PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

AHMED JEBLI

Topologies linéaires du corps des fractions d'un anneau noethérien

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. n° 1, p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___2_A1_0>

TOPOLOGIES LINEAIRES DU CORPS DES FRACTIONS D'UN ANNEAU NOETHERIEN

par

Ahmed JEBLI

GENERALITES

Etant donné un anneau intègre commutatif et unitaire A et K son corps des fractions, nous donnons dans ce chapitre quelques propriétés élémentaires des topologies linéaires sur K considéré comme A-module. Rappelons qu'une topologie sur un module est dite linéaire si elle possède un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous modules.

Les valuations de K positives sur A définissent des topologies A-linéaires sur K compatibles avec sa structure de corps, ces topologies nous seront utiles par la suite, aussi donnons en quelques propriétés :

Lemme 0.1. : [(3) Chapitre 6] : *Pour que deux valuations d'un corps définissent la même topologie, il faut et il suffit qu'elles soient dépendantes (i.e. que leurs anneaux soient contenus dans un troisième anneau de valuation du corps).*

Lemme 0.2. : *Deux topologies d'un corps K définies par deux valuations ne sont comparables que si elles sont identiques, c'est-à-dire que si les deux valuations sont dépendantes.*

Cela résulte de Bourbaki, topologie générale, chapitre III, § 6, exercice 22. En voici une démonstration directe : soient v, v' deux valuations de K, A_v, $A_{v'}$ leurs anneaux et Γ_v, $\Gamma_{v'}$ les groupes de valeurs et supposons que v définit une topologie plus fine que celle définie par v', cela veut dire qu'il existe $\alpha \in A_v$ tel que $\alpha A_{v'} \subset A_v$, d'où $v(x) \geq -v(\alpha)$ pour tout $x \in A_{v'}$. Si les valuations étaient indépendantes, il existerait pour $\gamma \in \Gamma_v$ et $\gamma < -v(\alpha)$ un élément $x' \in K$ tel que :

$$\begin{cases} v'(x') = 0 \\ v(x') = \gamma \end{cases}$$

(théorème d'approximation [3]).

x' serait dans A_γ, et $v(x') < -v(\alpha)$, d'où contradiction.

Topologies définies par des idéaux :

Les idéaux non nuls de A forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'anneau sur K. C'est la plus fine des topologies A-linéaires non discrètes sur K et compatibles avec sa structure d'anneau, on la note $\mathcal{T}_A$.

Lemme 0.3. : *La topologie* $\mathcal{T}_A$ *est compatible avec la structure de corps de* K *(i.e.* $x \longrightarrow x^{-1}$ *est continue), si et seulement si le radical de Jacobson de* A *est non nul.*

En effet $(1+I)^{-1} \subset 1+I$ pour tout idéal $I \neq (0)$ contenu dans Rad(A). Il en résulte qu'à tout idéal premier p de A, on peut associer une topologie A-linéaire de corps sur K, définie par les idéaux non nuls de A_p, nous l'appelerons topologie p-adique $\mathcal{T}_p$. Nous nous attacherons par la suite à déterminer les topologies linéaires de K qui peuvent être obtenues à l'aide de ces topologies p-adiques et des topologies définies par les valuations positives sur A.

Le lemme précédent montre que lorsque Rad(A) $\neq$ (0), A est ouvert pour la topologie de corps $\mathcal{T}_A$, plus précisément :

Lemme 0.4. : *Un anneau intègre unitaire* A *est ouvert pour une topologie* A-*linéaire de corps sur* K = Fr(A), *si et seulement si* Rad(A) $\neq$ (0), *et dans ce cas,* $\mathcal{T}_A$ *est la seule ayant cette propriété.*

En effet : si $\mathcal{T}$ est une topologie A-linéaire de corps sur K pour laquelle A est ouvert, tout idéal non nul de A est alors ouvert pour $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_A$ sera moins fine que $\mathcal{T}$, mais comme $\mathcal{T}_A$ est aussi plus fine que $\mathcal{T}$, on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$ d'où Rad(A) $\neq$ (0) en vertu du lemme précédent.

<u>Remarque</u> : En fait $\mathcal{T}_A$ est la seule topologie A-linéaire d'anneau sur K pour laquelle A est ouvert.

<u>Corollaire 0.5.</u> : *Si* A *est intègre semi-local,* $\mathcal{T}_A$ *est la borne supérieure des topologies* $\mathcal{T}_m$ *(*$m \in \Omega$ *: spectre maximal de* A*).*

Cela résulte de l'égalité $A = A_{m_1} \cap \ldots \cap A_{m_n}$ (où les m_i sont les idéaux maximaux de A) qui montre que A est ouvert pour $\sup_{m \in \Omega} \mathcal{T}_m$ d'où $\mathcal{T}_A = \sup_{m \in \Omega} \mathcal{T}_m$ par application du lemme précédent.

<u>La topologie $\mathcal{T}^A$</u> : Lorsque Rad(A) = (0), $\mathcal{T}_A$ n'est pas une topologie de corps sur K, mais elle peut être remplacée par une topologie A-linéaire sur K, qui est toujours compatible avec la structure de corps de K et qui jouera un rôle important dans notre étude.

Pour tout idéal non nul I de A, désignons par A_I l'anneau $(1+I)^{-1}A$. IA_I est alors un idéal de A_I contenu dans son radical de Jacobson.

<u>Proposition 0.6.</u> : *Quand* I *parcourt l'ensemble des idéaux non nuls de* A*, les sous* A*-modules* IA_I *forment un système fondamental de voisinages de* 0 *pour une topologie de corps* $\mathcal{T}^A$ *sur* K*, qui est la plus fine des topologies* A*-linéaires non discrètes et compatibles avec la structure de corps de* K.

<u>Preuve</u> :

- $\mathcal{T}^A$ est de façon évidente une topologie d'anneau séparée.
- C'est une topologie de corps en vertu de l'inclusion $(1+IA_I)^{-1} \subset 1+IA_I$, valable pour tout idéal non nul I de A.
- Si M est un sous A-module non nul de K, voisinage de 0 pour une topologie A-linéaire de corps $\mathcal{T}$ sur K, il existe un autre voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, M' tel que $(1+M')^{-1} \subset 1+M$. On vérifie alors immédiatement que $I'A_{I'} \subset M$ avec $I' = M' \cap A$, d'où $\mathcal{T}^A$ est plus fine que $\mathcal{T}$, et la dernière assertion est démontrée.

Corollaire 0.7. : *Si dans* A *tout idéal est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux maximaux (par exemple si* A *est noethérien de dimension 1), alors* $\mathcal{C}^A = \operatorname{Sup}_{m \in \Omega} \mathcal{C}_m$.

Preuve : Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de montrer que $\mathcal{C}^A$ est moins fine que $\operatorname{Sup}_{m \in \Omega} \mathcal{C}_m$: soient I un idéal non nul de A et $\Omega(I)$ la famille finie des idéaux maximaux de A qui le contiennent. L'anneau A_I est semi local et ses localisés en ses idéaux maximaux coïncident avec les A_m avec $m \in \Omega(I)$. Mais $\mathcal{C}_{A_I} = \operatorname{Sup}_{m \in \Omega(I)} \mathcal{C}_m$ en vertu du corollaire 0.5, en particulier IA_I est ouvert pour $\operatorname{Sup}_{m \in \Omega} \mathcal{C}_m$, donc $\mathcal{C}^A$ est moins fine que cette dernière topologie.

CHAPITRE I

ANNEAUX NOETHERIENS DE DIMENSION 1

Nous étudions dans ce chapitre, le cas des anneaux noethériens de dimension 1 : si A est intégralement clos, c'est un anneau de Dedekind et une étude simple des sous A-modules de K nous permet alors de montrer que toutes les topologies A-linéaires de corps sur K sont bornes supérieures de familles de topologies p-adique, dans le cas non intégralement clos nous montrons qu'un anneau noethérien possède cette propriété, si et seulement si il est de dimension 1 localement analytiquement irréductible.

A - Anneaux de Dedekind :

Dans cette partie, A désignera un anneau de Dedekind et K son corps des fractions : nous allons voir d'abord qu'il y a correspondance entre les sous A-modules non nuls de K et certaines familles d'idéaux entiers de A.

Pour tout sous A-module M de K, désignons par $\mathfrak{a}_M$ l'idéal $M \cap A$ - $\mathfrak{a}_M \neq (0) \Longleftrightarrow M \neq (0)$ - et $\mathcal{F}_M$ la famille des idéaux entiers $\mathfrak{V}$ de A tels que $\mathfrak{a}_M \mathfrak{V}^{-1} \subset M$.

Lemme A.1.1. : *Pour tout sous* A-*module* $M \neq (0)$, *nous avons l'égalité :*

$$M = \bigcup_{\mathfrak{V} \in \mathcal{F}_M} (\mathfrak{a}_M \mathfrak{V}^{-1}).$$

En effet : M est la réunion des idéaux fractionnaires qui y sont contenus et qui contiennent $\mathfrak{a}_M$, un tel idéal est de la forme $\mathfrak{a}_M \mathfrak{V}^{-1}$ où $\mathfrak{V}$ est un idéal entier non nul de A.

Lemme A.1.2. : *Le couple* $(\mathfrak{a}_M, \mathcal{F}_M)$ *associé au sous module* M *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) tout idéal de $\mathcal{F}_M$ *est étranger à* $\mathfrak{a}_M$

(ii) si $\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}_M$ *et* $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}'$, *alors* $\mathfrak{V}' \in \mathfrak{F}_M$

(iii) $\mathfrak{F}_M$ *est stable par intersection finie.*

<u>Preuve</u> :

i) Si $\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}_M$ n'était pas étranger à a_M, il existerait un idéal premier p contenant a_M et $\mathfrak{V}$, et on aurait :

$$\text{et} \quad \begin{cases} a_M\, p^{-1} \subset a_M\, \mathfrak{V}^{-1} \subset M \\ a_M\, p^{-1} \subset A \end{cases}$$

d'où $a_M\, p^{-1} \subset a_M$, ce qui entraîne $p = A$.

ii) Résulte de l'implication $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}' \Longrightarrow a_M\, \mathfrak{V}'^{-1} \subset a_M\, \mathfrak{V}^{-1}$.

iii) Découle de l'égalité $(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}')^{-1} = \mathfrak{V}^{-1} + \mathfrak{V}'^{-1}$ valable pour tout couple d'idéaux de A.

