) \in F\} \cap \{T_n = 1\}]\Big] .$$

Mais sur l'ensemble $\{T_n = 1\}$, $Y^n = Y$ et donc

$$P_Y[F] = P\left[\bigcup_n \left[\{\omega : Y^n(\omega) \in F\} \cap \{T_n = 1\}\right]\right] .$$

Si F est de mesure β-nulle, alors $P_{Y^n}(F) = 0$ et d'après l'égalité précédente $P_Y(F) = 0$. D'où l'absolue continuité $P_Y << \beta$.

2.3.- Nous nous intéressons maintenant au cas où les hypothèses (B) et (C) sont remplacées par les suivantes :

(B') $Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + W_t(\omega)$ P.p.s.

(C') α est une application de $[0,1] \times c$ dans $\mathbb{R}^q$ progressivement mesurable, adaptée à la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ et telle que $P\left[\int_0^1 ||\alpha(s,Y(\omega))||^2 ds < \infty\right] = 1$.

<u>Note-</u>

Les résultats qui figurent dans la suite avec la référence [2] sont en fait un peu plus généraux que ceux de Ershov puisqu'ils sont énoncés avec les tribus $\mathcal{F}_t^Y$ et $\mathcal{B}_t^c$ et non $\mathcal{F}_{t+}^Y$ et $\mathcal{B}_{t+}^c$.

Les lemmes suivants justifient les opérations que nous ferons avec ces nouvelles conditions.

2.4.- <u>Lemme</u>

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ une base de processus, Y et W deux processus définis sur cette base, W étant un mouvement brownien , Y un processus à trajectoires continues.

(1) Si pour chaque t , W_t est $\tilde{\mathcal{F}}_t^Y$-mesurable, alors il existe un processus $\mathcal{W}$, mouvement brownien sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ avec

2.31.- $\quad W_t(\omega) = \mathcal{W}_t \circ Y(\omega) \quad$ P.p.s.

2.32.- $\quad \tilde{\mathcal{F}}^W_t = Y^{-1}\left[\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}}_t\right]$.

② Avec les hypothèses (B') et (C'), on peut définir $\mathcal{W}$ tel que l'on ait en plus de ces propriétés la relation :

2.33.- $\quad \mathcal{Y}_t(x) = \int_0^t \alpha(s,x)\, ds + \mathcal{W}_t(x)$.

<u>Démonstration</u>.

① On peut trouver une modification $\hat{W}_t$ de W_t qui soit $\mathcal{F}^Y_t$-mesurable. Ayant $\mathcal{F}^Y_t = Y^{-1}\left[\mathcal{B}^c_t\right]$, et appliquant un lemme classique de factorisation pour chaque t illustrée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (\Omega,\mathcal{F}^Y_t) \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "W_t"'] & & (c,\mathcal{B}^c_t) \arrow[dl, "\mathcal{W}_t"] \\ & (\mathbb{R}^q,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}) & \end{tikzcd}$$

(voir par exemple [10] , prop. 3, p. 243)

on obtient :

$\hat{W}_t(\omega) = \mathcal{W}_t \circ Y(\omega)$ d'où

$W_t(\omega) = \mathcal{W}_t \circ Y(\omega)$ P.p.s. , et 2.33 en découle.

La vérification de ce que $\mathcal{W}$ est un mouvement brownien sur la base $(c,(\mathcal{B}^c_t),P_Y)$ est immédiate.

② On définit directement $\mathcal{W}$ par :

$$\mathcal{W}_t(x) = \mathcal{Y}_t(x) - \int_0^t \alpha(s,x)\, ds \quad \text{d'où}$$

$$\mathcal{W}_t \circ Y(\omega) = Y_t(\omega) - \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds \quad \text{et}$$

$$\mathcal{W}_t \circ Y(\omega) = W_t(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

$\mathcal{W}$ est alors un mouvement brownien sur la base $(c,(\mathcal{B}^c_t),P_Y)$ et la relation 2.33. tient.

Le lemme 2.5. nous montre que la factorisation précédente préserve l'intégrale stochastique.

2.5.- Lemme

Supposons les conditions (A) et (B'), (C') remplies. Soit le processus Z défini sur la base $(\Omega, \mathcal{F}_t^Y, P)$ par :

$$Z_t = \int_0^t \alpha(s, Y(\omega))\, d\, W_s \; .$$

On peut alors définir un processus à trajectoires P.p.s. continues $\mathfrak{Z}$ sur la base $(c, (\mathcal{B}_t^c), P_Y)$ tel que

$$\mathfrak{Z}_t = \int_0^t \alpha(s,x)\, d\, \mathcal{W}_s \quad \text{avec} \quad \mathfrak{Z}_t \circ Y(\omega) = Z_t(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

Démonstration

a) Supposons d'abord que $E\left[\int_0^1 ||\alpha(s,Y(\omega))||^2\, ds\right] < \infty$ alors $E_{P_Y}\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds\right] < \infty$. De plus les espaces :

$\mathbb{L}^2\left[\Omega \times [0,1], \mathcal{F}^Y \otimes \mathcal{B}_{[0,1]}, P\otimes\lambda\right]$ noté $\mathbb{L}^2\left[\Omega \times [0,1]\right]$ et

$\mathbb{L}^2\left[c\times[0,1], \mathcal{B}^c \otimes \mathcal{B}_{[0,1]}, P_Y\otimes\lambda\right]$ noté $\mathbb{L}^2\left[c\times[0,1]\right]$ sont

isomorphes par l'application Y , λ désignant la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^q, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q})$.

En raison des propriétés de l'intégrale stochastique, il suffit de montrer le résultat pour les processus Z , du type $Z_\tau = 1_H(W_{t\wedge\tau} - W_{s\wedge\tau})$ où $H \in \mathcal{F}_s^Y$. Soit $K \in \mathcal{B}_s^c$, tel que $Y^{-1}_{[K]} = H$. Alors $Z_\tau = 1_{Y^{-1}_{[K]}}\left[\mathcal{W}_{t\wedge\tau} \circ Y - \mathcal{W}_{s\wedge\tau} \circ Y\right]$. D'où $Z_\tau(\omega) = \mathfrak{Z}_\tau \circ Y(\omega)$ P.p.s. en posant $\mathfrak{Z}_\tau = 1_K \cdot (\mathcal{W}_{t\wedge\tau} - \mathcal{W}_{s\wedge\tau})$.

b) Cas général. Puisque $P_Y\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty\right] = 1$, l'intégrale stochastique $\mathfrak{Z}_t = \int_0^t \alpha(s,x)\, d\, \mathcal{W}_s$ est bien définie. Le processus $(\mathfrak{Z}_t)_{0\leq t\leq 1}$ est une martingale locale pour la base $(c, (\mathcal{B}_t^c), P_Y)$. On va alors se ramener au cas a).

Soit une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêts de la famille

$(\mathcal{B}_t^c)$ tendant vers 1 lorsque n tend vers ∞ et tel que le processus $(\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n})_{t\in[0,1]}$ défini par $\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} \alpha(s,x)\, d\,\mathcal{W}_s$ soit une martingale de carré intégrable pour la même base. On considère les temps d'arrêts $T_n \circ Y$, de la famille $(\mathcal{F}_t^Y)$ et les processus $(Z_{t\wedge T_n \circ Y})_{t\in[0,1]}$ tel que $Z_{t\wedge T_n\circ Y} = \int_0^{t\wedge T_n\circ Y} \alpha(s,Y(\omega))\, d\, W_s$.

Ce sont des martingales de carré intégrable définies sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$.

D'après le a) $Z_{t\wedge T_n\circ Y}(\omega) = \mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} \circ Y(\omega)$ P.p.s.

Lorsque $n \uparrow \infty$, $T_n \nearrow 1$, $T_n\circ Y \nearrow 1$. D'où $\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} \to \mathfrak{Z}_t$ P_Y.p.s. et

$$Z_{t\wedge T_n \circ Y} \to Z_t \quad \text{P.p.s.}$$

d'où

$$Z_t(\omega) = \mathfrak{Z}_t \circ Y(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

Remarque

On peut avoir directement la conclusion de a). L'intégrale stochastique peut en effet être considérée comme une véritable intégrale relativement à la mesure stochastique définie par le mouvement brownien W (voir par exemple [11]). Au mouvement brownien $\mathcal{W}$ correspond la mesure stochastique image, et le lemme 2 n'est alors que l'application d'un résultat classique sur l'intégration par rapport à la mesure image.

2.6.- Lemme

Soit μ_1 et μ_2 deux probabilités définies sur $(\Omega,\mathcal{F})$ avec μ_1 absolument continue par rapport à μ_2. Soit Z une fonction aléatoire sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t))$ définissant deux processus Z^1 et Z^2 sur les bases respectives $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mu_1)$ et $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mu_2)$ où

$$Z_t^1 = W_t^1 + \int_0^t a_1(s,\omega)\, ds$$

$$Z_t^2 = W_t^2 + \int_0^t a_2(s,\omega)\, ds ,$$

W^1 (resp : W^2) étant un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mu_1)$, (resp : $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mu_2)$ avec $\mu_1\left[\int_0^1 ||a_1(s,\omega)||^2\, ds < \infty\right] = 1 = \mu_2\left[\int_0^1 ||a_2(s,\omega)||^2\, ds<\infty\right]$

Soit Φ une fonction aléatoire sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t))$ définissant sur les bases $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mu_i)$ $i = 1,2$, deux processus Z^i- intégrables stochastiquement. Alors les intégrales $\int_0^t \Phi\, dZ^1$ et $\int_0^t \Phi\, dZ^2$ sont égales , μ_1 p.s.

<u>Démonstration</u>

a) On suppose d'abord que $E_{\mu_i}\left[\int_0^1 ||\Phi(s,\omega)||^2\, ds\right] < \infty$, alors Φ est élément des espaces $\mathbb{L}^2\left[\Omega \times [0,1] ,\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{[0,1]} , \mu_i \otimes \lambda\right]$ $i = 1,2$, notés $\mathbb{L}^2{}_1$ et $\mathbb{L}^2{}_2$.

On peut trouver une suite $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de processus étagés, adaptés, bornés, convergeant vers Φ dans $\mathbb{L}^2{}_1 \cap \mathbb{L}^2{}_2$. Pour ces processus, par définition des intégrales stochastiques, il est évident que :

$$\int_0^t \Phi_s^n\, d Z^1{}_s = \int_0^t \Phi_s^n\, d Z^2{}_s .$$

Comme on peut extraire de la suite $\{\Phi^n\}$ une sous suite $\{\Phi^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_0^t \Phi_s^{n_k}\, d Z^1{}_s \longrightarrow \int_0^t \Phi_s\, d Z'_s \quad \mu_1 \text{ p.s.}$$

et que

$$\int_0^t \Phi_s^{n_k}\, d Z^2{}_s \longrightarrow \int_0^t \Phi_s\, d Z^2{}_s \quad \mu_2 \text{ p.s.}$$

on a

$$\int_0^t \Phi_s\, d Z^1{}_s = \int_0^t \Phi_s\, d Z^2{}_s \quad \mu_1 \text{ p.s.}$$

b) Cas général où $\mu_i\left[\int_0^1 ||\Phi(s,\omega)||^2\, ds < \infty\right] = 1$. On peut trouver une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêts de la famille $(\mathcal{F}_t)$ tels que pour tout n :

$$E\mu_i \left[\int_0^1 ||1_{s\leq T_n} \quad \Phi_s||^2 \, ds\right] < \infty$$

avec $T_n \nearrow 1$ quand $n \nearrow \infty$.

En remplaçant Φ par une modification mesurable convenable, on peut prendre $T_n(x) = \sup \{t : \int_0^t ||\Phi_s||^2 \, ds < n\}$ (voir la démonstration du théorème 2.8).

D'après le a) il est clair que $\int_0^{t\wedge T_n} \Phi_s \, d\, Z^1_s = \int_0^{t\wedge T_n} \Phi_s dZ^2_s$ μ_1 p.s. Comme on a aux deux membres des limites μ_1 (resp : μ_2) p.s. on obtient

$$\int_0^t \quad \Phi_s \, d\, Z^1_s = \int_0^t \quad \Phi_s \, d\, Z^2_s \quad \mu_1 \text{ p.s.}$$

2.7.- <u>Corollaire de la proposition 2.1.</u>

Avec les hypothèses (A), (B'), (C') et (D), les densités $\frac{d\beta}{dP_Y}(x)$ et $\frac{dP_Y}{d\beta}(x)$ sont données par les relations :

2.71. $\frac{d\beta}{dP_Y}(x) = \exp\left[-\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{W}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \|\alpha\ (s,x)\|^2 ds\right] \quad P_Y.\text{p.s.}$

2.72. $\phantom{\frac{d\beta}{dP_Y}(x)} = \exp\left[-\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{Y}_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 \|\alpha\ (s,x)\|^2 ds\right] \quad P_Y.\text{p.s.}$

2.73. $\phantom{\frac{d\beta}{dP_Y}(x)} = \exp\left[-\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{X}_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 \|\alpha\ (s,x)\|^2 ds\right] \quad \beta.\text{p.s.}$

2.74. $\frac{dP_Y}{d\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{X}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \|\alpha\ (s,x)\|^2 ds\right] \quad \beta.\text{p.s.}$

2.75. $\phantom{\frac{dP_Y}{d\beta}(x)} = \exp\left[\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{Y}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \|\alpha\ (s,x)\|^2 ds\right] \quad P_Y.\text{p.s.}$

<u>Démonstration.</u>

Les lemmes 2.4. et 2.5. et la formule 2.11. de la proposition 1 nous donnent 2.71. De 2.71. on déduit 2. 72. à partir de la formule 2.33. Le lemme 2.5. et la formule 2.12. nous donnent 2.74. où l'intégrale stochastique est prise par rapport au mouvement brownien canonique défini sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),\beta)$ en remarquant à partir du théorème de Girsanov que le processus Y défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\tilde{P})$ est un mouvement brownien. Le lemme 2.6. permet à partir de 2.72. (resp : 2.74.) d'en déduire 2. 73. (resp : 2.75.) .

2.8.- <u>Théorème</u> [[2] théorème 3]

Soit α une application de $[0,1]\times c$ dans $\mathbb{R}^q$, adaptée à la famille $(\mathcal{B}_t^c)_{0\leq t\leq 1}$, progressivement mesurable et telle que l'on ait :

(i) $\beta\left[\int_0^1 ||\alpha\;(t,x)||^2 dt<\infty\right]=1$

(ii) Il existe Y et W des processus stochastiques à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ définis sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0\leq t\leq 1}$ tels que les hypothèses (A), (B') et (C') sont remplies pour Y, W et α .

Alors en posant $\psi_t(x) = \exp\left[-\int_0^t (\alpha(s,x), d\,\mathcal{Y}_s)+\frac{1}{2}\int_0^t ||\alpha(s,x)||^2\, ds\right]$ l'intégrale stochastique étant prise sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ on a :

$$E_{P_Y}(\psi_1(x)) = E_P\left[\psi_1(Y_{(\omega)})\right] = 1$$

et les mesures P_Y et β sont équivalentes avec pour densités les expressions des formules 2.71. à 2.75.

<u>Démonstration</u>.

D'après la proposition 2.1. et le lemme 2.5., il suffit pour avoir le résultat voulu de montrer l'égalité $E_{P_Y}\left[\psi_1(x)\right]=1$.

A partir de (ii) et du lemme 2.4. on peut écrire :

2.33. $\mathcal{Y}_t(x) = \int_0^t \alpha(s,x)\,ds + \mathcal{W}_t(x)$ où $\mathcal{W}$ est un mouvement brownien défini sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$. Comme d'après (ii)

$$P_Y\left[\int_0^1 ||\alpha(t,x)||^2\,dt<\infty\right]=1$$

suivant un argument de [12], p. 234 on obtient une P_Y modification, progressivement mesurable de α en posant :

$$\tilde{\alpha}(t,x) = 1_{\{\mathfrak{z}:\int_0^t ||\alpha(s,\mathfrak{z})||^2 ds < \infty\}}(x)\ \alpha\ (t,x)$$

$\tilde{\alpha}$ ayant les propriétés suivantes :

1 d'après (i), c'est aussi une β-modification de α

2 l'application $t \rightsquigarrow \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds$ de $[0,1]$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ est continue pour tout $x \in c$.

En effet soit $x \in c$, l'application $t \rightsquigarrow \int_0^t ||\alpha(s,x)||^2 ds$ est continue à gauche. Elle n'est pas continue à droite, s'il existe un $t \in [0,1[$ tel que :

$\int_0^t ||\alpha(s,x)||^2 ds = K < \infty$ et $\int_0^{t+\frac{1}{n}} ||\alpha(s,x)||^2 ds = + \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La modification donnée supprime un tel saut , puisque pour tout n nous aurons

$\int_{t+\frac{1}{n}}^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds = 0$, ce qui donne $\int_{]t,1]} ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds = 0$ d'où la continuité affirmée pour ces x .

3 $P_Y \left[\int_0^1 ||\tilde{\alpha}(t,x)||^2 dt < \infty\right] = 1 = \beta\left[\int_0^1 ||\tilde{\alpha}(t,x)||^2 dt < \infty\right]$

4 $\mathcal{Y}_t = \int_0^t \tilde{\alpha}(s,x)\, ds + \mathcal{W}_t(x)$ P_Y.p.s.

Montrons deux lemmes utiles :

2.81. <u>Lemme</u>

Soit $T_n(x) = \sup \{t : \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds < n\}$, alors T_n est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ (ni complétée, ni rendue continue à droite).

<u>Démonstration</u>.

Ce lemme est immédiat en appliquant un résultat classique, compte-tenu de la continuité de l'application :

$$t \rightsquigarrow \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds \quad .$$

(voir par exemple [14] appendice II).

Nous ferons cependant la démonstration directe qui dans ce cas particulier, est simple.

Soit $\{T_n > t\}$ pour $t < 1$.

$x \in \{T_n > t\}$ implique $\int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < n$.

Réciproquement, soit $\int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < n$. En vertu de la croissance et de la continuité de l'application $t \rightsquigarrow \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds$ on peut trouver t' avec $t<t'<1$, tel que $\int_0^{t'} ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < n$, ce qui montre que $x \in \{T_n > t\}$. Comme $\{x : \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < n\}$ est $\mathcal{B}_t^c$-mesurable, par construction de $\tilde{\alpha}$, on a le résultat voulu.

2.82. Lemme

Soit le processus Y^n défini sur la base $(c_o, \mathcal{B}_t^c), P_Y^o)$ par

$$\begin{cases} Y_t^n(x) = Y_t(x) & \text{si } t \leq T_n(x) \\ Y_t^n(x) = Y_t(x) - \int_{T_n}^t \alpha(s,x)\, ds & \text{si } t > T_n(x) \end{cases}$$

où c_o désigne l'ensemble $\{x : \int_0^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < \infty\}$.

$\mathcal{B}_t^{c_o}$ est la trace de $\mathcal{B}_t^c$ sur c_o , P_Y^o est la probabilité induite de P_Y sur $(c_o, \mathcal{B}^{c_o})$.

Alors :

2.821. $T_n(Y^n(x)) = T_n(x)$ pour tout $x \in c_o$

2. 822. $Y_t^n(x) = \int_0^t \alpha^n(s,Y^n(x))\, ds + \mathcal{W}_t(x)$ P_Y^o.p.s.

avec $\alpha^n(s,x) = 1_{s \leq T_n}(x)\, \tilde{\alpha}(s,x)$ pour $x \in c$.

Démonstration.

Avec la définition donnée de Y^n , Y^n est une application de $(c_o, \mathcal{B}^{c_o}) \rightsquigarrow (c, \mathcal{B}^c)$ puisque $t \rightsquigarrow \int_0^t \tilde{\alpha}(s,x)\, ds$ est alors continue pour tout $x \in c_o$.

Soit x fixé , $x \in c_o$. L'application de c dans $\mathbb{R}$
$z \mapsto 1_{\{T_n=t\}}(z)$ est $\mathcal{B}^c_t$-mesurable (d'après le lemme 2.81.) et donc :

$$1_{\{T_n=t\}}(x) = 1_{\{T_n=t\}}\, Y^n(x) \quad \text{puisque} \quad Y^n_s(x) = x_s \quad \text{pour} \quad s \leq t .$$

Ceci montre 2.821.

D'autre part, α^n est adapté à la famille $(\mathcal{B}^c_t)$, on a donc

$$\alpha^n(t,x) = \alpha^n(t,Y^n(x)) \quad \text{pour} \quad x \in c_o \quad \text{d'où la relation}$$

$$Y^n_t(x) = \int_o^t \alpha^n(s,Y^n(x))\, ds + \mathcal{W}_t(x) \quad \text{pour} \quad x \in c_o \ , \ P^o_Y\text{.p.s.}$$

<u>Suite de la démonstration du théorème 2. 8.</u>

Par construction $\int_o^1 ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2\, ds \leq n$. D'après la remarque 1.33. on a alors $E_{P^o_Y}[\psi^n] = 1$ où

$$\psi^n(x) = \exp\left[-\int_o^1 (\alpha^n(s,Y^n(x)), d\mathcal{W}_s) - \frac{1}{2}\int_o^1 ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2\, ds\right]$$

Comme $\int_o^1 ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2 ds$ converge P^o_Y p.s. vers $\int_o^1 ||\alpha(s,x)||^2$ ds $\psi^n(x)$ converge aussi P^o_Y p.s. vers $\psi(x)$. Montrons que la suite $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est P^o_Y-uniformément intégrable :

D'après l'égalité 2.822, le processus $\mathcal{W}$ est défini sur la base $(c_o,(\tilde{\mathcal{F}}_t^{Y^n}),P^o_Y)$. D'après le lemme 2. 4. on peut le factoriser de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} (c_o,(\mathcal{F}^{Y^n}_t),P^o_Y) \arrow[rr, "Y^n"] \arrow[dr, "\mathcal{W}"'] & & (c,(\mathcal{B}^c_t),P_{Y^n}) \arrow[dl, "\mathcal{W}^n"] \\ & (\mathbb{R}^q , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}) & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{W}_t(x) = \mathcal{W}^n_t \circ Y^n(x) \quad P^o_Y\text{.p.s.}$$

Le lemme 2.5. donne l'égalité :

$$\psi^n(x) = \varphi^n \circ Y^n(x) \quad P^o_Y\text{.p.s.}$$

où $\varphi^n(x) = \exp\left[-\int_o^1 (\alpha^n(s,x), d\mathcal{W}^n_s) - \frac{1}{2}\int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2\, ds\right]$ P_{Y^n}.p.s.

La proposition 2.1. et le corollaire 2.7. montrent que les mesures P_{Y^n}

et β sont équivalentes et que :

$$\frac{d\beta}{dP_{Y^n}}(x) = \varphi^n(x) \quad P_{Y^n}.p.s.$$

d'après la formule 2.73. :

$$\varphi^n(x) = \exp\left[-\int_0^1 (\alpha^n(s,x),dx_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds\right] , \beta \text{ p.s.}$$

$$\text{et } \int_{\{\psi^n>N\}} \psi^n(x)\, d\, P_Y^o(x) = \int_{\{\varphi^n>N\}} \varphi^n(x)\, d\, P_{Y^n}(x) = \beta\left[x : \varphi^n(x) > N\right]$$

$$= \beta\left[x : \exp\left[-\int_0^1 (\alpha^n(s,x),d\,x_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds\right] > N\right]$$

$$= P\left[\omega : \exp\left[-\int_0^1 (\alpha^n(s,W(\omega)), d\,W_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha^n(s,W(\omega))||^2 ds\right] > N\right]$$

$$= P\left[\omega : -\int_0^1 (\alpha^n(s,W(\omega)), d\,W_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha^n(s,W(\omega))||^2 ds > \operatorname{Log} N\right]$$

$$\leq P\left[\omega : \left|\int_0^1 (\alpha^n(s,W(\omega)), d\,W_s)\right| > \frac{1}{2}\operatorname{Log} N\right]$$

$$+ P\left[\omega : \int_0^1 ||\alpha^n(s,W(\omega))||^2 ds > \operatorname{Log} N\right]$$

En appliquant le lemme 2.83. aux constantes $k = \frac{1}{2}\operatorname{Log} N$ et $K = \operatorname{Log} N$ l'expression précédente est rendue inférieure à :

$$2\,P\left[\omega : \int_0^1 ||\alpha^n(s,W(\omega))||^2 ds > \operatorname{Log} N\right] + 2\,N^{-\frac{1}{8}}$$

$$\leq 2\,P\left[\omega : \int_0^1 ||\alpha(s,W(\omega))||^2 ds > \operatorname{Log} N\right] + 2\,N^{-\frac{1}{8}} .$$

Cette expression tend vers o , lorsque N tend vers ∞ en vertu de l'hypothèse (i) et indépendamment de n , d'où le résultat.

Comme alors $E_{P_Y^o}\left[\psi_1(x)\right] = 1$ on obtient l'équivalence des mesures P_Y^o et β^o , où β^o désigne la mesure induite par β sur $(c^o, \mathcal{B}^{c^o})$.
Ceci implique l'équivalence des mesures P_Y et β (d'après les hypothèses $\beta(c_o) = P_Y(c_o) = 1$)
d'où

$$\frac{d\beta}{dP_Y}(x) = \frac{d\beta^o}{dP_Y^o}(x) = \psi_1(x) \quad P_Y^o \text{ et } P_Y.p.s.$$

d'où $E_{P_Y}\left[\psi_1\right] = 1$ et les formules de densité d'après le corollaire 2.7.

