Jean Houdebine

La notion de Γ-comorphisme et ses applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A1_0>

LA NOTION DE Γ-COMORPHISME ET SES APPLICATIONS

par

Jean HOUDEBINE

Il existait dans la littérature beaucoup de lemmes analogues au lemme de Scott. Il s'agissait de regrouper en une seule proposition, ces différents résultats. Cela a conduit à définir les Γ-comorphismes. Il se trouve que cette notion permet de démontrer et d'énoncer commodément les résultats de Keisler sur les formules atomiques généralisées, et donne des caractérisations commodes des réalisations Γ-compactes.

1. DEFINITIONS

Soit Γ un ensemble de formules d'un langage $\mathcal{L}$ du calcul des prédicats du 1[er] ordre.

Définition 1.

On dit qu'une formule A dérive d'une formule B si elle est obtenue à partir de B en remplaçant certaines variables libres par de nouvelles variables.

Définition 2.

Si Γ est un ensemble de formules et M et M' deux réalisations, on dit que M' Γ - domine M si tout ensemble fini de formules dérivant de formules de Γ qui peut être satisfait dans M', peut être satisfait dans M.

Désignons par $\Gamma(M)$ l'ensemble des formules obtenues à partir de celles de Γ en échangeant certaines variables libres par des éléments de Γ.

Définition 3.

Si Γ est un ensemble de formules, M et M' deux réalisations et φ une fonction de M dans M' :

On dit que φ est un Γ-comorphisme ssi M'$\Gamma(M)$-domine M, les éléments de M étant considérés comme des constantes traduites dans M' par φ.

<u>Remarque</u> :

L'introduction de la notion de "formule dérivant d'une formule" dans la définition de Γ-comorphisme est indispensable pour que cette notion ne soit pas étroitement dépendante des variables du langage de départ.

Voici quelques résultats qui montrent les relations qui existent entre cette nouvelle notion et la notion de Γ-morphisme.

<u>Lemme 1</u>.

Si Γ^{*} désigne l'ensemble des formules qui sont la négation d'une formule de Γ, un Γ^{*}-comorphisme est un Γ-morphisme.

Ce résultat est évident. La réciproque n'est pas vraie en général, mais voici un cas où elle l'est.

<u>Proposition 1</u>.

Si Γ est un ensemble de formules d'un langage $\mathcal{L}$, stable par changement de variables, par disjonction et par quantification universelle, alors un Γ-morphisme est un Γ^{*}-comorphisme.

En effet, soient φ un Γ-morphisme et $\{\neg A_i(x_1,\ldots,x_n)\}$ $(1 < i \leqslant n)$ un ensemble fini de formules dérivant de $\Gamma^{*}(M)$ qui peut être satisfait dans M'. Alors la formule :

$$(\exists x_1)\,(\exists x_2)\,\ldots\,(\exists x_n)\,(\bigwedge_i \neg\, A_i(x_1,\ldots,x_n)) \text{ est satisfaite dans } M'.$$

Donc $(\forall x_1)\,(\forall x_2)\quad(\forall x_n)\,(\bigvee_i A_i(x_1,\ldots,x_n))$ n'est pas satisfaite dans M'. Cette dernière formule est avec les conditions de l'énoncé, et avec un changement des noms de variables x_i, une formule obtenue à partir des formules de Γ en remplaçant les variables libres par des éléments de M. Donc, elle n'est pas satisfaite dans M, et l'ensemble des formules $\neg A_i(x_1,\ldots,x_n)$ peut être satisfait dans M.

Proposition 2.

Soit φ une fonction de M dans M', et Γ un ensemble de formules. Posons $\Gamma' = \Gamma \cup \{(x=a) : a \in M\}$. φ est un Γ comorphisme ssi M' Γ'-domine M.

On le montre aisément en notant qu'une formule $A(a_1,\dots,a_p, x_1,\dots,x_n)$ peut être satisfaite dans une réalisation ssi l'ensemble de formules $\{A(y_1,\dots,y_p , x_1,\dots,x_n)\} \cup \{y_i = a_i\}$ où les y_i sont distincts de x_j, peut être satisfait dans cette réalisation.

2. EXEMPLES ET PROPRIETES DES Γ-COMORPHISMES.

1) Si Γ est l'ensemble de toutes les formules d'un langage $\mathcal{L}$, les Γ-morphismes et Γ-comorphismes sont les extensions élémentaires.