<u>Proposition A.1.3.</u> *: Il y a correspondance biunivoque entre les sous A-modules non nuls de* K *et les couples* $(a, \mathfrak{F})$ *vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) du lemme précédent.*

<u>Démonstration</u> : Compte tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que si $(a, \mathfrak{F})$ est un couple vérifiant les propriétés i), ii), iii) précédentes, il existe un et un seul sous module M tel que $a = a_M$ et $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_M$: considérons un tel couple, et posons

$$M = \bigcup_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}} a\, \mathfrak{V}^{-1},$$

alors :

a) M est un sous A-module de K en vertu de la propriété iii) et de l'égalité $(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}')^{-1} = \mathfrak{V}^{-1} + \mathfrak{V}'^{-1}$.

b) Tout idéal fractionnaire contenu dans M est contenu dans un idéal $a\mathfrak{V}^{-1}$ (avec $\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}$), en effet : un idéal fractionnaire étant un A-module de type fini, chaque élément d'un système fini de générateurs appartient à un idéal de la forme $a\mathfrak{V}^{-1}$ ($\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}$). La propriété (iii) vérifiée par $(a, \mathfrak{F})$ montre que l'idéal

fractionnaire est lui-même contenu dans un idéal de la même forme.
Si donc $\mathfrak{a}'$ est un idéal entier contenu dans M, il existe $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}$ mis comme $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$ sont étrangers, on a $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$, ce qui veut dire que $\mathfrak{a}$ est le plus grand idéal entier contenu dans M, il est donc égal à $\mathfrak{a}_M$.

c) De l'égalité $M = \bigcup_{\mathfrak{d} \in \mathcal{F}_M} \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}$,

et du fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_M$ vérifient les propriétés i), ii), iii), on déduit que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$. en effet : soit $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}$ alors il existe $\mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{d}'^{-1}$, d'où $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$ et par suite $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}_M$. On montre exactement de même que tout idéal de $\mathcal{F}_M$ appartient à $\mathcal{F}$.

<u>Sur-anneaux de A</u> : Ce sont les anneaux intermédiaires entre A et K. Le couple $(\mathfrak{a}_M, \mathcal{F}_M)$ permet de retrouver un certain nombre de résultats connus sur les sur-anneaux d'un anneau de Dedekind :

1 - Remarquons d'abord qu'un sous A-module non nul M de K est un sous anneau de K, si et seulement si $\mathcal{F}_M$ est stable par multiplication : c'est évident dans un sens et si M est un sous anneau, soient $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$, alors il existe $\mathfrak{d}'' \in \mathcal{F}_M$ tel que $(\mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}^{-1})(\mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}'^{-1}) \subset \mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}''^{-1}$, on en tire :

$$\mathfrak{a}_M + \mathfrak{a}_M^2(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')^{-1} \subset \mathfrak{a}_M + \mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}''^{-1} \subset \mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}''^{-1}$$

ou

$$\mathfrak{a}_M \, (\mathfrak{a}_M + \mathfrak{d}\mathfrak{d}') \, (\mathfrak{d}\mathfrak{d}')^{-1} \subset \mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}''^{-1}$$

mais comme $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ sont étrangers, on a : $\mathfrak{a}_M(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')^{-1} \subset \mathfrak{a}_M \, \mathfrak{d}''^{-1}$, d'où $\mathfrak{d}'' \subset \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ et par suite $\mathfrak{d}\mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$ (propriété (ii)).

2 - La famille $\mathcal{F}$ associée à un sur-anneau de A est donc déterminée par les idéaux premiers qu'elle contient.
Si S est une partie multiplicativement stable de A, nous aurons pour $\mathfrak{p} \in X$:

$$\mathfrak{p} \in \mathcal{F}_{S^{-1}A} \Longleftrightarrow \mathfrak{p}^{-1} \in S^{-1}A \Longleftrightarrow A \in \mathfrak{p}(S^{-1}) \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$$

d'où $\mathcal{F}_{S^{-1}A} = \{\mathfrak{V}$ entiers tel que $\mathfrak{V} \cap S \neq \emptyset\}$, en particulier $A_p = \bigcup_{(\mathfrak{V},p)=1} \mathfrak{V}^{-1}$,

et plus généralement si $\mathcal{S}$ est une famille d'idéaux premiers, on a :

$$\bigcap_{p \in \mathcal{S}} A_p = \bigcap_{p \in \mathcal{S}} \Big(\bigcup_{(\mathfrak{V},p)=1} \mathfrak{V}^{-1} \Big) = \bigcup_{\begin{cases}(\mathfrak{V},p)=1 \\ \forall p \in \mathcal{S}\end{cases}} \mathfrak{V}^{-1}$$

d'où :

Théorème A.1.4. [9] : *Tout sur-anneau de* A *est une intersection de localisés de* A.

En effet, soit B un sur-anneau, alors :

$$B = \bigcup_{\mathfrak{V} \in \mathcal{F}_B} \mathfrak{V}^{-1} = \bigcup_{\begin{cases}(\mathfrak{V},p)=1 \\ \forall p \in \mathcal{F}_B\end{cases}} = \bigcap_{p \notin \mathcal{F}_B} A_p$$

d'après l'égalité précédente.

Théorème A.1.5. [9] : *Tout sur-anneau de* A *est un anneau de fractions de* A*, si et seulement si le groupe des classes de* A *est de torsion.*

Ce théorème résulte du lemme suivant :

Lemme A.1.6. : *Soit* $p \in X-(0)$. *L'anneau* $B = \bigcup_{m \geq 0} p^{-m}$ *est un anneau de fractions de* A*, si et seulement si* p *est d'ordre fini dans le groupe des classes de* A.

Preuve :

1 - Si B est de la forme $S^{-1}A$, alors S rencontre p mais aucun autre idéal premier différent de p, d'où l'existence de $s \in S$ qui se factorise à l'aide de p seul, i.e. il existe $n > 0$ tel que $p^n = (s)$.

2 - Réciproquement, s'il existe s et n tels que $p^n = (s)$, soit $S = \{1, s, s^2, \ldots\}$, alors $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{S^{-1}A} = \{p^n\}_{n \geq 0}$ d'où $B = S^{-1}A$ en vertu de la proposition A.1.3.

Nous pouvons maintenant donner la caractérisation des topologies A-linéaires sur K annoncée au début de ce chapitre :

soient $\mathcal{T}$ une topologie A-linéaire de corps sur K et $\mathfrak{M}$ un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous modules :

Lemme A.1.7. : *Si* $M \in \mathfrak{M}$ *alors* $\mathcal{F}_M$ *contient "presque" tous les idéaux premiers élevés à n'importe quelle puissance.*

Preuve : Nous savons qu'il existe $M' \in \mathfrak{M}$ tel que $a_{M'}(1+a_{M'})^{-1}A \subset M$ d'où, pour tout $a \in a_{M'}$, il existe $\mathfrak{b}_a \in \mathcal{F}_M$ tel que

$$\frac{a}{1+a} \in a_M \ \mathfrak{b}_a^{-1}$$

ou

$$(a)\ \mathfrak{b}_a \subset (1+a)\ a_M \subset (1+a)$$

Mais comme (a) et (1+a) sont étrangers, on doit avoir $\mathfrak{b}_a \subset (1+a)$, ce qui implique $(1+a) \in \mathcal{F}_M$ d'après la propriété (ii) de $\mathcal{F}_M$. D'autre part, pour tout premier p en divisant par $a_{M'}$ et tout $n > 0$: $a_{M'} + p^n = A$, d'où l'existence d'un $a \in a_{M'}$ tel que $1+a \in p^n$, par conséquent $p^n \in \mathcal{F}_M$. Donc, sauf peut être les idéaux premiers de $a_{M'}$, tous les idéaux premiers appartiennent à $\mathcal{F}_M$ ainsi que toutes leurs puissances.

Lemme A.1.8. : *Si* $M \in \mathfrak{M}$, *il existe un idéal entier* a *et une famille finie d'idéaux premiers* $p_1,\dots,p_h$ *tels que* $M = a^{-1}\ a_M\ (A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h})$.

Démonstration : Considérons les idéaux premiers (en nombre fini d'après le lemme précédent) $p_1,\dots,p_h$ pour lesquels il existe une plus grande puissance finie $p_i^{n_i}$ appartenant à $\mathcal{F}_M$. Parmi les idéaux de $\mathcal{F}_M$ qui se décomposent à l'aide des p_i seuls, il y en a un plus petit, c'est $a = p_1^{n_1}\dots p_h^{n_h}$. Donc tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{F}_M$ s'écrit

$$\mathfrak{b} = p_1^{m_1}\dots p_h^{m_h}\ \mathfrak{b}' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \le m_i \le n_i \\ \mathfrak{b}' + p_i = A \qquad i = 1,\dots,h \end{cases}$$

ou encore $\mathfrak{V} = a\,\varphi\,\mathfrak{V}'$ avec $\varphi = \prod_{i=1}^{h} p_i^{m_i-n_i}$

d'où $\mathfrak{V}^{-1} = a^{-1}\,\mathfrak{V}'^{-1}\,c^{-1} \subset a^{-1}\,\mathfrak{V}'^{-1}$ car φ^{-1} est entier

$$a_M\,\mathfrak{V}^{-1} \subset a_M\,a^{-1}\,\mathfrak{V}'^{-1}$$

$$M = \bigcup_{\mathfrak{V} \in \mathcal{F}_M} a_M\,\mathfrak{V}^{-1} \subset a^{-1} \left(\bigcup_{\substack{(\mathfrak{V}',p_i)=1 \\ i=1,\dots,h}} a_M\,\mathfrak{V}'^{-1} \right) .$$

$\mathfrak{V}'$ étant étranger aux p_i, il est étranger à a donc

$$a^{-1}\,\mathfrak{V}'^{-1} = (a \cap \mathfrak{V}')^{-1} = a^{-1} + \mathfrak{V}'^{-1}$$

et

$$a_M(a^{-1}\,\mathfrak{V}'^{-1}) = a_M\,a^{-1} + a_M\,\mathfrak{V}'^{-1} \subset M$$

car $a \in \mathcal{F}_M$ et $\mathfrak{V}'$ aussi parce qu'il se décompose à l'aide d'idéaux premiers distincts des p_i et dont toutes les puissances sont dans $\mathcal{F}_M$, finalement

$$M \supset a^{-1} . \bigcup_{\substack{(\mathfrak{V}',p_i)=1 \\ i=1,\dots,h}} (a_M\,\mathfrak{V}'^{-1})$$

d'où

$$M = (a^{-1}\,a_M) \bigcup_{\substack{(\mathfrak{V}',p_i)=1 \\ i=1,\dots,h}} \mathfrak{V}'^{-1} = a^{-1}\,a_M\,(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h})$$

d'après la décomposition des A_p vue précédemment.

Théorème A.1.9. : *Toute topologie* A*-linéaire de corps sur* K*, séparée et non discrète est borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques* ($p \in$ X).

Démonstration : Soit M un voisinage de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{C}$ sur K d'après le lemme précédent, nous avons :

$$(aa_M)^{-1}M = A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_h} ,$$

ce qui montre que chaque A_{p_i} est ouvert pour $\mathcal{C}$.

Soient alors $\Delta = \{p \in X : A_p$ ouvert pour $\mathcal{C}_\Delta\}$ et $\mathcal{C}_\Delta = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$.

il est clair que $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_\Delta$, mais le lemme précédent nous dit aussi que $\mathcal{C}_\Delta$ est plus fine que $\mathcal{C}$, d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\Delta$.

On pourra se reporter à [7] pour le cas des anneaux principaux.

Cherchons maintenant à quelles conditions, la famille Δ est finie : nous aurons besoin de la notion de topologie localement bornée :

Définition. [1, §6, Ex. 19] : *Dans un anneau topologique, une partie* B *est dite "bornée" si pour tout voisinage* U *de* 0*, il existe un voisinage* V *de* 0 *tel que* $VB \subset U$ (VB *désigne l'ensemble des produits* v.b *avec* $v \in V$, $b \in B$). *Une topologie est dite "localement bornée", si elle admet un voisinage borné de* 0.

