

ROLAND THÉBAULT

Extensions de groupes abéliens par des groupes bornés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 2

« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. n° 2, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974__2_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXTENSIONS DE GROUPES ABELIENS PAR DES GROUPES BORNES

par

Roland THEBAULT

Tous les groupes dont il sera question ici sont des p -groupes abéliens réduits. Si G est un tel groupe, $G[p] = \{x \in G / px = 0\}$ désigne le socle du groupe. Les invariants de Ulm sont les dimensions sur F_p des espaces vectoriels $p^\alpha G[p] / p^{\alpha+1} G[p]$, où α est un ordinal quelconque.

A - GENERALITES

D'une manière générale, soit d'abord G un groupe quelconque, et B un groupe borné de longueur n .

La courte suite exacte

$$G[p^n] \longrightarrow G \xrightarrow{p^n} p^n G$$

donne la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(p^n G, B) \longrightarrow \text{Hom}(G, B) \longrightarrow \text{Hom}(G[p^n], B) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \text{Ext}(p^n G, B) \xrightarrow{p^n} \text{Ext}(G, B) \longrightarrow \text{Ext}(G[p^n], B) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Mais $p^n \text{Ext}(p^n G, B) = 0$. Il vient donc :

$$\text{Ext}(G, B) \cong \text{Ext}(G[p^n], B)$$

$G[p^n]$ est une somme directe de groupes cycliques de type $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit I_q un ensemble de cardinal α_q pour tout $q \in [1, \dots, n]$ et posons

$$F = \sum_{q=1}^n Z^{(I_q)}.$$

On a une suite exacte

$$F \xrightarrow{\xi} F \longrightarrow G[p^n]$$

où est la multiplication par

$$\underbrace{(p, \dots, p)}_{\alpha_1}, \underbrace{(p^2, \dots, p^2)}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{(p^n, \dots, p^n)}_{\alpha_n}$$

F étant libre, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(G[p^n], B) \longrightarrow \text{Hom}(F, B) \xrightarrow{\xi^*} \text{Hom}(F, B) \longrightarrow \text{Ext}(G[p^n], B) \longrightarrow 0.$$

Il vient donc finalement :

$$\text{Ext}(G, B) \simeq \text{Hom}(F, B) / \xi^* \text{Hom}(F, B)$$

Exemples

1) Prenons par exemple $G = \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/p^2 \mathbb{Z}$.

Une extension H de B par G peut se décrire comme suit ; les éléments de H sont de la forme $((a_1, \dots, a_n, \dots), \lambda)$ où $(a_1, \dots, a_n, \dots) \in H$ et $\lambda \in B$.

Il existe une application ψ de $\mathbb{Z}/p \mathbb{Z} \times \prod_{n \geq 2} (\mathbb{Z}/p^2 \mathbb{Z})_n$ dans $\mathbb{Z}/p^2 \mathbb{Z}$ telle que

$$[(a_1, \dots, a_n, \dots), \lambda] + [(b_1, \dots, b_n, \dots), \mu] = [(r_1, \dots, r_n, \dots), \lambda + \mu + (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \dots)]$$

avec $a_n + b_n = p^n q_n + r_n \quad 0 \leq r_n < p^n$

et \bar{q}_1 classe de q_1 modulo p

$$\bar{q}_n \text{ classe de } q_n \text{ modulo } p^2 \quad (n \geq 2).$$

2) Si $G = \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$, on obtient plus simplement

$$\text{Ext}(G, B) = E^* \quad \text{où } G[p] \text{ a été noté } E,$$

espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$. La description de la structure est analogue à celle de l'exemple précédent.

Bien entendu, à des formes linéaires distinctes, peuvent correspondre des groupes isomorphes ; nous reviendrons ultérieurement sur cette difficulté.

On notera K_ψ l'extension de ce type, déterminée par une forme linéaire ψ .

Soit maintenant un groupe G de longueur $\omega+1$ et dont tous les invariants de Ulm sont égaux à 1. Désignons par G^1 le sous-groupe des éléments de hauteur infinie. On a $G^1 \simeq \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$.

G/G^1 est séparable, et on sait qu'il existe un homomorphisme injectif $\theta : G/G^1 \rightarrow A$ (cf. [1], p. 16) tel que $\theta(G/G^1)$ soit pur et dense dans A.