2) Si Γ_1 est l'ensemble des formules positives (c'est-à-dire des formules équivalentes à une formule en forme prénexe dont la partie sans quantificateur est une disjonction de conjonctions de formules atomiques) et si Γ_2 est l'ensemble des négations de formules positives, Γ_1 et Γ_2 satisfont les conditions de la proposition 1. Donc les Γ_1-morphismes sont des Γ_2-comorphismes et les Γ_2-morphismes des Γ_1-comorphismes.

Lemme 2.

Un Γ_1-morphisme est un homomorphisme, et un homomorphisme surjectif est un Γ_1-morphisme.

La première affirmation est évidente. On montre la 2ème en raisonnant par récurrence sur le nombre de quantificateurs.

3) Soit $\forall_n$ (resp. $\exists_n$) l'ensemble des formules prénexes avec (n-1) changements de quantificateurs et dont le premier quantificateur est $\forall$ (resp. $\exists$). Montrons que $\forall_n$ satisfait aux conditions de la proposition 1.

La seule partie qui ne soit pas évidente est la stabilité par la disjonction. Cette stabilité résulte de ce que $(\forall x)\ A \vee (\forall y)\ B$ est équivalent à $(\forall x)\ (\forall y)\ (A \vee B)$ pourvu que x et y soient des lettres distinctes et que x n'apparaisse pas dans B et y dans A.

Proposition 3.

Les notions de $\forall_n$-morphisme, $\exists_n$-comorphisme, $\forall_{n-1}$-comorphisme coïncident.

En effet, la proposition 1 montre la 1ère identité.

Pour la seconde, $\forall_{n-1}$ étant contenu dans $\exists_n$, il est clair qu'un $\exists_n$-comorphisme est un $\forall_{n-1}$-comorphisme. Pour la réciproque, il suffit de constater que $\forall_{n-1}$ est stable pour les changements de variables, et que $(\exists x_1)\ (\exists x_2)\ \ldots\ (\exists x_p)\ A(x_1, \ldots x_p\ , \ldots\ x_n)$ peut être satisfaite dans une réalisation ssi $A(x_1, \ldots\ x_p\ , \ldots\ x_n)$ peut y être satisfaite.

4) Γ est l'ensemble des formules atomiques.

Un Γ-morphisme est un homomorphisme.

Un Γ-comorphisme est appelé morphisme pur. Un Γ-comorphisme est injectif. En effet, si $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, l'ensemble de formules atomiques $\{(x = a_1),\ (x = a_2)\}$ peut être satisfait dans M'. Donc, il peut être satisfait dans M, ce qui est absurde.

3. GENERALISATION DU LEMME DE SCOTT.

Proposition 4.

Soit Γ un ensemble de formules d'un langage $\mathcal{L}$. Soient M et M' deux réalisations de $\mathcal{L}$. M Γ-domine M' ssi il existe un Γ-morphisme de M dans une ultrapuissance de M'.

En effet, soit I l'ensemble des formules satisfaites dans M qui sont des conjonctions finies de formules de la forme $A_i(a_1, \ldots, a_n)$ où $A_i(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ et $a_1 \ldots a_n \in M$.

A chaque élément σ de I, associons une réalisation M'_σ de $\mathcal{L}_M$ dont la restriction au langage $\mathcal{L}$ est M'.

σ contient un nombre fini de symboles de constantes appartenant à M, $a_1, \ldots, a_m$: $\sigma(a_1, \ldots, a_m)$. La formule $\sigma(x_1, \ldots x_m)$ est une conjonction de formules dérivant de formules de Γ. Elle peut être satisfaite dans M, donc aussi dans M'. Ainsi, il existe des $b_1, \ldots, b_m$ éléments de M' tels que $\sigma(b_1, \ldots, b_m)$ soit satisfaite dans M'. M' est alors considéré comme réalisation de $\mathcal{L}_M$ en faisant correspondre b_i à a_i et n'importe quel élément aux autres constantes de M.

A chaque $\sigma \in I$ on peut associer

$J_\sigma = \{\tau \in I \; ; \sigma$ soit satisfaite dans $M'_\tau\}$.

On a $J_\sigma \cap J_{\sigma'} = J_{\sigma \wedge \sigma'}$, et $\sigma \in J_\sigma$.