Soient toujours A de Dedekind et Δ un ensemble d'idéaux premiers $\neq (0)$, posons :

$$\mathcal{C}_\Delta = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$$

$$A_\Delta = \bigcap_{p \in \Delta} A_p$$

$\mathcal{C}'_\Delta$: la topologie définie sur K par les idéaux non nuls de A_Δ.

Proposition A.1.10. : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{C}_\Delta$ *est localement bornée*

b) Δ *est fini*

c) $\mathcal{C}_\Delta = \mathcal{C}'_\Delta$

d) $\mathcal{C}'_\Delta$ *est une topologie de corps.*

Preuve : Puisque A_Δ est aussi un anneau de Dedekind dont les idéaux premiers sont les $(pA_\Delta)_{p\in\Delta}$ et $(A_\Delta)_{pA_\Delta} = A_p$, il suffit de faire la démonstration lorsque $\Delta = \operatorname{Spec}A = X$.

Puisque le radical d'un anneau de Dedekind est différent de (0) si et seulement si l'anneau est semi local, le résultat de

D'autre part, la borne supérieure d'une famille finie de topologies localement bornées étant localement bornée b) $\Longrightarrow$ a) puisque les $\mathcal{T}_p$ sont localement bornées.

Montrons enfin que a) $\Longrightarrow$ b) :

Supposons que A ne soit pas semi local, et soit $U = \bigcap_{i=1}^{s} p_i^{n_i} A_{p_i}$ un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_X$. Puisque A n'est pas semi-local, il existe $p_0 \in X$ distinct de $p_1, \dots, p_s$: $p_0 A_{p_0}$ est aussi un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_X$, montrons que $WU \not\subset p_0 A_{p_0}$ pour tout voisinage de 0, W, ce qui prouvera que $\mathcal{T}_X$ n'est pas localement bornée.

Soit $W = \bigcap_{j=1}^{t} q_j^{m_j} A_{q_j}$ $(q_j \in X)$, on distinguera deux cas :

α) Si tous les q_j sont différents de p_0, il existe x et y tels que

$$\begin{cases} x \in \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i} \subset U & \text{et} \quad x \notin p_0 \\ y \quad \prod_{j=1}^{t} q_j^{m_j} \subset W & \text{et} \quad y \notin p_0 \end{cases}$$

d'où $x\, y \in WU$ mais $xy \notin p_0 A_{p_0}$

β) Si l'un des q_j est égal à p_0. Soit $q_1 = p_0$ par exemple. Posons :

$$a = p^{-\ell} p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s} \quad \text{avec} \quad \ell > m_1$$

$$a' = p_0^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_t^{m_t}$$

il est clair que $a \subset U$ et $a' \subset W$ d'où $aa' \subset U.W$. D'autre part, on a :

$$v_{p_0}(aa') = v_{p_0}(a) + v_{p_0}(a') = -\ell + m_1 < 0 \, ,$$

ce qui implique $aa' \not\subset p_0 A_{p_0}$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in a$, $a' \in a'$ tels que $aa' \notin p_0 A_{p_0}$, la proposition est démontrée.

<u>Remarques</u> :

1) On peut aussi démontrer l'implication c) $\Longrightarrow$ b) en utilisant le fait que si

une topologie localement bornée est borne supérieure d'une famille de topologies qui sont localement bornées, alors elle est déjà borne supérieure d'une sous famille finie [1, §6, Ex. 20].

2) Certaines équivalences de la proposition précédente restent valables pour un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuations indépendantes de son corps des fractions. Plus précisément, soit $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ où les A_i sont des anneaux de valuations v_i de $K = Fr(A)$ deux à deux indépendants, pour $i \in I$ soit $\mathcal{T}_i$ la topologie définie par v_i, $\mathcal{T}_I = \sup_{i \in I} \mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}'_I$ la topologie définie par les idéaux non nuls de A, $\mathcal{T}'_I$ est toujours plus fine que $\mathcal{T}_I$:

Proposition A.1.11 : *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{T}_I$ *est localement bornée*

ii) I *est fini*

iii) $T_I = T'_I$.

Preuve :

i) $\Longrightarrow$ ii) : Supposons que I soit infini et soit $U = \bigcap_{i=1}^{s} v_i(\alpha_i)$, où $v_i(\alpha_i) = \{x \in K : v_i(x) \geq \alpha_i\}$, un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_I$, il existe v appartenant à la famille $(v_i)_{i \in I}$, différente de $v_1, \ldots, v_s$, soit A_v l'anneau de v, c'est aussi un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_I$.

Montrons que $W.U \not\subset A_v$ quel que soit $W = \bigcap_{j=1}^{t} v'_j(\beta_j)$: pour cela, on distingue deux cas :

a) $v \neq v'_1, \ldots, v'_t$: alors le "théorème d'approximation" appliqué aux familles $(v_1, \ldots, v_3, v)$ et $(v'_1, \ldots, v'_t, v)$ assure l'existence de $x, y \in K$ tels que :

$$\begin{cases} v_i(x) = \alpha_i \\ v(x) = -u \end{cases} , \qquad \begin{cases} v'_j(y) = \beta_j \\ v(y) = -\ell + u \end{cases}$$

où ℓ, u sont des éléments de Γ_v groupe des valeurs de v avec $\ell > 0$, on a évidement $x \in U$, $y \in W$ d'où $xy \in U.W$, mais $xy \notin A_v$.

b) Si v est égale à l'une des v'_j, soit $v = v'_1$ par exemple, alors en considérant les deux familles $(v, v_1, \dots, v_s)$ et $(v, v'_2, \dots, v'_t)$, il existe $x \in K$ et $y \in K$ tels que

$$\begin{cases} v(x) = -\ell \\ v_i(x) = \alpha_i \end{cases} , \qquad \begin{cases} v(y) = 1 \\ v'_j(y) = \beta_j \end{cases} \quad j = 2, \dots, t$$

d'où $xy \in U.W$, mais $v(xy) = \beta_1 - \ell < 0$ si on prend $\beta_1 < \ell$, c'est-à-dire $xy \notin A_v$ quand $\beta_1 < \ell$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) : Si I est fini, on sait [2, Chap. 6], que A est semi local donc $\mathrm{Rad}(A) \neq (0)$, d'où $\mathcal{C}'_I$ est une topologie de corps. D'autre part, $A = \bigcap_{\text{finie}} A_i$ est alors ouvert pour $\mathcal{C}_I$, d'où $\mathcal{C}_I = \mathcal{C}'_I$ d'après le chapitre 0, lemme 0.4.

iii) $\Longrightarrow$ i) : Evident puisque $\mathcal{C}'_I$ est localement bornée. Remarquons enfin que $\mathcal{C}'_I$ peut être une topolgie de corps, même si I est infini comme le montre l'exemple de l'anneau $\mathbb{Z}[[X]]$ dont le radical de Jacobson est non nul.
Toutefois, si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est de caractère fini (i.e : $\forall x \in K^*$, $v_i(x) = 0$ sauf pour un nombre fini de i) et si A est de dimension 1 (ou si la trace de l'idéal maximal de chaque A_i est un idéal maximal de A), alors $\mathrm{Rad}(A) \neq 0 \Longleftrightarrow I$ est fini, en effet soient $a \neq (0)$, $a \in \mathrm{Rad}(A)$ et $v_1, \dots, v_n$ les valuations telles que $v_i(a) \neq 0$. Si I était infini, il existerait $v \in (v_i)_{i \in I}$ distinctes de $v_1, \dots, v_n$ d'où $v(a) = 0$, c'est-à-dire $a \notin p = m(A_v) \cap A$, et a ne serait pas dans $\mathrm{Rad}(A)$ (dans les deux hypothèses). $m(A_v)$ est l'idéal maximal de A_v.
Avant de passer au cas dans lequel l'anneau A est non intégralement clos, montrons que le théorème A.1.9 caractérise les anneaux de Dedekind parmi certaines classes d'anneaux intégralement clos (les anneaux de Krull et les anneaux "presque de Dedekind").

<u>Proposition A.1.12</u> : *Soient* A *un anneau de Krull,* $K = \mathrm{Fr}(A)$ *et* $X^{(1)}$ *l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Toute topologie A*-linéaire de corps non discrète est borne supérieure d'une famille de topologies* $\mathcal{T}_p$ $(p \in X^{(1)})$.

2) A *est un anneau de Dedekind.*

Preuve : Pour montrer que 1) $\Longrightarrow$ 2), on va montrer que tout idéal premier $\neq (0)$ de A est de hauteur 1 : soit $q \in$ Spec A, la topologie $\mathcal{T}_q$ est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{T}_p$ $(p \in X^{(1)})$, et cette famille est finie puisque $\mathcal{T}_q$ et les $\mathcal{T}_p$ sont localement bornées [1, § 6, Ex. 20]. $\mathcal{T}_q = \sup_{i=1,\dots,s} \mathcal{T}_{p_i}$ et une valuation essentielle de l'anneau de Krull, A_q est définie par un $p \in X^{(1)}$ et $\mathcal{T}_p$ est moins finie que $\mathcal{T}_q$, d'où

$$pA_p \supset p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$$

et

$$p \supset p_1^{(n_1)} \cap \dots \cap p_s^{(n_s)} ,$$

les puissances symboliques d'idéaux premiers étant primaires, on voit en prenant les radicaux, que p est égal à l'un des p_i d'où A_q n'a qu'un nombre fini de valuations essentielles, il est donc de valuation discrète d'où $ht(q) = 1$.

Définition : *Un anneau intègre* A *est dit "presque de Dedekind", si pour tout* $p \in$ Spec A, A_p *est un anneau de valuation discrète : un tel anneau est de dimension 1 et pas nécessairement noethérien, voir [9, Appendix] où il est démontré qu'un anneau "presque Dedekind" est un anneau de Dedekind, si et seulement si tout idéal non nul est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux premiers.*

Proposition A.1.13. *Soit* A *un anneau "presque Dedekind",* K = Fr(A). *Si toute topologie* A*-linéaire de corps non discrète de* K *est borne supérieure d'une famille de topologies* $\mathcal{T}_p$ $(p \in X)$, *alors* A *est de Dedekind.*

En effet : l'hypothèse implique que $\mathcal{T}^A$ est borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{T}_p$, donc pour tout idéal non nul I de A, on a une inclusion

$$IA_I \supset p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$$

d'où

$$I \supset p_1^{n_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} \text{ (les } p_i \text{ étant maximaux)}$$

et par conséquent, les idéaux premiers contenant I sont parmi les p_i donc en nombre fini, la propriété indiquée dans la définition nous dit alors que A est de Dedekind.

Remarque : Un anneau "presque Dedekind" est de "Prüfer", et la proposition précédente nous montre que tous les anneaux de Prüfer ne vérifient pas le théorème A.1.9. Nous n'avons pas réussit à caractériser ceux qui le satisfont, même en dimension 1.