2.83. Lemme. (d'après une inégalité de Strook-Varadhan [13])

Soit une martingale locale à valeurs réelles M , définie sur une base de processus $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, $P)_{0\leq t\leq 1}$, de processus croissant A. Avec $A_0 = 0$, étant donné deux nombres réels positifs k et K , on a l'égalité

$$P\left[|M_t|>k\right] \leq P\left[A_t > K\right] + 2\exp\left[-\frac{k^2}{2K}\right]$$

Démonstration.

$P\left[|M_t|>k\right] \leq P\left[\{M_t>k\}\cap\{A_t\leq K\}\right] + P\left[\{-M_t>k\}\cap\{A_t\leq K\}\right] + P\left[A_t>K\right]$.

Soit $\lambda > 0$ $\quad P\left[\{M_t>k\}\cap\{A_t\leq K\}\right] \leq P\left[\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t > \lambda k - \frac{\lambda^2}{2}K\right]$

$$\leq P\left[\exp\left[\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t\right] > \exp\left(\lambda k - \frac{\lambda^2}{2}K\right)\right] .$$

Comme le processus $(\exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t))_{0\leq t\leq 1}$ est une surmartingale sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ (voir [9]) , on peut lui appliquer l'inégalité de Doob :

$$P\left[\exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t\right) > \exp\left(\lambda k - \frac{\lambda^2}{2}K\right)\right]$$

$$\leq \exp\left(-\lambda k + \frac{\lambda^2}{2}K\right) E\left[\exp\left(\lambda M_0 - \frac{\lambda^2}{2}A_0\right)\right]$$

$$\leq \exp\left[-\lambda k + \frac{\lambda^2}{2}K\right] .$$

En prenant le minimum en λ de ce dernier terme on obtient :

$$P\left[\{M_t>k\}\cap\{A_t\leq K\}\right] \leq \exp\left[-\frac{k^2}{2K}\right]$$

On fait le même calcul avec $P\left[\{-M_t>k\}\cap\{A_t\leq K\}\right]$, d'où la formule.

2.84. Remarque.

Avec les mêmes notations que pour le lemme 2.83. précédent, on a l'inégalité suivante :

$$P\left[1_F \cdot |M_t|>k\right] \leq P\left[1_F \cdot A_t>K\right] + 2 \exp\left(-\frac{k^2}{2K}\right)$$

F étant un élément de $\mathcal{F}$.

(évident en écrivant $P\left[1_F\ |M_t|>k\right] = P\left[\{|M_t|>k\} \cap F\right]$) .

2.9. Proposition.

Si dans le théorème 2.8. nous enlevons l'hypothèse (i), alors :

① La loi P_Y est absolument continue par rapport à β

② $\dfrac{dP_Y}{d\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 (\alpha(s,x), d\,\mathcal{Y}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds\right]$ P_Y.p.s.

③ P_Y est équivalente à β si et seulement si (i) est vraie

Démonstration.

Le ① a déjà été démontré (corollaire 2.2.)

③ : le théorème 2.8. fournit l'implication :

$$(i) \Longrightarrow P_Y \sim \beta \quad ,$$

et l'implication réciproque est triviale.

② : pour $B \in \mathcal{B}^c$ on a :

$$P_Y\,\boxed{B} = \lim_n \int_{B \cap \{T_n=1\}} \frac{dP_Y^n}{d\beta}\, d\beta(x) = \lim_n \int_{B \cap \{T_n=1\}} \varphi^n(x)\, d\beta(x)$$

où $\varphi^n(x) = \exp\left[\int_0^1 (\alpha^n(s,x), dx_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds\right]$ β.p.s.

Pour montrer que $1_{\{T_n=1\}}(x)\ \varphi^n(x)$ converge en β-probabilité vers $\varphi(x)$ nous utilisons la remarque 2.84. en l'appliquant à :

$M_t = \int_0^t (\alpha^n(s,x), d\,x_s)$, $A_t = \int_0^t ||\alpha^n(s,x)||^2\, ds$, $F = \{x : \int_0^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds < \infty\}$

Alors :

$$1_{\{T_n=1\}}(x)\ \varphi^n(x) = 1_{\{T_n=1\}}(x) \exp\left[1_F(x)\int_0^1 (\alpha^n(s,x), dx_s)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\, 1_F(x) \int_0^1 ||\alpha^n(s,x)||^2\, ds\right]$$

comme $1_F(x) \int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds$ converge vers $1_F(x) \int_o^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds$

$1_F(x) \int_o^1 (\alpha^n(s,x), d x_s)$ converge en β-probabilité vers un élément $\mathcal{B}^c$-mesurable noté comme dans [3] , [4] par : $\mathfrak{I}(x,\beta)$.

On en déduit la convergence en β-probabilité de $1_{\{T_n=1\}}\varphi^n(x)$ vers

$$\varphi(x) = \exp\left[\mathfrak{I}(x,\beta) - \frac{1}{2} 1_F(x) \int_o^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds\right]$$

en vertu du lemme 2.5. , $\varphi^n(x)$ peut aussi s'écrire :

$$\varphi^n(x) = \exp\left[\int_o^1 (\alpha^n(s,x), d\mathcal{Y}_s) - \frac{1}{2} \int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds\right] \quad P_Y\text{.p.s.}$$

si bien que, comme $\int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds \longrightarrow \int_o^1 ||\alpha(s,x)||^2 ds$ P_Y.p.s.

on a $\varphi(x) = \exp\left[\int_o^1 (\alpha(s,x), d\mathcal{Y}_s) - \frac{1}{2} \int_o^1 ||\alpha(s,x)||^2 ds\right]$ P_Y.p.s.

pour que $\varphi(x)$ soit la densité cherchée, il suffit de montrer que la suite $1_{\{T_n=1\}}(x)\ \varphi^n(x)$ est β-uniformément intégrable. On procède comme pour le théorème 2.8. :

$$\int_{\left\{x\ :\ 1_{\{T_n=1\}}\varphi^n>N\right\}} 1_{\{T_n=1\}}\varphi^n(x)\, d\beta(x) \leq \int_{\{x:\varphi^n(x)>N\}} \varphi^n(x)\, d\beta(x) = P_{Y^n}\left[\varphi^n(x)>N\right]$$

$$= P_{Y^n}\left[\int_o^1 (\alpha^n(s,x), d\mathcal{Y}_s^n) - \frac{1}{2}\int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds > \text{Log } N\right]$$

$$= P_Y\left[\int_o^1 (\alpha^n(s,x), d Y_s^n) - \frac{1}{2}\int_o^1 ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2 ds > \text{Log } N\right]$$

$$= P_Y\left[\int_o^1 (\alpha^n(s,x), d\mathcal{W}_s) + \frac{1}{2}\int_o^1 ||\alpha^n(s,x)||^2 ds > \text{Log } N\right]$$

$$\leq 2 N^{-\frac{1}{8}} + 2 P_Y\left[\int_o^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 ds > \text{Log } N\right] \quad \text{(d'après le lemme 2.73.)}$$

ce qui tend vers o, d'après l'hypothèse (ii) ; et ceci termine la démonstration.

Note.

Les parties ① et ③ de ce résultat sont montrées dans [2] , la partie ② avec le calcul de la densité est donnée dans [3] , [4] ;

également sous une forme légèrement différente dans ([15] - théorème 2)

3. Existence et unicité des solutions faibles de l'equation stochastique : (1) : $Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y)\, ds + W_t$

3.1. Définition.

Etant donné α (resp : B) applications de $[0,1] \times c$ dans $\mathbb{R}^q$ (resp : $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)$) , progressivement mesurables pour la famille $(\mathcal{B}_t^c)$, on appelle solution faible de (2) : $Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y)ds + \int_0^t B(s,Y)d\, W_s$ un couple $(\tilde{P},\mathcal{W})$ où $\tilde{P}$ est une probabilité sur $(c,(\mathcal{B}^c)$ et $\mathcal{W}$ un mouvement brownien sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),\tilde{P})$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ on ait :

3.11. $\mathcal{X}_t = \int_0^t \alpha(s,x)\, ds + \int_0^t B(s,x)\, d\,\mathcal{W}_s$ $\tilde{P}$.p.s.(x) . On dit qu'il y a unicité de la solution faible de (2) si la loi obtenue $\tilde{P}$ est unique.

Remarques.

a- Si la loi $\tilde{P}$ est celle d'un processus Y à trajectoires continues, défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0 \leq t \leq 1}$, en posant $W_t(\omega)=\mathcal{W}_t \circ Y(\omega)$ on obtient à partir de 3.11. la relation :

3.12. $Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + \int_0^t B(s,Y(\omega))\, d\, W_s$ P.p.s.

b- l'équation (2) n'est pas une équation différentielle stochastique de type Ito , puisque $\alpha(t,.)$ et $B(t,.)$ dépendent du passé avant t des trajectoires. Alors, dans le cas où on a la relation 3.12. le processus Y n'est pas markovien en général.

c- l'unicité donnée ici est l'unicité "en loi" définie dans de nombreux ouvrages (voir par exemple : [8]).

On considère maintenant le cas particulier (1) de l'équation (2). Dans le paragraphe 6 , un cas plus général sera étudié.

3.2. Théorème. ([2] , théorème 4)

Soit α avec les données de la définition 3.1., et tel que

(j) : pour tout $x \in c$, $\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2 \, ds < \infty$

L'équation (1) admet une solution faible si, et seulement si, on a :

(jj) $E_\beta \left[\exp \left(\int_0^1 (\alpha(t,x), d\, x_t) - \frac{1}{2} \int_0^1 ||\alpha(t,x)||^2 \, dt\right)\right] = 1$.

Il y a alors unicité de la solution.

Démonstration.

a) Existence de la solution

Soit $\varphi(x) = \exp\left[\int_0^1 (\alpha(t,x), d\, x_t) - \frac{1}{2} \int_0^1 ||\alpha(t,x)||^2 \, dt\right]$.

D'après (jj) $\varphi.\beta$ est une probabilité sur $(c, \mathcal{B}^c)$, notons là $\tilde{P}$.

On considère le processus $\hat{W}$ défini sur la base $(c, (\mathcal{B}^c_t), \tilde{P})_{0 \leq t \leq 1}$, par

$$\hat{W}_t(x) = x_t - \int_0^t \alpha(s,x) \, ds \quad .$$

Les hypothèses (j) et (jj) permettent d'appliquer le théorème de Girsanov (théorème 1.3.) : $\hat{W}$ est un mouvement brownien, et le couple $(\tilde{P}, \hat{W})$ est solution de (1) .

b) Unicité de la solution

Remarquons que (j) permet d'appliquer le théorème 2.8.. Considérons une autre solution $(P',\tilde{W})$ de (1). Les probabilités $\tilde{P}$ et β sont équivalentes, de même les probabilités P' et β . De plus on a :

$$\frac{d\tilde{P}}{d\beta}(x) = \varphi(x) = \frac{dP'}{d\beta}(x) \quad \beta.p.s.$$

d'où le résultat $\tilde{P} = P'$.

Enfin, notons la nécessité de l'hypothèse (jj). S'il existe une solution $(\tilde{P},\vartheta)$, d'après (j) $\tilde{P}$ et β sont équivalentes, et d'après le théorème 2.8.

$$\frac{d\tilde{P}}{d\beta}(x) = \varphi(x) \quad \beta.p.s. \quad \text{d'où} \quad E_\beta \left[\varphi(x)\right] = 1 \quad .$$

3.3. <u>Remarque ([4] , théorème 20)</u>

Nous obtenons l'existence d'une solution faible de (1), mais non l'unicité, avec les mêmes données et hypothèses que dans 3.2. à l'exception de (j) remplacé par :

(k) : $\beta\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2 ds < \infty\right] = 1$

En effet les hypothèses (k) et (jj) permettent d'appliquer le théorème de Girsanov, ce qui garantit l'existence de la solution faible de (1) . De plus la loi P_Y obtenue est équivalente à la loi β , cependant une autre solution de (1) n'ayant pas nécessairement cette dernière propriété, on ne peut en déduire l'unicité de la solution trouvée.

Utilisant un argument du lemme 11 de [3] , figurant précédemment dans [28] et [29] on obtient comme application du théorème 3.2. les théorèmes suivants, dont le plus général le théorème 3.5. est donné dans [15] , théorème 1 .

Ces deux théorèmes fournissent des réciproques partielles aux résultats 2.8. et 2.9.

Notation

On note $\hat{\mathcal{B}}_t^c$ la tribu engendrée par $\mathcal{B}_t^c$ et la famille $\mathcal{N}_\beta$ des ensembles β-négligeables de $\mathcal{B}^c$.

3.4. Théorème

Soit Y un processus (à trajectoires continues) défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ et tel que P_Y et β soient des mesures équivalentes. Alors il existe un processus α , défini sur la base $(c,(\hat{\mathcal{B}}_t^c),P_Y)$ mesurable et un processus W mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ tel que l'on ait :

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + W_t(\omega) \quad P.p.s.$$

avec $\beta\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty\right] = P_Y\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty\right] = 1$.

Démonstration

On considère le mouvement brownien canonique sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),\beta)$. Posons pour tout $t \in [0,1]$, $\mathfrak{z}_t(x) = E_\beta\left[\frac{dP_Y}{d\beta}(x) \mid \mathcal{B}_t^c\right]$

$\mathfrak{z}$ est une martingale réelle sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P)$. D'après le théorème de représentation de Clark [25] on peut écrire :

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t (\gamma_s, d\, x_s)$$

où γ est un processus mesurable, adapté à la famille $(\hat{\mathcal{B}}_t^c)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, avec :

$$\beta\left[\int_0^1 ||\gamma(s,x)||^2\, ds < \infty\right] = 1 .$$

L'équivalence des mesures P_Y et β implique que pour tout t , $\mathfrak{z}_t > 0$ β.p.s. On peut alors considérer $\log(\mathfrak{z}_t)$ et appliquer la formule de Ito :

$$\mathrm{Log}\,(\mathfrak{z}_t) - 1 = \int_0^t \left(\frac{\gamma_s}{\mathfrak{z}_s}, d\, x_s\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\left|\frac{\gamma_s}{\mathfrak{z}_s}\right|\right|^2 ds$$

d'où $$\mathfrak{z}_t = \exp\left[\int_0^t \left(\frac{\gamma_s}{\mathfrak{z}_s}, d\, x_s\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\left|\frac{\gamma_s}{\mathfrak{z}_s}\right|\right|^2 ds\right] .$$

En posant $\alpha(s,x) = \frac{\gamma(s,x)}{\mathfrak{z}(s,x)}$, appliquant le théorème 3.2., et tenant compte de la remarque 3.3., on obtient la représentation :

$$\mathcal{Y}_t(x) = \int_0^t \alpha(s,x)\, ds + \hat{W}_t(x) \qquad P_Y\text{.p.s.}$$

où $\hat{W}$ est un mouvement brownien sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$. D'où le résultat en posant $W_t(\omega) = \hat{W}_t \circ Y(\omega)$ et en revenant à la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$.

En utilisant une technique de temps d'arrêt, comme dans ([12] p. 236) on obtient un résultat semblable en supposant seulement que $P_Y \ll \beta$.

3.5. <u>Théorème</u>

Soit Y un processus (à trajectoires continues) défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que la mesure P_Y soit absolument continue par rapport à la mesure brownienne β . Alors il existe un processus α défini sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}_t^c),P_Y)$ mesurable avec

$$P_Y \left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty \right] = 1$$

et un processus W mouvement brownien sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ tels que :

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + W_t(\omega) \qquad P\text{.p.s.}$$

<u>Démonstration</u>

On pose $\mathfrak{z}_t(x) = E\left[\frac{dP_Y}{d\beta}(x) | \mathcal{B}_t^c \right]$ et comme dans la démonstration de 3.4. on peut écrire :

$$\mathfrak{z}_t(x) = 1 + \int_0^t \gamma(s,x)\, d\, x_s$$

avec les mêmes propriétés pour γ . Comme $\mathfrak{z}_t$ peut être nul sur un ensemble de mesure β- non nul, on introduit la suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt suivante :

$$T_n(x) = \inf\{t : \mathfrak{z}_t(x) < 1/_n\}$$

T_n est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{B}}^c_t)$ et

$$\mathfrak{z}_{t\wedge T_n} = 1 + \int_o^{t\wedge T_n} \gamma(s,x)\, d\, x_s \quad .$$

On a $P_Y = \mathfrak{z}_{t\wedge T_n} \cdot \beta$ sur $\hat{\mathcal{B}}^c_{t\wedge T_n}$ et comme $\mathfrak{z}_{t\wedge T_n} \geq 1/_n$

$\beta = \mathfrak{z}^{-1}_{t\wedge T_n} \cdot P_Y$ sur $\hat{\mathcal{B}}^c_{t\wedge T_n}$, donc $E_{P_Y}\left[\mathfrak{z}^{-1}_{t\wedge T_n}\right] = 1$.

En appliquant le lemme de Fatou, on en déduit que :

$$E_{P_Y}\left[\mathfrak{z}^{-1}_{t\wedge T}\right] \leq 1 \quad , \text{où} \quad T = \lim_n T_n \quad .$$

Ceci montre que $P_Y\left[T < 1\right] = 0$ et que

$$P_Y\left[\int_o^1 \frac{\|\gamma(s,x)\|^2}{\mathfrak{z}^2(s,x)}\, ds < \infty\right] = 1 \quad .$$

Soit w^n le processus défini sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),\beta)$ par :

$$w^n_t(x) = -\int_o^t 1_{s\leq T_n} \frac{\gamma(s,x)}{\mathfrak{z}(s,x)}\, ds + x_t \quad .$$

D'après le théorème de Girsanov et 3.4. w^n est un mouvement brownien sur la base $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),P_n)$ avec $P_n = \mathfrak{z}_{t\wedge T_n} \cdot \beta$ sur $\hat{\mathcal{B}}^c_t$.

Soit w le processus défini sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),\beta)$ par :

$$w_t(x) = -\int_o^t 1_{s\leq T} \frac{\gamma(s,x)}{\mathfrak{z}(s,x)}\, ds + x_t \quad .$$

On remarque que d'après ce qui précède :

$$w_t(x) = -\int_o^t \frac{\gamma(s,x)}{\mathfrak{z}(s,x)}\, ds + y_t(x) \quad P_Y\text{.p.s.}$$

Il suffit pour terminer la démonstration de montrer que w est un mouvement brownien sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),P_Y)$.

Or $(w \cdot \mathfrak{z})_{t\wedge T_n} = (w^n \cdot \mathfrak{z})_{t\wedge T_n} = w^n_{t\wedge T_n} \cdot \mathfrak{z}_{t\wedge T_n}$. Par conséquent

$(w \cdot \mathfrak{z})_{\cdot\wedge T_n}$ est une martingale sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_{t\wedge T_n}),\beta)$ et donc

$\mathcal{W}_{.\wedge T_n}$ est une martingale sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_{t\wedge T_n}), \mathcal{Z}_{.\wedge T_n} \cdot \beta)$ c'est-à-dire sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_{t\wedge T_n}),P_Y)$ donc aussi sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),P_Y)$.

$\mathcal{W}$ est donc une martingale locale sur $(c,(\hat{\mathcal{B}}^c_t),P_Y)$. La définition de $\mathcal{W}$, le caractère brownien de $\mathcal{W}^n$, l'absolue continuité $P_Y \ll P_n$, montrent que $\mathcal{W}$ admet pour processus à variation bornée associée :

$$\langle \mathcal{W}^i, \mathcal{W}^j \rangle_t = \langle \mathcal{W}^{n_i}, \mathcal{W}^{n_j} \rangle_t = \delta_{ij} \cdot t \quad .$$

D'où le résultat.

4.- Problèmes d'égalités de tribus

4.1. Introduction

Dans ce paragraphe nous posons le problème de l'égalité des complétions des tribus $\mathcal{B}^c$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ relativement à la mesure P , $(P,\mathcal{W})$ étant solution faible de l'équation (1) étudiée au paragraphe précédent. Cette question a été étudiée intensivement en théorie du filtrage où des résultats partiels sont connus (voir à ce sujet les références [12] [19] [20] [22] [23] [24]). Nous avons abordé cette question en utilisant un argument, exposé de façon non satisfaisante dans [4], lemme 10 , consistant à contredire l'unicité de la solution faible de l'équation (1) . On peut alors donner une réponse positive, dans le cas particulier où Y est un processus gaussien. D'autre part, dans le cas général, des directions de recherche sont données, qui fournissent un éclairage nouveau à ce problème d'égalité des tribus, mais n'ont pas abouti pour le moment à des résultats significatifs.

4.2. Lemme

Soit $\mathcal{W}$ un mouvement brownien défini sur la base $(c,(\mathcal{B}^c_t),P)_{0\leq t\leq 1}$

alors :

① pour tout $t \in]0,1[$, la tribu $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{[t,1]}$ engendrée par les variables aléatoires $\mathcal{W}^c_{t_2} - \mathcal{W}^c_{t_1}$ pour tout $t_2 > t_1 \geq t$ est indépendante de $\mathcal{B}^c_t$.

② pour toute variable aléatoire U, $\mathcal{B}^c_t$-mesurable on a :

$$E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t] = E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}]$$

Démonstration.

① Soit A un élément de $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{[t,1]}$, 1_A étant élément de $\mathbb{L}^2[c, \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{[t,1]}, P]$ on a la représentation :

$$1_A = P(A) + \int_t^1 (\psi_t(s,x), d\,\mathcal{W}_s)$$

où ψ_t est élément de $\mathbb{L}^2[c \times [0,1], \mathcal{F}^{\mathcal{W}} \otimes \mathcal{B}_{[0,1]}, P \otimes \lambda]$, λ mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, adapté à la famille $(\mathcal{F}^{\mathcal{W}}_s)_{s \geq t}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$

Soit $B \in \mathcal{B}^c_t$, $E[1_A . 1_B] = P_{(A)} . P_{(B)} + E[1_B . \int_t^1 (\psi_t(s,x), d\,\mathcal{W}_s)] = P[A] . P[B]$ puisque $E[1_B . \int_t^1 (\psi_t(s,x), d\,\mathcal{W}_s)] = E[\int_t^1 1_B . (\psi_t(s,x), d\,\mathcal{W}_s)] = 0$

② Remarquons que $\mathcal{F}^{\mathcal{W}} = \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t \vee \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{[t,1]}$. Soit l'anneau $\mathcal{C}$ engendré par les éléments $A \cap B$, où $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t$ et $B \in \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{[t,1]}$. Nous allons montrer que les mesures $E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t].P$ et $E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}].P$ coïncident sur $\mathcal{C}$ ce qui nous donnera par prolongement de mesurabilité le résultat désiré.

$$\int_{A \cap B} E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}] dP = E[1_A . 1_B\, E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}]] = E[E[1_A . 1_B\, U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}]]$$

$$= E[1_A . 1_B\, U] = E[1_B] . E[1_A . U] \quad \text{(d'après ①)}$$

$$= E[1_B] . E[E[1_A . U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t]] = E[1_B]\, E[1_A . E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t]]$$

$$= E[1_B . 1_A\, E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t]] = \int_{A \cap B} E[U \mid \mathcal{F}^{\mathcal{W}}_t] dP$$ d'où le résultat.

4.3.- Lemme

Soit Y et $\mathcal{W}$ deux processus gaussiens définis sur la base

$(c,\mathcal{B}_t^c),P)$ tels que :

a) Y est la fonction aléatoire canonique

b) $\mathcal{W}^2$ est un mouvement brownien sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P)$.

Alors, si les P-complétions de $\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}^2}$ et $\mathcal{B}^c$ sont différentes, on peut définir une probabilité P' différente de P telle que :

1 - P' absolument continue par rapport à P

2 - Les restrictions de P et P' à $\mathcal{F}^{\mathcal{W}^2}$ coïncident

3 - $\mathcal{W}^2$ est un mouvement brownien sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P')$.

Démonstration.

On considère les espaces gaussiens H^Y et $H^{\mathcal{W}^2}$ correspondant aux processus Y et $\mathcal{W}^2$. Soit H^Z le supplémentaire orthogonal de $H^{\mathcal{W}^2}$ dans H^Y , $H^Y = H^Z \oplus H^{\mathcal{W}^2}$.

Désignons par $\mathcal{F}^Z$ la tribu engendrée par les éléments de H^Z .
$\mathcal{F}^Z$ est indépendante de $\bar{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}^2}$ et on a :

$$\bar{\mathcal{B}}^c = \mathcal{F}^Z \vee \bar{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}^2} \quad \text{(voir par exemple : [16]) .}$$

On considère de façon analogue H_t^Y, H_t^Z, $H_t^{\mathcal{W}^2}$; H_t^Y (resp : $H_t^{\mathcal{W}^2}$) designe l'espace gaussien défini par les variables gaussiennes Y_s (resp : $\mathcal{W}^2_s$) pour $s \leq t$. H_t^Z est le supplémentaire orthogonal de $H_t^{\mathcal{W}^2}$ dans H_t^Y : $H_t^Y = H_t^Z \oplus H_t^{\mathcal{W}^2}$.