Donc, il existe un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur I tel que pour tout σ $J_\sigma \in \mathcal{F}$. L'ultra produit $M'^{I}_\sigma/\mathcal{F}$ étant une réalisation de $\mathcal{L}_M$, il y a une fonction φ de M dans celui-ci. Cette fonction est telle que pour toute formule de Γ $A(x_1, \ldots, x_n)$, si $A(a_1, \ldots, a_n)$ est vraie dans M, $A(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n))$ est vraie dans M'. En effet, cela est vrai dans M'_τ pour $\tau \in J_{A(a_1, \ldots, a_n)}$.

Réciproquement, soient $A_i(x_1, \ldots, x_n)$ des formules dérivant de Γ : si cet ensemble de formules peut être satisfait dans M, il existe $a_1, \ldots, a_n \in M$ tels que $A_i(a_1, \ldots, a_n)$ soit satisfaite dans M. φ étant un Γ-morphisme de M dans une ultrapuissance de M', $A_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ est satisfaite dans cette ultrapuissance de M' de même que la conjonction de ces formules. Il existe alors au moins une composante pour laquelle cette formule est vraie.

Corollaire 1.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ψ de M' dans M soit un Γ-comorphisme est, qu'il existe une fonction φ de M dans une ultrapuissance de M' qui soit un Γ-morphisme, et telle que $\varphi \circ \psi$ soit l'application canonique.

Appliquons la proposition précédente à M et M' considérées comme réalisation de $\mathcal{L}_{M'}$, et à l'ensemble $\Gamma' = \Gamma \cup \{(x = a) \ ; \ a \in M'\}$. D'après la proposition 2, M Γ'-domine M', il existe donc un Γ'-morphisme φ de M dans une ultrapuissance de M'.

- φ est un Γ-morphisme, car $\Gamma \subset \Gamma'$.

- comme $(x = a) \in \Gamma'$ et que $\psi(a) = a$ est satisfaite dans M, $\varphi(\psi(a)) = a$ est satisfaite dans l'ultrapuissance.

Donc, $\varphi \circ \psi$ est l'application canonique.

La réciproque est évidente.

4. APPLICATIONS DE LA PROPOSITION 4.

1) Si Γ est l'ensemble de toutes les formules d'un langage, on retrouve les lemmes de Frayne et Scott.

2) Dans le cas où Γ_1 est l'ensemble des formules positives et Γ_2 l'ensemble des formules négatives, on obtient :

Proposition 5.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi : M \longrightarrow M'$ soit un Γ_1 morphisme (resp. Γ_2 morphisme) est qu'il existe des extensions élémentaires M_1 et M'_1 de M et M' et un homomorphisme surjectif ψ de M_1 dans M'_1 (resp. M'_1 dans M_1) tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & M_1 \arrow[d, "\psi"] \\ M' \arrow[r, "i_2"] & M'_1 \end{tikzcd}$$

resp. $$\left(\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & M_1 \\ M' \arrow[r, "i_2"] & M'_1 \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}\right)$$

où i_1 et i_2 sont les injections canoniques.

En utilisant le corollaire alternativement pour Γ_1 et Γ_2 , on obtient en effet :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & M_2 \arrow[dr] & & \cdots & & M_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_{n+1} & \cdots \\ M' \arrow[ur] \arrow[rr] & & M'_2 & \cdots & M'_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] & & M'_{n+1} \arrow[ur] & & \cdots \end{tikzcd}$$

En prenant la limite inductive de ce diagramme, on obtient des ultralimites qui donnent le résultat.

La réciproque est évidente.

3) Si $\Gamma = \forall_n$ ou $\Gamma = \exists_n$ on obtient

<u>Proposition 6.</u>

Soient M et M' deux réalisations. Toutes les formules closes de $\exists_n$ vraies dans M' sont vraies dans M, si et seulement s'il existe une ultra-puissance de M et un $\forall_{n-1}$-morphisme. $\psi : M' \longrightarrow M^I/\mathcal{F}$.

En effet, à toute formule de $\forall_{n-1}$ on peut associer sa cloture existentielle. Dire que la formule peut être satisfaite dans une réalisation, c'est dire que sa cloture existentielle est satisfaite dans cette réalisation. Donc, la proposition 2 montre qu'il existe un $\forall_{n-1}$-morphisme $\psi : M' \longrightarrow M^I/\mathcal{F}$. ($\psi$ est d'ailleurs injectif car $\forall_{n-1}$ contient les formules $x \neq y$).

<u>Proposition 7</u>.