B - Cas non intégralement clos :

Dans toute cette partie, A désignera un anneau intègre noethérien

K son corps des fractions

X = Spec A, $X^{(1)}$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1

Ω = Spectre maximal de A

$\mathcal{V}_e$: l'ensemble des valuations essentielles de A' (clôture intégrale de A, qui est toujours un anneau de Krull)

$\mathcal{V}$, l'ensemble des valuations de K, positives sur A.

La question à laquelle nous répondons dans cette partie, est la suivante :

Quand A vérifie-t-il la propriété du théorème A.1.9. ?

Cette réciproque peut être envisagée sous plusieurs formes, qui sont les suivantes :

(P) Pour toute topologie A-linéaire de corps non discrete $\mathcal{T}$ de K, il existe

$$X' \subset X \text{ tel que } \mathcal{T} = \sup_{p \in X'} \mathcal{T}_p$$

(P_1) Pour toute topologie A-linéaire de corps non discrète $\mathcal{T}$, il existe

$$X' \subset X^{(1)} \text{ tel que } \mathcal{T} = \sup_{p \in X'} \mathcal{T}_p$$

(M) Pour toute topologie A-linéaire de corps $\mathcal{T}$ sur K, il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mathcal{T} = \sup_{m \in \Omega'} \mathcal{T}_m$

(V) Pour toute topologie A-linéaire de corps $\mathcal{T}$ de K, il existe $\vartheta' \subset \vartheta$ tel que $\mathcal{T} = \sup_{v \in \vartheta'} \mathcal{T}_v$

(V_e) Même propriété que (V) mais avec $\vartheta' \subset \vartheta_e$.

Il y a des implications évidentes entre certaines de ces propriétés, nous allons voir qu'elles sont en fait équivalentes en étudiant les deux propriétés centrales (P) et (V), et caractérisons les anneaux qui les possèdent.

Propriété (P) :

Lemme B.1.1. : *Si* A *vérifie* (P) , *alors tout anneau de valuation de* K *contenant* A *est contenu dans un unique anneau de valuation essentielle de* A.

Preuve : Soient v une valuation de K, positive sur A, V son anneau et $\mathcal{T}_v$ sa topologie, il existe $\Delta \subset X$ tel que $\mathcal{T}_v = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{T}_p$: pour tout $p \in \Delta$, $\mathcal{T}_v$ est plus fine que $\mathcal{T}_p$ donc $\mathcal{T}_v$ est plus fine que toutes les topologies définies par les valuations essentielles de A_p, donc égale à ces dernières en vertu du lemme 0.2, cela implique d'une part que $(A_p)'$ est un anneau de valuation discrète $A'_{p'}$ (ht(p')=1), et d'autre part que Δ est réduit à un seul élément. v et $v_{p'}$ sont alors dépendantes et comme $v_{p'}$ est discrète, on a $V \subset A'_{p'}$.

Corollaire B.1.2. : *Si* A *vérifie* (P), *alors tout idéal premier* $\neq(0)$ *de A est la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de* A'.

Soient en effet p un idéal premier non nul de A et V un anneau de valuation discrète de K dominant A_p (un tel anneau existe puisque A est noethérien, voir [11]), le lemme précédent nous dit alors que V est nécessairement un anneau de valuation essentielle de A, d'où le corollaire.

Remarque : Contrairement à ce qu'on pourrait croire, le fait que tout idéal premier de A soit la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de A', n'entraîne pas que A est de dimension 1, on trouve dans les EGA (IV 2e partie, page 101) l'exemple d'un anneau local noethérien intègre de dimension 2 qui satisfait à la conclusion du corollaire précédent. Nous donnons, dans ce qui suit, une condition pour qu'il en soit ainsi et qui est réalisée dans beaucoup de cas intéressants. Rappelons d'abord un lemme :

Lemme B.1.3. (EGA, IV, 1ère partie, proposition 23.2.7.1) :
Soient A *local noethérien intègre,* $K = Fr(A)$ *et* A' *la clôture intégrale de* A. *Alors* A' *est un anneau de Krull et si* (V_λ) *est la famille de ses valuations essentielles, il existe un sous anneau* C *de* K*, qui est une* A*-algèbre finie et telle que les* (V_λ) *soient les clôtures intégrales des anneaux* C_{p_λ} *où* (p_λ) *est la famille des idéaux premiers de hauteur 1 de l'anneau local* C.

Considérons la propriété suivante : (EGA, IV, 1ère partie page 220, corollaire 23.2.9) :

(F) Pour tout anneau C tel que $A \subset C \subset A'$ et tel que C soit une A-algèbre finie et tout idéal premier minimal q de C, $q \cap A$ est minimal dans A.

Alors :

Proposition B.1.4. : *Soit* A *noethérien intègre tel que tout idéal premier est la trace d'un idéal premier de hauteur 1 de* A'*, alors si* A_p *vérifie* (F) *pour tout* $p \in \operatorname{Spec} A$, A *est de dimension 1.*

En effet : Soient $p \in \operatorname{Spec} A$ et p' un idéal premier de hauteur 1 de p' tel que $A'_{p'}$ domine A_p. Soit C une A_p-algèbre finie du lemme précédent, $A'_{p'}$ est la clôture intégrale d'un C_{p_λ} où p_λ est un idéal premier de hauteur 1 de C. On a alors :

$$p' A'_p \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda C_{p_\lambda}$$

d'où

$$(p'A'_{p'} \cap A_p) \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda C_{p_\lambda} \cap A_p = (p_\lambda C_{p_\lambda} \cap C_{p_\lambda}) \cap A_p$$

$$pA_p \cap C_{p_\lambda} = p_\lambda \cap A_p \qquad \text{et} \qquad pA_p = p_\lambda \cap A_p$$

et comme A_p vérifie (F), pA_p est de hauteur 1 dans A_p, d'où $\ell(p)=1$ et A est de dimension A.

La propriété (F) est vérifiée si A est universellement catenaire (EGA, IV, 1ère partie, page 221).

Cette remarque étant faite, nous allons voir que (P) implique que dimA = 1 :

<u>théorème B.1.5.</u> : *Soient* A *noethérien intègre et* K *son corps des fractions, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Toute topologie A*-linéaire de corps non discrète de* K *est borne supérieure d'une famille de topologies* p*-adiques* ($p \in X$)

2) A *est de dimension 1 et ses localisés sont analytiquement irréductibles.*

<u>Démonstration</u> :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Soient $p \in$ Spec A et p' un idéal premier de hauteur 1 de A' au-dessus de p (corollaire B.1.2.), $v_{p'}$ la valuation essentielle qui lui est associée, d'après (1), il existe $\Delta \subset$ Spec A telle que

$$\mathcal{T}_{v_{p'}} = \operatorname*{Sup}_{p_i \in \Delta} \mathcal{T}_{p_i}$$

alors : pour tout $p_i \in \Delta$, toutes les valuations essentielles de A_{p_i} définissent des topologies moins fines, donc égales, à $\mathcal{T}_{v_{p'}}$ on en déduit que $(A_{p_i})'$ est un anneau de valuation discrète égal à $A'_{p'}$, d'où $h(p_i)=1$ et les p_i sont identiques, en particulier $A'_{p'}$ domine A_p et A_{p_i}, d'où $p=p_i$ et ht(p)=1. Par conséquent, A est de dimension 1.

Ceci étant, soit $\mathcal{T}$ une topologie A_p-linéaire de corps, elle est borne supérieure d'une famille de topologies q-adiques $\mathcal{T} = \operatorname*{Sup}_{q \in \Delta} \mathcal{T}_q$

d'où si M est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$,

$$M \supset q_1^{n_1} A_{q_1} \cap \ldots \cap q_s^{n_s} A_{q_s}$$

($\mathcal{C}_q$ est définie par les $(qA_q)^n$ puisque A est de dimension 1), et

$$M \cap A = (M \cap A_p) \cap A \supset q_1^{n_1} \cap \ldots \cap q_s^{n_s}$$

et puisque $M \cap A_p$ est un idéal de A_p, il est contenu dans pA_p, et par suite

$$p \supset q^{n_1} \cap \ldots \cap q_s^{n_s}$$

donc p est égal à l'un des q_i. Mais alors $\mathcal{C}_p$ sera moins fine que $\mathcal{C}$ d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p$ puisque $\mathcal{C}_p$ est plus fine que $\mathcal{C}$ car celle-ci est A_p-linéaire : en résumé, A est de dimension 1 et la propriété (P) se localise (i.e. pour $p \in$ Spec A, il y a une seule topologie A_p-linéaire de corps sur K), l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) va résulter de la proposition suivante :

Proposition B.1.6. : *Sur* A *noethérien intègre,* K = Fr(A). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe une seule topologie A*-linéaire de corps non discrète sur* K.

2) A *est local de dimension 1 de Mori unibranche.*

3) A *est local de dimension 1 analytiquement irréductible.*

Preuve :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Si (1) est vérifiée, toutes les valuations essentielles de A vont définir la même topologie, elles sont donc identiques et A' est un anneau de valuation discrète, d'où A est local de dimension 1 unibranche et comme $\mathcal{C}_A$ doit être égal à $\mathcal{C}_{A'}$, A contiendra un idéal non nul de A' donc son conducteur est $\neq (0)$, c'est-à-dire que A' est un A-module de type fini puisque A est noethérien.

2) $\Longrightarrow$ 1) : A' est un anneau de valuation discrète, A-module de type fini Si M est un sous A-module de K, $\neq$K. MA' est un A'-module de type fini (car

$MA' \neq K$) donc A-module de type fini d'où M est aussi de type fini. Si maintenant M est voisinage de 0 pour une topologie de corps $\mathcal{T}$ sur K, il existe $\alpha \in A-(0)$ tel que $\alpha M \subset A$, donc A est ouvert pour $\mathcal{T}$ d'où $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$ d'après 0.4., et l'unicité est établie.

2) $\Longleftrightarrow$ 3) : Résultat bien connu.

Remarque : 1) est équivalente à l'existence d'une seule topologie A-linéaire d'anneau sur K (non discrète).

Fin de la démonstration de B.1.5.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Soient A de dimension 1 localement analytiquement irréductible, $\mathcal{T}$ une topologie A-linéaire de corps sur K et M un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$: M étant $\neq K$, il existe des idéaux premiers p tels que $M_p \neq K$, pour un tel idéal, M_p est un A_p-module de type fini d'où A_p est ouvert pour $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_p$. Si on désigne par Δ l'ensemble des p tels que $\mathcal{T}$ soit plus finie que $\mathcal{T}_p$, alors $\mathcal{T} = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{T}_p$ car il existe I idéal non nul de A tel que $I A_I \subset M$ et IA_I est voisinage de 0 pour $\mathcal{T}^A$ qui est la borne supérieure des $\mathcal{T}_p$ puisque A est noethérien de dimension 1 (corollaire 0.7.).

Corollaire B.1.7. : *Soit* A *noethérien de dimension* 1 *localement analytiquement irréductible,* K = Fr(A). *Une topologie* A-*linéaire de corps* $\mathcal{T}$ *non discrète de est borne supérieure d'une famille finie de topologies* p-*adiques, si et seulement si elle est localement bornée.*

En effet : $\mathcal{T} = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{T}_p$ et les $\mathcal{T}_p$ sont définies par des valuations discrètes d'après le théorème. On en déduit, comme dans le cas des anneaux de Dedekind, que Δ est fini si et seulement si $\mathcal{T}$ est localement bornée, elle est dans ce cas de la forme $\mathcal{T}_{A_I}$ où I est un idéal non nul de A.