Désignons par $\mathcal{F}_t^Z$ la tribu engendrée par les éléments de H_t^Z .
$\mathcal{F}_t^Z$ est indépendante de $\bar{\tilde{\mathcal{F}}}_t^{\mathcal{W}^2}$ et on a : $\bar{\mathcal{B}}_t^c = \mathcal{F}_t^Z \vee \bar{\tilde{\mathcal{F}}}_t^{\mathcal{W}^2}$.

Le lemme 4.2. implique $\mathcal{F}_t^Z \subset \mathcal{F}^Z$. En effet, il suffit pour cela d'avoir $H_t^Z \subset H^Z$: or soit $\mathfrak{z} \in H_t^Z$ on a :

$$0 = \mathrm{Proj}_{H_t^{\mathcal{W}^2}}\mathfrak{z} = E[\mathfrak{z} \mid \bar{\tilde{\mathcal{F}}}_t^{\mathcal{W}^2}] = E[\mathfrak{z} \mid \bar{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}^2}] = \mathrm{Proj}_{H^{\mathcal{W}^2}}\mathfrak{z} \, .$$

$\mathfrak{z}$ étant une variable gaussienne de H_t^Y , donc de H^Y et étant orthogonal à $H^{\mathcal{W}^2}$, appartient à H^Z

$\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c}$ et $\mathcal{F}^Z$ étant indépendantes et engendrant $\bar{\mathcal{B}}^c$, l'espace probabilisé $(c, \bar{\mathcal{B}}^c, P)$ est isomorphe à l'espace produit, $(c \times c, \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c} \otimes {}^Z$, $P_1 \otimes P_2)$ où P_1 et P_2 sont les restrictions de P à $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c}$ et $\mathcal{F}^Z$ respectivement. Soit P_2' une probabilité sur $(c, \mathcal{F}^Z)$ différente de P_2 et telle que $P_2' \ll P_2$ (on peut trouver un tel P_2' si $\mathcal{F}^Z$ est différente de la tribu grossière, c'est-à-dire si $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c} \neq \bar{\mathcal{B}}^c$).
On considère P' probabilité sur $(c, \mathcal{B}^c)$ associée à la probabilité $P_1 \otimes P_2'$ sur $(c \times c, \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c} \otimes \mathcal{F}^Z)$. Montrons alors que $\mathcal{U}^c$ est un mouvement brownien sur la base $(c, (\mathcal{B}_t^c), P')$:

a) P et P' ayant même restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{U}^c}$, et la variation quadratique de $\mathcal{U}^c$ étant $\overline{\mathcal{F}^{\mathcal{U}^c}}^P$-mesurable, on aura pour P' comme pour P :

$$\langle \mathcal{U}^{c\,i}, \mathcal{U}^{c\,j} \rangle_t = \delta_{ij}.t$$ où $\langle \mathcal{U}^{c\,i}, \mathcal{U}^{c\,j} \rangle$ désigne le processus à variation bornée associé au produit des martingales coordonnées $\mathcal{U}^{c\,i}, \mathcal{U}^{c\,j}$.

b) Soit $s \in [0,1[$, $\mathcal{C}_s$ l'anneau engendré par les éléments $A_s \cap B_s$ où $A_s \in \mathcal{F}_s^{\mathcal{U}^c}$, $B_s \in \mathcal{F}_s^Z$; pour montrer que $\mathcal{U}^c$ est une martingale sur $(c, (\bar{\mathcal{B}}_t^c), P')$, il suffit de montrer : $\int_{A_s \cap B_s} (\mathcal{U}_t^c - \mathcal{U}_s^c)\, d\,P' = 0$ pour tout $t>s$. (On aura alors cette relation pour tout $F \in \mathcal{C}_s$, et donc pour $F \in \mathcal{B}^c{}_s$ en prolongeant par mesurabilité).

$\int_{A_s \cap B_s} (\mathcal{U}_t^c - \mathcal{U}_s^c)\, dP' = \int 1_{A_s} (\mathcal{U}_t^c - \mathcal{U}_s^c)\, 1_{B_s}\, dP' = \int 1_{A_s} (\mathcal{U}_t^c - \mathcal{U}_s^c)\, dP_1 \int 1_{B_s}\, dP'_2$ puisque $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}_s^{\mathcal{U}^c} \subset \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c}, \mathcal{F}^Z \subset \mathcal{F}^Z$ et que $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{U}^c}$ et $\mathcal{F}^Z$ sont indépendants pour la mesure P'. Mais $\mathcal{U}^c$ est une martingale sur la base $(c, (\mathcal{F}_t^{\mathcal{U}^c}), P_1)$ et donc $\int 1_{A_s} (\mathcal{U}_t^c - \mathcal{U}_s^c)\, d\,P_1 = 0$. D'où le résultat .

4.4.- Théorème

Soit α avec les données de la définition 3.1., soit Y et W deux processus définis sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$, la famille $(\mathcal{F}_t)$ étant P-complète, avec les hypothèses :

(A) W est un mouvement brownien

(B') pour tout $t \in [0,1]$ $Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + W_t(\omega)$ P.p.s.

(j) pour tout $x \in c$, $\int_0^t ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty$

(M) il existe une probabilité P', différente de P si $\mathcal{F}^{\mathcal{W}} \neq \mathcal{B}^c$ définie sur $(c,\mathcal{B}^c)$ et telle que :

1- P' et P_Y coïncident sur $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$

2- $\mathcal{W}$ est une martingale sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P')$ ($\mathcal{W}$ étant obtenu par factorisation de W , lemme 2.4.).

Alors les P-complétions des tribus $\mathcal{F}_t^Y$ et $\tilde{\mathcal{F}}_t^W$ sont égales pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.

On montre d'abord que $\bar{\mathcal{F}}^Y = \tilde{\mathcal{F}}^W$. Les hypothèses faites donnent la relation :

4.41. $$\mathcal{Y}_t(x) - \int_0^t \alpha(s,x)\, ds = \mathcal{W}_t(x) \quad .$$

4.41. exprime que $(P_Y,\mathcal{W})$ est solution faible unique de l'équation (1). Comme on a les égalités $Y^{-1}[\bar{\mathcal{B}}^c] = \bar{\mathcal{F}}^Y$ et $Y^{-1}[\bar{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}] = \bar{\tilde{\mathcal{F}}}^W$, il suffit de montrer que $\bar{\mathcal{B}}^c = \bar{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}$. Si ce n'est pas le cas, d'après l'hypothèse (M) , $\mathcal{W}$ est une martingale sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P')$ donc un mouvement brownien (c'est immédiat à vérifier) sur cette base. Les deux membres de 4.41. sont $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ mesurables et 4.41. est vrai P_Y et P'.p.s. On obtient ainsi deux solutions faibles $(P_Y,\mathcal{W})$ et $(P',\mathcal{W})$ de l'équation (1) , différentes . D'où la contradiction.

Montrons maintenant que $\bar{\mathcal{F}}_t^Y = \bar{\tilde{\mathcal{F}}}_t^W$ pour tout $t<1$. Soit U une variable aléatoire $\mathcal{B}^c_t$-mesurable, d'après le lemme 4.2. on a la relation :

$E\left[u \mid \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}_t\right] = E\left[U \mid \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}\right]$; d'où $\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{B}}^c$ implique $u = E\left[U \mid \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}_t\right]$.

Ce qui montre que $\bar{\mathcal{B}}^c_t = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}_t$. Comme $\bar{\mathcal{F}}^Y_t = Y^{-1}\left[\bar{\mathcal{B}}^c_t\right]$ et que $Y^{-1}\left[\tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}_t\right] = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^W_t$ on a la relation voulue.

4.5. Théorème.

Avec les mêmes données et hypothèses que pour le théorème 4.4. à l'exception de (j) remplacé par :

(k) $P\left[\int_0^1 ||\alpha(s,Y(\omega))||^2 \, ds < \infty\right] = 1$,

et de (M) remplacé par :

(M') : (M) est vérifiée et $P' \ll P_Y$

ou par :

(M"): pour tout α vérifiant les données et tout Y et W vérifiant les hypothèses (A), (B') et (j), l'hypothèse (M) est vérifiée ,

alors les P-complétions des tribus $\mathcal{F}^Y_t$ et $\tilde{\mathcal{F}}^W_t$ sont égales pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.

(On fera la démonstration en utilisant l'hypothèse (M')).

Il suffit de montrer que $\bar{\mathcal{B}}^c = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}$. En effet, comme dans la démonstration de 4.4. on peut écrire :

$\mathcal{Y}_t(x) - \int_0^t \alpha(s,x) \, ds = \mathcal{W}_t(x)$, sur la base $(c, (\mathcal{B}^c_t), P_Y)$

et on utilise alors le lemme 4.2. pour obtenir $\bar{\mathcal{B}}^c_t = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}_t$ pour $t<1$. Les techniques utilisées sont les mêmes que pour la démonstration du théorème 2.8. : on peut trouver $\tilde{\alpha}(t,x)$, P_Y-modification de $\alpha(t,x)$ ayant les mêmes propriétés de mesurabilité, et tel que

$$t \rightsquigarrow \int_0^t ||\alpha(s,x)||^2 \, ds$$

soit une application continue de $[0,1]$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. On définit alors la suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ stricte par :

$$T_n = \sup \{t : \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 \, ds < n\} \quad \text{(lemme 2.81.)} .$$

On se restreint à $c_o = \{x \in c : \int_0^1 ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 \, ds < \infty\}$. On note $\mathcal{B}_t^{c_o}$ la trace de $\mathcal{B}_t^c$ sur c_o , $\mathcal{F}^{\mathcal{W}^o}$ la trace de $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ sur c_o , et P_Y^o (resp : P'^o) la probabilité induite de P_Y (resp : P') sur $(c_o, \mathcal{B}^{c_o})$.

$\overline{\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}^o}}^{P_Y^o}$ désigne la complétion de $\mathcal{F}^{\mathcal{W}^o} \vee \mathcal{N}_o$, où $\mathcal{N}_o$ est la famille des ensembles de P_Y^o-mesure nulle de $\mathcal{B}^{c_o}$. c_o étant $\mathcal{B}^c$-mesurable, et de mesure P_Y égale à 1 , on a les relations :

$$\overline{\mathcal{B}^c}^{P_Y} = \overline{\mathcal{B}^{c_o}}^{P_Y^o} \vee \mathcal{C}\{\widetilde{c - c_o}\} \text{ et } \overline{\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}}}^{P_Y} = \overline{\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}^o}}^{P_Y^o} \vee \mathcal{C}(\widetilde{c - c_o})$$

on montrera donc, ce qui suffira, l'égalité : $\overline{\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}^o}}^{P_Y^o} = \overline{\mathcal{B}^{c_o}}^{P_Y^o}$.

Sur la base $(c_o, (\mathcal{B}_t^{c_o}), P_Y^o)$ on définit des processus Y^n d'approximation de $\mathcal{Y}$ par :

$$Y_t^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) \quad \text{si} \quad t \leq T_n(x)$$

$$Y_t^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) - \int_{T_n}^t \tilde{\alpha}(s,x)ds \quad \text{si} \quad t > T_n(x) \quad .$$

D'après le lemme 2.82. on a :

2.821. $T_n(x) = T_n(Y^n(x))$ pour tout $x \in c_o$

2.822. $Y_t^n(x) = \int_0^t \alpha^n(s,Y^n(x)) \, ds + \mathcal{W}_t(x)$ P_Y^o.p.s. et d'après (M') , P'^o.p.s. , $\alpha^n(s,x)$ désignant $1_{s<T_n}(x) \, \tilde{\alpha}(s,x)$.

Comme $\int_0^1 ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2 \, ds \leq n < \infty$ l'hypothèse (j) est vérifiée de même que les hypothèses (A) et (B') du théorème 4.4.. L'hypothèse (M) est aussi vérifiée: En effet, P_o^Y et P'^o sont des probabilités différentes sur $(c_o, \mathcal{B}^{c_o})$, car $P' \ll P_Y$ implique $P'(c_o) = P(c_o) = 1$. $Y^n. P_o^Y$ et $Y^n. P'^o$ sont également différentes sur $(c, \mathcal{B}^c)$ à partir d'un certain n , puisque $Y^n(x) = x$ sur c_o pour tout x tel que $T_n(x) = 1$ et que, pour tout $x \in c_o$ $T_n(x) \to 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

On a donc $\overline{\mathcal{F}}^{Y_n} = \overline{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathring{w}}$ (complétions pour P_Y^o) .

$\mathcal{F}^{Y_n}_{T_n} = \mathcal{B}^{c_o}_{T_n}$ puisque ces deux tribus sont engendrées par les applications $x \rightsquigarrow x_{t \wedge T_n}$, $t \leq 1$ pour $x \in c_o$. Comme $T_n(x) \longrightarrow 1$ pour $x \in c_o$ on a $\mathcal{B}^{c_o} = \bigvee_n \mathcal{B}^{c_o}_{T_n}$, d'où $\mathcal{B}^{c_o} \subset \mathcal{F}^{Y_n} \subset \overline{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathring{w}}$, d'où l'égalité $\overline{\mathcal{B}}^{c_o} = \overline{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathring{w}}$ puisque l'inclusion $\overline{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathring{w}} \subset \overline{\mathcal{B}}^{c_o}$ est réalisée trivialement.

La démonstration avec l'hypothèse (M") est plus simple puisque cette hypothèse exprime que (M) est vérifiée en particulier pour l'équation 2.822.

4.6. Corollaire.

Avec les données du théorème 4.4. et les hypothèses (A), (B') (k) , si Y est un processus gaussien, alors les complétions des tribus $\mathcal{F}_t^Y$ et $\tilde{\mathcal{F}}_t^W$ sont égales.

En effet, le lemme 4.3. montre que l'hypothèse (M') est vérifiée . On peut alors appliquer le théorème 4.5.

4.7. Remarques sur les hypothèses (M'), (M")

① Il est facile de trouver une probabilité P' définie sur $(c, \mathcal{B}^c)$ différente de P , si $\overline{\tilde{\mathcal{F}}}^{w} \neq \overline{\mathcal{B}}^c$, telle que $P' \ll P$, avec les restrictions de P' et P à $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ coïncident. Il suffit par exemple de prendre un ensemble $A \in \mathcal{B}^c$ avec $A \notin \tilde{\overline{\mathcal{F}}}^{\mathcal{W}}$. On pose alors pour tout $F \in \mathcal{B}^c$, $P'(F) = P(F) + \int_F (1_A - E[1_A | \mathcal{F}^{\mathcal{W}}])\, dP$.

Cependant, pour une telle probabilité P', nous n'aurons pas en général, martingalité de $\mathcal{W}$ sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P')$.

② Une autre approche est possible : on se place dans le cadre des hypothèses (A); (B'), (j) du théorème 4.4. $\mathcal{W}$ est une application de $(c,\mathcal{B}^c)$ dans $(c,\mathcal{B}^c)$, définie pour tout t par :

$$\mathcal{W}_t(x) = x_t - \int_0^t \alpha(s,x)\, ds \quad .$$

Notons $\tilde{c} = \mathcal{W}(c)$ et $\mathcal{B}_t^{\tilde{c}}$ la tribu trâce de $\mathcal{B}_t^c$ sur $\tilde{c}$. La mesure image de P_Y par $\mathcal{W}$ est la mesure brownienne β. Considérons la famille $\overline{(\mathcal{B}_t^{\tilde{c}})}^{\beta}$ des complétées de $(\mathcal{B}_t^{\tilde{c}})$ pour β. Le graphe $\Gamma = \{(x,y) \in c \times \tilde{c} : y = \mathcal{W}(x)\}$ de $\mathcal{W}$ est un borélien de $c \times \tilde{c}$. On peut, utilisant les propriétés topologiques de c et $\tilde{c}$, trouver une section u de Γ, à savoir dans ce cas particulier une application mesurable u de $(\tilde{c},\mathcal{B}^{\tilde{c}})$ dans $(c,\mathcal{B}^c)$, telle que pour tout $y \in \tilde{c}$, $\mathcal{W} \circ u(y) = y$. La mesure image $u(\beta)$ de β par u est alors définie sur $(c,\mathcal{B}^c)$. Elle coïncide avec P_Y sur $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ et a la propriété de complétion suivante : $\overline{\mathcal{F}^{\mathcal{W}}}^{u(\beta)} \supset \mathcal{B}^c$. Notons cette mesure P'. P' est différente de P_Y si les complétions de $\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{W}}$ et de $\mathcal{B}^c$ pour P_Y sont différentes. (Tout ceci est fortement inspiré de l'article [17] de Ershov, en particulier, de la démonstration du théorème 1.1. et du paragraphe II).

Cependant, nous ne savons pas si la propriété de complétion correspondante pour $t<1$ est vraie, à savoir si $\overline{\mathcal{F}_t^{\mathcal{W}}}^{P'} \supset \mathcal{B}_t^c$: c'est cette dernière propriété qui donnerait la martingalité de $\mathcal{W}$ sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P')$.

5.- Solutions fortes de (1)

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés par la suite. Il nous a cependant semblé important de les exposer pour deux raisons.

D'abord, ils dépendent étroitement de ce qui précède. Les précisions données dans les démonstrations renforcent les conclusions des théorèmes d'existence et d'unicité de [4] .

Ensuite, il est bien connu, depuis la parution d'un article de Yamada et Watanabe, que dans le cas d'équations différentielles stochastiques du type "Ito", l'unicité entrajectoires implique l'unicité en loi. (voir par exemple [8]).

La démonstration [8] demeure inchangée, si on considère des équations du type (1), ou plus généralement du type (2) .

$$(2)\quad Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y)\, ds + \int_0^t B(s,Y)\, d\, W_s \quad .$$

Le résultat de Yamada-Watanabe reste donc vrai pour les équations (1) et (2) .

Il est alors intéressant de noter la démarche inverse faite dans ce paragraphe : on démontre l'unicité trajectorielle de (1), à l'aide de l'unicité en loi et d'une propriété garantissant l'égalité des tribus étudiée dans le paragraphe 4 .

5.1.- Définition

Etant donné W un mouvement brownien standard défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0\leq t\leq 1}$, on appelle solution forte de l'équation (1) un processus Y , défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que l'on ait :

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + W_t(\omega) \quad P.p.s.$$

Une solution forte est dite unique (unicité trajectorielle) si deux solutions Y^1 et Y^2 processus sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ sont indistinguables.

Le lemme suivant, communiqué par M. Métivier, ne figurant pas dans [4] nous semble indispensable pour valider les arguments utilisés dans ce paragraphe.

5.2. Lemme

Soit $(\Omega_1,\mathcal{F})$ et $(\Omega_2,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables . Soit f une application mesurable de $(\Omega_1,\mathcal{F})$ dans $(\Omega_2,\mathcal{B})$. Soit $\mathcal{B}'$ la tribu engendrée par f . Soit Λ un espace métrisable compact et $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ un ensemble d'applications réelles , $\mathcal{B}'$-mesurables sur Ω_1 , telles que pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\alpha \rightsquigarrow X_\alpha(\omega)$ soit continue.

Alors, il existe une factorisation des applications X_α telle que pour tout α les h_α soient $\mathcal{B}$-mesurables et que pour tout $x \in \Omega_2$, les applications $\alpha \rightsquigarrow h_\alpha(x)$ soient continues.

$$\begin{tikzcd} (\Omega_1,\mathcal{B}') \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "X_\alpha"'] & & (\Omega_2,\mathcal{B}) \arrow[dl, "h_\alpha"] \\ & (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) & \end{tikzcd}$$

Démonstration.

Soit $c(\Lambda)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur Λ muni de la norme de la convergence uniforme, et $\mathcal{B}_\Lambda$ la tribu associée. Comme Λ est métrisable, $c(\Lambda)$ est séparable.

L'application $X : \omega \rightsquigarrow X_{(.)}(\omega)$ est mesurable de $(\Omega,\mathcal{B}')$ dans $(c(\Lambda),\mathcal{B}_\Lambda)$ et peut être approchée uniformément sur Λ par une famille X^n d'applications de la forme :

$$X^n_{(.)}(\omega) = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k(.)\, 1_{[f\in B_k]}(\omega) \quad \text{où } B_k \in \mathcal{B}, \varphi_k \in c(\Lambda) , p \in \mathbb{N} .$$

Pour ces X^n on a la factorisation :

$$h^n_{(.)}(x) = \begin{cases} \varphi_k(.) & \text{si } x \in B_k \\ o & \text{si } x \notin \bigcup_k B_k \end{cases}$$

Soit Ω_2^o , l'ensemble des x de Ω_2 tels que h^n converge uniformément sur Λ . Alors :

$$\Omega_2^o = \bigcap_m \bigcup_n \bigcap_{p \geq n} \left\{ x : \sup_{\alpha \in \Lambda} \left| h^p_\alpha(x) - h^n_\alpha(x) \right| \leq \frac{1}{m} \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2^o \in \mathcal{B}$$

Enfin, $\Omega_2^o \supset f(\Omega_1)$. En effet, soit $x \in f(\Omega_1)$, prenons $\omega \in \Omega_1$ avec $f(\omega) = x$. Alors :

$$h^n_{(.)}(x) = X^n_{(.)}(\omega) .$$

Comme $X^n_{(.)}(\omega)$ converge uniformément sur Λ vers $X_{(.)}(\omega)$, $x \in \Omega_2^o$.

On prend alors $h_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_n h^n_\alpha(x) & \text{si } x \in \Omega_2^o \\ o & \text{si } x \notin \Omega_2^o \end{cases}$

et nous avons la factorisation voulue.

Remarque

On obtient une factorisation analogue si les applications X_α (au lieu d'être à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

5.3. Théorème. (d'après [4] théorème 23, p. 83)

Soit W un mouvement brownien , défini sur une base de processus $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$, la famille $(\mathcal{F}_t)$ étant P-complète. Supposons réalisées les conditions (j) et (jj) du théorème 3.2., et la condition (M) du théorème 4.4.. Alors l'équation (1) admet une solution forte Y , relative à W et à la base de processus $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$.

Démonstration.

Soit $(\tilde{P},\mathcal{W})$ la solution faible existant d'après le théorème 3.2.

Utilisant le théorème 4.4., on a :

$$\bar{\mathcal{B}}_t^c = \widetilde{\vartheta^{-1}\left[\bar{\mathcal{B}}_t^c\right]} \ .$$

Appliquant le lemme 5.2. précédent, on a la factorisation $\tilde{P}$-presque sûre :

pour tout $t \in [0,1]$ $x_t = \Delta_t \circ \vartheta$ $\tilde{P}$.p.s.

d'où l'existence ($t \rightsquigarrow \Delta_t$ étant continue)

d'une application $\Delta : (c,\bar{\mathcal{B}}^c) \rightsquigarrow (c,\mathcal{B}^c)$

telle que $x = \Delta \circ \vartheta(x)$, $\tilde{P}$.p.s.

$$\begin{tikzcd}
(c,\bar{\mathcal{B}}^c) \arrow[rr, "\vartheta"] \arrow[dr, "x_t"'] & & (c,\bar{\mathcal{B}}^c) \arrow[dl, "\Delta_t"] \\
& (R^q, \mathcal{B}_{R^q}) &
\end{tikzcd}$$

La relation 3.11. peut s'écrire :

$$\vartheta_t\,(x) = -\int_0^t \alpha(s,\Delta \circ \vartheta(x))\,ds + \Delta_t \circ \vartheta(x) \quad \tilde{P}.\text{p.s.}$$

ou $$x_t = -\int_0^t \alpha(s,\Delta(x))\,ds + \Delta_t(x) \quad \beta.\text{p.s.}$$

W étant un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ nous obtenons :

$$W_t(\omega) = -\int_0^t \alpha(s,\Delta \circ W(\ )) \,ds + \Delta_t \circ W(\omega) \quad P.\text{p.s.}$$

Ce qui exprime que le processus Y défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ par $Y_t(\omega) = \Delta_t \circ W(\omega)$ est solution forte de l'équation (1) .

Le corollaire suivant montre le rapport entre les égalités de tribus et l'existence de solutions fortes de (1) .

5.31. <u>Corollaire</u>

Avec les conditions (j) et (jj) les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour chaque mouvement brownien W défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ l'équation (1) admet une solution forte Y .

② Les tribus $\mathcal{B}_t^c$ et $\tilde{\mathcal{F}}_t^{\vartheta}$ ont leurs β-complétions égales pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration

②⟹① . C'est le théorème précédent, puisque la condition M , avec les autres hypothèses implique l'égalité des tribus énoncée dans ② . C'est cette égalité que l'on utilise pour démontrer 5.3.

①⟹② . D'après ① , l'équation (1) admet une solution forte Y , relativement au mouvement brownien W défini sur la base $(\Omega,(\tilde{\mathcal{F}}_t^W),P)$ ce qui montre l'inclusion $\mathcal{F}_t^Y \subset \tilde{\mathcal{F}}_t^W$, l'inclusion réciproque étant réalisée trivialement.

Nous obtenons maintenant la version suivante du théorème 24, p. 88 de [4] .

5.4. Théorème

Supposons réalisée la condition (j) du théorème 3.2. et la condition (M) du théorème 4.4.. Alors s'il existe une solution forte de l'équation (1) relative à un mouvement brownien W et à une base de processus $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$/ $\mathcal{F}_t$ étant P-complète, cette solution est unique.