La suite exacte $G/G^1 \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow A/G/G^1$ donne une suite exacte d'homologie se terminant par

$$\text{Ext}(A, Z/pZ) \longrightarrow \text{Ext}(G/G^1, Z/pZ).$$

Par conséquent, on voit que pour G donné, il existe une extension K_ψ telle que G soit déterminé par le pull-back :

$$\begin{array}{ccccc} Z/pZ & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/G^1 \\ \parallel & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta \\ Z/pZ & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\chi} & A \end{array}$$

où η est injectif et où $G = \{(x, y) \in K_\psi \times G/G^1 / \chi(x) = \theta(y)\}$.

Le problème principal qui apparaît dans cette étude, est donc de classer les K_ψ .

B. ETUDE DES EXTENSIONS K_ψ

L'espace vectoriel E est filtré de manière naturelle par les sous-espaces E_n constitués des suites dont les n premiers termes sont nuls.

On vérifie que :

- Si $\ker \psi$ ne contient aucun des E_n , les invariants de Ulm de K sont 1 pour $\alpha \leq \omega+1$ et nuls ensuite ; K_ψ est réduit de longueur $\omega+1$.
- S'il existe un entier n qui soit le plus petit entier m tel que $\ker \psi$ contienne E_m , K_ψ est réduit de longueur ω , i.e. séparable.

Tous les invariants sont égaux à 1, sauf κ_n qui est nul.

Nous ne nous intéresserons plus qu'au premier de ces deux cas; les formes linéaires qui correspondent au second constituent un sous-espace de dimension dénombrable de E^* .

D'après ([2], corollaire 1), des groupes K_ψ et K_φ sont isomorphes, si et seulement si il existe un automorphisme de E conservant la filtration (= isométrie), envoyant $\ker \varphi$ sur $\ker \psi$ tel que $\psi.g = \varphi$. De plus, on sait qu'il existe $2^{\mathbb{C}}$ groupes K_φ non isomorphes.

Nous allons essayer d'améliorer ce résultat à l'aide de filtres.

Si A est une partie de \mathbb{N} , on pose

$$H_A = \{x = (x_i) / i \in A \implies x_i = 0\}.$$

Lemme 1 : $H_{A \cap A'} = H_A + H_{A'}$.

Soit (x_i) nul sur $A \cap A'$ au moins.

$$y = (y_i) \quad y_i = 0 \text{ si } i \in A ; y_i = x_i \text{ si } i \notin A$$

$$z = (z_i) \quad z_i = x_i \text{ si } i \in A - A' ; z_i = 0 \text{ sinon.}$$

Alors, on a y et z éléments de H_A et $H_{A'}$, respectivement et $x = y + z$.

D'où $H_{A \cap A'} \subset H_A + H_{A'}$. La réciproque est évidente.

Si \mathcal{F} est maintenant un filtre sur N , nous poserons $H_{\mathcal{F}} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} H_A$.

Lemme 2 : On a les résultats suivants :

- $H_{\mathcal{F}}$ est un sous-espace de E .
- Il est de codimension 1 si et seulement si \mathcal{F} est un ultrafiltre.
- Il contient $\bigoplus_N \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si \mathcal{F} est non principal.

a) Résulte immédiatement du lemme 1.

b) Supposons que \mathcal{F} soit un ultrafiltre. Nécessairement, $(1, 1, \dots) \notin H_{\mathcal{F}}$. Soit alors (x_i) quelconque dans E , et posons :

$$A_j = \{i / x_i = j\} \quad \forall j \in \mathbb{F}_p ;$$

les A_j étant en nombre fini, l'un au moins A_{j_0} est élément de \mathcal{F} ; alors, $x - j_0(1, 1, \dots)$ est dans $H_{\mathcal{F}}$; on en déduit que $H_{\mathcal{F}}$ est de codimension 1 dans E .

Réciproquement, supposons que \mathcal{F} ne soit pas un ultrafiltre; il existe donc une partie A telle que $A \notin \mathcal{F}$ et $\complement A \notin \mathcal{F}$; cela signifie qu'il existe x dont les composantes sont nulles sur A et y dont les composantes sont nulles sur $\complement A$, ces deux éléments n'appartenant pas à $H_{\mathcal{F}}$; de plus, quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{F}_p$, $\lambda x + \mu y$ n'est pas dans $H_{\mathcal{F}}$; $H_{\mathcal{F}}$ est donc de codimension deux au moins.

c) Immédiat.