Corollaire B.1.8. : *Si* A *est semi-local, alors il vérifie* (P), *si et seulement si il est de Mori localement unibranche et de dimension 1.*

D'après [23], A est de Mori si et seulement si ses localisés le sont.

Corollaire B.1.9. : *Si* A *est de Mori de dimension 1, alors il vérifie* (P), *si et seulement si* $\hat{A}_p$ *est intègre pour tout* p *contenant le conducteur.*

On sait en effet que A_p est intégralement clos pour tout p ne contenant pas le conducteur.

Corollaire B.1.10. : *Si* A *est de dimension 1, alors il vérifie* (P) *si et seulement si pour tout idéal non nul I, le complété de* A *pour la topologie I-adique est localement intègre.*

En effet : dans un sens c'est évident, il suffit de prendre I premier et inversement (P) $\Longrightarrow$ $\hat{A}_p$ intègre pour tout p $\supset$ I, d'où (A,I) localement intègre [Gréco-Salmon : topics in $\mathfrak{m}$-adic topologies, chapitre 10].
A propos des topologies I-adique, nous avons la proposition suivante qui généralise un résultat de Gréco [10 bis].

Proposition B.1.11. : *Soient* A *un anneau noethérien de dimension 1 intègre et localement analytiquement irréductible,* I *un idéal non nul de* A, *alors le complété de* A *pour la topologie I-adique est intègre si et seulement si I est primaire.*

Preuve : En effet, $\widehat{(A,I)} = \prod_{p > I} \hat{A}_p$ d'après [5, proposition 1.2] produit d'anneauxlocaux, donc s'il est intègre, il est local et par suite I est primaire, la réciproque résulte de ce que $\hat{A}_p$ est intègre pour tout p.

D'après [23], le hensélisé d'un anneau local intègre est de Mori, si et seulement si l'anneau est de Mori unibranche, d'où :

Proposition B.1.12. : *Un anneau local complet vérifie* (P), *si et seulement si il est de dimension 1.*

Exemples : d'anneaux vérifiant le théorème B.1.5.

1) Les anneaux locaux complets de dimension 1, par exemple l'anneau des séries formelles à une indéterminée T sur un corps, sans terme en T.

2) Un ordre d'un corps de nombres dont le conducteur n'est pas décomposé : un tel anneau est noethérien de dimension 1 de Mori, il vérifie (P) en vertu de B.1.9. Par exemple $Z[2i]$ et plus généralement si f est un entier non décomposé dans $Q(\sqrt{\alpha})$, l'anneau Z+fB vérifie (P) où B est l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{\alpha})$.

3) Soit A local noethérien intègre de dimension 1, K = Fr(A). Si A est japonais (par exemple s'il est de caractéristique 0), alors l'algèbre C définie dans B.1.3 est un anneau de Mori de dimension 1 localement analytiquement irréductible. On en déduit qu'une topologie A-linéaire de corps non discrète sur K est borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles, si et seulement si elle est C-linéaire.

4) Signalons qu'un anneau vérifiant (P) n'est pas nécessairement de Mori, voir l'exemple de [8].

Propriété (V) : Montrons enfin que (V) et (P) sont équivalentes.
Le théorème B.1.5. prouve que (P) $\Longrightarrow$ (V_e) $\Longrightarrow$ (V).

Théorème B.1.13. : *Soit* A *noethérien intègre,* K = Fr(A). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Pour toute topologie A*-linéaire de corps non discrète* $\mathcal{T}$ *de* K, *il existe* $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ *telle que* $\mathcal{T} = \sup_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{T}_v$

2) A *est de dimension 1 localement analytiquement irréductible.*

Preuve :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit P un idéal premier non nul de A, alors il existe $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ telle que $\mathcal{T}_p = \operatorname{Sup}_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{T}_v$, on peut supposer les $v \in \mathcal{V}'$ deux à deux indépendantes et en nombre fini puisque $\mathcal{T}_p$ et les $\mathcal{T}_v$ sont localement bornées, soit $\mathcal{V}' = \{v_1,\dots,v_n\}$.

Si v' est une valuation essentielle de A_p, elle est dépendante de l'une des v_i car sinon : il existerait U_1 idéal de $A_{v_1},\dots,U_n$ idéal de A_{v_n} tels que $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset A_v$ puisque $\mathcal{T}_v$ est moins fine que $\mathcal{T}_p = \operatorname{Sup} \mathcal{T}_{v_i}$, et le "théorème d'approximation" donnerait un élément de K contenu dans $U_1 \cap \dots \cap U_n$, et non dans A_v d'où contradiction.

La topologie $\mathcal{T}_v$ est donc l'une des $\mathcal{T}_{v_i}$, cela implique que les topologies définies par les valuations essentielles de A_p sont en nombre fini, donc $(A_p)'$ n'a qu'un nombre fini de valuations essentielles, c'est donc un anneau de Prüfer et comme il est de Krull, il est de valuation discrète d'où Ht(p)=1 et dimA=1 et A_p est unibranche. Alors l'égalité $\mathcal{T}_p = \operatorname{Sup}_{v \in \mathcal{V}'} \mathcal{T}_v$ implique que toute $v \in \mathcal{V}'$ est définie par un idéal premier de A' au-dessus de p, et comme A_p est unibranche, on a $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{(A_p)'}$. A_p contient un idéal non nul de (A_p), il est finalement de Mori. Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE II

DIMENSION SUPERIEURE A 1

Nous cherchons dans ce chapitre les topologies linéaires de corps sur $K = Fr(A)$ qui sont bornes supérieures de familles de topologies définies par des valuations essentielles de l'anneau noethérien intègre A (supposé de dimension quelconque).

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que la topologie considérée possède un système fondamental de voisinages de 0, M vérifiant la condition $M = \bigcap_{v \in \mathfrak{V}} MA$ (tout M) qui sont alors des A'-modules (voir [25] Appendix "modules complets").

Comme A' est un <u>anneau de Krull</u>, les sous A'-modules de K vérifiant l'égalité précédente, que nous appelerons "divisories", s'étudient d'une manière analogue à celle qui a été donnée dans le chapitre I pour les anneaux de Dedekind :

A - <u>Anneaux de Krull</u> :

Dans cette partie A désignera un anneau de Krull, $K = Fr(A)$ et $X^{(1)}$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1.

<u>Lemme A.2.1.</u> : *Soit* M *un sous* A*-module divisoriel de* K, $\mathfrak{a}_M = M \cap A$ *et* $\mathcal{F}_M$ *la famille des idéaux entiers divisoriels* $\mathfrak{v}$ *vérifiant* $\mathfrak{a}_M : \mathfrak{v} \subset M$, *alors :*

(1) $\mathfrak{a}_M$ *est un idéal divisoriel*

(2) $M = \bigcup_{\mathfrak{v} \in \mathcal{F}_M} (\mathfrak{a}_M : \mathfrak{v})$

En effet : la première assertion est évidente, pour la seconde remarquons que M est la réunion des idéaux fractionnaires divisoriels qui y sont contenus et qui contiennent $\mathfrak{a}_M$, un tel idéal $\mathfrak{a}$ est de la forme :

$a_M : \mathfrak{d}$ où $\mathfrak{d}$ est un entier divisoriel car $a_M : a \subset A$ et si $\mathfrak{d} = a_M : a$ on a $a = a_M : \mathfrak{d}$ puisque a_M, a et $\mathfrak{d}$ sont divisoriels.

Lemme A.2.2. : *Le couple* $(a_M, \mathcal{F}_M)$ *associé au module divisoriel* M *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) Pour tout $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}_M$, *l'idéal* $\mathfrak{d}\ a_M$ *n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur* 1

(2) si $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}_M$ *et* $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{d}'$ *alors* $\mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$

(3) $\mathcal{F}_M$ *est stable par intersection finie.*

Si de plus, A *est noetherien, il y a correspondance biunivoque entre les sous* A*-modules divisoriels de* K *et les couples* $(a, \mathcal{F})$ *vérifiant 1), 2), 3).*

Preuve :

1) Soit $\mathfrak{d} \in \mathcal{F}_M$, si a_M et $\mathfrak{d}$ étaient contenus dans un même idéal premier de hauteur 1, p on aurait :

$$a_M : p \subset a_M : \mathfrak{d} \subset M \text{ et d'autre part } a_M : p \subset A$$

d'où $\quad a_M : p \subset a_M$ ce qui implique $p = A$

2) Résulte de l'inclusion $a_M : \mathfrak{d}' \subset a_M : \mathfrak{d}$

3) Soit $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$. $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{d}'$ est divisoriel et on a :

$$a_M : (\mathfrak{d} \cap \mathfrak{d}') = \widetilde{a_M : \mathfrak{d} + a_M : \mathfrak{d}'} \subset \tilde{M} = M$$

(pour un sous A-module V de K, $\tilde{V}$ désigne le module divisoriel associé, i.e. $\tilde{V} = \bigcap_{p \in X^1} V_p$).

d'où $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{d}' \in \mathcal{F}_M$.

Si maintenant $(\mathfrak{a},\mathcal{F})$ est un couple formé d'un idéal entier divisoriel $\mathfrak{a}$ et d'une famille $\mathcal{F}$ d'idéaux entiers divisoriels vérifiant 1), 2), 3), on voit par localisation que le module $M = \bigcup_{\mathfrak{V}\in\mathcal{F}} (\mathfrak{a} : \mathfrak{V})$ est divisoriel. D'autre part $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_M$ et si A est noethérien, tout idéal entier $\mathfrak{a}' \subset M$ est contenu dans un $\mathfrak{a} : \mathfrak{V}$ $(\mathfrak{V}\in\mathcal{F})$ car $\mathfrak{a}'$ possède un système fini de générateurs et $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie, d'où $\mathfrak{a}'\mathfrak{V}\subset\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'\ (\mathfrak{V}+\mathfrak{a})\subset\mathfrak{a}$ on en tire $\tilde{\mathfrak{a}}'\subset\mathfrak{a}$ d'après 1). Donc $\mathfrak{a}$ est le plus grand idéal entier contenu dans M d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M$. Pour tout $\mathfrak{V}'\in\mathcal{F}_M$ il existe, pour les mêmes raisons de finitude, un $\mathfrak{V}\in\mathcal{F}$ tel que $\mathfrak{a}_M : \mathfrak{V}' \subset \mathfrak{a}_M : \mathfrak{V}$ d'où $\mathfrak{V}\subset\mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{V}'\in\mathcal{F}_M$. Finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$.

<u>Exemples</u> :

1 - Si $p \in X^{(1)}$, A_p est un sous A-module divisoriel de K car $(A_p)_q = K$ si $q \in X^{(1)} - (p)$. $\mathcal{F}_{A_p}$ est formée des idéaux entiers divisoriels rencontrant $(A - p)$. En effet : si $\mathfrak{a}\in\mathcal{F}_{A_p}$ $A : \mathfrak{a} \subset A_p$ on en déduit que $\mathfrak{a}$ n'est pas contenu dans p car sinon on aurait $A : p \subset A : \mathfrak{a} \subset A_p$ d'où $p(A : p) \subset p\, A_p \cap A = p$ ce qui donne $A : p \subset A$ et $p = A$.