Démonstration

Soit Y^1 et Y^2 solutions fortes de (1), relatives au mouvement brownien W défini sur la base $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$; Y^1 et Y^2 on peut associer les solutions faibles (P_{Y^1},ϑ^1) et (P_{Y^2},ϑ^2) de (1), d'après le corollaire 3.3. $P_{Y^1} = P_{Y^2}$, donc $\vartheta^1 = \vartheta^2$ puisque ces deux browniens sont définis par P_Y et l'application ϑ de c dans c telle que $\vartheta_t(x) = x_t - \int_0^t \alpha(s,x)\, ds$.

Notons (P_Y,ϑ) cette solution faible unique. On a :

5.41. $$\vartheta \circ Y^i = W \quad P.p.s. \ , \ i = 1,2$$

Le théorème 4.4. donne les égalités :

$$\overline{\mathcal{F}}_t^{Y^1} = \overline{\mathcal{F}}_t^{W} = \overline{\mathcal{F}}_t^{Y^2} \quad \text{(complétions relatives à } P \text{)} .$$

D'après le lemme 5.2. , on peut trouver une factorisation de Y^i

5.42. $$Y^i = \Delta_i \circ W \quad P.p.s. \quad i = 1,2$$

En combinant 5.41. et 5.42. on obtient :

5.43. $\vartheta \circ \Delta_i(x) = x \quad \beta.p.s.$

5.44. $\Delta_i \circ \vartheta(x) = x \quad P_Y.p.s.$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathcal{F},P) \arrow[rr, "W"] \arrow[dr, "Y_i"'] & & (c,\overline{\mathcal{B}}^c,\beta) \arrow[dl, shift left, "\Delta_i"'] \\
& (c,\overline{\mathcal{B}}^c,P_Y) \arrow[ur, shift left, "\vartheta"'] &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme ci-contre est presque surement commutatif. On notera que $\overline{\mathcal{B}}^c$ désigne aussi bien la complétion relative à la mesure brownienne β que relative à la mesure P_Y étant donné l'équivalence de ces mesures. Enfin la mesure image de β par Δ_i est la mesure P_Y en vertu de 4.34.

Désignons par c_ϑ l'ensemble $\{x \in c : \vartheta \circ \Delta_1(x) = \vartheta \circ \Delta_2(x) = x\}$

$c_\vartheta \in \overline{\mathcal{B}}^c \qquad \beta(c_\vartheta) = P_Y(c_\vartheta) = 1$.

Remarquons que $c \supset \Delta_1^{-1}\,[\Delta_1(c_\vartheta)] \supset c_\vartheta$

d'où $c \setminus \Delta_1^{-1}(c_\vartheta) \supset \Delta_1^{-1}\,[c \setminus \Delta_1(c_\vartheta)]$.

Comme $c \setminus \Delta_1^{-1}(c_\vartheta) = \Delta_1^{-1}\,[c \setminus c_\vartheta]$, cet ensemble est de mesure β - nulle .

D'où $\Delta_1^{-1}\left[c\setminus\Delta_1(c_{\vartheta})\right]$ est de mesure β extérieure nulle.
(en effet $\Delta_1(c_{\vartheta})$ n'est pas forcément $\mathcal{B}^c$-mesurable).
Et donc $c\setminus\Delta_1(c_{\vartheta})$ est de mesure P_Y-extérieure nulle. De même $c\setminus\Delta_2(c_{\vartheta})$ est de mesure P_Y-extérieure nulle. D'autre part,

$$c_{\vartheta}\subset\{x : \Delta_1(x)=\Delta_2(x)\}\cup\left\{c\setminus\Delta_2^{-1}\left[\Delta_1(c_{\vartheta})\right]\cap\Delta_1^{-1}\left[\Delta_2(c_{\vartheta})\right]\right\} .$$

En effet, soit $x\in c_{\vartheta}$ et $x\in\Delta_2^{-1}\left[\Delta_1(c_{\vartheta})\right]\cap\Delta_1^{-1}\left[\Delta_2(c_{\vartheta})\right]$

Alors il existe $y\in c_{\vartheta}$ tel que $\Delta_2(x) = \Delta_1(y)$

il existe $z\in c_{\vartheta}$ tel que $\Delta_1(x) = \Delta_2(z)$.

D'où $x=\vartheta\circ\Delta_2(x)=\vartheta\circ\Delta_1(x)=\vartheta\circ\Delta_2(z)=\vartheta\circ\Delta_1(y)$.

Ce qui nous donne $x=y=z$ et $\Delta_1(x)=\Delta_2(x)$.

Comme $c\setminus\Delta_1(c_{\vartheta})$ est de mesure P_Y-extérieure nulle, $c\setminus\Delta_2^{-1}\left[\Delta_1(c_{\vartheta})\right]$ est de mesure β-extérieure nulle, de même $c\setminus\Delta_1^{-1}\left[\Delta_2(c_{\vartheta})\right]$ est de mesure β-extérieure nulle. Il en est de même pour $c\setminus\left(\Delta_1^{-1}\left[\Delta_2(c_{\vartheta})\right]\cap\Delta_2^{-1}\left[\Delta_1(c_{\vartheta})\right]\right)$. Par conséquent $\beta\{x : \Delta_1(x)=\Delta_2(x)\}=1$ d'où $P\{\omega: Y^1(\omega)=Y^2(\omega)\}=1$.

Ce qui donne l'unicité cherchée.

6.- Résultats complémentaires relatifs aux processus Y qui satisfont (2)

$$Y_t=\int_0^t\alpha(s,Y)ds+\int_0^t B(s,Y)\ dW_s$$

6.1. Données et hypothèses

(a) α est une application de $[0,1]\times c$ dans $\mathbb{R}^q$, B est une application de $[0,1]\times c$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)$. Les processus α et B sont progressivement mesurables et adaptés à la famille de tribus $(\mathcal{B}_t^c)_{0\leq t\leq 1}$.

(b) Y et W sont des processus à trajectoires continues, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, définis sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$.

(c) W est un mouvement brownien

(d) $P\left[\int_0^1(||\alpha(s,Y(\omega))||^2 + ||B(s,Y(\omega))||^2 \, ds < \infty\right] = 1$

(e) B est une matrice inversible pour tout t et tout $x \in c$ et $||B(s,x)|| \geq k > 0$

(f) L'équation stochastique : (3) : $Z_t = \int_0^t B(s,Z) \, d W_s$ admet une solution faible unique

(g) $Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega)) \, ds + \int_0^t B(s,Y(\omega)) \, d W_s$ P.p.s.

6.2. Proposition

Avec les données et hypothèses a) à g) précédentes, et la condition h) suivante :

(h) $E\left[\varphi(\omega)\right] = 1$ où

$$\varphi(\omega)=\exp\left[-\int_0^1(B^{-1}(s,Y(\omega))\alpha(s,Y(\omega)), dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^1||B^{-1}(s,Y(\omega))\alpha(s,Y(\omega))||^2 ds\right]$$

Alors :

① Le processus Y est une martingale locale définie sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ avec $\tilde{P} = \varphi P$, par :

$$Y_t = \int_0^t B(s,Y) \, d \hat{W}_s \ ,$$

$\hat{W}$ étant un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\tilde{P})$ avec :

$$\hat{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t B^{-1}(s,Y(\omega))\alpha(s,Y(\omega)) \, ds \quad .$$

② En désignant par m la loi d'un processus solution de (3) P_Y et m sont des mesures équivalentes, les densités s'exprimant par les relations :

6.21. $$\frac{dm}{dP_Y}(x) = \exp\left[-\int_0^1(B^{-1}(s,x)\alpha(s,x), d\omega_s)- \frac{1}{2}\int_0^1||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2 \, ds\right] \quad P_Y.p.s.$$

6.22. $$= \exp\left[-\int_0^1(B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), d y_s) + \frac{1}{2}\int_0^1||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2 \, ds\right] \quad P_Y.p.s.$$

$$6.23.\quad \frac{dP_Y}{dm}(x) = \exp\left[\int_0^1 (B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), d\,y_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2\, ds\right]$$

$$6.24.\quad = \exp\left[\int_0^1 (B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), d\,\mathcal{X}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2\, ds\right]$$

m.p.s.

$\mathcal{W}$ étant un mouvement brownien défini sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ par la factorisation $W_t(\omega) = \mathcal{W}_t \circ Y(\omega)$ P.p.s.

<u>Démonstration</u>.

Soit le processus $\widehat{W}$, les hypothèses (d), (e), (h) permettent d'appliquer le théorème de Girsanov . $\widehat{W}$ est alors un mouvement brownien sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\widetilde{P})$.

et $Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y)ds + \int_0^t B(s,Y)\, d\,\widehat{W}_s - \int_0^t B(s,Y)\, B^{-1}(s,Y)\alpha(s,Y)\, ds$

$= \int_0^t B(s,Y)\, d\,\widehat{W}_s$.

D'après le lemme 2.6. cette dernière intégrale stochastique peut être considérée aussi bien pour la mesure P que pour la mesure $\widetilde{P}$, ce qui termine le ① .

Pour la partie ② on procède d'abord comme dans la démonstration de la proposition 2.1., d'où l'équivalence des mesures P et $\widetilde{P}$. On remarque aussi que la mesure image $\widetilde{P}_Y$ de $\widetilde{P}$ par l'application $Y\ (\Omega,\mathcal{F}) \rightsquigarrow (c,\mathcal{B}^c)$ est la mesure m (d'après l'hypothèse (f)).

On obtient alors l'équivalence des mesures P_Y et m .

Et $\frac{dm}{dP_Y}(x) = E\left[\varphi(\omega) \mid Y = x\right]$.

On en déduit la formule de densité 6.21. à condition d'obtenir la factorisation $W_t(\omega) = \mathcal{W}_t \circ Y(\omega)$ P.p.s.

Or on a $\int_0^t B^{-1}(s,Y)\, d\,Y_s = \int_0^t B^{-1}(s,Y)\alpha(s,Y)\, ds + W_t$ P.p.s.

Cette relation montre que W_t est $\widetilde{\mathcal{F}}_t^Y$-mesurable . On peut obtenir une modification $\mathcal{F}_t^Y$-mesurable, d'où la factorisation indiquée d'après le lemme 2.4.

On obtient 6.22. à partir de 6.21. et de la relation :

6.25. $\int_0^t B^{-1}(s,x)\, d\,\mathcal{Y}_s = \int_0^t B^{-1}(s,x)\alpha(s,x) + \mathcal{W}_t(x) \quad P_Y.p.s.$

A partir de la relation $\tilde{E}\left[\varphi^{-1}(\omega) \mid Y = x\right] = \frac{dP_Y}{dm}(x)$ on obtient 6.24. puis 6.23. (voir le corollaire 2.7.) à cause de l'équivalence des mesures P_Y et m .

6.3. Proposition

Avec les hypothèses (a) à (g) et avec la condition :

(d') : $m\left[\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty\right] = 1$

les mesures P_Y et m sont équivalentes.

Démonstration

Cette proposition est la généralisation du théorème 2.8., et la démonstration est calquée sur celle de ce théorème.

On considère l'espace canonique $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ correspondant au processus Y . On peut écrire

$$\mathcal{Y}_t(x) = \int_0^t \alpha(s,x)\, ds + \int_0^t B(s,x)\, d\,\mathcal{W}_s \qquad P_Y.p.s.$$

Soit $\tilde{\alpha}(s,x)$ une P_Y-modification de $\alpha(s,x)$ telle que $\tilde{\alpha}$ ait les propriétés de mesurabilité de α et que l'application $t \rightsquigarrow \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds$ soit continue.

On introduit alors les temps d'arrêts T_n de la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ avec

$$T_n = \sup\ \{t : \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2\, ds < n\}$$

et les processus Y^n d'approximation de $\mathcal{Y}$ définis sur la base $(c_o,(\mathcal{B}_t^{c_o}),P_Y^o)$ par :

$$\begin{cases} Y_t^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) & \text{si } t \leq T_n(x) \\ Y_{t'}^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) - \int_{T_n}^t \tilde{\alpha}(s,x)\, ds & \end{cases}$$

D'après le lemme 2.82.

$$Y_t^n(x) = \int_o^t 1_{s\leq T_n}(x)\ \alpha(s,Y^n(x)\ ds + M_t$$

où $M_t = \int_o^t B(s,x)\ d\,\mathcal{W}_s \quad P_Y^o.p.s.$

M est une martingale locale $\mathcal{F}_t^{Y^n}$-mesurable, on peut définir sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_{Y^n})$ le processus $\mathcal{M}^n$ avec $\mathcal{M}_t^n \circ Y^n(x) = M_t(x)$ pour chaque t . $\mathcal{M}^n$ est alors une martingale locale continue puisque :

$$\mathcal{M}_t^n(x) = x_t - \int_o^t \alpha^n(s,x)\ ds \qquad P_{Y^n}.p.s.$$

avec $\alpha^n(s,x) = 1_{s<T_n}(x)\ \tilde{\alpha}(s,x)$. Comme le processus à variation bornée correspondant à $\mathcal{M}^n$ est défini par :

$$\langle \mathcal{M}^{n^i}, \mathcal{M}^{n^j} \rangle_t = \int_o^t \Big(\sum_k B_{ik}(s,x)\ B_{jk}(s,x)\Big)ds$$

on aura en définissant $\mathcal{W}^n$ par $\mathcal{W}_t^n = \int_o^t B^{-1}(s,x)\ d\mathcal{M}_s^n$, les propriétés :

$\mathcal{W}^n$ est un mouvement brownien sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_{Y^n})$

et

$$\mathcal{M}_t^n(x) = \int_o^t B(s,x)\ d\,\mathcal{W}_s^n \quad .$$

Ce qui donne la relation dans $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_{Y^n})$

$$\mathcal{X}_t = \int_o^t \alpha^n(s,x)\ ds + \int_o^t B(s,x)\ d\,\mathcal{W}_s^n \quad .$$

Comme $E_{P_{Y^n}}\left[\varphi^n(x)\right] = 1$ en posant

$$\varphi^n(x) = \exp\Big[-\int_o^1 \big(B^{-1}(s,x)\alpha^n(s,x), d\,\mathcal{W}_s^n\big) - \frac{1}{2}\int_o^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha^n(s,x)||^2\ ds\Big]$$

on peut appliquer la proposition précédente 6.2. et on obtient :

$$\frac{dm}{dP_{Y^n}} = \varphi^n(x) \qquad P_{Y^n}.p.s.$$

Le reste de la démonstration est identique à la fin de la démonstration du théorème 2.8. D'où le résultat.

6.4. Proposition

Avec les hypothèses (a) à (g) et avec l'hypothèse (i) alors :

1- La loi P_Y est absolument continue par rapport à m

2- $\dfrac{dP_Y}{dm}(x) = \exp \int_0^1 (B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), d\, y_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2 ds$

3- P_Y est équivalente à m si et seulement si (d') est vraie.

La démonstration de cette proposition est rigoureusement identique à la démonstration de la proposition 2.9.

6.5. Théorème

Soit α et B avec les hypothèses (a) (e) (f) et avec :

(d') : $m\left[\int_0^1 ||B(s,x)||^2 ds < \infty\right] = 1$

et (j) : $\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds < \infty$.

Alors l'équation (2) :

$$Y_t = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + \int_0^t B(s,Y(\omega)), d\, W_s$$

admet une solution faible, si et seulement si on a :

(jj) : $E_m\left[\exp\left(\int_0^1 (B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), dx_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2\, ds\right)\right] = 1$.

Il y a alors unicité de la solution.

Démonstration.

a) Existence :

Soit $\varphi(x) = \exp\left[\int_0^1 (B^{-2}(s,x)\alpha(s,x), d\, x_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2\, ds\right]$.

D'après (f) il existe une solution $(m, \mathcal{W})$ de (3) et on a, sur la base $(c, (\mathcal{B}_t^c), m)$ la relation :

$$x_t = \int_0^t B(s,x)\, d\, \mathcal{W}_s \qquad \text{m.p.s.}$$

D'où on peut encore écrire :

$$\varphi(x) = \exp\left[\int_0^1 (B^{-1}(s,x)\alpha(s,x), d\, \mathcal{W}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||B^{-1}(s,x)\alpha(s,x)||^2\, ds\right] .$$

D'après (jj) $\varphi.m$ est une probabilité, notons là $\tilde{P}$.

On considère le processus $\hat{W}$ défini sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),m)$ par :

$\hat{W}_t(x) = \mathcal{W}_t(x) - \int_o^t B^{-1}(s,x)\ \alpha(s,x)\ ds$.

Ces hypothèses (j) et (jj) permettent d'appliquer le théorème de Girsanov. W est alors un mouvement brownien sur la base $(c,(\mathcal{B}_t^c),\tilde{P})$ et on a :

$$x_t = \int_o^t B(s,x)\ d\ \hat{W}_s + \int_o^t \alpha(s,x)\ ds \qquad \tilde{P}.p.s.$$

(l'intégrale stochastique pouvant être considérée relativement à $\tilde{P}$ d'après le lemme 2.6.).

Cette relation montre que $(\tilde{P},\hat{W})$ est solution faible de (2).

b) Unicité :

D'après (j) on peut appliquer la proposition 6.3.. Considérons une autre solution $(P',\tilde{W})$ de (2) . Les probabilités $\tilde{P}$ et m sont équivalentes, de même que les probabilités P' et m . D'après la proposition 6.3. on a :

$$\frac{d\tilde{P}}{dm}(x) = \varphi(x) = \frac{dP'}{dm}(x) \qquad m.p.s. \quad \text{d'où} \quad \tilde{P} = P' \quad .$$

Enfin la condition (jj) est nécessaire, on fait le même raisonnement que pour le théorème 3.2.

S'il existe une solution (P,W) , d'après (j) P et m sont équivalentes et d'après la proposition 6.3. :

$$\frac{dP}{dm}(x) = \varphi(x) \qquad m.p.s. \qquad \text{d'où} \quad E_m\left[\varphi(x)\right] = 1 \quad .$$

2EME PARTIE :

PROCESSUS D'INNOVATION

ET EQUATIONS DE FILTRAGE

Introduction

Etant donné une observation Y superposition d'une fonction f d'un signal X, et d'un bruit, le problème général du filtrage est celui de l'estimation du signal à partir de l'observation. Mathématiquement X et Y sont des processus, le bruit est un mouvement brownien ou une martingale, et la relation entre signal, bruit et observation est donnée par une équation différentielle stochastique. La collection des informations, jusqu'à l'instant t, recueillies par l'observation est la tribu notée $\mathcal{F}_t^Y$ dans la première partie. Le problème consiste alors à déterminer l'estimé de $f(X)$ au sens des moindres carrés, connaissant $\mathcal{F}_t^Y$, c'est-à-dire $E[f(X)|\mathcal{F}_t^Y]$. Il est surtout intéressant d'obtenir cet estimé comme solution d'une équation différentielle stochastique. Une telle équation est appelée équation de filtrage. Ce problème a d'abord été résolu dans le cadre du "filtrage linéaire" par Kalman et Bucy. Leur méthode consistait en la détermination de la loi conditionnelle du signal connaissant le processus observé, et exigeait des calculs assez difficiles. Un apport important de T. Kailath, généralisant un outil utilisé depuis longtemps pour le filtrage à temps discret, fut d'introduire le "processus d'innovation" lui permettant d'obtenir rapidement les équations de Kalman-Bucy. L'idée de Kailath consiste à remplacer le processus d'observation par un mouvement brownien (le processus d'innovation) qui contienne la même information. Il apparut (Kailath, Shyriaev) que ce processus pouvait être aussi utilisé pour le filtrage non linéaire où il joue maintenant un rôle important, des résultats significatifs sont condensés dans [26], [20], [12].

Certaines propriétés du processus d'innovation à temps discret s'étendent immédiatement au cas continu, d'autres moins facilement : c'est le cas, en particulier, de l'égalité des tribus (tribu engendrée par le processus d'observation et tribu engendrée par le processus d'innovation). Cette égalité (pour le filtrage en temps continu) est connue depuis quelques années dans certains cas particuliers :

- les processus Signal, Bruit, Observation sont gaussiens, le couple (Signal, Observation) étant solution d'un système différentiel stochastique linéaire : c'est le cadre étudié par Kalman et Bucy (démonstration de Kailath [19] , voir aussi [23]).
- le Signal est borné et indépendant du bruit (démonstration de J. M. C. Clark [24] , voir aussi [12] et [20]).

Nous donnerons au paragraphe 3 une démonstration du cas où l'Observation est un processus gaussien. C'est un corollaire immédiat des résultats d'égalités des tribus obtenus partie I, paragraphe 4 .

L'Egalité des tribus dans un cadre plus général a été conjecturée en particulier par Fujisaki-Kunita-Kalliampur [26] mais n'a pas été pour le moment démontrée. Cependant un théorème de représentation [26] permet d'obtenir une équation de filtrage dans le cadre non linéaire, utilisant le processus d'innovation, en évitant d'avoir recours à cette égalité.

Dans le paragraphe 1 nous donnons un exemple de processus d'innovation en temps discret, et dans le paragraphe 2 les propriétés fondamentales de l'innovation en temps continu. Nous obtenons par la méthode de Kailath, les équations de filtrage linéaire de Kalman-Bucy dans le paragraphe 4, et dans le paragraphe 5 nous donnons un aperçu de ce qui a été obtenu dans le cadre du filtrage non linéaire.

Dans tout ce qui suit les notations rassemblées en introduction à la première partie conservent la même signification. On introduira en outre au fur et à mesure des paragraphes diverses notations nouvelles.

1.- Un exemple de processus d'innovation à temps discret

1.1. Définitions et données

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille croissante de tribus ; X_i , Y_i des variables aléatoires réelles, $\mathcal{F}_i$-mesurables et représentant respectivement le signal et l'observation à l'instant i. Enfin on considère une martingale B , sur la base de processus $(\Omega, (\mathcal{F}_n), P)$, B représentant le bruit.

Signal, Bruit, Observation sont liés par les relations :

$$Y_n - Y_{n-1} = \mathcal{G}_{n-1} [X_1, X_2, \ldots, X_n , Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] + B_n - B_{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$Y_o = X_o = B_o = o .$$

$\mathcal{G}_n$ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$, intégrable.

On note $\mathcal{F}_n^Y = \sigma \{Y_m, m \leq n\}$: (tribu engendrée par les variables aléatoires Y_m pour $m \leq n$).

<u>L'innovation</u> entre les instants n et n+1 est, par définition, l'accroissement d'observation entre ces deux instants.

Cette définition introduit un processus I , défini sur la base $(\Omega, (\mathcal{F}_n^Y), P)$ par :

$$I_1 = Y_1 - E [Y_1 | \mathcal{F}_o^Y]$$

$$I_2 = I_1 + Y_2 - E\left[Y_2 \mid \mathcal{F}_1^Y\right]$$
$$\vdots$$
$$I_n = I_{n-1} + Y_n - E\left[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y\right]$$

1.2. Lemme

Le processus I défini dans 1.1. est une martingale sur $(\Omega,(\mathcal{F}_n^Y),P)$ et les tribus $\sigma\{Y_m, m\leq n\}$ et $\sigma\{I_m, m\leq n\}$ sont égales.

Démonstration :

La propriété d'égalité des tribus est évidente, par construction de I_n.

Pour la martingalité, on a :

$$E\left[I_n - I_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y\right] = E\left[Y_n - E\left[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y\right] \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y\right] = o$$

Soit alors $m < n$:

$$E\left[I_n - I_m \mid \mathcal{F}_m^Y\right] = \sum_{q=m+1}^{n} E\left[I_q - I_{q-1} \mid \mathcal{F}_m^Y\right]$$

$$= \sum_{q=m+1}^{n} E\left[E\left[I_q - I_{q-1} \mid \mathcal{F}_{q-1}^Y\right] \mid \mathcal{F}_m^Y\right] = o$$ d'après

ce qui précède, d'où le résultat.

Remarque :

Si les variables aléatoires Y_n sont gaussiennes, le processus d'innovation est obtenu à partir d'un procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour l'espace gaussien engendré par les Y_n.

1.3. Représentation du processus d'innovation

On peut écrire :

$$Y_n = \sum_{i=o}^{n-1} \mathcal{G}_i\left[X_1,\dots,X_{i+1}, Y_1,\dots,Y_{i+1}\right] + B_n$$

et $E\left[Y_n \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right] = E\left[\sum_{i=o}^{n-2} \mathcal{G}_i \left[X_1,\ldots,X_{i+1}, Y_1,\ldots,Y_{i+1}\right] + B_{n-1} \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right]$

$$+ E\left[\mathcal{G}_{n-1}\left[X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n\right] \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right] + E\left[B_n - B_{n-1} \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right]$$

ce qui donne :

$$E\left[Y_n \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right] = Y_{n-1} + E\left[\mathcal{G}_{n-1}(X_1,\ldots,X_n , Y_1,\ldots,Y_n) \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right]$$

d'où $I_n - I_{n-1} = Y_n - Y_{n-1} - E\left[\mathcal{G}_{n-1}(X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n) \mid \mathcal{F}^Y_{n-1}\right]$.

En écrivant la même formule pour $I_p - I_{p-1}$ pour les $p<n$, et en sommant, on obtient :

1.31. $$\boxed{I_n = Y_n - \sum_{i=o}^{n-1} E\left[\mathcal{G}_i(X_1,\ldots,X_{i+1} , Y_1,\ldots,Y_{i+1}) \mid \mathcal{F}^Y_i\right]}$$

2.- Le processus d'innovation pour le filtrage à temps continu et ses propriétés fondamentales.