Réciproquement, étant donné un sous-espace G de E , considérons la famille des sous-espaces fermés de G ; si K est un tel sous-espace,

posons :

$$B_K = \{n \in \mathbb{N} / K_n = K \cap E_n \neq K \cap E_{n+1} = K_{n+1}\}$$

Lemme 3 : Les parties $\mathcal{E}B_K$ où K parcourt l'ensemble des sous-espaces fermés de G déterminent sur \mathbb{N} un filtre \mathcal{F} . Si $G \supset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, \mathcal{F} est non principal.

Soient K et A tels que A contienne $\mathcal{E}B_K$. Pour tout n dans $\mathcal{E}A$, n appartenant à B_K , il existe $z_n \in K_n - K_{n+1}$. Soit K' le sous-espace engendré par les z_n pour n dans $\mathcal{E}A$. Si \bar{K}' est la fermeture de K' dans K , montrons que $B_{\bar{K}'} = \mathcal{E}A$.

Si $n \in \mathcal{E}A$, z_n appartient à $\bar{K}'_n - \bar{K}'_{n+1}$ et donc $n \in B_{\bar{K}'}$.

Si $n_0 \in B_{\bar{K}'}$, il existe $z \in \bar{K}'_{n_0} - \bar{K}'_{n_0+1}$; z est limite d'une suite $\lambda_n z_n$; soit n'_0 le plus petit indice tel que λ_n soit non nul; on a nécessairement $n_0 = n'_0$; ainsi, n_0 appartient à $\mathcal{E}A$. C.Q.F.D.

On a pour tout couple de sous-espaces fermés K et K'

$$\mathcal{E}B_K \cap \mathcal{E}B_{K'} = \mathcal{E}(B_K \cup B_{K'}).$$

Or, on vérifie immédiatement que

$$B_K \cup B_{K'} \subset B_{K+K'}, \quad (\text{passer au gradué}).$$

Si $G \supset \bigoplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a comme sous-espaces fermés $(\lambda, 0, 0, \dots)$, $(0, \lambda, 0, \dots)$, etc..., et \mathcal{F} contient donc les complémentaires des parties finies; il est non principal.

Lemme 4 : Soit G un sous-espace de E . On a alors $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_{H_{\mathcal{F}_G}}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_G$. Alors H_A est fermé dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$, et il est clair que $\mathcal{E}B_{H_A} = A$. Donc A est élément de $\mathcal{F}(H(\mathcal{F}(G)))$.

Il suffit de montrer maintenant que tout élément de $\mathcal{F} \mathcal{H} \mathcal{F}_G$ est obtenu. Soit A un tel élément. Alors $\mathcal{E}A = \{n / K_n \neq K_{n+1}\}$ pour un certain K fermé dans \mathcal{F}_G . Tout élément de K est "limite" d'une suite $(\lambda_n z_n)$ où les z_n sont fixés, leurs indices correspondant aux éléments

de $\mathcal{E}A$. On peut choisir les λ_n tels que $u = \sum \lambda_n z_n$ n'ait aucune composante nulle sur $\mathcal{E}A$. Cet élément u appartient à un certain H_B , et tous les éléments de K appartiennent donc à cet H_B ; donc, $\mathcal{E}B_K \supset B$.

Ainsi, $\mathcal{E}B_K = A$.

Rappelons qu'on dit que deux filtres sur N sont isomorphes, si et seulement s'il existe une bijection de N sur N envoyant les éléments de \mathcal{F} sur ceux de \mathcal{F}' .

Proposition : *Si deux ultrafiltres \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont isomorphes, les sous-espaces de codimension 1 correspondants H et H' sont isométriquement isomorphes, si et seulement si \mathcal{F} et \mathcal{F}' coïncident.*

(Considérer les parties à un élément, et constater élément par élément, que la bijection entre \mathcal{F} et \mathcal{F}' est l'identité sur N).