Réciproquement si $\mathfrak{a} \not\subset p$ soit $\alpha\in\mathfrak{a}$ tel que $v_p(\alpha) \leq 0$ pour $x \in A : \mathfrak{a}$ on aura $v_p(x\alpha) \geq 0$ d'où $v_p(x) \geq - v_p(\alpha) \geq 0$ c'est-à-dire $x\in A_p$ d'où $A : \mathfrak{a}\subset A_p$.

2 - Plus généralement si S est une partie multiplicativement stable de A, $S^{-1}A$ est un A-module divisoriel et $\mathfrak{a}\in\mathcal{F}_{S^{-1}A}$ si et seulement si $\mathfrak{a}\not\subset p$ pour $p \in X^{(1)}$ tel que v_p soit nulle sur S : Cela résulte de l'exemple précédent et de l'égalité $S^{-1}A = \bigcap_{p\in X_S^{(1)}} A_p$ où $X_S^{(1)}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1, tel que S_p soit nulle sur S.

Proposition A.2.3. : *Un anneau intermédiaire entre* A *et* K *est* A-*module "divisoriel" si et seulement si il est intersection d'anneaux de valuations essentielles de* A.

Preuve :

1 - Il est clair qu'une intersection d'anneaux de valuations essentielles de A est un A-module divisoriel.

2 - Soit B un sur-anneau divisoriel de A, nous avons d'après le lemme A.2.1.

$$B = \bigcup_{a \in \mathcal{F}_B} (A : a)$$

et $$B = \bigcup_{\substack{a \not\subset p \\ \forall p \notin \mathcal{F}_B}} (A : a)$$

l'exemple 1 précédent montre que $B = \bigcup_{\substack{a \not\subset p \\ \forall p \notin \mathcal{F}_B}} (A : a) = \bigcap_{p \notin \mathcal{F}_B} A_p$

Corollaire A.2.4. : *Tout transformé de Nagata de* A *est une intersection d'anneaux de valuations essentielles de* A [*Nagata, Memoirs of the College of Sciences, Kyoto, 30, serie A, n° 1, 1956*].

Si a *est un idéal de* A, *la famille* $(a^n)_{n \geq 0}$ *vérifie bien les propriétés 1), 2), 3) de A.2.2.* .

Corollaire A.2.5. : *Tout sur-anneau divisoriel de* A *est un anneau de fractions de* A *si et seulement si le groupe des classes de diviseurs de* A *est de torsion (cf. CLABORN* [*6 bis*]*).*

Ce corollaire se démontre comme dans le cas des Dedekind en considérant le transformé de Nagata relatif à $p \in X^{(1)}$.

Cette étude ne permet pas de caractériser toutes les topologies de corps sur K ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 comme bornes supérieures de topologies p-adiques.

Exemple : Soit $A = \mathbb{Z}[[T]]$ qui est un anneau de Krull de dimension 2 la topologie $\mathcal{C}_A$ est une topologie de corps sur Fr(A) puisque $\mathrm{Rad}(A) \neq (0)$, elle possède un système fondamental de voisinages divisoriels de 0 (les idéaux principaux) mais elle n'est pas borne supérieure de topologie p-adique, $p \in X^1$ car A ne peut être ouvert pour une telle topologie comme le montre le lemme suivant :

Lemme A.2.6. : *Un anneau de Krull est ouvert pour une borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$) si et seulement si il est de Dedekind semi-local.*

Preuve :

1 - Un anneau de Dedekind semi-local est bien ouvert pour la topologie borne supérieure de toutes les topologies p-adiques.

2 - Si A est un anneau de Krull ouvert pour une borne supérieure de topologies p-adiques ($p \in X^1$), il contiendrait un sous A-module de la forme $p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$ $(p_i \neq p_j)$; les p_i sont alors les seuls idéaux premiers de hauteur 1 de A car s'il y en avait un autre $p \neq p_i$ $i = 1,\dots,s$, le théorème d'approximation donnerait un élément $x \in K$ tel que

$$x \in p_1^{n_1} \cap \dots \cap p_s^{n_s} A_{p_s} \quad \text{et} \quad v_p(x) < 0 \quad \text{d'où } x \notin A$$

finalement A est un anneau de Krull qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1 il est par conséquent de Dedekind semi local.

Nous avons cependant le théorème suivant :

Théorème A.2.7. : *Soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps sur K possédant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0, alors $\mathcal{C}$ est borne supérieure* *d'une famille de topologies p-adiques* ($p \in X^1$) *si et seulement si pour tout voisinage divisoriel* M *de* 0, *l'ensemble* $X^1(M) = \mathrm{supp}(K/M) \cap X^{(1)}$ *est fini.*

<u>Démonstration</u> : 1) Si $M = p_1^{n_1} A_{p_1} \cap \ldots \cap p_s^{n_s} A_{p_s}$ est un voisinage de 0 pour une borne supérieure de topologies p-adique alors $\mathrm{supp}(K/M) \cap X^{(1)} = \{p_1, \ldots p_s\}$ car si $M_p \neq K$, p est égal à l'un des p_i puisque $(A_{p_i})_p = K$ dans le cas contraire.

2) Réciproquement soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps possédant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0, $\mathcal{M}$ et telle que $X^1(M) = \mathrm{supp}(K/M) \cap X^{(1)}$ soit fini pour tout $M \in \mathcal{M}$.

$X^1(M)$ est d'abord non vide puisque M est divisoriel et si $p \in X^1(M)$ $\quad M_p \neq K$ d'où $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_p$.

D'autre part on sait qu'il existe $M' \in \mathcal{M}$ tel que

$$I' A_{I'} \subset M \quad (I' = M' \cap A)$$

d'où $\bigcap_{p \in X^1(M)} (I' A_{I'})_p \subset \bigcap_{p \in X^1} M_p = M$ et puisque chaque $(I' A_{I'})_p$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}_p$ on voit que M est ouvert pour une borne supérieure de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}$ est moins fine donc égale à $\sup \mathcal{C}_p$ où p est tel que A_p soit ouvert pour $\mathcal{C}$. On verra au chapitre 3 que les topologies ertiniennes satisfont le théorème précédent.

Nous allons retrouver ce résultat en déterminant explicitement la topologie $\mathcal{C}_M$ associée à un sous A-module divisoriel M de K par une méthode qui généralise celle de WARNER et HEINE (cf. [24] ; th. 2).

Pour tout sous A-module non nul M de K désignons, pour $p \in X^{(1)}$, par $v_p(M)$, la borne inférieure de l'ensemble des $(v_p(x))_{x \in M}$ s'il est borné inférieurement et $-\infty$ autrement et $\tilde{M} = \{x \in K : v_p(x) \geq v_p(M) \quad \forall p \in X^{(1)}\}$,

il est facile de voir que M est divisoriel si et seulement si $M = \tilde{M}$.
D'autre part si $(n_p)_{p \in X^1}$ est une famille d'entiers (ou $-\infty$) négatifs pour presque tous p alors il existe un module divisoriel tel que $v_p(M) = n_p$.

Ceci dit soit M un sous A-module divisoriel de K, $A(M) = \bigcap_{p \in X^1(M)} A_p$:

<u>Proposition A.2.8.</u> : *$\mathcal{T}_M$ est la topologie ayant un système fondamental de voisinages de* 0 *formé des sous* A-*modules divisoriels* U *vérifiant :*

a) $X^1(U) = X^1(M)$

b) *il existe* $n \geq 0$ *tel que* $v_p(U) = E(2^{-n} v_p(M))$ *pour "presque tout* $p \in X^1(M)$".

E(x) *désigne l'entier vérifiant* $x \leq E(x) < x+1$.

<u>Démonstration</u> :

1 - Montrons que les U définissent bien une topologie :

Soient U, U' deux tels sous-modules, il existe n, $m \in \mathbb{N}$ et un ensemble fini $B \subset X^1(M)$ tels que :

$$v_p(U) = E(2^{-n} v_p(M)) \text{ et } v_p(U') = E(2^{-n} v_p(M)) \text{ pour } p \in X^1(M) - B$$

Supposons $m \geq n$ et soit :

$$n_p = \begin{cases} v_p(U') \text{ si } p \in X^1 - B \text{ et } v_p(M) < 0 \\ \max\{v_p(U), v_p(U')\} \text{ autrement les } n_p \text{ sont négatifs pour} \end{cases}$$

presque tout p et définissent donc un sous A-module divisoriel W de K

$$W = \{x \in K \mid v_p(x) \geq n_p \quad \forall p \in X^1\}$$

on a $W \subset U \cap U'$ car $v_p(W) = n_p \geq \mathrm{Max}\,\{v_p(U), v_p(U')\}$

et $X^1(W) = X^1(M)$ en vertu du fait que $v_p(M) = -\infty \iff p \notin X^1(M)$.

Nous avons donc bien une topologie pour laquelle M est <u>ouvert</u>.

2 - Cette topologie est compatible avec la structure d'<u>anneau</u> de K, en effet :

Soit U vérifiant a), b) et n_p la famille :

$$n_p = \begin{cases} -\infty & \text{si } p \in X^1 - X^1(M) \\ E(2^{-(n+1)}\, v_p(M)) & \text{si } p \in X^1(M) - B \text{ et } v_p(M) < 0 \\ \text{Max } \{0,\ v_p(0)\} & \text{autrement} \end{cases}$$

Cette famille définit un sous A-module <u>divisoriel</u> W de K qui vérifie $X^1(W) = X^1(M)$ et si x,y sont deux éléments de W nous avons $v_p(xy) \geq v_p(U)$ pour tout $p \in X^1$ d'où $xy \in \tilde{U} = U$ c'est-à-dire $W.W \subset U$.

Reste à montrer que si $x \in K - (0)$ il existe W' tel que $xW' \subset U$ il suffit de le faire si $x = \frac{1}{a}$ $(a \in A - (0))$, comme précédemment W' sera défini par les $v_p(W')$:

$$\text{soit } n_p = \begin{cases} v_p(U) \text{ si } v_p(a) \leq 0 \text{ ou si } v_p(U) = -\infty, \\ \\ v_p(U) + v_p(a) \text{ autrement.} \end{cases}$$

Le module divisoriel W' défini par n_p vérifie $xW' \subset U$, car si $\alpha \in W$ on a $v_p(\alpha x) = v_p(\alpha . \frac{1}{a}) = v_p(\alpha) - v_p(a) \geq v_p(U)$. Finalement nous avons bien une topologie d'anneau sur K.

3 - Reste à voir que cette topologie $\mathcal{C}_M$ est la moins fine pour laquelle M est ouvert : soit $\mathcal{C}'$ une topologie linéaire d'anneau sur K pour laquelle M <u>est ouvert</u>, et montrons qu'elle est plus fine que $\mathcal{C}_M$.

Si U est un voisinage divisoriel de 0 pour $\mathcal{C}_M$, $u \in N$ et B le sous-ensemble fini de X^1 en dehors duquel nous avons $v_p(U) = E(2^{-n}\, v_p(M))$.