On prendra comme définition de l'innovation, une extension (quand celle-ci a un sens) au cas continu de la représentation obtenue en 1.3. pour le cas discret.

2.1. Données

$(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{o\leq t\leq 1}$ une base de processus , Y et M deux processus à trajectoires continues définis sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et tels que :

- M soit une martingale continue de carré intégrable
- $Y_t(\omega) = \int_o^t H(u,\omega)\, du + M_t(\omega)$

où H est une application de $[0,1]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^m$, mesurable relativement à la tribu produit $\mathcal{B}_{[0,1]}\otimes\mathcal{F}$, adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$. On notera $(\langle M^k, M^l\rangle_t)_{t\in[0,1]}$ le processus à variation bornée associé au produit $M^k M^l$, M^k (resp : M^l) étant la $k^{\text{ième}}$ (resp la $l^{\text{ième}}$) coordonnée de M .

Remarque :

Du point de vue du filtrage, H contient la partie signal (à estimer au vu des observations Y_s) et $\mathcal{F}_t$ désigne la tribu engendrée par les applications $H(s,.)$ et M_s pour $s \leq t$.

2.2. Proposition

Avec la condition

(a) : $E\left[\int_0^1 ||H(s,\omega)||ds\right] < \infty$

on peut trouver un processus A défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ et prévisible tel que pour λ presque tout t $A(t,.)$ soit une version de l'espérance conditionnelle $E\left[H(t,.)|\mathcal{F}_t^Y\right]$.

Démonstration

Nous nous restreindrons, ce qui n'est pas une perte de généralité, au cas où H est un processus à valeurs réelles. D'après (a) pour λ presque tout t on peut définir $E\left[H(t,.)|\mathcal{F}_t^Y\right]$ puisque $E\left[|H(t,\omega)|\right] < \infty$.

Soit $N = \{t \in [0,1] : E\left[|H(t,\omega)|\right] < \infty\}$. N est $\mathcal{B}_{[0,1]}$-mesurable et $\lambda[N] = 1$. On peut alors remplacer $H(t,\omega)$ par $1_N(t)\, H(t,\omega) = \tilde{H}(t,\omega)$ où $\tilde{H}$ a les mêmes propriétés de mesurabilité que H . Enfin $E\left[\tilde{H}(t,.)|\mathcal{F}_t^Y\right]$ est définie pour tout $t \in [0,1]$.

Soit la suite $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des partages de l'intervalle $[0,1]$

$$\Pi_n = \{t_k^n : t_k^n = \frac{k}{2^n} , k = 0,1,\dots,2^n\} .$$

Considérons pour chaque t et chaque n le nombre $t_{k(t)}^n$ tel que

$\frac{k(t)}{2^n} < t \leq \frac{k(t)+1}{2^n}$. La suite $\{t^n_{k(t)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $t^n_{k(t)} \nearrow t$. Comme Y est un processus à trajectoires continues, la famille $(\mathcal{F}^Y_t)$ de tribus est continue à gauche et on a :

2.21. $$\mathcal{F}^Y_t = \bigvee_n \mathcal{F}^Y_{t^n_{k(t)}} .$$

Montrons deux lemmes utiles :

2.22. Lemme

Soit $\mathcal{G}$ une tribu avec $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{F}$. Soit $\{Z_t\}_{t \in [0,1]}$ une famille d'applications $\mathcal{F}$-mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$, soit $\{\gamma^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications $\mathcal{G}$-mesurables de $[0,1] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ telles que : pour tout t , $\gamma^p(t,\omega) \rightsquigarrow Z_t(\omega)$ P.p.s. . Alors il existe une application γ $\mathcal{G}$-mesurable de $[0,1] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\gamma^p(t,\omega) \rightsquigarrow \gamma(t,\omega)$ $\lambda \otimes P$, p.s.

2) pour tout t , $\gamma(t,\omega) = Z_t(\omega)$ P.p.s.

Démonstration

Soit $G_o = \{(t,\omega) : \lim_p \gamma^p(t,\omega)$ n'existe pas$\}$ comme $[G_o \in \mathcal{G}$, $G_o \in \mathcal{G}$. Soit G^t_o la t-section de G_o , on a $G^t_o \subset \{\omega : \gamma^p(t,\omega)$ ne converge pas vers $Z_t(\omega)\}$. On en déduit que $P\,[G^t_o] = o$ et donc

$$\lambda \otimes P\,[G_o] = \int_o^1 P\,[G^t_o]\, \lambda(dt) = o$$

Ceci montre 1). Enfin quelque soit t , $\omega \notin G^t_o$ implique que la limite $\lim_p \gamma^p(t,\omega)$ existe, notons là $\gamma(t,\omega)$. Alors pour tout t on a :

$$\gamma(t,\omega) = Z_t(\omega) \text{ P.p.s. d'où 2)}$$

2.23. Lemme

Soit U un processus à valeurs réelles, défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ et possédant les propriétés suivantes :

$U(t,\omega) = o$ sur le complémentaire de $]t_k^n, t_{k+1}^n] \times \Omega$

n et k étant fixés

U est $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}$ mesurable

Pour tout t, $E[U_t] < \infty$

Alors $E[U_t \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}]$ admet une version notée $A_t^{n,k}$ telle que l'application $(t,\omega) \rightsquigarrow A_t^{n,k}(\omega)$ soit $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$ mesurable.

Démonstration

On peut supposer $U(t,\omega) \geq o$. Remarquons d'abord que le lemme est vrai pour des processus de la forme $1_{]s,s']\times F}$ où $]s,s'] \subset]t_k^n,t_{k+1}^n]$ et $F \in \mathcal{F}_t$, et pour les éléments de la famille $\mathcal{E}$ des combinaisons linéaires finies de tels processus. On peut trouver une suite croissante $\{U^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim U^p = U$ avec $U^p \in \mathcal{E}$. Soit γ^p l'application $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$- mesurable telle que $\gamma^p(t,\omega) = E[U_t^p \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}](\omega)$ P.p.s. Comme $\{U^p\}$ est croissante et que pour chaque t, U_t est intégrable on a :

$$E\left[U_t^p \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}\right] \rightsquigarrow E\left[U_t \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}\right] \quad \text{P.p.s.}$$

En posant $Z_t = E[U_t \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}]$ et $\mathcal{G} = \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$, on est dans le cadre d'application du lemme 2.22., d'où l'existence de $A^{n,k}$ avec les propriétés indiquées.

Fin de la démonstration de la proposition 2.2.

Soit n et k fixés, on pose $H^{n,k}(t,.) = 1_{]t_k^n;t_{k+1}^n]}\tilde{H}(t,.)$

Le processus $H^{n,k}$ satisfait aux hypothèses du lemme 2.23. On peut donc trouver $A^{n,k}$ $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$ mesurable, avec

$$A^{n,k}(t,.) = E\left[H^{n,k}(t,.) \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n}\right] \quad \text{P.p.s.}$$

Soit le processus A^n défini par $A^n(t,\omega) = \sum_k A^{n,k}(t,\omega)$.

A^n est $\bigvee_k \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$ mesurable, donc il est prévisible.

De plus $A^n(t,.) = E\left[\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n(t)}\right]$ P.p.s. En utilisant un théorème classique de Doob, et avec l'égalité 2.21.

$$E\left[\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_{t_k^n(t)}\right] \longrightarrow E\left[\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_t\right] \quad \text{P.p.s.}$$

Donc pour tout t $A^n(t,.) \longrightarrow E(\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_t]$ P.p.s. , on applique le lemme 2.22. avec $\gamma^n = A^n$, $Z_t = E\left[\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_t\right]$ et $\mathcal{G}$ tribu des prévisibles. On obtient alors un processus A prévisible tel que $A(t,\omega) = E\left[\tilde{H}_t \mid \mathcal{F}^Y_t\right](\omega)$ P.p.s. d'où le résultat.

2.3. Conséquences

① $\int_0^t A(s,\omega)\,ds$ est défini et fini λ.p.s.

② $E\left[\int_0^1 \|A(t,\omega)\|dt\right] < \infty$

En effet : $E\left[\int_0^1 \|A(t,\omega)\|dt\right] = E\left[\int_0^1 \left\|E\left[\tilde{H}(t,\omega) \mid \mathcal{F}^Y_t\right]\right\| dt\right]$

$$< E\left[\int_0^1 E\left[\|\tilde{H}(t,\omega)\| \mid \mathcal{F}^Y_t\right] dt\right]$$

$$< E\left[\int_0^1 \|\tilde{H}(t,\omega)\|dt\right] < E\left[\int_0^1 \|H(t,\omega)\|dt\right] < \infty$$

③ De même $E\left[\int_0^1 \|H(t,\omega)\|^2\,dt\right] < \infty$ implique $E\left[\int_0^1 \|A(t,\omega)\|^2\,dt\right] < \infty$

④ Le processus $\hat{M}$ de base $(\Omega,(\mathcal{F}^Y_t),P)$ tel que :

2.31. $\hat{M}_t = Y_t - \int_0^t A(s,\omega)\,ds$

est défini de façon unique P.p.p En effet si $A'(s,\omega)$ désigne une autre version mesurable de $E\left[H(s,\omega) \mid \mathcal{F}^Y_s\right]$ alors $A(s,\omega)=A'(s,\omega)$

$\lambda \otimes P$.p.s. d'où $\int_0^t A(s,\omega)\, ds = \int_0^t A'(s,\omega)\, ds$ P.p.s. d'où le résultat.

2.4. Définition

Le processus $\hat{M}$ défini sur la base $(\Omega, (\mathcal{F}_t^Y), P)$ par la relation $\hat{M}_t(\omega) = Y_t(\omega) - \int_0^t A(s,\omega)\, ds$, où $A(s,\omega)$ désigne la version prévisible obtenue de $E[H(s,\omega)|\mathcal{F}_s^Y]$ est appelé : "processus d'innovation" correspondant au couple $(Y, (\mathcal{F}_t^Y))$.

2.5. Remarque

Cette définition est la généralisation de la représentation obtenue pour le processus à temps discret au paragraphe 1.3. Si la martingale M , au lieu d'être supposée continue, est seulement continue à droite, le processus Y l'est également et on doit remplacer alors la relation 2.31. par :

2.51. $\hat{M}_t(\omega) = Y_t(\omega) - \int_0^t E[H(s,\omega)|\mathcal{F}_{s-}^Y]\, ds$, puisque dans ce cas la famille $(\mathcal{F}_t^Y)$ n'est pas continue à gauche.

La définition suivante est également utile :

2.6. Définition

Soit $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de tribus telle que : $\mathcal{F}_t^Y \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, on appelle "processus d'innovation" correspondant au couple $(Y, (\mathcal{G}_t))$, le processus $\hat{\hat{M}}$ défini sur la base $(\Omega, (\mathcal{G}_t), P)$ par

2.61. $\hat{M}_t(\omega) = Y_t(\omega) - \int_0^t \hat{H}(s,\omega)\, ds$ où $\hat{H}(s,\omega)$ désigne une version $\mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{G}$ mesurable de l'espérance conditionnelle $E[H(s,\omega)|\mathcal{G}_s]$.

2.7. Remarques

1. Ershov montre dans [18] p. 169 , l'existence d'une telle version avec la condition : pour tout $t \in [0,1]$, $E[||H_t||] < \infty$

② Le lemme 2.2. donne l'existence d'une version prévisible de l'espérance conditionnelle $E\left[H(s,\omega) \mid \mathcal{G}_{s-}\right]$.

③ Comme $\hat{M}$ est une martingale (proposition suivante 2.8.) on peut noter la relation ;

$$\lim_{h\to o} \frac{1}{h} E\left[Y_{t+h} - Y_t \mid \mathcal{F}_t^Y\right] = \lim_{h\to o} \int_t^{t+h} A(u,\omega)\, du$$

$$= A\,(t,\omega)\quad P \otimes \lambda,\text{p.s.}$$

Ce qui montre que le processus d'innovation est déterminé directement à partir de l'observation.

2.8. Proposition

Avec les données de 2.1. et la condition b) suivante

$$\text{b)}\quad E\left[\int_o^1 ||H_u||^2\, du\right] < \infty$$

le processus d'innovation $\hat{M}$ (resp : $\hat{\hat{M}}$) est une martingale sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ resp : $(\Omega,(\mathcal{G}_t),P)$, continue, de carré intégrable.

Le processus à variation bornée associé vérifie la relation :

pour tout $t > s$ $\quad \langle \hat{M}^k,\hat{M}^l\rangle_t = \langle M^k,M^l\rangle_t$

(resp : $\quad \langle \hat{\hat{M}}^k,\hat{\hat{M}}^l\rangle_t = \langle M^k,M^l\rangle_t$).

Démonstration

① Martingalité de $\hat{\hat{M}}$

Par définition de $\hat{\hat{M}}$ on a : $\hat{\hat{M}}_t = \int_o^t (H_u - \hat{H}_u)\, du + M_t$

d'où $E\left[\hat{\hat{M}}_t - \hat{\hat{M}}_s \mid \mathcal{G}_s\right] = E\left[M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s\right] + E\left[\int_s^t (H_u - \hat{H}_u) du \mid \mathcal{G}_s\right]$ .Comme $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_s$, et que M est une martingale sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ on a :

$$E\left[M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s\right] = 0 \quad .$$

D'autre part, soit $F \in \mathcal{G}_s$:

$\int_F E\left[\int_s^t (H_u - \hat{H}_u) du \mid \mathcal{G}_s\right] dP = \int_F dP \int_s^t (H_u - \hat{H}_u) du = \int_s^t du \int_F (H_u - \hat{H}_u)\, dP$

$= \int_s^t du \int_F E\left[H_u - \hat{H}_u \mid \mathcal{G}_u\right] dP$ puisque $u \geq s$ et $F \in \mathcal{G}_s$ donc à $\mathcal{G}_u$.

Comme $E\left[H_u - \hat{H}_u \mid \mathcal{G}_u\right] = 0$ d'après la définition de $\hat{H}_u$, on obtient la martingalité de $\hat{\hat{M}}$ sur la base $(\Omega,(\mathcal{G}_t),P)$.

Enfin la relation 2.61. et la condition b) montrent que $\hat{\hat{M}}$ est de carré intégrable et a des trajectoires continues presque surement.

② Processus à variation bornée associé à $\hat{\hat{M}}$

Soit une partition $\mathcal{P} = \{t_o,t_1,\dots,t_q\}$ de $[o,t]$ et soit :

$$S_{\mathcal{P}}^{k,l}(\hat{\hat{M}}) = \sum_{i=1}^{q} (\hat{\hat{M}}^k_{t_i} - \hat{\hat{M}}^k_{t_{i-1}})(\hat{\hat{M}}^l_{t_i} - \hat{\hat{M}}^l_{t_{i-1}})$$

où les indices k, l désignent les processus coordonnés.

$S_{\mathcal{P}}^{k,l}(\hat{\hat{M}})$ converge vers $\langle \hat{\hat{M}}^k,\hat{\hat{M}}^l\rangle_t$ dans $L^1(\Omega,\mathcal{G},P)$ lorsque le pas de la partition tend vers 0; cette somme converge donc aussi en probabilité vers $\langle \hat{\hat{M}}^k,\hat{\hat{M}}^l\rangle_t$ dans l'espace $(\Omega,\mathcal{G},P)$.

D'autre part, dans l'espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$ on peut écrire :

$$S_{\mathcal{P}}^{k,l}(M) = \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}^k_u\, du\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}^l_u\, du\right)}_{①} + \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}^k_u\, du\right)(M^l_{t_i} - M^l_{t_{i-1}})}_{②}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}^l_u\, du\right)(M^k_{t_i} - M^k_{t_{i-1}})}_{④} + \underbrace{\sum_{i=1}^{q} (M^k_{t_i} - M^k_{t_{i-1}})(M^l_{t_i} - M^l_{t_{i-1}})}_{③}$$

où $\tilde{H}_u = H_u - \hat{H}_u$.

Examinons successivement le comportement des sommes ① , ② , ③ , ④ lorsque le pas de la partition $\mathcal{P}$ tend vers 0. La somme ④ converge dans $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers $\langle M^k,M^l\rangle_t$, et donc aussi en probabilité.

Considérons la somme ① . Soit $m(\omega,\mathcal{P}) = \sup \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\tilde{H}^l_u|du$. Pour presque tout ω , $m(\omega,\mathcal{P})$ tend vers 0, et on a les majorations :

$$\left| \sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \breve{H}_u^k \, du\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}_u^1 \, du\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\tilde{H}_u^k| du\right)\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\tilde{H}_u^1| du\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\tilde{H}_u^k| du) \; m(\omega,\mathcal{P}) = \int_0^t |\tilde{H}_u^k| \, du \quad m(\omega,\mathcal{P}) \, .$$

Pour presque tout ω cette dernière quantité tend vers 0, la somme ① converge presque surement vers 0 , et donc en probabilité dans $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Considérons les sommes ② et ③ .

Soit $n(\omega,\mathcal{P}) = \sup_i |M_{t_i}^1 - M_{t_{i-1}}^1|$; $n(\omega,\mathcal{P})$ tend vers 0 , d'après la continuité des processus M^1 on a alors les majorations :

$$\left| \sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{H}_u^k \, du\right)(M_{t_i}^1 - M_{t_{i-1}}^1) \right| \leq \sum_{i=1}^{q} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\tilde{H}_u^k| du\right) |M_{t_i}^1 - M_{t_{i-1}}^1|$$

$$\leq n(\omega,\mathcal{P}) \int_0^t |\tilde{H}_u^k| \, du$$

pour presque tout ω cette quantité tend vers 0 . Les sommes ② et ③ convergent vers 0 P.p.s. et donc en probabilité dans $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

En résumé $S_{\mathcal{P}}^{k,1}(M)$ converge en probabilité vers $\langle M^k,M^1\rangle_t$ dans $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Cette convergence implique que $\langle M^k,M^1\rangle_t$ est $\mathcal{G}_t$ -mesurable et par conséquent cette convergence a lieu aussi dans l'espace $(\Omega,\mathcal{G},P)$ d'où la proposition :

2.9. <u>Proposition</u>

Les conclusions de la proposition 2.8. demeurent si on remplace l'hypothèse b) par a) :

a) $E\left[\int_0^1 ||H_u|| \, du\right] < \infty$.

<u>Démonstration</u>

Avec l'hypothèse a) , il est clair que le processus $\hat{M}$, (resp : $\hat{\hat{M}}$) est une martingale, et que la deuxième partie de la proposition 2.8. s'applique, à savoir que les sommes $S_{\mathcal{P}}^{k,1}(\hat{\hat{M}})$

convergent en probabilité vers $\langle M^k,M^l\rangle_t$ dans $(\Omega,\mathcal{G},P)$. Il reste seulement à montrer que $\hat{\hat{M}}$ est de carré intégrable. Nous le ferons en montrant que chaque processus coordonnée $\hat{\hat{M}}^k$ est de carré intégrable.

Soit $\mathcal{G}'_t$ la tribu engendrée par $\mathcal{G}_t$ et la famille des ensembles de P-mesure nulle de $\mathcal{G}$.

Soit la suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêts de la famille $(\mathcal{G}'_t)$ telle que

$$T_n = \inf\{t : |\hat{\hat{M}}^k_t| \geqslant n\}, \quad T_n = 1 \quad \text{si} \quad \{\quad\} = \emptyset \quad .$$

Ce processus $(\hat{\hat{M}}^k_{t\wedge T_n})_{t\in[0,1]}$ est une martingale de carré intégrable sur la base $(\Omega,(\mathcal{G}'_t),P)$ et

$$\hat{\hat{M}}^k_{t\wedge T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} (H^k_u - \hat{H}^k_u)\,du + M^k_{t\wedge T_n}$$

en faisant la même démonstration que dans la proposition 2.8. on obtient

$$\langle \hat{\hat{M}}^k_{\cdot\wedge T_n}, \hat{\hat{M}}^k_{\cdot\wedge T_n}\rangle_t = \langle M^k_{\cdot\wedge T_n}, M^k_{\cdot\wedge T_n}\rangle_t = \int_0^t 1_{[s\leqslant T_n]}d\langle M^k,M^k\rangle_s \leqslant \langle M^k,M^k\rangle_t$$

Or $\hat{\hat{M}}^k_{t\wedge T_n} \longrightarrow \hat{\hat{M}}^k_t$ lorsque $n\to\infty$, P.p.s. en utilisant le lemme de Fatou on obtient les inégalités :

$$E\left[(M^k_t)^2\right] = E\left[\langle M^k,M^k\rangle_t\right] \geqslant \liminf_n E\left[(\hat{\hat{M}}^k_{t\wedge T_n})^2\right] \geqslant E\left[\liminf_n (\hat{\hat{M}}^k_{t\wedge T_n})^2\right]$$
$$= E\left[(\hat{\hat{M}}^k_t)^2\right]$$

ce qui donne le résultat souhaité.

2.10. <u>Corollaire</u>

Avec les mêmes données sur H , si M est un mouvement brownien m-dimensionnel avec $\langle M^k,M^l\rangle_t = \delta_{kl}t$, alors le processus d'innovation $\hat{M}$ (resp : $\hat{\hat{M}}$) est également un mouvement brownien m-dimensionnel avec

$$\langle \grave{M}^k, \hat{M}^l \rangle_t = \delta_{kl}.t \quad . \text{(resp: } \langle \hat{\hat{M}}^k, \hat{\hat{M}}^l \rangle_t = \delta_{kl}\ t) \ .$$

Nous indiquerons maintenant brièvement les directions de recherche de certains auteurs [12] , [21] pour obtenir des généralisations des résultats précédents.

2.11. Sur quelques généralisations

A.- M est une martingale de carré intégrable (non nécessairement continue) sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$.

On considère alors sa version séparable continue à droite, Y étant encore défini par la relation :

$$Y_t(\omega) = \int_o^t H(s,\omega)\ ds + M_t(\omega)$$

avec les mêmes données pour H que dans 2.1. Y est alors un processus continu à droite. Etant donné t , en remarquant que si $\{s_n\}$ est une suite croissante convergeant vers t , on a au lieu de l'égalité 2.21. $\bigvee_n \mathcal{F}^Y_{s_n} = \mathcal{F}^Y_{t-}$, on obtient à la place de la proposition 2.2. le résultat suivant :

2.111. Proposition

Avec la condition $E\left[\int_o^1 ||H(s,\omega)||ds\right] < \infty$, pour presque tout t , on peut trouver une version A(t,.) de l'espérance conditionnelle $E\left[H(t,.)|\mathcal{F}^Y_{t-}\right]$ telle que le processus A défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}^Y_t),P)$ soit prévisible .

On obtient alors:

2.112. Théorème ([21] théorème 3)

Le processus μ défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}'_t),P)$ par :

$\mu_t = Y_t - \int_0^t A(s,\omega)\, ds$ est une martingale de carré intégrable dont la variation quadratique est la même que celle de M . (la démonstration reprend les arguments des propositions 2.8. et 2.9.).

B.- Un second type de généralisation consiste à remplacer le processus $(\int_0^t H(u,\omega)\, du)_{t\in[0,1]}$ par un processus à variation bornée S , non nécessairement continu, défini sur la même base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$, et la martingale M par un processus B défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ et tel que pour tout t et tout $s<t$ on ait :

$$E\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s^Y \right] = 0 \quad \text{(B : processus innovant au sens de Meyer [12])}$$

Meyer définit alors le processus d'innovation I sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ par :

$$I_t = Y_t - S_t^*$$

où S^* est la projection duale prévisible de S pour la famille de tribus $(\mathcal{F}_t^Y)$. Il démontre des résultats analogues à ceux obtenus pour les propositions 2.8. et 2.9., à savoir essentiellement que I est une martingale. I est de carré intégrable et continu si B est une martingale de carré intégrable, et si S et B sont continus. Il est important de noter que I est une généralisation du processus d'innovation défini en 2.4. En effet si $S_t = \int_0^t H(u,\omega)\, du$ et si B est une martingale de carré intégrable $\widehat{M}$ et I coïncident.

C.- En s'inspirant de [12] on peut obtenir un autre type de généralisation. On considère Y et W processus (à trajectoires continues) définis sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ avec :

$$Y_t(\omega) = \int_0^t H(s,\omega)\, ds + W_t(\omega) \ .$$

W est un mouvement brownien et H vérifie les hypothèses de mesurabilité et d'adaptation déjà indiquées. Au lieu de la relation (a) on suppose que l'on a :

$$P \left[\int_0^1 ||H(s,\omega)||^2 \, ds < \infty \right] = 1 \ .$$

Alors, du corollaire 2.2. de la partie I on déduit $P_Y \ll \beta$. Le théorème 3.5. de I montre que nous obtenons pour Y la représentation

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + V_t(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

où α est un processus mesurable défini sur la base $(c,(\hat{\mathcal{B}}_t^c),P_Y)$ et V un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$. Nous dirons encore que V est le processus d'innovation relativement à $(Y,(\mathcal{F}_t^Y))$. On obtient bien une généralisation. En effet, si on peut définir une version mesurable de $E\left[H(t,\omega) \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ pour presque tout t on aura

$$\lambda \otimes P\left[E\left[H(t,\omega) \mid \mathcal{F}_t^Y\right] \neq \alpha\left[t,Y(\omega)\right]\right] = 0 \ .$$

3.- Utilisation du processus d'innovation

3.1. Proposition (représentation du processus Y)

Soit deux processus Y et M à trajectoires continues, définis sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tels que :

a) M est une martingale continue de carré intégrable

b) $Y_t(\omega) = \int_0^t H(u,\omega)\, du + M_t(\omega)$

où H est un processus progressivement mesurable sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que

$$E\left[\int_0^1 \|H(u,\omega)\|\, du\right] < \infty$$

Alors il existe une martingale continue de carré intégrable M, définie sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ et un processus α défini sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$, prévisible, avec $E_{P_Y}\left[\int_0^1\|\alpha(s,x)\|ds\right] < \infty$ et tel que

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + \hat{M}_t(\omega) \qquad \text{P.p.s.}$$

Une telle représentation de Y est unique, $\lambda \otimes$ P.p.p.