$\varphi : M \longrightarrow M'$ est un $\forall_n$-morphisme, si et seulement s'il existe une ultrapuissance de M et un $\forall_{n-1}$-morphisme ψ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dr, "\psi"] & \\ M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "i"] & & M^I/\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

commute.

C'est une application immédiate du corollaire de la proposition 4.

<u>Corollaire 2</u>.

$\varphi : M \longrightarrow M'$ est un $\forall_n$-morphisme si et seulement s'il existe une suite M_0 , M_1 , ... , M_{n+1} de réalisations et une suite φ_i : $M_i \longrightarrow M_{i+1}$ de fonctions telles que :

$\varphi_{i+1} \circ \varphi_i$ soit une extension élémentaire pour $o \leq i \leq n-1$

$M_0 = M$ et $M_1 = M'$, $\varphi_0 = \varphi$ et φ_n une extension.

La condition est nécessaire d'après la proposition précédente.

Montrons que la condition est suffisante par récurrence. φ_n est une extension, c'est-à-dire un $\forall_0$-morphisme. Supposons démontré que φ_1 est un $\forall_{n-1}$-morphisme et montrons que φ est un $\forall_n$-morphisme.

$$\begin{tikzcd}
& M' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M^I/\mathcal{U} \\
M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & M_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

φ_1 o φ étant une extension élémentaire, il existe une ultrapuissance de M qui est une extension élémentaire ψ de M_2. ψ o φ_1 est alors un $\forall_{n-1}$-morphisme et la réciproque de la proposition 7 permet de conclure.

4) Caractérisation des morphismes purs

Dans le cas où Γ est l'ensemble des formules atomiques, on obtient :

Proposition 8.

Une fonction φ de $M \longrightarrow M'$ est un morphisme pur si et seulement s'il existe un homomorphisme de M' dans une ultrapuissance de M, tel que le composé avec φ soit l'application canonique.

5. REALISATIONS Γ-COMPACTES : LEMMES FONDAMENTAUX.

Définition 4.

On dit qu'une réalisation est Γ-compacte (resp. faiblement Γ-compacte) si pour tout ensemble $\sum$ de formules dérivant de $\Gamma(M)$ (resp. Γ), $\sum$ peut être satisfait dans M si et seulement si tout sous ensemble fini de $\sum$ peut être satisfait dans M.

Si Γ est l'ensemble des formules atomiques de la forme $T = U$ où T et U sont des termes (resp. des formules atomiques, resp. des formules positives, resp. de toutes les formules de $\mathcal{L}$), on dit équationnellement (resp. atomique, resp. positivement, resp. élémentairement) compacte.

On suppose désormais Γ stable pour la conjonction.

Lemme 3.

Si M est Γ-compacte (resp. faiblement Γ-compacte), et si φ : M $\longrightarrow$ N est un Γ-comorphisme (resp. si N Γ-domine M), alors il existe un $\Gamma(M)$-morphisme (resp. Γ-morphisme) ψ : N $\longrightarrow$ M.

En effet, considérons un ensemble de variables en bijection avec N et désignons par x_b la variable ainsi associée à l'élément b de N.

Soit $\sum = \{A(x_{b_1}, \ldots, x_{b_n}) : A(x_1 \ldots x_n)$ est une formule de $\Gamma(M)$ et $M \vdash A(b_1, \ldots, b_n)\}$.

$\sum$ peut évidemment être satisfait dans N, donc il en est de même pour chaque sous ensemble fini de $\sum$. φ étant un Γ-comorphisme, chaque sous ensemble fini de $\sum$ est satisfait dans M donc $\sum$ tout entier, car M est Γ-compacte et $\sum$ dérive de $\Gamma(M)$. Ainsi, à chaque x_b, on peut associer un élément de M que l'on note $\Psi(b)$. La fonction ainsi définie est bien un $\Gamma(M)$-morphisme. En effet, si $A(b_1, \ldots, b_n)$ est satisfaite, $A(x_{b_1}, \ldots, x_{b_n}) \in \sum$ et $A(\Psi(b_1), \ldots, \Psi(b_n))$ est satisfaite.

Dans le cas faiblement Γ-compacte, la démonstration se fait de la même manière en remplaçant $\Gamma(M)$ par Γ.

Rappelons le résultat.

Lemme 4.

Soit Γ un ensemble de formules de $\mathscr{L}(M)$. Si chaque sous ensemble fini de Γ peut être satisfait dans M, alors il y a une ultrapuissance de M dans laquelle Γ peut être satisfait.