Soit $\quad \alpha \in \bigcap_{p \in X^1(M)} (p^{v_p(U) - E(2^{-n}\, v_p(M))})\ A_p$

Alors $v_p(\alpha) \geq \begin{cases} 0, \text{ si } p \in X^1(M) - B \\ v_p(U) - E(2^{-n} v_p(M)), \text{ si } p \in B. \end{cases}$

Comme $\mathcal{C}'$ est une topologie d'anneau, il existe U' voisinage de 0 pour $\mathcal{C}'$ tel que $U'^{2^n} \subset M$ d'où $2^n v_p(x) \geq v_p(M) \quad \forall x \in U'$ et $v_p(x) \geq E(2^{-n} v_p(M))$ pour tout $p \in X^1(M)$ mais alors $v_p(\alpha x) \geq v_p(U)$ pour tout $p \in X^1(U)$ d'où $\alpha x \in \tilde{U} = U$ c'est-à-dire $\alpha U' \subset U$ et U est ouvert pour $\mathcal{C}'$ et par conséquent $\mathcal{C}'$ est plus fine que $\mathcal{C}_M$.

Proposition A.2.9. : *Soit* M *un sous* A*-module divisoriel de* K*, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $X^1(M)$ *est fini*

2) $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_{A(M)}$ *= borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques* *(*$p \in X^1$*).*

Preuve :

1) $\Longrightarrow$ 2) Si $X^1(M)$ est fini, $A(M) = \bigcap_{p \in X^1(M)} A_p$ est un anneau de Dedekind semi-local et d'après le chapitre I, $\mathcal{C}_{A(M)} = \sup_{p \in X^1(M)} \mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_{A(M)}$ sera moins fine que $\mathcal{C}_M$ car les $\mathcal{C}_p$ le sont d'où $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_{A(M)}$.

2) $\Longrightarrow$ 1) se fait comme dans la démonstration de A.2.7.

Remarque : $\mathcal{C}_M$ peut être une topologie de corps sans que $X^1(M)$ soit fini, il suffit de prendre un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $M = (1 + \mathfrak{a})^{-1}$ A ne soit pas semi-local, $\mathcal{C}_M$ est une topologie de corps mais X'(M) n'est pas fini.

Si $\mathcal{C}$ est une topologie de corps sur K ayant un système fondamental $\mathcal{M}$ de voisinages divisoriels de 0, nous avons $\sup_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{C}_M = \mathcal{C}$ et si $\operatorname{supp}(K/M) \cap X^1$ est fini pour tout $M \in \mathcal{M}$, chaque $\mathcal{C}_M$ sera une borne supérieure de $\mathcal{C}_p$ d'après A.2.9. donc $\mathcal{C}$ aussi et on retrouve ainsi A.2.7. .

Signalons enfin une caractérisation des bornes supérieures de familles finies de topologies p-adiques :

Théorème A.2.10 : *Soit $\mathcal{C}$ une topologie de corps sur K ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0. Alors $\mathcal{C}$ est borne supérieure d'une famille finie de topologies p-adiques si et seulement si elle possède des éléments topologiquement nilpotents.*

Preuve : Soit $a \in K - (0)$ topologiquement nilpotent

$$X^1(a) = \{p \in X^1 : v_p(a) \neq 0\} \qquad X^1(0) \text{ est fini.}$$

Soit $p \in X^1 - X^1(a)$, M un voisinage divisoriel de 0 pour $\mathcal{C}$ et $m \in \mathbb{N}$ pour tout y, il existe n tel que $\frac{a^n}{y^m} \in M$ d'où

$$v_p(a^n) \geq v_p(M) + v_p(y^m) \quad \text{ou} \quad - m\, v_p(y) \geq v_p(M)$$

si donc on prend y tel que $v_p(y) = 1$ on trouve $v_p(M) \leq -m \quad \forall m$ c'est-à-dire $v_p(M) = -\infty$ et $p \notin X^1(M)$, autrement dit on a $X^1(M) \subset X^1(a)$, d'où l'on tire que $X^1(M)$ est fini et alors A.2.7. montre que $\mathcal{C}$ est borne supérieure de topologies p-adiques avec $p \in X^1(M) \subset X^1(a)$, donc nécessairement en nombre fini.

Remarque : Remarquons que contrairement au cas des anneaux de Dedekind, $\mathcal{C}$ peut être localement borné sans qu'elle soit borne supérieure de $\mathcal{C}_p$. Il suffit là aussi de prendre un $(1 + a)^{-1}$ A non semi-local et la topologie de ses idéaux non nuls.

B - Cas non intégralement clos :

Soit A noethérien intègre non intégralement clos, A' sa clôture intégrale et X^1 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A.

Fixons $p \in X^1$. Alors $\mathcal{C}_p$ possède un système fondamental de voisinages de 0, tel M, vérifiant $M = \bigcap_{q \in X^1} M_q$. Si on convient d'appeler module "divisoriel" un sous A-module non nul de K vérifiant l'égalité précédente, on a :

Proposition B.2.1. : *Si toute topologie de corps sur* K *possèdant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de* 0 *est borne supérieure de topologies* p*-adiques* ($p \in X^1$) *alors* A_q *est analytiquement irréductible pour tout* $q \in X^1$.

En effet : soit $q \in X^1$. $(A_q)'$ est un anneau de Dedekind semi-local, q' est un idéal premier de $(A_q)'$ la topologie q'-adique sera borne supérieure d'une famille de topologies $\mathcal{C}_p$ $(p \in X^1)$ soit $\mathcal{C}_{q'} = \sup_{p \in \Delta} \mathcal{C}_p$ on en déduit que tout $p \in \Delta$ est égal à q autrement dit $\mathcal{C}_{q'} = \mathcal{C}_q$ d'où A_q est de Mori et q' est unique puisque si q'' est un autre idéal premier de $(A_q)'$ on aura $\mathcal{C}_{q''} = \mathcal{C}_{q'}$, donc A_q est unibranche et finalement $(\widehat{A_q})$ est intègre.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie comme le montre le cas intégralement clos mais comme dans le dernier cas on peut montrer que si A_p est intègre pour tout $p \in X^1$ alors une topologie de corps sur K possèdant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de 0 est borne supérieure de topologies p-adiques $(p \in X^1)$ si et seulement si pour un tel voisinage M, $\mathrm{supp}(K/M) \cap X^1$ est fini.

C - Extensions fidèlement plates et application aux anneaux de polynomes et de séries formelles

Nous nous intéressons dans cette partie au cas des anneaux de polynômes (ou de séries formelles) et une généralisation.

Si A est noethérien intègre, K = Fr(A) B un anneau de polynômes sur A en un nombre fini de variables et L = Fr(A), en général il n'y a pas unicité de topologies de corps B-linéaire sur L et induisant sur K une topologie donnée : par exemple si A est un anneau de valuation discrète $A[T]$ est un anneau de Krull de dimension 2, toute valuation v de K(T) positive sur $A[T]$ non équivalente à aucune valuation essentielle de $A[X]$ induit sur K la topologie définie par la valuation de A ; en effet $\mathcal{C}_v$ ne peut induire sur K la topologie discrète car dans le cas on aurait $K[T] \subset A(v)$: anneau de v et v serait essentielle. Nous verrons qu'il y a unicité quand on se restreint aux topologies ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de 0.

Concernant les topologies induisant la topologie discrète, nous avons le :

<u>Proposition C.2.1.</u> : *Soit* A *noethérien intègre,* K = Fr(A) $B = A[T]$ L = Fr(B) *et* $\mathcal{C}$ *une topologie* B-*linéaire de corps sur* L, *alors* $\mathcal{C}$ *induit sur* K *la topologie discrète si et seulement si elle est plus fine qu'une topologie* $\mathcal{C}_q$ *où* q *est un idéal premier de hauteur* 1 *de* B *tel que* $q \cap A = (0)$.

<u>Preuve</u> :

1 - Il est évident que si $q \cap A = (0)$ et $\mathcal{C}$ plus fine que $\mathcal{C}_q$ alors $\mathcal{C}$ induit sur K la topologie discrète

2 - Inversement : supposons que $\mathcal{C}$ induise sur K la topologie discrète il existe donc M sous B-module de L, ouvert pour $\mathcal{C}$ tel que $a_M \cap A = (0)$ où $a_M = M \cap A[T]$.

En prenant une décomposition primaire de a_M, l'intégrité de A nous montre qu'il existe un idéal premier q de $A[T]$ contenant q_M et vérifiant $q \cap A = (0)$, un tel idéal est tel que $M_q \neq L$ et alors $A[T]_q$ est un anneau de valuation discrète d'où l'on tire que l'anneau B_q est ouvert pour $\mathcal{C}$ qui est donc plus fine que $\mathcal{C}_q$.

Pour les topologies n'induisant pas sur K la topologie discrète, nous allons déterminer alors celles qui sont bornes supérieures de familles de topologies définies par des valuations essentielles de $A[T]$.

Cas où A est de Dedekind :

Nous allons nous placer dans le cas plus général d'une extension fidèlement plate :

A étant de Dedekind de corps des fractions K, B un anneau de Krull A-fidèlement plat et $L = Fr(B)$. Pour tout $p \in \operatorname{Spec} A$, pB est un idéal divisoriel de B et $pB \neq B$ par fidèle platitude. En outre pour tout premier de hauteur 1 de B, $q \cap A$ est soit nul soit de hauteur 1 (condition "PDE" de SAMUEL [4]) et tout idéal premier de hauteur 1 de A est la trace d'un nombre fini seulement d'idéaux premiers de hauteur 1 de B.

Théorème C.2.2. : *Soit $\mathcal{C}$ une topologie B-linéaire de corps sur L n'induisant pas sur K la topologie discrète, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{C}$ est borne supérieure d'une famille de topologies q-adiques $(q \in X^1(B))$

(2) $\mathcal{C}$ possède un système fondamental de voisinages divisoriels de 0.

Démonstration :

a - Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2) puisque les topologies q-adiques ainsi que leurs bornes supérieures possèdent un système fondamental de voisinages divisoriels de 0.

b - Inversement : Supposons 2) vérifiée et soit M un voisinage divisoriel de O.

Remarquons d'abord que $M = \bigcap_{\substack{q \in X'(B) \\ q \cap A \neq (0)}} M_q$ puisque $M_q = K$ si $q \cap A = (0)$

En effet, si pour un tel idéal q on avait $M_q \neq K$, M_q serait un B_q-module de type fini et A_q serait ouvert pour $\mathcal{C}$ et $q\, A_q$ aussi et $\mathcal{C}$ induirait sur K la topologie discrète.

Soit Δ l'ensemble des $q \in X^1(B)$ tels que B_q soit ouvert pour $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$ est plus fine que $\sup\limits_{q \in \Delta} \mathcal{C}_q$.