<u>Démonstration</u>

Les hypothèses faites permettent d'appliquer la proposition 2.9. On note $\hat{M}$ le processus d'innovation relatif à $(Y,(\mathcal{F}_t^Y))$ et nous avons

$$Y_t(\omega) = \int_0^t A(s,\omega)\, ds + \hat{M}_t(\omega) \qquad \text{P.p.s.}$$

où A est défini à partir de la proposition 2.2. Il nous suffit maintenant de montrer que nous pouvons définir α avec les propriétés indiquées et tel que $A(t,\omega) = \alpha(t,Y(\omega))$ P.p.s. Une fois ceci fait, il suffira de remarquer que

$$\alpha(t,Y(\omega)) = E\left[H(t,\omega)|\mathcal{F}_t^Y\right] \text{ P.p.s.}$$

pour obtenir $E_{P_Y}\left[\int_0^1\|\alpha(s,x)\|ds\right] < \infty$.

Nous adoptons les mêmes notations que dans la démonstration de la proposition 2.2. On considère les partages dyadiques Π_n de l'intervalle $[0,1]$. $\Pi_n = \{t_k^n \,;\, t_k^n = \frac{k}{2^n}\,,\, k = 0,1,\dots,2^n\}$.

On fera la démonstration dans le cas où H est un processus à valeurs réelles. D'après la démonstration de 2.2. on peut approcher $A(t,\omega)$ par une suite de processus A^n tels que $A^n(t,\omega) = \sum_k A^{n,k}(t,\omega)$, où $A^{n,k}$ est un processus $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}_{t_k^n}^Y$ - mesurable.

Soit l'application $(\mathfrak{J},Y) : (t,\omega) \rightsquigarrow (t,Y(\omega))$ de $[0,1] \times \Omega$ dans $[0,1] \times C$ on a :

$$(\mathfrak{J},Y)^{-1}\left[\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{B}^c_{t_k^n}\right] = \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}$$

en appliquant le lemme classique de factorisation on obtient

$$\alpha^{n,k}(t,Y(\omega)) = A^{n,k}(t,\omega)$$

égalité illustrée par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\left([0,1] \times \Omega , \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{F}^Y_{t_k^n}\right) \arrow[rr, "(\mathfrak{J}{,}Y)"] \arrow[dr, "A^{n,k}"'] & & \left([0,1] \times c , \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{B}^c_{t_k^n}\right) \arrow[dl, "\alpha^{n,k}"] \\
& \left([0,1] \times \mathbb{R} , \mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right) &
\end{tikzcd}$$

où $\alpha^{n,k}$ est un processus $\mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{B}^c_{t_k^n}$ mesurable.

On définit alors α^n par $\alpha^n(t,x) = \sum\limits_k \alpha^{n,k}(t,x)$ et on a évidemment $\alpha^n(t,Y(\omega)) = A^n(t,\omega)$.

α^n processus sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ est $\bigvee\limits_k \mathcal{B}_{]t_k^n,t_{k+1}^n]} \otimes \mathcal{B}^c_{t_k^n}$ mesurable donc prévisible.

Soit $G_o = \{(t,\omega) : \lim\limits_n \alpha^n(t,Y(\omega))$ n'existe pas $\}$

$G_o = \{(t,\omega) : \lim\limits_n A^n(t,\omega)$ n'existe pas $\}$ donc $\lambda \otimes P[G_o] = 0$

mais $\lambda \otimes P[G_o] = \lambda \otimes P_Y[G_o^Y]$ où $G_o^Y = \{(t,x) : \lim\limits_n \alpha^n(t,x)$ n'existe pas$\}$.

On peut donc définir α par $\alpha(t,x) = \lim\limits_n \alpha^n(t,x)$.

α est un processus prévisible et on a :

$$\alpha(t,Y(\omega)) = A(t,\omega) \quad P.p.s. \text{ d'où le résultat .}$$

Montrons maintenant l'unicité de la représentation.

Supposons que nous ayons une autre représentation de Y

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \gamma(s,Y(\omega))\, ds + \widetilde{M}_t(\omega)$$

avec les mêmes propriétés pour γ et $\bar{M}$ que pour α et $\hat{M}$.

Alors $\bar{M}_t(\omega) - \hat{M}_t(\omega) = \int_0^t (\gamma(s,Y(\omega)) - \alpha(s,Y(\omega))\, ds$ P.p.s.

$\bar{M} - \hat{M}$ est une martingale continue définie sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$.

Cette martingale étant égale à un processus à variation bornée est nulle.

$\bar{M}_t = \hat{M}_t$ P.p.s. et $\gamma(s,Y(\omega)) = \alpha(s,Y(\omega))$ $\lambda \otimes$ P.p.s.

Note 1.

Ce résultat est meilleur que celui de Ershov ([18] lemme 2) où le processus α obtenu est progressivement mesurable sur la base $(c,(\mathcal{B}_{t+}^c),P_Y)$.

Note 2.

Si au lieu de M , c'est un mouvement brownien W qui est donné, on obtient la représentation

$$Y_t(\omega) = \int_0^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + \hat{W}_t(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

où W est un mouvement brownien, α est donc progressivement mesurable sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ et on peut appliquer les résultats de la partie I . C'est l'objet des corollaires 3.2. et 3.3, suivants.

3.2. Corollaire

Avec les hypothèses de la proposition précédente, où M est un mouvement brownien et avec :

$$E\left[\int_0^1 ||H(s,\omega)||^2\, ds\right] < \infty$$

la mesure P_Y est absolument continue par rapport à la mesure brownienne β et

$$\frac{dP_Y}{d\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 (\alpha(s,x), d\mathcal{Y}_s) - \frac{1}{2}\int_0^1 ||\alpha(s,x)||^2\, ds\right] \; P_Y\text{.p.s.}$$

ou en revenant au processus H et en utilisant le processus d'innovation $\hat{W}$ et la factorisation $\mathcal{W}\otimes Y = W$

$$\frac{dP_Y}{d\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 (E[H(s,\omega)|Y(\omega)=x/\mathcal{B}_s^c], d\,\mathcal{W}_s) + \frac{1}{2}\int_0^1 \| E[H(s,\omega)|Y(\omega)=x/\mathcal{B}_t^c] \|^2 ds\right.$$

P_Y.p.s.

<u>Commentaire</u>

Y , W , α satisfont aux données et hypothèses de la proposition 2.9. de la partie I que l'on applique ici.

3.3. <u>Corollaire</u>

Avec les hypothèses du corollaire 3.2., si Y est un processus gaussien, alors les P-complétions des tribus $\mathcal{F}_t^Y$ et $\tilde{\mathcal{F}}_t^{\hat{W}}$ sont égales pour tout $t \in [0,1]$.

<u>Commentaire</u>

C'est une application immédiate du corollaire 4.6. de la partie I . Ce résultat a été démontré par Kailath, dans le cas où H est un processus gaussien par une méthode très différente (utilisation des propriétés des noyaux de Volterra, cf. [19] appendice II, p. 653).

<u>Notation</u>

$\hat{\mathcal{B}}_t^c$ désigne la tribu engendrée par $\mathcal{B}_t^c$ et la famille $\mathcal{N}_\beta$ des ensembles de mesure β-nulle de $\mathcal{B}^c$. $\tilde{\mathcal{F}}_t^Y$ désigne dorénavant la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t^Y$ et la famille des ensembles de mesure P-nulle de $\mathcal{F}^Y$ (et non de $\mathcal{F}_t^Y$ comme dans la partie I). Dans ce qui suit,ayant constamment l'absolue continuité $P_Y \ll \beta$ on utilise souvent sans l'écrire l'inclusion $\tilde{\mathcal{B}}_t^c \supset \hat{\mathcal{B}}_t^c$.

3.4. <u>Remarque</u>

La proposition 2.2. donne comme corollaire le résultat suivant que nous utiliserons pour le théorème 3.5.

Etant donné $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{Q})$ et γ un processus mesurable défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{G}_t \vee \mathcal{N}),\mathcal{Q})$ où $\mathcal{N}$ désigne la famille des ensembles de $\mathcal{Q}$-mesure nulle de $\mathcal{G}$, tel que pour presque tout t $E[\gamma_t] < \infty$ la famille $(\mathcal{G}_t)$ étant continue à gauche, alors on peut trouver $\hat{\gamma}$, processus défini sur $(\Omega,(\mathcal{G}_t),\mathcal{Q})$ $\hat{\gamma}$ étant prévisible, tel que $\hat{\gamma}(t,\omega) = \gamma(t,\omega)$ $\lambda \otimes P$.p.s.

(on prend pour $\hat{\gamma}_t$ la version prévisible de l'espérance conditionnelle $E[\gamma_t \mid \mathcal{G}_t]$).

3.5. Théorème (théorème de représentation Fujisaki-Kunita-Kalliampur [26], p. 24)

Avec les hypothèses du corollaire 3.2., toute martingale réelle Z, de carré intégrable, définie sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ a ses trajectoires continues et admet la représentation :

$$Z_t = E[Z_o] + \int_o^t (\Psi_s, d\hat{W}_s)$$

où Ψ est un processus mesurable, adapté à la famille $(\mathcal{F}_t^Y)$, avec $E\left[\int_o^1 ||\Psi_s||^2 \, ds\right] < \infty$.

Démonstration

Nous suivrons l'argumentation de Fujisaki-Kunita-Kalliampur, en y ajoutant les quelques précisions figurant dans [12].

Soit la représentation de Y obtenue dans la proposition 3.1.

$$Y_t = \int_o^t \alpha(s,Y(\omega))\, ds + \hat{W}_t(\omega) \quad .$$

En considérant $\mathcal{Y}$ le processus canonique de Y dans l'espace $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ on obtient :

$$\mathcal{Y}_t(x) = \int_o^t \alpha(s,x)\, ds + \mathcal{W}_t(x) \quad \text{(partie I, formule 2.33.)}$$

On introduit comme dans la partie I (théorèmes 2.8. et 4.5.) :

- une modification $\tilde{\alpha}$ de α
- les temps d'arrêts T_n de la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ avec :

$$T_n(x) = \sup \{t : \int_0^t ||\tilde{\alpha}(s,x)||^2 \, ds < n\}$$

- les processus α^n, définis sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ par :

$$\alpha^n(t,x) = 1_{t \leq T_n}(x) \quad \tilde{\alpha}(t,x)$$

- les processus d'approximation de $\mathcal{Y}$, Y^n définis sur $(c_o,(\mathcal{B}_t^{c_o}),P_Y^o)$ avec

$$Y_t^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) \quad \text{si} \quad t \leq T_n(x)$$

$$Y_t^n(x) = \mathcal{Y}_t(x) - \int_{T_n}^t \tilde{\alpha}(s,x) \, ds \quad \text{pour tout} \quad x \in c_o .$$

Soit $\varphi_t^n(x) = \exp\left[-\int_0^t (\alpha^n(s,Y^n(x)),d\mathcal{W}_s) - \frac{1}{2} \int_0^t ||\alpha^n(s,Y^n(x))||^2 \, ds\right]$

alors : $\tilde{P}_n = \varphi_1^n \, . \, P_Y^o$ est une mesure de probabilité sur $(c_o, \mathcal{B}^{c_o})$. Le processus φ^n, défini sur la base $(c_o,(\mathcal{B}_t^{c_o}),P_Y^o)$ est une martingale, et Y^n est un mouvement brownien sur la base $(c_o,(\mathcal{B}_t^{c_o}),P_n)$ (d'après le théorème de Girsanov).

Soit Z une martingale sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$. On peut se restreindre au cas où Z est d'espérance nulle. Soit la factorisation $\mathcal{Z} \circ Y = Z$. Alors $\mathcal{Z}$ est une martingale sur $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ et donc sur $(c_o,(\mathcal{B}_t^{c_o}),P_Y^o)$.

Remarquons que le processus $\tilde{\mathcal{Z}}^n$ défini sur $(c_o,(\mathcal{B}_{t\wedge T_n}^{c_o}),\tilde{P}_n)$ par $\tilde{\mathcal{Z}}_t^n = (\varphi_t^n)^{-1} . \mathcal{Z}_{t\wedge T_n}$ est une martingale, à cause de la définition de la mesure $\tilde{P}_n$ et du fait que $\mathcal{Z}_{\cdot\wedge T_n}$ est une martingale pour la base $(c_o,(\mathcal{B}_{t\wedge T_n}^{c_o}),P_Y^o)$.

On a déjà remarqué (théorème 4.5. de la partie I) l'égalité des tribus $\mathcal{B}_{t\wedge T_n}^{c_o}$ et $\mathcal{F}_{t\wedge T_n}^{Y_n}$. On en déduit d'après le résultat de J.M.C. Clark [25] sur la représentation d'une fonctionnelle du mouvement brownien comme intégrale stochastique, qu'il existe un processus $\tilde{\Phi}^n$ adapté à la famille $(\hat{\mathcal{B}}_t^{c_o})$ donc d'après 3.4. à la famille $(\mathcal{B}_t^{c_o})$ et mesurable, tel que $\int_o^1 ||\tilde{\Phi}_u^n||^2 \, du < \infty$ $\tilde{P}_n$.p.s. (et donc P_Y^o.p.s.) avec

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_t^n = \int_o^t (\tilde{\Phi}_u^n , d\, Y_u^n)$$

En remarquant que $\tilde{\mathfrak{Z}}_{t\wedge T_n}^n = \tilde{\mathfrak{Z}}_t^n$ on obtient :

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_t^n = \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, d\, Y_u^n) = \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, d\vartheta_u) + \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, \alpha_u^n) du \quad P_Y^o\text{.p.s.}$$

Soit $M_t = \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, d\vartheta_u)$ et $K_t = \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, \alpha_u^n)\, du$

On applique la formule de Ito à la fonction $f(x,y) = x.y$ où $x = M_t + K_t$ et $y = \varphi_t^n$, ce qui donne :

$$\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} = (M_t+K_t)\, \varphi_t^n = \int_o^t (M_s+K_s) d\, \varphi_s^n + \int_o^t \varphi_s^n \, d\, M_s$$
$$+ \int_o^t \varphi_s^n \, d\, K_s + \frac{1}{2} \int_o^t d \langle M, \varphi^n \rangle_s \quad .$$

La dernière ligne représente un processus à variation bornée.

D'autre part :

$$\int_o^t (M_s+K_s) d\, \varphi_s^n = \int_o^{t\wedge T_n} \Big[\int_o^{s\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, d\,\vartheta_u) + \int_o^{s\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, \alpha_u^n) du \Big] \varphi_s^n (\alpha_s^n, d\,\vartheta_s)$$

et $\int_o^t \varphi_s^n \, d\, M_s = \int_o^{t\wedge T_n} \varphi_s^n (\tilde{\Phi}_s^n, d\vartheta_s)$. Par conséquent l'expression $\int_o^t (M_s+K_s)\, d\varphi_s^n + \int_o^t \varphi_s^n \, d\, M_s$ est de la forme $\int_o^{t\wedge T_n} (\Phi_u^n, d\,\vartheta_u)$.

D'après ce qui précède $(\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} - \int_o^{t\wedge T_n} (\tilde{\Phi}_u^n, d\,\vartheta_u))_t$ est un processus à variation bornée, or c'est aussi une martingale continue sur $(c_o, (\mathcal{B}_{t\wedge T_n}^{c_o}), P_Y^o)$. Ce processus est donc nul P_Y^o.p.s. et donc :

$$\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n} = \int_o^{t\wedge T_n} (\Phi_u^n, d\,\vartheta_u) \quad P_Y^o\text{.p.s. (et donc } P_Y\text{.p.s.)}$$

De plus $E\Big[\int_o^{t\wedge T_n} ||\Phi_u^n||^2 \, du\Big] = E\Big[(\mathfrak{Z}_{t\wedge T_n})^2 \Big] \leqslant E\Big[\mathfrak{Z}_t{}^2\Big] < \infty$

ce qui montre que $E\Big[\int_o^1 ||\Phi_u^n||^2 \, du\Big] < \infty$.

Ceci termine la démonstration : en effet soit $n<m$ et $s<T_n(x)$. Alors $\Phi_s^n(x) = \Phi_s^m(x)$. Donc quand $T_n \nearrow 1$, Φ^n converge pour tout $u \in [0,1]$, P_Y^o.p.s. Soit Φ le processus limite. La majoration des espérances indiquée montre également que :

$E\left[\int_0^1 ||\Phi_u||^2 du\right] < \infty$ et $\mathfrak{Z}_t = \int_0^t (\Phi_u, d\,\mathcal{W}_u)$ d'où

$$Z_t = \int_0^t (\Psi_u, d\,\hat{W}_u) \quad \text{où} \quad \Psi_u = \Phi_u \circ Y .$$

Meyer dans [12] p. 235 note que l'on peut affaiblir certaines hypothèses, c'est l'objet de la remarque suivante :

3.6. Remarque

Le théorème de représentation reste vrai sous des hypothèses plus faibles, en particulier, si l'on remplace $E\left[\int_0^1 ||H(t,\omega)||^2 dt\right] < \infty$ par la condition : $P\left[\int_0^1 ||H(t,\omega)||^2 dt<\infty\right] = 1$ ou par la condition $P_Y \ll \beta$. A partir de la représentation de Y obtenue dans la partie I au théorème 3.5. et en utilisant la généralisation C du processus d'innovation (2.11.) .

4.- Equations de Kalman-Bucy (filtrage linéaire)

Nous présentons ici les équations de filtrage linéaire dues à Kalman et Bucy. La méthode de Kailath, utilisant le processus d'innovation et l'égalité des tribus dans ce cas permet de simplifier considérablement l'exposé. Nous nous sommes en particulier inspiré de [22] .

4.1. Données et hypothèses

a) Le signal X et l'observation Y sont des processus définis sur une base $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)_{0 \leq t \leq 1}$, $\mathcal{F}$ étant P-complète et $\mathcal{F}_t$ contenant la famille η des ensembles de P-mesure nulle de $\mathcal{F}$.

X et Y sont **solutions** des équations différentielles stochastiques linéaires suivantes :

$$1)\ d\, X_t = C_{(t)}\, X_t\, dt + D_{(t)}\, d\, V_t\ ,\ X_{(o)} = X_o$$

$$2)\ d\, Y_t = A_{(t)}\, X_t\, dt + B_{(t)}\, d\, W_t\ ,\ Y_{(o)} = o$$

b) V et W sont des mouvements browniens sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ n-dimensionnels. La fonction de corrélation des deux processus est de la forme $E\left[W_t . V_s^*\right] = \int_o^{t \wedge s} \Gamma_{(u)}\, du$. ($*$ désigne la transposition des matrices) Γ étant une application borélienne de $[0,1]$ dans l'espace $\mathcal{L}(R^n, R^n)$.

c) X est un processus m-dimensionnel, $E\left[X_o\right] = o$ et X_o est indépendant de V_t et W_t pour tout $t \in [0,1]$.

d) A, B, C, D, sont des matrices non aléatoires dépendant continument de t

$A : m \times q \qquad B : n \times q \qquad C : m \times n \qquad D : n \times m$

e) $B\, B^*$ est définie positive pour tout $t \in [0,1]$

f) Y est un processus q-dimensionnel.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'obtenir l'estimé $\hat{X}_t$ $(\hat{X}_t = E\left[X_t \mid \mathcal{F}_t^Y\right])$, comme solution d'une équation différentielle stochastique (équation de filtrage) et l'erreur quadratique

$$P_t = E\left[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^*\right] .$$

Nous condensons dans le lemme suivant des résultats classiques.

4.2. Lemme

Soit W un mouvement brownien n-dimensionnel sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0\leq t\leq 1}$. Soit $\Lambda^t_{n,m}$ l'ensemble des applications boréliennes $f : [0,1] \rightsquigarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ telles que $\int_0^t ||f(s)||^2 \, ds < \infty$.
Soit $H^t_\Lambda(W)$, l'ensemble des variables aléatoires Z_t avec :

$$Z_t = \int_0^t f(u)\, d W_u \quad \text{où } f \in \Lambda^t_{n,m} .$$

Soit $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}^m}$, l'espace des fonctions mesurables de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})$ de carré intégrable. Soit X un processus gaussien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $X_t \in \mathbb{L}^2_{R^m}$ et $E[X_t] = 0$.

Alors :

① $H^t_\Lambda(W)$ est un espace de variables gaussiennes, sous espace de Hilbert fermé de $\mathbb{L}^2_{R^m}$

② Soit $\hat{H}_t = \text{proj}^{X_t}_{H^t_\Lambda(W)}$, alors $\hat{X}_t = E\left[X_t | \mathcal{F}^W_t \vee \eta\right]$.

Démonstration

① $\Lambda^t_{n,m}$ est un espace de Hilbert avec la norme : $f \rightsquigarrow \sqrt{\int_0^t ||f(s)||^2 \, ds}$. L'application $f \rightsquigarrow \int_0^t f(s)\, d W_s$ étant une contraction , $H^t_\Lambda(W)$ est sous espace de Hilbert fermé de $\mathbb{L}^2_{R^m}$.
Pour des fonctions f étagées, le caractère gaussien des Z_t correspondants est immédiat, et comme tout $f \in \Lambda^t_{n,m}$ est limite presque sure d'une suite $\{f_p\}$ où les f_p sont étagées et le caractère gaussien passant à la limite, l'assertion ① est démontrée.

2 $X - \hat{X}$ est un processus gaussien m-dimensionnel $X_t - \hat{X}_t$ et W_s pour $s\leq t$ sont des variables aléatoires gaussiennes orthogonales. Elles sont donc indépendantes et $X_t - \hat{X}_t$ est alors indépendante de la tribu $\mathcal{F}^W_t \vee \eta$. On en déduit :

$$E\left[X_t | \mathcal{F}^W_t \vee \eta\right] = E\left[X_t - \hat{X}_t\right] + E\left[\hat{X}_t | \mathcal{F}^W_t \vee \eta\right] = \hat{X}_t .$$

Cette assertion signifie que dans ce cas l'estimation $\hat{X}$ de X au sens des moindres carrés et l'estimation linéaire coïncident.

Un autre résultat bien connu que nous admettrons est mentionné maintenant :

4.3. <u>Lemme</u>

L'équation (1) admet une solution unique X, processus gaussien d'espérance nulle et tel que :

$$X_t = \Phi(t,o)\, X_o + \int_o^t \Phi(t,s)\, D_s\, d\, V_s$$

où $\Phi(t,s)$ est la matrice résolvante de la matrice C_t solution unique de l'équation différentielle ordinaire dans $(R^m)x(R^m)$.

$$\frac{d\, \Phi(t,s)}{dt} = C_t\, \Phi(t,s) \quad \text{avec} \quad \Phi(o,o) = I_m$$

où I_m est la matrice identité de $\mathcal{L}(R^m, R^m)$.

On a de plus $E\left[(V_t - V_s)\, X_u^*\right] = o$ pour $u \leq s < t$.

4.4. <u>Le processus d'innovation de</u> $(Y, (\mathcal{F}_t^Y))$.

Soit $H_t = B_t\ B_t^*$. On peut définir H_t^{-1} et $H_t^{-1/2}$ de telle façon que $H_t^{-1/2}$ soit autoadjointe.

Considérons le processus Y', défini sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ tel que $Y'_t = \int_o^t H_u^{-1/2}\, d\, Y_u$, comme $Y_t = \int_o^t H_u^{1/2}\, d\, Y'_u$ et que H n'est pas aléatoire, les tribus $\mathcal{F}_t^Y$ et $\mathcal{F}_t^{Y'}$ sont égales.

$$Y'_t = \int_o^t H_u^{-1/2}\, A_u\, X_u\, du + \int_o^t H_u^{-1/2}\, B_u\, d\, W_u \quad .$$

Remarquons que le processus W' défini par $W'_t = \int_o^t H_u^{-1/2}\, D_u\, d\, W_u$ est un mouvement brownien q-dimensionnel sur la base $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$: en effet W' est une martingale continue de carré intégrable et le processus à variation bornée associé est défini par la matrice :

$$\int_o^t H_u^{-1/2} \quad B_u \; I_q \; B_u^* \quad H_u^{-1/2} \; du = \int_o^t I_q \; du = I_q . t$$

Le processus d'innovation de $(Y',(\mathcal{F}_t^Y))$ est donc un mouvement brownien q-dimensionnel que nous noterons $\hat{W}$, sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$

$$\hat{W}_t = \int_o^t H_u^{-1/2}.A_u \; (X_u-\hat{X}_u) \; du + W_t'$$

Notons qu'en vertu du corollaire 3.3. on a : $\bar{\bar{\mathcal{F}}}_t^{\hat{W}} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}_t^Y$. Enfin, le processus d'innovation de $(Y,(\mathcal{F}_t^Y))$ est alors le processus $\hat{M}$ défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ par $\hat{M}_t = \int_o^t H_u^{1/2} \; d \; \hat{W}_u$.