C - ETUDE DES SOUS-ESPACES DE E.

$$E = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E_n = \prod_{i \geq n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

A tout sous-espace H de E , on associe le treillis \mathcal{E} des sous-espaces de H fermés dans E . Si K est un tel sous-espace, on pose $K_n = K \cap E_n$; l'injection canonique de K dans E induit des injections

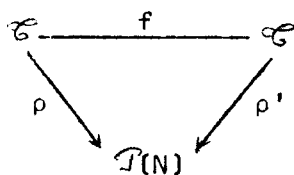
$$\tau_n : K_n/K_{n+1} \longrightarrow E_n/E_{n+1}.$$

Les invariants de Ulm de K sont donc égaux à 0 ou 1 ; soit B_K défini par

$$B_K = \{n/n \in \mathbb{N} ; \dim K_n/K_{n+1} = 1\}.$$

On obtient ainsi une application ρ de \mathcal{E} dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $\rho(K) = B_K$.

Alors, si g est un isomorphisme de H sur H' conservant les hauteurs, il existe un isomorphisme $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ (isomorphisme de Treillis), tel que le diagramme :



commute.

Réciproquement, supposons maintenant l'existence d'un tel diagramme commutatif où \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont les treillis associés à deux sous-espaces H et H' de E .

Les sous-espaces K de H de dimension finie (égale à $\text{card}(B_K)$) sont fermés et transformés par f en des sous-espaces K' de même dimension ; si l'on ne considère que des sous-espaces de dimension 1, on peut de plus ajouter que leurs valuations sont conservées.

A H et H' , on peut associer par le passage au quotient habituel des espaces projectifs \mathcal{P} et \mathcal{P}' filtrés, et f définit une application h de \mathcal{P} sur \mathcal{P}' compatible avec la filtration.

Nous étudierons d'abord le cas où p est différent de 2.

Soit \mathcal{P}_1 une variété projective de \mathcal{P} de dimension 2, et soit $h(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}'_1$; soit D une droite de \mathcal{P}_1 et soit $D' = h(D)$. h induit une application φ de $\mathcal{P}_1 - D$ sur $\mathcal{P}'_1 - D'$; on peut munir ces ensembles d'une structure de plan affine sur F_p . φ possède alors la propriété de transformer droites en droites. Si $p \neq 2$, on sait alors que φ est une application affine ; on en déduit alors immédiatement que h est une homographie de \mathcal{P}_1 sur \mathcal{P}'_1 .

Considérons les couples (W, h_w) formés d'une sous-variété W de \mathcal{P} et d'une application homographique h_w de W sur $h(W)$ telle que $h/w = h_w$. L'ensemble de ces couples n'est pas vide d'après ce qui précède, et peut être ordonné par inclusion. Appliquant Zorn, on obtient alors l'existence d'un élément maximal (W_0, h_{w_0}) . Supposons $W_0 \not\subseteq \mathcal{P}$ et soit $M_1 \in \mathcal{P} - W_0$ et $\begin{cases} M_0 \in W_0 \\ M'_0 \end{cases}$. Alors h est projective sur la sous-variété de dimension 2

engendrée par M_0 , M'_0 et M_1 . Posons $W_1 = \langle W_0, M_1 \rangle$; on peut alors définir hw_1 telle que $h/w_1 = h_{w_1}$. Contradiction.

D'où le résultat : h est projective de \mathcal{F} sur \mathcal{F}' .

On en déduit l'existence d'un isomorphisme d'espaces vectoriels g de H sur H' , et cet isomorphisme conserve les hauteurs.

Etude du cas $p = 2$.

Si $p = 2$, les "parallélogrammes" n'étant plus conservés, le théorème utilisé sur la géométrie plane sur F_p est en défaut ; il suffit en fait, de reprendre l'étude en remplaçant \mathcal{F}_1 par une sous-variété de dimension 3, et en remarquant que h conserve la notion de plan.

On a ainsi démontré le résultat :

Théorème : *Deux sous-espaces H et H' de E sont isométriquement isomorphes, si et seulement si il existe un isomorphisme entre les treillis associés qui "commute aux invariants de Ulm".*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. FUCHS Infinite abelian groups (1973) Tome 2
- [2] F. RICHMAN Extensions of p. bounded groups
Archiv des Mathematik, Vol. XXI, (1970).