Si maintenant M' est au voisinage divisoriel de O pour $\mathcal{C}$ vérifiant $a_{M'}\, B_{a_{M'}} \subset M$ (où $a_{M'} = M' \cap B$) nous avons

$$\bigcap_{\substack{q \in X^1(B) \\ q \cap A \neq (0)}} (a_{M'}\, B_{a_{M'}})_q \subset M$$

il s'agit de voir que dans cette intersection il n'y a qu'un nombre fini de localisatons différentes de L, pour cela nous distinguons plusieurs cas :

i) Si $a_{M'} \subset q$ alors $(a_{M'}\, B_{a_{M'}}) \neq L$, ces q sont en nombre fini puisque B est un anneau de Krull.

ii) Si $a_{M'} \not\subset q$ mais $q \cap A = q_i \cap A$ pour un certain q_i contenant $a_{M'}$, comme les q_i sont en nombre fini, q appartiendra à l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de B au-dessus d'un $q_i \cap A$, il n'y en a qu'un nombre fini en vertu de la condition "PDE".

iii) Si $a_{M'} \not\subset q$ et $q \cap A \neq q_i \cap A$ pour tout q_i contenant $a_{M'}$, alors $a_{M'}$ est étranger à q puisque A étant de Dedekind $q \cap A$ est étranger aux $q_i \cap A$, soit donc $\pi \in (1 + a_{M'}) \cap q$.

B_q étant un anneau de valuation discrète et $\pi \in q B_q$ on a $(B_q)_\pi$ = L (localisation par rapport à la partie $1, \pi, \pi^2, \ldots$) mais comme $\pi \in 1 + a_{M'}$ on a aussi

$$(B_q)_\pi \subset B_q \cdot \frac{1}{1 + a_{M'}} = \left(\frac{a_{M'}}{1 + a_{M'}}\right)_q \qquad (B_q = (a_{M'})_q) ,$$

d'où $(a_{M'}, B_{a_{M'}, q}) = L$.

On voit donc que les q pour lesquels $(a_{M'}, B_{q_{M'}}) \neq L$ sont en nombre fini donc M est ouvert pour $\sup\limits_{q \in \Delta} \mathcal{C}_q$ d'où l'identité de ces deux topologies.

Corollaire C.2.3. : *Etant donné* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *les topologies de corps sur* L *ayant un système fondamental de voisinages divisoriels de* 0 *et induisant la topologie* $\mathfrak{p}$*-adique sur* K *sont les bornes supérieures de familles de topologies* q*-adiques avec* $q \cap A = \mathfrak{p}$. *Il y a unicité si et seulement si la valuation* $\mathfrak{p}$*-adique a un seul prolongement à* L *(positif sur* B*).*

Pour établir ce corollaire il suffit de remarquer que si $\mathcal{C}_q$ induit la topologie $\mathfrak{p}$-adique sur K alors $q \cap A = \mathfrak{p}$.

Remarque C.2.4. : L'équivalence du théorème précédent n'est plus vraie si $\mathcal{C}$ induit sur K la topologie discrète, comme on peut le voir en prenant $A = \mathbf{Z}[[X]]$ et la topologie $\mathcal{C}_A$, quine peut alors être borne supérieure de topologies $\mathfrak{p}$-adiques (cf. lemme A.2.6.)

Dans le cas particulier des polynômes ou de séries formelles nous avons le :

Théorème C.2.5. : *Soit* A *de Dedekind,* K = Fr(A) *et* B = A[T] (ou A[[T]]) L = Fr(B) , *alors il existe une et une seule topologie de corps sur* L *possèdant un système fondamental de voisinages* B*-divisoriels et induisant sur* K *une topologie non discrète donnée.*

En effet : Soit $\mathcal{C}$ une topologie B-linéaire de corps sur L induisant sur K une topologie $\mathcal{C}'$ non discrète : en vertu de A.1.9 $\mathcal{C}' = \sup\limits_{p \in \Delta \subset X'(A)} \mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}$ est égal à $\sup\limits_{\substack{q \in \Delta' \\ \Delta' \subset X'(B)}} \mathcal{C}_q$ d'après C.2.2. .

Les $q \in \Delta'$ sont exactement les idéaux de hauteur 1 de B au-dessus des $p \in \Delta$ donc égaux à pB, chaque pB étant minimal et le seul minimal de B au-dessus de p.

<u>Cas des anneaux de Krull</u> :

Quand on suppose A anneau de Krull, de dimension > 1, l'équivalence de C.2.2. et le théorème C.2.5. ne sont plus vrais, plus précisément on a la :

<u>Proposition C.2.6.</u> : *Soit* A *de Krull,* K = Fr*(A),* B = A[X] *et* L = Fr(B). *Si toute topologie de corps sur* L *possèdant un système fondamental de voisinages divisoriels de* 0 *et n'induisant pas sur* K *la topologie discrète est borne supérieure de topologies q-adiques* ($q \in X^1(B)$) *alors* A *est de Dedekind.*

<u>Preuve</u> : Les $\left(\frac{\alpha B}{1+\alpha B}\right)_{\alpha \in A-(0)}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie de corps sur L qui n'induit pas la topologie discrète sur K puisque $\alpha B \cap A = (\alpha)$, ils sont divisoriels car $(1+\alpha B)^{-1}$ est une intersection d'anneaux de valuations essentielles de B (proposition A.2.3.).

Cette topologie n'est borne supérieure de topologies q-adiques que si A <u>est de dimension 1</u>. En effet l'anneau $(1+\alpha B)^{-1}$ B serait ouvert pour une borne supérieure de topologies q-adiques et par conséquent de Dedekind semi-local, ce qui impliquerait que deux idéaux premiers de B contenant α (et ne coupant donc pas $1+\alpha B$) sont étrangers. En particulier si p_1, $p_2 \in X^1(A)$ tels que $\alpha \in p_1 \cap p_2$ alors p_1 B et p_2 B sont étrangers, donc p_1 et p_2 aussi, la conclusion résulte du lemme suivant (probablement déjà connu) :

Lemme C.2.7. : *Un anneau de Krull dans lequel deux idéaux premiers de hauteur 1 sont étrangers quand ils sont distincts est un anneau de Dedekind.*

Une démonstration simple est la suivante : soit P idéal premier de hauteur > 1, comme il contient un idéal premier de hauteur 1 l'hypothèse faite implique qu'il en contient un seul, soit p_o : si $Q \subset \mathrm{Spec}\, A$ avec $Q \subset P$ alors ou $h(Q) = 1$ ou $p_o \subset Q$ cela veut dire que $p_o A_p \subset \cap$ (idéaux premiers de A_p).

Comme A_p est de Krull il n'aura qu'un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1 et est donc de Dedekind et P serait de hauteur 1.

Cependant l'examen de la démonstration de C.2.2. nous montre que dans le cas des anneaux de Krull nous avons le résultat général suivant :

Proposition C.2.8. : *Soient* $A \hookrightarrow B$ *deux anneaux de Krull vérifiant la condition "PDE", alors une topologie de corps sur* F(B) *possèdant un système fondamental de voisinages divisoriels de* 0 *et induisant sur* K = Fr(A) *une topologie* p-*adique (ou une borne supérieure d'une famille finie de telles topologies) est borne supérieure de topologies q-adiques* ($q \in X^1(B)$).

Remarque C.2.9. : Dans les hypothèses de la proposition précédente, l'existence d'une topologie "divisorielle" induisant $\mathcal{C}_p$ sur K équivaut à $i(p) \neq 0$ où i est le morphisme $D(A) \longrightarrow D(B)$.

Cas non intégralement clos :

Nous avons dans ce cas l'analogue du théorème B.1.5.

Théorème C.2.9. : *Soit* A *un anneau noethérien intègre,* K *son corps des fractions* B = A[T] *et* L = Fr(A), *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Toute topologie de corps sur L *possèdant un système fondamental de voisinages "divisoriels" de* 0 *est borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles de* B.

2) A *est de dimension* 1 *et ses localisés sont analytiquement irréductibles.*

"divisoriel" est pris ici au sens de B.2.1. .

Preuve :

1 ⟹ 2 : Si 1) est vraie la proposition C.2.6. montre que A' (clôture intégrale de A) est un anneau de Dedekind d'où dim A = 1.

Si $p \in$ Spec A pB est un idéal premier de hauteur 1 de B et $\mathcal{C}_{pB}$ n'induit pas sur K la topologie discrète elle est donc borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles de B. On en déduit comme précédemment que B_{pB} est analytiquement irréductible et comme B_{pB} domine A_p, ce dernier sera aussi analytiquement irréductible.

2 ⟹ 1 : Les seuls idéaux premiers de hauteur 1 de B ayant une intersection non nulle avec A sont les pB. Donc si M est un voisinage "divisoriel" de 0, pour une topologie de corps sur L, on aura $M = \bigcap_{p \in X(A)} M_{pB}$.

La démonstration se fait alors comme dans le cas de Dedekind, en remarquant que l'hypothèse sur A_p implique que B_{pB} est unibranche [8] d'une part et que $B_{pB} = (A_p[T])_{p\, A_p[T]}$.

A_p étant de Mori, $A_p[T]$ l'est aussi d'après [23] donc B_{pB} est de Mori et par suite analytiquement irréductible.

Remarque : Le théorème précédent reste encore vrai si on prend B = A[[T]] au lieu de A[T].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI : Topologie générale, Chapitre III (groupes topologiques).

[2] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitres I, III, IV.

[3] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitres V et VI.

[4] BOURBAKI : Algèbre commutative, Chapitre VII.

[5] BALLET B. : Thèse, 1971 (Orsay).

[6] BALLET B. : Sur les modules linéairement compacts
Bulletin de la Société Mathématiques de France, (1972).

[6 bis] COHEN : Commutative rings with restricted minimum condition
Duke Math. J. 17 (1950).

[7] CORREL E. : Topologies on quotients fields.
Duke M.J. 35, n° 1 (1968), pp. 175-178.

[8] DADE : Math. Annalen 148, (1962), pp. 65-66.

[9] GILMER : Multiplicative ideal theory, II. Queen's papers on pure and applied Mathematics, n° 12.

[10] GRECO-SALMON : Topics in m-adic topology.

[10 bis] GRECO : Sull integrita e la fattorialita ....
(Rend. Semi Mat Padova XXXVI, 1966, p. 50.).

[11] GROTHENDIECK : Eléments de géométrie algébrique, IV, 1ère et 2ème parties.
(Publications I.H.E.S.).

[12] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 272, p. 1173-1174 (1971).

[13] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 274, p. 444-446 (1972).

[14] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 276, p. 93 (1973).

[15] JEBLI A. : C.R.A.S. t. 278, n° 15, p. 973 (1974).

[16] JEBLI A. : C.R.A.S. (à paraître).

[17] KAPLANSKY I. : Maximal fields with valuations
Duke M.J. t. 9 (1942), p. 303-321.

[18] Mc ADAM : Gom down on polynomial rings
Canadian J. of Maths.

[19] MATLIS E. : One dimensional noetherian domains
Canadian J. M 13 (1961), pp. 569-586.

[20] MATLIS E. : Theory of Q-rings
T.A.M.S. 187, 1 (1974).

[21] RIBENBOIM P. : Modules sur les anneaux de Dedekind
Summe Brasiliensis Mathematiciae Vol. 2, Fasc. 3 (1952)
pp. 21-36.

[22] SCHMIDT : Math. annalen 108 (1933), p. 1-25.

[23] SEYDI H. : Exposé au Colloque d'Algèbre Commutative, Rennes
(Janvier 1972).

[24] WARNER et HEINE : Duke J. of Maths (1973).

[25] ZARISKI-SAMUEL : Commutative Algebra, tome 2.