4.5. <u>Détermination de X</u>

D'après 4.4. $\hat{X}_t = E\left[X_t | \mathcal{F}_t^Y\right] = E\left[X_t | \bar{\bar{\mathcal{F}}}_t^{\hat{W}}\right]$ P.p.s.

4.4. et le lemme 4.3. permettent d'appliquer le lemme 4.2. d'où la représentation :

$$\hat{X}_t = \int_o^t G(t,u) \; d \; \hat{W}_u \qquad \text{P.p.s.}$$

où l'application $G(t,.)$ est borélienne de $[o,t]$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^m)$ avec $\int_o^t ||G(t,u)||^2 \; du < \infty$.

Remarquons que pour $s \leq t$ on a :

$$E\left[X_t \; . \; \hat{W}_s^*\right] = E\left[\hat{X}_t \; . \; \hat{W}_s^*\right] = \int_o^s G(t,u) \; d \; u$$

On va donc calculer $E\left[X_t \; . \; \hat{W}_s^*\right]$ pour déterminer G .

$$E\left[X_t.\hat{W}_s^*\right] = E\left[X_t \; . \; (\int_o^s H_u^{-1/2} \; B_u \; d \; W_u)\right] + \int_o^s E\left[X_t(X_u-\hat{X}_u)^*\right] A_u^* \; H_u^{-1/2} \; du$$

$$\text{Or} \quad E\left[X_t.(\int_o^s H_u^{-1/2} \; B_u \; d \; W_u)^*\right] = E\left[\Phi\,(t,o) \; X_o \; (\int_o^s H_u^{-1/2} \; B_u \; d \; W_u)^*\right]$$

$$+ \; E\left[\int_o^t \Phi(t,u) \; D_u \; d \; V_u \; . \; (\int_o^s H_u^{-1/2} \; B_u \; d \; W_u)^*\right]$$

Le premier terme du membre de droite de cette égalité est nul, le second est égal à :

$$\int_o^s \Phi(t,u) \; D_u d\langle V,W\rangle_u B_u^* \, H_u^{-1/2}$$

$$= \int_o^s \Phi(t,u) D_u \Gamma_u B_u^* H_u^{-1/2} du$$

Maintenant

$$\int_o^s E\left[X_t(X_u-\hat{X}_u)^*\right] A_u^* H_u^{-1/2} du = \int_o^s \Phi(t,u)\ E\left[X_u(X_u-\hat{X}_u)^*\right] A_u^* H_u^{-1/2} du$$

$$+ \int_o^s E\left[(\int_u^t \Phi(t,v)\ D_v\ d\ V_v).(X_u-\hat{X}_u)^*\right] A_u^* \ H_u^{-1/2}\ du$$

mais $E\left[(\int_u^t \Phi(t,v)\ D_v\ d\ V_v)(X_u-\hat{X}_u)^*\right] = 0$ puisque $X_u - \hat{X}_u$ est $\mathcal{F}_u$-mesurable et que $\int_u^t \Phi(t,v)\ D_v\ d\ V_v$ est indépendant de $\mathcal{F}_u$.

On obtient donc la formule :

$$E\left[X_t.\hat{W}_s^*\right] = \int_o^s \Phi(t,u)\left[D_u\Gamma_u B_u^* H_u^{-1/2} + E\left[X_u \tilde{X}_u^*\right] A_u^* \ H_u^{-1/2}\right] du$$

$$\text{où}\quad \tilde{X}_u = X_u - \hat{X}_u\ .$$

Ce qui donne $\hat{X}_t = \int_o^t G(t,u)\ d\ \hat{W}_u$ avec :

$$G(t,u) = \Phi(t,u)\left[D_u\Gamma_u B_u^* \ H_u^{-1/2} + E\left[X_u\ \tilde{X}_u^*\right] A_u^* \ H_u^{-1/2}\right]$$

Posons $K_t = D_t\Gamma_t B_t^* \ H_t^{-1/2} + E\left[X_t\ \tilde{X}_t^*\right] A_t^* \ H_t^{-1/2}$. On obtient l'équation différentielle stochastique pour $\hat{X}$:

$$d\ \hat{X}_t = C_t\ \hat{X}_t\ dt + K_t\ d\ \hat{W}_t \quad , \quad \hat{X}_o = o\ .$$

En remplaçant $\hat{W}$ par sa valeur en fonction de l'observation Y

$$\boxed{\begin{array}{l} d\ \hat{X}_t = C_t\ \hat{X}_t\ dt - K_t\ H_t^{-1/2}\ A_t\ \hat{X}_t\ dt + K_t\ H_t^{-1/2}\ d\ Y_t \\ \text{avec}\ \hat{X}_o = o \ ,\quad K_t = D_t\Gamma_t B_t^* H_t^{-1/2} + P_t\ A_t^* \ H_t^{-1/2} \\ \qquad\qquad \text{et}\ P_t = E\left[\tilde{X}_t\ \tilde{X}_t^*\right] \ . \end{array}}$$

Nous ne pouvons espérer résoudre une telle équation qu'en déterminant d'abord l'erreur quadratique P_t .

4.5. Cas particuliers

$\boxed{a}$ V et W sont indépendants , $\Gamma_t = o\ \forall t$ alors

$$d\ \hat{X}_t = C_t\ \hat{X}_t\ dt - P_t\ A_t^*\ H_t^{-1}\ A_t\ \hat{X}_t\ dt + P_t\ A_t^*\ H_t^{-1}\ d\ Y_t \ .$$

$\boxed{b}$ $\quad V = W \quad , \Gamma_t = I_n$

$$d\hat{X}_t = C_t \hat{X}_t dt - (D_t B_t^* + P_t A_t^*) H_t^{-1} A_t \hat{X}_t dt + (D_t B_t^* + P_t A_t^*) H_t^{-1} dY_t$$

$\boxed{c}$ $\quad B = I_n \quad q = n$

$$d\hat{X}_t = C_t \hat{X}_t dt - (D_t \Gamma_t + P_t A_t^*) A_t \hat{X}_t dt + (D_t \Gamma_t + P_t A_t^*) d Y_t$$

4.6. Détermination de P_t

On définit $\Pi_t = E[X_t X_t^*]$, $\Pi_o = E[X_o X_o^*]$

$$\Sigma_t = E[\hat{X}_t \hat{X}_t^*] .$$

D'après les définitions de X_t , $\hat{X}_t$, $\tilde{X}_t$ on a :

$$\Pi_t = P_t + \Sigma_t$$

On détermine d'abord Π_t et Σ_t .

Détermination de Π_t :

$$X_t = \Phi(t,o) X_o + \int_o^t \Phi(t,u) D_u d V_u$$

$$X_t^* = X_o^* \Phi^*(t,o) + (\int_o^t \Phi(t,u) D_u d V_u)^*$$

d'où $\quad \Pi_t = \Phi(t,o) \Pi_o \Phi^*(t,o) + \int_o^t \Phi(t,u) D_u D_u^* \Phi^*(t,u) du$

Π_t est alors solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\Pi_t}{dt} = C_t \Pi_t + \Pi_t C_t^* + D_t D_t^* \quad , \quad \Pi(o) = \Pi_o \quad .$$

Détermination de Σ_t :

$$\hat{X}_t = \int_o^t \Phi(t,u) K_u d \hat{W}_u \quad \text{d'où :}$$

$$\Sigma_t = \int_o^t \Phi(t,u) K_u K_u^* \Phi^*(t,u) du$$

Σ_t est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\Sigma_t}{dt} = C_t \Sigma_t + \Sigma_t C_t^* + K_t K_t^* \quad , \Sigma_{(o)} = o$$

On obtient alors pour P_t l'équation différentielle ordinaire :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dP_t}{dt} = C_t P_t + P_t C_t^* + D_t D_t^* - K_t K_t^* \quad , P_{(o)} = \Pi_o \\ &\text{où} \quad K_t = D_t \Gamma_t B_t^* H_t^{-1/2} + P_t A_t^* H_t^{-1/2} \quad . \end{aligned}}$$

5.- Equation du filtrage dans un cas de filtrage optimal non linéaire

En s'inspirant de [26] nous esquissons ici l'étude du cas où l'observation Y et le signal X sont comme dans le paragraphe précédent solutions d'équations stochastiques, mais les coefficients A, B, C, D étant cette fois-ci aléatoires et dépendant en particulier du passé observé.

5.1. Données

$\boxed{a}$ X et Y sont des processus à trajectoires continues définis sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{0\leq t\leq 1}$, où $\mathcal{F}$ est P-complète et $\mathcal{F}_t$ contient la famille $\mathcal{N}$ des ensembles de mesure P-nulle de $\mathcal{F}$. X et Y sont tels que :

$$\text{I} : X_t = X_o + \int_o^t C(s,\omega)\, ds + \int_o^t D(s,Y)\, d\, V_s$$

$$\text{II} : Y_t = \int_o^t A(s,\omega)\, ds + W_t$$

$\boxed{b}$ Comme dans le paragraphe 4 , V et W sont des mouvements browniens sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ q-dimensionnels, la fonction de corrélation des deux processus est de la forme :

$$E\left[W_t\, V_s^*\right] = \int_o^{t\wedge s} \Gamma_u\, du$$

Γ étant une application borélienne de $[0,1]$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)$.

$\boxed{c}$ X_t est un processus m-dimensionnel et X_o est indépendant de V_t et W_t pour tout t

$\boxed{d}$ Y est un processus q-dimensionnel

$\boxed{e}$ A (resp : C) applications de $([0,1]\times\Omega, \mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^q,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q})$ (resp : $(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})$) , adaptées à la famille $(\mathcal{F}_t)$

et tels que $E\left[\int_0^1(||A(s,\omega)||^2 + ||C(s,\omega)||^2)\,ds\right] < \infty$

D est une application de $([0,1]\times C, \mathcal{B}_{[0,1]}\otimes\mathcal{B}_C)$ dans $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^m), \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^m)})$, adaptée à la famille $(\mathcal{B}_t^c)$ et bornée.

Remarque

Comme $\mathcal{F}_t \supset \sigma\{X_s, W_s, s\leq t\} \vee \eta$ les processus A et C dépendent du signal X . .

5.2. Lemme

Soit f une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 , les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ étant bornées, f satisfaisant en outre à $E\left[(f\circ X_t)^2\right] < \infty$ pour tout $t\in[0,1]$.

Alors en désignant par $L_f(t,\omega)$ l'expression :

$$L_f(t,\omega) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left[(D(t,Y(\omega))\,D^*(t,Y(\omega)))_{i,j}\,\frac{\partial^2 f\circ X_t(\omega)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{m} C_i(t,\omega)\,\frac{\partial f\circ X_t(\omega)}{\partial x_i}$$

on a les propriétés suivantes :

① L_f est un processus à valeurs réelles défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ tel que $E\left[\int_0^1(L_f(t,\omega))^2\,dt\right] < \infty$

② $f\circ X_t(\omega) - f\circ X_0(\omega) - \int_0^t L_f(s,\omega)\,ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial f\circ X_s}{\partial x_i}(D(s,Y)dV_s)_i\right]$

Commentaire

La démonstration de ce lemme est immédiate. Il suffit d'appliquer la formule de Ito en exprimant $f\circ X_t - f\circ X_0$ pour obtenir ② . ① est évident d'après les hypothèses faites; enfin notons que ce résultat est classique quand l'équation I est une équation stochastique du type Ito.

On désigne par M la martingale réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ par :

$$M_t = \sum_{i=1}^{m} \left[\int_0^t \frac{\partial f \circ X_s}{\partial x_i} (D(s,Y)\, d\, V_s)_i\right] - E\left[f \circ X_o\right] - f \circ X_o$$

On notera $E^t\left[f \circ X_t\right]$, $E^t\left[L_f(t,.)\right]$, $E^t(A_t)$ les versions mesurables existant d'après le lemme 2.2. des espérances conditionnelles respectives $E\left[f \circ X_t | \mathcal{F}_t^Y\right]$, $E\left[L_f(t,.) | \mathcal{F}_t^Y\right]$ et $E\left[A_t | \mathcal{F}_t^Y\right]$.

5.3. Lemme

Soit $\bar{M}$ le processus défini sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ par :

$$\bar{M}_t = E^t\left[f \circ X_t\right] - E^o\left[f \circ X_o\right] - \int_0^t E^s\left[L_f(s,.)\right] ds$$

Alors $\bar{M}$ est une martingale de carré intégrable.

Démonstration

En exprimant $\bar{M}$ à partir de M on obtient :

$$E\left[\bar{M}_t - \bar{M}_s | \mathcal{F}_s^Y\right] = E\left[M_t - M_s | \mathcal{F}_s^Y\right] + E\left[E^t\left[f \circ X_t\right] - f \circ X_t | \mathcal{F}_s^Y\right]$$

$$- E\left[E^s\left[f \circ X_s\right] - f \circ X_s | \mathcal{F}_s^Y\right]$$

$$- E\left[\int_s^t (E^u\left[L_f(u,.)\right] - L_f(u,.))\, du | \mathcal{F}_s^Y\right].$$

Il est clair que les quatre termes du membre de droite sont nuls, $\bar{M}_t$ est de plus $\mathcal{F}_t^Y$-mesurable par définition, enfin les propriétés de f et de L_f impliquent l'intégralité de $\bar{M}_t^2$

On désigne par G_s le vecteur de composantes G_s^j définies par $\int_0^t G_s^j\, ds = \langle M, W^j\rangle_t$.

A partir de Γ, on désigne par Γ_j le vecteur défini par :

$$\int_0^t \Gamma_j(u)\, du = \langle V, W^j\rangle_t .$$

On peut alors voir que :

$$G_s^j = \left(\frac{\partial f \circ X_s}{\partial x}\right),\ D.\Gamma_j(s))$$

5.4. <u>Théorème (équation de filtrage correspondant à l'observation</u> Y)

Avec les données précédentes on a l'égalité :

$$E^t\left[f \circ X_t\right] = E^o\left[f \circ X_o\right] + \int_o^t E^s\left[L_f(s,.)\right] ds$$
$$+ \int_o^t (E^s[f \circ X_s\ A_s] - E^s[f \circ X_s]\ E^s[A_s] + E^s[G_s], d\ \hat{W}_s)$$

où $\hat{W}$ est le processus d'innovation correspondant à $(Y,(\mathcal{F}_t^Y))$.

<u>Démonstration</u>

On pose

$$M_t^* = \int_o^t(E^s[f \circ X_s\ A_s] - E^s[f \circ X_s]\ E^s[A_s] + E^s[G_s], d\ \hat{W}_s)$$

Nous allons montrer que $\overline{M}_t = M_t^*$ P.p.s.

D'après le théorème 3.5. de représentation, comme toute martingale de carré intégrable sur la base $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ peut être représentée par une intégrale stochastique par rapport au processus d'innovation, nous avons l'équivalence

$$\overline{M}_t = M_t^* \Longleftrightarrow \begin{cases} E[\overline{M}_t.Z_t] = E(M_t^*.Z_t] \text{ pour tout } Z_t \text{ de la forme} \\ Z_t = \int_o^t (\Phi_s, d\hat{W}_s) \text{ avec } E[||\Phi_t||^2] < \infty,\ \Phi \text{ étant} \\ \text{adapté à la famille } (\mathcal{F}_t^Y)\ . \end{cases}$$

On calculera les expressions $T_1 = E[(\bar{M}_t - M_t).Z_t]$ et $T_2 = E[M_t.Z_t]$

$$T_1 = E[(E^t[f \circ X_t] - f \circ X_t)Z_t] - E[(\int_o^t(E^s[L_f(s,.)] - L_f(s,.))ds)Z_t]$$

Le premier terme est nul (on le montre en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_t^Y$) . Le second est égal à $- E\left[\int_o^t(Z_t - Z_s)\ L_f\ (s,.)\ ds\right]$

Mais $Z_t = \int_o^t (\Phi_s, d\ \hat{W}_s) + \int_o^t(\Phi_s, d\ W_s) + \int_o^t(\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\ ds$

$$\text{d'où } T_1 = E\left[\int_o^t(\int_s^t(\Phi_u, d\ W_u) + \int_s^t(\Phi_u, A_u - E^u[A_u])\ du)\ L_f(s,.)\ ds\right]$$
$$= E\left[\int_o^t L_f(s,.)\ (\int_s^t(\Phi_u, A_u - E^u[A_u])\ du\ )\ ds\right]$$

$$\text{Enfin } T_1 = E\left[\int_o^t (\int_o^s L_f\ (u,.)\ du)\ (\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\ ds\right] .$$

$T_2 = E\left[M_t \cdot \int_0^t(\Phi_s, d\,W_s)\right] + E\left[M_t \cdot \int_0^t(\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\,ds\right]$

or $E\left[M_t \cdot \int_0^t(\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\,ds\right] = E\left[\int_0^t M_s \cdot (\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\,ds\right]$

$= E\left[\int_0^t(f \circ X_s - E[f \circ X_0] - \int_0^s L_f(u,.)du)(\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\,ds\right]$

$= E\left[\int_0^t(f \circ X_s - \int_0^s L_f(u,.)\,du)\,(\Phi_s, A_s - E^s[A_s])\,ds\right]$

Maintenant

$$E\left[M_t \int_0^t(\Phi_s, d\,W_s)\right] = E\left[\int_0^t(\Phi_s, d\langle M,W\rangle_s)\right] = E\left[\int_0^t(\Phi_s, G_s)\,ds\right]$$

$$= E\left[\int_0^t(\Phi_s, E^s[G_s])\,ds\right] = E\left[Z_t \cdot \int_0^t(E^s[G_s], d\,\hat{W}_s)\right]$$

et

$$E\left[\int_0^t f \circ X_s \cdot (\Phi_s, A_s - E^s[A_s])ds\right] = E\left[\int_0^t(\Phi_s, E^s[f \circ X_s(A_s - E^s[A_s])])ds\right]$$

$$= E\left[Z_t \int_0^t(E^s[f \circ X_s \cdot A_s] - E^s[f \circ X_s] \cdot E^s[A_s], d\,\hat{W}_s)\right]$$

On obtient

$$T_2 = E\left[Z_t \cdot \int_0^t(E^s[f \circ X_s\, A_s] - E^s[f \circ X_s]\, E^s[A_s], d\,\hat{W}_s)\right]$$

$$+ E\left[Z_t \cdot \int_0^t(E^s[G_s], d\,\hat{W}_s)\right] - T_1 \quad .$$

D'où le résultat.

On considère maintenant le cas plus général où l'équation II est remplacée par III :

$$\text{III} : Y_t = \int_0^t A(s,\omega)\,ds + \int_0^t B(s,Y)\,d\,W_s$$

avec les hypothèses suivantes sur B :

- B application de $([0,1]\times C, \mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{B}^C)$ dans $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q), \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q)})$
- pour tout s et tout x $B(s,x)$ est inversible
- $||B|| \geq k > 0$
- $P\left[\int_0^1 ||B(s,Y)||^2\,ds < \infty\right] = 1$.

Soit le processus Y' défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ par :

$$Y'_t = \int_0^t B^{-1}(s,Y)\,d\,Y_s$$

on a $Y'_t = \int_o^t B^{-1}(s,Y)\, A(s,\omega)\, ds + W_t$

Y'_t étant $\tilde{\mathcal{F}}^Y_t$-mesurable, on a $\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}^Y_t$.

5.5. Lemme

Avec la condition :

Pour tout mouvement brownien $\tilde{W}$ défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{G}_t),Q)$ et tout temps d'arrêt T fini de la famille $(\mathcal{G}_t)$, l'équation stochastique :

(3) $Z_{t\wedge T} = \int_o^{t\wedge T} B(s,Z_T)\, d\tilde{W}_s$ admet une solution forte unique (unicité trajectorielle), alors $\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t = \tilde{\mathcal{F}}^Y_t$

Démonstration

(avec les arguments de la démonstration du lemme 5.3. de [26])

On considère $\hat{W}$ le processus d'innovation correspondant à $(Y',(\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t))$. On peut alors écrire en appliquant le lemme 2.2. et la proposition 3.1.

$$Y'_t(\omega) = \int_o^t \alpha(s,Y'(\omega))\, ds + \hat{W}_t(\omega) \quad \text{P.p.s.}$$

Soit $T_n(\omega) = \sup\{t : \int_o^t ||\alpha(s,Y'(\omega))||^2 ds < n\}$.

T_n est un temps d'arrêt de la famille $(\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t)$. On définit alors sur la base $(\Omega,(\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t),P)$ des processus Y'^n par :

$$Y'^n_t(\omega) = \hat{W}_t(\omega) + \int_o^{t\wedge T_n} \alpha(s,Y'(\omega))\, ds \quad .$$

Suivant une technique déjà utilisée, on applique le théorème de Girsanov. Il existe alors sur $(\Omega,\tilde{\mathcal{F}}^{Y'})$ une probabilité P_n telle que Y'^n soit un mouvement brownien sur la base $(\Omega,(\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t),P_n)$. Pour ce mouvement brownien et en prenant $T = 1$, il existe une solution forte à l'équation (3) . Notons cette solution Y^n .

Nous avons $Y^n_t = \int_o^t B(s,Y^n)\, d\, Y'^n_s$ et $\mathcal{F}^{Y^n}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t$.

Comme sur l'ensemble $\{t < T_n\}$, $Y'^n_t = Y'_t$ on a :

$$Y^n_{t\wedge T_n} = \int_o^{t\wedge T_n} B(s, Y^n_{T_n})\, d\, Y'_s$$

Mais d'après la définition de Y' nous avons aussi

$$Y_{t\wedge T_n} = \int_o^{t\wedge T_n} B(s, Y_{T_n})\, d\, Y'_s \quad .$$

Ceci montre d'après l'unicité des solutions de l'équation (3) que les processus Y^n et $Y_{.\wedge T_n}$ sont indistinguables, ce qui nous donne l'égalité

$$\tilde{\mathcal{F}}^{Y^n}_{t\wedge T_n} = \tilde{\mathcal{F}}^{Y}_{t\wedge T_n}$$

d'où l'inclusion : $\tilde{\mathcal{F}}^{Y}_{t\wedge T_n} \subset \tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_{t\wedge T_n}$ et la relation $\tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}^{Y'}_t$

puisque $T_n \nearrow 1$.

Ayant déjà remarqué l'inclusion réciproque, on a le résultat annoncé.

5.6. Remarque

Les hypothèses du lemme 5.5. sont en particulier réalisées si nous avons des conditions de Lipschitz portant sur le coefficient B et si les processus solutions sont markoviens.

Dans un cas plus général, tel que celui de notre étude il n'est pas sur que nous puissions nous passer de conditions portant sur les temps d'arrêt.

5.7. Corollaire

Avec les données 5.1., l'équation III remplaçant l'équation II, et les hypothèses **faites sur** B, y compris celles du lemme 5.5., on a l'équation de filtrage suivante correspondant à l'observation Y :

$$E^t\,[f \circ X_t] = E^o[f \circ X_o] + \int_o^t E^s\,[L_f(s,.)]ds$$
$$+ \int_o^t (B^{-1}(s,Y)\,\big[E^s[f \circ X_s\, A_s] - E^s[f \circ X_s]E^s[A_s]\big] + E^s[G_s],\, d\,\hat{W}_s)$$

où $\hat{W}$ est un mouvement brownien défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t^Y),P)$ par
$\hat{W}_t = W_t + \int_0^t B^{-1}(s,Y)\,(A_s - E^s[A_s])\,ds$.

Démonstration

Comme le processus $\hat{W}$ défini ici est, d'après le lemme précédent, le processus d'innovation correspondant à $(Y',(\mathcal{F}_t^{Y'}))$, l'équation écrite n'est pas autre chose que l'équation du filtrage obtenue pour le processus Y' .

5.8. Remarque

L'équation de filtrage trouvée recouvre de nombreux cas. Cependant, si on ne dispose pas de données supplémentaires, elle ne permet pas le calcul des estimés $E^t[X_t]$ ou $E^t[f \circ X_t]$. En effet, pour le voir, considérons le cas simple étudié par Shyriaev [30] où le processus X est une variable aléatoire réelle X_o , Y et W sont des processus à valeurs réelles, avec $A(s,\omega) = A_o(s,Y) + X_o\,A_1(s,Y)$. On en déduit, avec les notations précédemment utilisées que l'on a :

$$C = D = 0,\ M = X_o\ ,\ L_f(s,.) = 0\ ,\ G_s = 0$$

En prenant f tel que $f \circ X_o = X_o$, on obtient l'équation de filtrage :

$$E^t[X_o] = E^o[X_o] + \int_0^t B^{-1}(s,Y)\,A_1(s,Y)\,(E^s[X_o^2] - (E^s[X_o])^2)\,d\hat{W}_s$$

ou en écrivant

$$\hat{W}_t = \int_0^t B^{-1}(s,Y)\,ds - \int_0^t (A_o(s,Y) + A_1(s,Y)\ E^s[X_o])\,ds$$

on obtient :

$$E^t[X_o] = E^o[X_o] + \int_0^t B^{-2}(s,Y)\,A_1(s,Y)\,(E^s[X_o^2] - (E^s[X_o])^2)\,dY_s$$
$$- \int_0^t B^{-1}(s,Y)\,A_1(s,Y)(E^s[X_o^2] - (E^s[X_o])^2)\,(A_o(s,Y) + A_1(s,Y)E^s[X_o])ds$$

Il est clair que $E^t[X_o]$ ne peut être calculé si on ne connaît pas $E^t[X_o^2]$.