Théorème 1.

Soit Γ un ensemble de formules. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) M est Γ-compacte.

2) Pour toute ultrapuissance de M il existe un $\Gamma(M)$-morphisme φ de $M^I/\mathcal{F}$ dans M.

3) Pour tout Γ-comorphisme $\varphi : M \longrightarrow N$, il existe un $\Gamma(M)$-morphisme $\psi : N \longrightarrow M$.

1) $\Longrightarrow$ 3) est le lemme 3.

3) $\Longrightarrow$ 2) est évident, car l'application canonique de M dans une ultrapuissance est un Γ-comorphisme.

2) $\Longrightarrow$ 1) Si $\sum$ est un ensemble de formules dérivant de $\Gamma(M)$ tel que M peut satisfaire tout sous ensemble fini de $\sum$. Alors, d'après le lemme 4, il existe une ultrapuissance de M dans laquelle $\sum$ peut être satisfaite.

Aussi, aux variables y apparaissant dans $\sum$, on associe des éléments b_y de l'utrapuissance qui satisfont les formules de $\sum$. φ étant un $\Gamma(M)$-morphisme, $\varphi(b_y)$ satisfera aussi les formules de $\sum$ dans M.

Théorème 2.

1) M est faiblement Γ-compacte.

2) Pour toute ultrapuissance de M, il existe un Γ-morphisme φ de cette ultrapuissance dans M.

3) Si N Γ-domine M, il existe un Γ-morphisme de N dans M.

1) $\Longrightarrow$ 3) est le lemme 3.

3) $\Longrightarrow$ 2) est évident.

2) $\Longrightarrow$ 1) La démonstration est la même que celle du théorème 1 en remplaçant $\Gamma(M)$ par Γ.

6. APPLICATIONS

Lemme 5.

Si φ est une fonction de $M \longrightarrow M'$ et si ψ est une fonction de M' dans M, si M' est considérée comme une réalisation de $\mathcal{L}_M$ à l'aide de φ et si Γ est un ensemble de formules contenant $x_1 = x_2$ (où x_1 et x_2 sont deux variables distinctes). Alors ψ est un $\Gamma(M)$-morphisme si et seulement si ψ est un Γ-morphisme et $\psi \circ \varphi = I_M$.

En effet, un $\Gamma(M)$-morphisme est un Γ-morphisme. La formule $\varphi(a) = a$ étant satisfaite dans M' pour tout $a \in M$, si ψ est $\Gamma(M)$-morphisme, $\psi(\varphi(a)) = a$ est aussi satisfaite dans M.

Réciproquement, soit $A(a_1,\dots,a_n\ ;\ x_1,\dots,x_p)$ une formule de $\Gamma(M)$, $a_1,\dots,a_n$ appartenant à M. Dire que $A(a_1,\dots,a_n\ ,\ b_1,\dots,b_p)$ est satisfaite dans M', c'est dire que $A(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n)\ ,\ b_1,\dots,b_p)$ est satisfaite dans M' ($b_1,\dots,b_p \in M'$). Comme ψ est un Γ-morphisme, $A(\psi \circ \varphi(a_1),\dots,\psi \circ \varphi(a_n), \psi(b_1),\dots,\psi(b_p))$ est satisfaite dans M, et comme $\psi \circ \varphi = I$, on a le résultat.

Dans ce cas, le 3) du théorème 1 peut s'écrire :

Pour tout Γ-comorphisme $\psi : M \longrightarrow N$, il existe un Γ-morphisme

$$\psi : N \longrightarrow M \quad \text{tel que} \quad \psi \circ \varphi = I_M.$$

Un homomorphisme surjectif étant un morphisme positif, on retrouve ainsi facilement le résultat :

Proposition 9.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) M est positivement compacte.

2) M est atomique compacte.

3) M est un retract de toute ultrapuissance de M.

BIBLIOGRAPHIE

1 BELL J.L. et SLOMSON A.B. Models and ultraproducts North Holland.

2 FRAYNE T., MOREL A. et SCOTT D. Reduced direct products
Fund. Math. (1962), 51, 195-228.

3 KEISLER H.J. Theory of models with generalized atomic formulas
J.S.L. Vol. 25 n° 1, 1-26.

4 SHOENFIELD J.R. Mathematical logic addison, Worley publishing company.

5 WEGLORZ B. Equationally compact algebras Fund. Math., 59, 289-298.