Si on considère maintenant l'équation de filtrage avec $f \circ X_o = X_o^2$ le calcul de $E^t[X_o^2]$ dépend de la connaissance de $E^t[X_o^3]$ et ainsi de suite.

Dans [30] , Shyriaev considère une observation initiale Y_o et montre que si la distribution initiale $P[X_o \leq x | \mathcal{F}_o^Y]$ est celle d'une loi normale $N(m,\gamma)$, alors la distribution de la loi conditionnelle $P[X_o \leq x | \mathcal{F}_t^Y]$ est aussi celle d'une loi normale de paramètres $m_t = E^t[X_o]$ et γ_t, $\gamma_t = E^t[(X_o - m_t)^2]$, que l'on peut calculer.

Ce résultat énoncé avec une démonstration sommaire est la généralisation de celui démontré par Liptzer et Shyriaev dans [31] .

A N N E X E

Démonstration d'un théorème de Liptzer et Shyriaev

A.1. Données et hypothèses

$\boxed{a}$ Le signal X est une variable aléatoire réelle X_o, $E[X_o] = 0$ et $E[(X_o)^2] < \infty$.

$\boxed{b}$ L'observation Y est un processus à trajectoires continues, défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)_{o\leq t\leq 1}$ tel que :

$$Y_t(\omega) = Y_o(\omega) + \int_o^t (A_o(s,Y(\omega)) + X_o(\omega)\, A_1(s,Y(\omega)) + \int_o^t B(s,Y(\omega))\, d\, W_s$$

Y_o est une variable aléatoire de carré intégrable, indépendante de W_t pour tout t.

$\boxed{c}$ A_o, A_1, B sont des processus définis dans $(c,(\mathcal{B}_t^c),P_Y)$ avec

$$E_{P_Y}\left[\int_o^1 A_o^2\,(s,x)\,ds\right] < \infty$$

pour tout t, et tout ω $A_1[t,Y(\omega)]$ est bornée.

$$P_Y\left[\int_o^1 B^2\,(s,x)\,ds < \infty\right] = 1$$

$\boxed{d}$ W est un mouvement brownien défini sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$, X_o est indépendant de W_t pour tout t.

$\boxed{e}$ $\mathcal{F}$ désigne la tribu engendrée par les variables aléatoires W_s pour $s\leq 1$, X_o et Y_o, complétée pour P. De façon analogue $\mathcal{F}_t$ désigne la tribu engendrée par W_s, $s\leq t$, X_o et Y_o et par la famille des ensembles de P-mesure nulle de $\mathcal{F}$.

$\boxed{f}$ Pour tout x et tout t $|B(t,x)| \geq k > o$

Pour tout mouvement brownien $\check{W}$ défini sur une base $(\Omega,(\mathcal{G}_t),\check{Q})$ et tout temps d'arrêt T de la famille $(\mathcal{G}_t)$, l'équation stochastique :

$$(3) \quad Z_{t\wedge T} = \int_o^{t\wedge T} B(s,Z_T)\, d\,\tilde{W}_s$$

admet une solution forte unique.

Remarque

Ces données et hypothèses permettent d'appliquer le lemme 5.5. et le corollaire 5.7. de la partie II . Nous pourrons alors démontrer un théorème de Liptzer et Shyriaev [[30], théorème 1]

Notons que l'hypothèse d'unicité forte, énoncée en [f] ne figure pas dans l'énoncé du théorème 1 de [30] .

Enoncé du théorème

Avec les hypothèses précédentes, si la distribution conditionnelle initiale $P\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_o^Y\right]$ est celle d'une loi normale $N(m,\gamma)$ alors la distribution conditionnelle à postériori $P\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ est aussi celle d'une loi normale $N(m_t,\gamma_t)$ où $m_t = E\left[X_o \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ et $\gamma_t = E\left[(X_o - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ satisfont les équations :

A.11. $$dm_t = \gamma_t \frac{A_1(t,Y)}{B^2(t,Y)} \left[d\, Y_t - (A_o(t,Y) + A_1(t,Y)\, m_t)\, dt\right],\ m_o = m$$

A.12. $$\frac{d\gamma_t}{dt} = -\gamma_t^2 \frac{A_1(t,Y)}{B^2(t,Y)}\ ,\quad \gamma_o = \gamma$$

Les solutions de ces équations sont données par les formules :

A.13. $$m_t = m\frac{\gamma_t}{\gamma} + \gamma_t \int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} (d\, Y_s - A_o(s,Y)\, ds\,)$$

A.14. $$\gamma_t = \frac{\gamma}{1 + \gamma \int_o^t \frac{A_1^2\, (s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds}$$

Nous traiterons le cas où $Y_o = o$, le résultat général étant facilement obtenu à partir de ce cas particulier.

A.2. Une formule de densité

Avec les hypothèses faites, les propositions 2.2., 3.1.

et la remarque corollaire 3.4., on peut trouver des processus $\hat{A}_o, \hat{A}_1, \hat{B}$ définis sur $(c, (\mathcal{B}_t^c), P_{Y'})$ tels que :

$$\hat{A}_o\ (s, Y'(\omega)) = A_o(s, Y(\omega)) \quad \lambda \otimes \ P.p.s.$$

$$\hat{A}_1\ (s, Y'(\omega)) = A_1(s, Y(\omega)) \quad \lambda \otimes \ P.p.s.$$

$$\hat{B}\ (s, Y'(\omega)) = B\ (s, Y(\omega)) \quad \lambda \otimes \ P.p.s.$$

où Y' est défini comme dans (partie II- paragraphe 5) par $Y'_t(\omega) = \int_o^t B^{-1}(s,X)dY_s$, ce qui permet d'écrire :

$$(1) \quad Y'_t(\omega) = \int_o^t \frac{(\hat{A}_o(s,Y'(\omega)) + X_o(\omega)\ \hat{A}_1(s,Y'(\omega)))}{\hat{B}(s,Y'(\omega))}\ ds \ + W_t(\omega)$$

Comme X_o est indépendant de W_t pour tout t, on peut écrire l'espace de base $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sous la forme :

$$(\mathbb{R} \times \Omega_o\ , \mathcal{B}_R \otimes \mathcal{H},\ \Pi \otimes P_o)$$

où $\mathcal{H}$ est la tribu $\sigma\{W_s\ , s \leq 1\}$, X_o définit sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ la distribution Π, P_o est la restriction de P à $\mathcal{H}$.

Soit $\omega \in \Omega$, $\omega = (\alpha, \omega_o)$ et $X_o(\omega) = \alpha$, $W_t(\omega) = W_t(\omega_o)$, $Y'_t(\omega) = Y'_t(\alpha, \omega_o)$

(1) est alors équivalent à (2)

$$(2) \quad Y'_t(\alpha, \omega_o) = \int_o^t \frac{(\hat{A}_o(s,Y'(\alpha,\omega_o)) + \alpha\ \hat{A}_1(s,Y'(\alpha,\omega_o))}{\hat{B}(s,Y'(\alpha,\omega_o))}\ ds \ + W_t(\omega_o)$$

On notera également $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{H}$ les sous tribus de $\mathcal{F}$ associées canoniquement à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{H}$, c'est-à-dire respectivement la tribu formée des ensembles de la forme $U \times \Omega_o$ où $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et la tribu formée des ensembles de la forme $\mathbb{R} \times G$ où $G \in \mathcal{H}$. Pour la loi $\varepsilon_\alpha \otimes P_o$, loi conditionnelle sur $\mathcal{F}$ connaissant $\alpha \in \mathbb{R}$ on a la relation (2) presque surement, α étant cette fois ci un nombre certain. On note K_α la restriction de cette loi à $\mathcal{F}^{Y'}$ et on a $K_\alpha << P/_{\mathcal{F}}Y'$. Soit $P_{Y',\alpha}$ l'image de K_α par Y' dans l'espace $(c, \mathcal{B}^c)$. Alors $P_{Y',\alpha} << P_{Y'}$

ayant $P_{Y',\alpha}\left[\int_0^1 \left(\frac{\hat{A}_o(s,x)+\alpha\,\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\right)^2 ds < \infty\right] = 1$

On a (partie I - proposition 2.9.) , $P_{Y',\alpha} \ll \beta$, où β désigne la mesure brownienne définie sur $(c,\mathcal{B}^c)$ et :

$$(3)\quad \frac{dP_{Y'}}{d\,\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 \frac{\hat{A}_o(s,x)+\alpha\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\, d\,\mathcal{Y}'_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\hat{A}_o(s,x)+\alpha\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\right)^2 ds\right]$$

$P_{Y',\alpha}$.p.s.

En utilisant l'expression de cette densité relativement à la mesure β (I - proposition 2.9.), et ayant $P_{Y'} \ll \beta$ on obtient aussi la relation (3) , $P_{Y'}$.p.s.

D'autre part, en utilisant le processus d'innovation $\hat{W}$ associé au couple $(Y',(\mathcal{F}^{Y'}_t))$ on obtient :

$$Y'_t(\omega) = \int_0^t \frac{\hat{A}_o(s,Y'(\omega)) + m_s(\omega)\,\hat{A}_1(s,Y'(\omega))}{\hat{B}(s,Y'(\omega))}\, ds + \hat{W}_t(\omega)$$

où m_s est une version prévisible de l'espérance conditionnelle $E\left[X_o \mid \mathcal{F}^{Y'}_s\right]$. On note $\hat{m}$ le processus prévisible défini dans $(c,(\mathcal{B}^c_t),P_{Y'})$ par $\hat{m}_t \circ Y'(\omega) = m_t(\omega)$. Avec cette représentation de Y' on a (partie II, corollaire 3.2.)

$$\frac{dP_{Y'}}{d\beta}(x) = \exp\left[\int_0^1 \frac{\hat{A}_o(s,x)+\hat{m}(s,x)\,\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\, d\mathcal{Y}'_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\hat{A}_o(s,x)+\hat{m}(s,x)\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\right)^2 ds\right]$$

$P_{Y'}$.p.s.

Ayant $P_{Y',\alpha} \ll P_{Y'}$ on obtient alors l'expression de la densité

$$\frac{dP_{Y',\alpha}}{dP_{Y'}}(x) = \exp\left[\int_0^1 \frac{(\alpha - \hat{m}(s,x))\,\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\, d\,\mathcal{Y}'_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\hat{A}_o(s,x)+\alpha\,\hat{A}_1(s,x))^2 - (\hat{A}_o(s,x)+m(s,x)\,\hat{A}_1(s,x))^2}{\hat{B}^2(s,x)}\, ds\right]$$

$P_{Y'}$.p.s.

En écrivant $\mathcal{Y}'_t = \int_0^t \frac{\hat{A}_o(s,x)+\hat{m}(s,x)\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}(s,x)}\, ds + \mathcal{W}_t(x)$

où $\mathcal{W}_t \circ Y'(\omega) = \hat{W}_t(\omega)$ on obtient

$$\frac{dP_{Y',\alpha}}{dP_{Y'}}(x) = \exp\left[\int_0^1 \frac{(\alpha-\hat{m}(s,x))\,\hat{A}_1(s,x)}{\hat{B}\,(s,x)}\, d\,\mathcal{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha-\hat{m}(s,x))^2\,\frac{\hat{A}_1^2 s(,x)}{\hat{B}^2(s,x)} ds\right]$$

$P_{Y'}$.p.s.

Soit maintenant $F \in \mathcal{B}_t^c$

$$P\left[X_o \leq u\ ,\ Y' \in F\right] = \int_F P\left[X_o \leq u \mid\ Y' = x\right]\ d\,P_{Y'}(x)$$

$$= \int_{-\infty}^u P\left[Y' \in F \mid X_o = \alpha\right] d\,\Pi_{(\alpha)} = \int_{-\infty}^u \left(\int_F \frac{dP_{Y',\alpha}}{dP_{Y'}}(x)\ dP_{Y'}(x)\right) d\Pi(\alpha)$$

$$= \int_{-\infty}^u \left(\int_F E\left[\frac{dP_{Y',\alpha}}{dP_{Y'}}\ \middle|\ \mathcal{B}_t^c\right] d\,P_{Y'}(x)\right)\ d\Pi_\alpha$$

On en déduit :

$$P\left[X_o \leq u \mid\ Y' = x/_{\mathcal{B}_t^c}\right] = \int_{-\infty}^u E\left[\frac{dP_{Y',\alpha}}{dP_{Y'}}\ \middle|\ \mathcal{B}_t^c\right](x)\ d\,\Pi_{(\alpha)}$$

si Π admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue on obtient :

$$\frac{\partial P\left[X_o \leq u \mid Y' = x/_{\mathcal{B}_t^c}\right]}{\partial u} = \frac{\partial P\left[X_o \leq u\right]}{\partial u}\quad E\left[\frac{dP_{Y',u}}{dP_{Y'}}\ \middle|\ \mathcal{B}_t^c\right]\ (x)$$

ou relativement à l'espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$:

$$\frac{\partial P\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_t^{Y'}\right]}{\partial u} = \frac{\partial P\left[X_o \leq u\right]}{\partial u}\,.\ \exp\left[\int_0^t \frac{(u-m(s,\omega))\,\hat{A}_1(s,Y'(\omega))}{\hat{B}(s,Y'(\omega))}\ d\,\hat{W}_s\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t (u-m(s,\omega))^2\ \frac{\hat{A}_1^2(s,Y'(\omega))}{\hat{B}^2(s,Y'(\omega))}\ ds\right]$$

En désignant encore par m_s une version prévisible de $E\left[X_o \mid \mathcal{F}_s^Y\right]$ compte tenu de l'égalité $\tilde{\mathcal{F}}_t^{Y'} = \tilde{\mathcal{F}}_t^Y$ et de la relation :

$$\hat{W}_t = \int_0^t B^{-1}(s,Y(\omega))\ d\,Y_s - \int_0^t \frac{A_o(s,Y(\omega)) + m(s,\omega)\,A_1(s,Y(\omega))}{B(s,Y(\omega))}\ ds$$

on obtient :

$$\frac{\partial P\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_t^Y\right]}{\partial u} = \frac{\partial P\left[X_o \leq u\right]}{\partial u} \cdot \exp\left[\int_o^t \frac{(u-m(s,\omega))A_1(s,Y(\omega))}{B^2(s,Y(\omega))}(d\,Y_s - (A_o(s,Y(\omega))+m(s,\omega)\,A_1(s,Y(\omega)))\,ds) - \frac{1}{2}\int_o^t (u-m(s,\omega))^2 \frac{A_1^2(s,Y(\omega))}{B^2(s,Y(\omega))}\,ds\right]$$

A.3. Démonstration du théorème

En écrivant que $\frac{\partial P[X_o \leq u]}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\gamma}} \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\gamma}\right]$

et en utilisant la formule obtenue en A.2., on obtient une relation de la forme

$$\frac{\partial P\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_t^Y\right]}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2\,\Pi\,\gamma}} \exp\left[-Q(u)\right]$$

où Q est un polynome du second degré en u. Ceci montre que la distribution de $E\left[X_o \leq u \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$ est celle d'une loi normale, de paramètres m_t et $\gamma_t = E\left[(X_o-m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^Y\right]$.

Nous allons maintenant obtenir m_t et γ_t en suivant la méthode exposée par Shyriaev et Liptzer dans [31].

On applique d'abord (comme dans 5.8. partie II) l'équation de filtrage avec $f \circ X_o = X_o$. Ce qui donne :

$$m_t = m + \int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)}\left[E^s\left[X_o^2\right] - m_s^2\right](dY_s - (A_o(s,Y)+m_s A_1(s,Y))ds)$$

en écrivant que $\gamma_t = E\left[X_o^2 \mid \mathcal{F}_t^Y\right] - m_t^2$ on obtient sous forme différentielle, l'équation A.11.

A.11. $$d\,m_t = \gamma_t \frac{A_1(t,Y)}{B^2(t,Y)}\left[dY_t - (A_o(t,Y) + m_t\,A_1(t,Y))\,dt\right]$$

$$m_o = m$$

Appliquons maintenant l'équation de filtrage à $f\left[X_o\right] = X_o^2$

$$E^t\left[X_o^2\right] - E^o\left[X_o^2\right] = \int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)}\left(E^s\left[X_o^3\right] - E^s\left[X_o^2\right] \cdot m_s\right)$$

$$\left[d\,Y_s - (A_o(s,Y) + A_1(s,Y)\,m_s)\,ds\right]$$

Comme $E^s[X_o^3] - E^s[X_o^2]m_s = E[X_o^2 (X_o - m_s) | \mathcal{F}_s^Y]$ on obtient en écrivant que la distribution de $E[X_o | \mathcal{F}_s^Y]$ est normale et que $E[X_o^2 (X_o - m_s) | \mathcal{F}_s^Y] = 2m_s \cdot \gamma_s$

et l'équation de filtrage s'écrit :

$$E^t[X_o^2] = \gamma + m^2 + 2\int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} m_s \cdot \gamma_s [d Y_s - (A_o(s,Y) + A_1(s,Y)m_s)ds]$$

et

$$\gamma_t = \gamma + m^2 - m_t^2 + 2\int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} m_s \cdot \gamma_s [dY_s - (A_o(s,Y) + A_1(s,Y)m_s)ds] .$$

En écrivant A.11. sous forme intégrale, et en appliquant la formule de Ito à $F(m_t) = m_t^2$ on obtient :

$$m_t^2 = m^2 + \int_o^t 2\gamma_s m_s \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} [d Y_s - (A_o(s,Y) + A_1(s,Y) m_s) ds]$$
$$+ \int_o^t \gamma_s^2 \frac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)} ds .$$

D'où l'équation A.12. écrite sous forme intégrale :

$$\boxed{\text{A.12.} \quad \gamma_t = \gamma - \int_o^t \gamma_s^2 \frac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)} ds} .$$

La résolution de A.12. est immédiate. On obtient :

$$\boxed{\text{A.14.} \quad \gamma_t = \frac{\gamma}{1 + \int_o^t \gamma \cdot \frac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)} ds}}$$

Résolution de A.11.

On commence par résoudre $d m_t = -\gamma_t \dfrac{A_1^2(t,Y)}{B^2(t,Y)} m_t \, dt$.

En portant la valeur de γ_t obtenue en A.14. on a :

$$\frac{dm_t}{m_t} = -\frac{u_t'}{1+u_t} dt \quad \text{où} \quad u_t = \int_o^t \gamma \cdot \frac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)} ds$$

On en tire $m_t = \dfrac{k}{1 + \gamma \int_o^t \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds}$

On aura maintenant une solution de (A.11.) en utilisant une méthode de type "variation de la constante" .

Soit $m_t = k_t \cdot \dfrac{1}{1 + \gamma \int_o^t \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds}$

où k_t est une quasi martingale de la forme :

$$k_t = k_o + \int_o^t \alpha(s,\omega)\, d\, Y_s + \int_o^t \beta(s,\omega)\, ds$$

En appliquant la formule de Ito à la fonction $F(x,y) = x.y$ pour : $x = k_t$ et $y = \dfrac{1}{1 + \gamma \int_o^t \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds}$ on obtient :

$$dm_t = dk_t \cdot \frac{1}{1 + \gamma \int_o^t \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds} - \frac{k_t \cdot \gamma \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}}{\left(1+\gamma \int_o^t \dfrac{A_1^2(s,Y)}{B^2(s,Y)}\, ds\right)^2}\, dt$$

En comparant avec A.11. on tire :

$\gamma \cdot \dfrac{A_1(t,Y)}{B^2(t,Y)} (dY_t - A_o(t,Y)\, dt) = \alpha(t,\omega)\, d\, Y_t + \beta(t,\omega)\, dt$. On peut donc prendre $\alpha(t,\omega) = \gamma . \dfrac{A_1(t,Y(\omega))}{B^2(t,Y(\omega))}$ et $\beta(t,\omega) = -\gamma . \dfrac{A_1(t,Y(\omega))}{B^2(t,Y(\omega))} . A_o(t,Y(\omega))$

d'où la solution :

$$k_t = k_o + \int_o^t \gamma \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} (d\, Y_s - A_o(s,Y)\, ds)$$

et en prenant $k_o = m$

$$\boxed{\text{A.13.} \quad m_t = m \frac{\gamma_t}{\gamma} + \gamma_t \int_o^t \frac{A_1(s,Y)}{B^2(s,Y)} (d\, Y_s - A_o(s,Y)\, ds)}$$

Comme $A_1(t,Y)$ est borné, il est clair que cette solution trouvée est la seule solution de A.11.

BIBLIOGRAPHIE

1. I.V.Girsanov. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. Theory of Prob. and its appl., vol. 5, (1961), 285-301.

2. M.P.Ershov. Sur l'absolue continuité des mesures correspondant à des processus de diffusion. Theory of Prob. and its appl., vol. XVII, (1972), 173-178.

3. Liptzer-Shyriaev. Sur l'absolue continuité des mesures, correspondant aux processus de type diffusion, par rapport à la mesure brownienne. IZV-AK-NAOUK,séria Mat. 36, (1972), 847-889. (en russe).

4. _______________. Sur les processus dont la loi est équivalente à celle du mouvement brownien. Polycopié - Université de Moscou, (1970) (en russe).

5. P.A.Meyer et C.Doleans. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probab. - Université de Strasbourg. Springer Verlag, Lecture Notes,124, 77-107

6. M.Métivier. Processus de Markov. Polycopié - Université de Rennes (1972).

7. M.Duflo. Cours de 3ème cycle sur l'intégrale stochastique. Université de Paris VI. (1971).

8. P.Priouret. Cours de l'école d'été de Saint Flour. Juillet 1973.

9. J.Mémin. Théorème de Girsanov. Séminaire de Probabilités - Université de Rennes. (1972).

10. M.Métivier. Notions fondamentales de la théorie des probabilités. Dunod. (1968).

11. J.Pellaumail. Une nouvelle construction de l'intégrale stochastique. Thèse - Université de Rennes, (1972).

12. P.A.Meyer. Sur un problème de filtration. Séminaires de probabilités - Université de Strasbourg, (1971) Lectures Notes - Springer Verlag n° 321 , 223-247 .

13. C.Doleans. Diffusions à coefficients continus. Séminaires de probabilités - Université de Strasbourg, (1968-1969) Springer Verlag, Lecture Notes n° 124, 241-252

14. P.Courrège et P.Priouret. Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire : relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition. Publ. Inst. Stat. Université Paris. 14, (1965), 245-274.

15. T.Kailath. The structure of radon-Nykodym derivatives with respect to Wiener and related measures. Annals of Math. Stat. vol. 42, n° 3, (1971), 1054-1067.

16. J.Neveu. Processus aléatoires gaussiens. Presses de l'Université de Montréal, (1968).

17. M.P.Ershov. Extensions of measures. Stochastic equations. Symposium of Probability, Japan-URSS, Springer Verlag, n° 30, 516-526.

18. ________. Sur les représentations des processus de Ito. Theory of probab. and app. XVII - 1, (1972), 167-172.

19. T.Kailath. An innovations approach to least squares estimation : part I: linear filtering in additive white noise. IEEE Trans. Aut. Contr. vol. AC 13, décembre 1968, 646-654 .

20. P.Frost et T.Kailath. An innovations approach to least squares estimation : part III : non linear estimation in white noise, IEEE, Trans. Aut. Countr. vol AC 16, juin 1971, 217-226.

21. T.Kailath. Some extensions of the innovations theorem. Bell Technical journal, vol 50, n° 4, (1971), 1487-1494.

22. ________. A note on least square estimation by the innovation method, SIAM J. control, vol 10, n° 3, Aug. 1972.

23. Balakrishnan : A martingale approach to linear recursive state estimation. SIAM J. Control, novembre 1972.

24. J.M.C.Clark. Conditions for one-to-one correspondence between an observation process and its innovation : center for computing and automation, Imperial College, London, Tech. Resp. 1, (1969).

25. __________. The representation of functionals of brownian motion by stochastic integrals. Annals of Math. Statistics (1970), vol 41, n° 4, 1282-1295.

26. M.Fujisaki, G.Kalliampur, H.Kunita. Stochastic differential equations for the non linear filtering problem. Osaka J. of Maths., vol 9, 19-40.

27. P.A.Meyer. Probabilités et potentiels. Herman, Paris, (1966), Actualités scientifiques et industrielles.

28. M.Hitsuda. Representation of a gaussian process equivalent to Wiener process. Osaka J. Math. 5, (1968), 299-312.

29. T.Duncan. On the absolute continuity of measures. Annals of mathematical statistics, vol. 41, n° 1, (1970), 30-38.

30. A.N.Shyriaev. Statistics of diffusion processes. Symposium of Probability, Japan-URSS, Springer Verlag, n° 330, (1972).

31. Liptzer et Shyriaev. Non linear filtering of markov diffusion processes. Proc. Steklov Inst. Math, 104, (1968).

32. R.E.Kalmann et R.S.Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. J. Basic Eng. ASME, Ser. D, 83, (1961), 95-108.

33. R.S.Bucy et P.D.Joseph. Filtering for stochastic processes with applications to guidance. Interscience publishers (John Wiley and sons), (1968).

VU :

Le Président de la Thèse

VU :

Le Directeur de Thèse

VU et APPROUVE

RENNES, le

Le Directeur de l'U.E.R.

VU pour autorisation

RENNES, le

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD