

JEAN PELLAUMAIL

**Formule de Ito dans le cas non continu**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1973, fascicule 3

« Séminaires de probabilité », , p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1973\\_\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__3_1_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE ITO  
DANS LE CAS NON CONTINU

Par J. PELLAUMAIL

I.N.S.A. et Laboratoire de Probabilités - ERA 250 C.N.R.S. RENNES

RESUME :

On prouve la formule de Ito pour un processus réel non continu par une méthode plus directe que celle utilisée en [1] : cette méthode met mieux en évidence le rôle de la variation quadratique.

INTRODUCTION

La formule de Ito est bien connue. Dans [1], une "formule de Ito" est prouvée pour un processus non nécessairement à trajectoires continues. Nous donnons ici une démonstration de cette formule dans ce cas en utilisant une méthode totalement différente de celle de [1]. Cette méthode n'utilise pas la décomposition de Doob-Meyer ; par contre, elle utilise la construction vectorielle de l'intégrale stochastique (cf. [2] ou [3]) et met mieux en évidence le rôle de la variation quadratique. Elle généralise la méthode utilisée en [3] - 1-E-5. La principale simplification provient de ce que l'on dispose d'un théorème de convergence dominée. Pour alléger la présentation, on s'est limité à un processus réel mais l'extension à un processus à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est immédiate.

Données générales

*Pour toute cette étude, on se donne :*

- un ensemble des temps  $T = [0, 1]$
- un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de  $\mathcal{F}$ .

Par convention et abus de langage :

- si  $V$  est la partie vide de  $T$ , on pose  $\inf. \{t : t \in N\} = 1$
- quand on parlera de processus adapté, temps d'arrêt, etc... ce sera toujours par rapport à la base de processus  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ .

### PROCESSUS LOCALEMENT DE REPARTITION

Rappelons qu'on dit qu'un processus cadlag  $(X_t)_{t \in T}$  est localement de répartition en moyenne d'ordre deux (cf. [2] ou [3]) s'il existe une suite  $(\sigma(n))_{n > 0}$  de temps d'arrêt qui croit P-p.s. vers 1 et telle que, pour tout  $n$ , le processus  $(X_{t \wedge \sigma(n)})_{t \in T}$  induit une mesure stochastique définie sur la tribu des prévisibles et  $\sigma$ -additive pour la topologie de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Il revient au même de dire que le processus cadlag  $(X_t)_{t \in T}$  est une quasi-martingale locale ou encore de dire que le processus cadlag  $(X_t)_{t \in T}$  est la somme d'un processus P-p.s. à variation bornée par trajectoires et d'une martingale locale. Nous n'utiliserons pas ces équivalences dans la suite. Par contre, nous utiliserons, au lemme 1, le fait, prouvé directement en 1-E-4 de [3], qu'un processus de répartition en moyenne d'ordre deux est la somme d'un processus croissant et d'une martingale.

#### LEMME 1

Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus cadlag localement de répartition en moyenne d'ordre deux ; pour presque toute trajectoire  $\omega$ , la famille  $\{(X_t - X_{t-})^2(\omega)\}_{t \in T}$  est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus  $U(t)$  croissant continu à droite en posant  $U(t) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})^2$ . De plus, si  $f$  est une fonction deux fois continûment dérivable, pour presque toute trajectoire  $\omega$ , la famille

$\{[f(X_t) - f(X_{t^-}) - (X_t - X_{t^-}) \cdot f'(X_{t^-})]\}_{t \in T}$  est sommable

donc on peut définir, par trajectoires, un processus  $Q(t)$  à variation bornée continu à droite en posant

$$Q(t) = \sum_{s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - (X_s - X_{s^-}) \cdot f'(X_{s^-})]$$

Preuve :

Par localisation, il suffit de prouver le lemme pour un processus de répartition en moyenne d'ordre deux, c'est à dire (cf. 1-B-4 de [3]) pour la somme d'un processus croissant  $A_t$  et d'une martingale  $M_t$ . En localisant à nouveau, on peut supposer que cette martingale est de carré intégrable, et que  $(A_t)$  et  $(M_t)$  sont uniformément bornés par  $a$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n, \text{ soit } H_n &= \sum_{k=0}^{2^n-1} (X_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - X_{k \cdot 2^{-n}})^2 \\ &= \sum (M_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - M_{k \cdot 2^{-n}})^2 + \sum (A_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - A_{k \cdot 2^{-n}}) (2 \cdot M_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - 2 \cdot M_{k \cdot 2^{-n}} \\ &\quad + A_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - A_{k \cdot 2^{-n}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a donc : } E(H_n) &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} E[(M_{(k+1) \cdot 2^{-n}} - M_{k \cdot 2^{-n}})^2] + 5 a \cdot E(A_1 - A_0) \\ &\leq E(M_1^2 - M_0^2) + 5 a \cdot E(A_1 - A_0) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sum_{t \in T} (X_t - X_{t^-})^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n = H$$

où  $H$  est une variable aléatoire intégrable ce qui prouve le début du lemme.

D'après la formule de Taylor, pour tout  $t$  et tout  $\omega$ , il existe

$$R_t(\omega) \in [X_{t^-}(\omega), X_t(\omega)] \quad \text{tel que}$$

$$f(X_t) - f(X_{t^-}) - (X_t - X_{t^-}) \cdot f'(X_{t^-}) = \frac{1}{2} \cdot (X_t - X_{t^-})^2 \cdot f''(R_t(\omega))$$

mais  $|f''(R_t(\omega))| \leq \sup_{|u| \leq a} |f''(u)| \leq b$  ce qui prouve la deuxième partie du lemme

LEMME 2

Soit  $D$  un ensemble dénombrable dense dans  $T$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonction réelles définies sur  $T$ . On suppose que  $g$  est cadlag, que les points de discontinuités de  $g$  appartiennent à  $D$  et que  $f$  est croissante continue à droite. Soit  $(f_n)_{n>0}$  une suite de fonctions croissantes continues à droites qui converge vers  $f$  sur  $D$ .

$$\text{Alors, } \int_0^1 g \cdot df_n \text{ converge vers } \int_0^1 g \cdot df.$$

Preuve :

Ce lemme se prouve comme le lemme analogue sur la convergence faible ; il suffit de noter qu'une fonction  $g$  cadlag est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'intervalles d'extrémités appartenant à  $D$ .

LEMME 3

Soient  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  deux processus cadlag réels, le processus  $(X_t)$  étant continu à gauche et intégrable par rapport au processus  $(Y_t)$ .

Soit  $(Z_t)$  le processus cadlag défini par  $Z_t = \int_{[0,t]} X_u \cdot dY_u$ . Pour tout temps d'arrêt  $\sigma$ , on a  $Z_\sigma - Z_{\sigma-} = X_\sigma \cdot (Y_\sigma - Y_{\sigma-})$ .

Preuve :

Pour tout  $n > 0$ , on définit la suite de temps d'arrêt  $(\sigma(n,k))_{k \geq 0}$  par récurrence par  $\sigma(n,0) = 0$  et

$$\sigma(n, k+1) = \inf. \{ t : |X_t - X_{\sigma(n,k)}| > \frac{1}{n} \}$$

Soit  $X_t^n$  le processus prévisible défini sur  $] \sigma(n, k), \sigma(n, k+1) ]$   
 par  $X_t^n = X_{\sigma(n, k)}$ . Soit  $Z_t^n$  le processus cadlag défini par  $Z_t^n = \int_{]0, t]} X_u^n \cdot dY_u$

La suite de processus  $(X_t^n)$  converge uniformément vers le processus  $X_t$  donc, (théorème 4 de [2]), on peut trouver une application  $f$  croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que la suite de processus  $Z_t^{f(n)}$  converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers le processus  $Z_t$ ; or, il résulte immédiatement de la définition de l'intégrale stochastique que  $Z_{\sigma}^{f(n)} - Z_{\sigma-}^{f(n)} = X_{\sigma}^{f(n)} \cdot (Y_{\sigma} - Y_{\sigma-})$ .

On en déduit le lemme par passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini.

FORMULE DE ITO (Théorème)

Soit  $T = [0, 1]$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P, (\mathcal{G}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T})$  un processus réel cadlag localement de répartition en moyenne d'ordre deux. Soient  $U(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $V(t)$  et  $S(t)$  les processus cadlag définis par :

$$U(t) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})^2$$

$$Q(t) = \sum_{s \leq t} [ f(X_s) - f(X_{s-}) - (X_s - X_{s-}) \cdot f'(X_{s-}) ]$$

$$V(t) = X_t^2 - X_0^2 - 2 \cdot \int_{]0, t]} X_{u+} \cdot dX_u$$

$$S(t) = V(t) - U(t)$$

Alors les processus  $U(t)$ ,  $V(t)$  et  $S(t)$  sont des processus croissants,  $S(t)$  est à trajectoires continues et  $Q(t)$  est à variation bornée. De plus, pour toute fonction  $f$  deux fois continûment dérivable, on a :

$$f(X_t) - f(X_0) \stackrel{P-p.s.}{=} Q(t) + \int_{]0, t]} f'(X_{u-}) \cdot dX_u + \frac{1}{2} \int_{]0, t]} f''(X_{u-}) \cdot dS_u$$

la première intégrale étant une intégrale stochastique locale et la seconde pouvant être calculée par trajectoires.

Preuve :

- a) Les processus U, Q et S sont bien définis d'après le lemme 1.
- b) De plus, par localisation, on peut se ramener au cas où  $(X_t)$  est uniformément borné ce que nous supposons désormais. Nous décomposerons la démonstration en plusieurs étapes.
- c) Pour tout  $n > 0$ , soit  $(\sigma(n, k))_{k \geq 0}$  la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par  $\sigma(n, 0) = 0$  et

$$\sigma(n, k+1) = \inf. \{ t : |X_t - X_{\sigma(n, k)}| > \frac{1}{2n^2} \}$$

Pour tout  $n > 0$ ,  $\sigma(n, k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$  puisque  $(X_t)$  n'admet pas de discontinuité oscillatoire.

Pour tout  $n > 0$ , soit  $V^n(t)$  le processus défini, pour t élément de  $[\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$ , par :

$$V^n(t) = \sum_{j=0}^k [X_{\sigma(n, j+1)} - X_{\sigma(n, j)}]^2$$

- d) Nous allons d'abord montrer que la suite de variables aléatoires  $(V_n(1))_{n > 0}$  converge dans  $L_1$  vers  $V_1$ .

Notons que ceci est prouvé en 1-E-4 de [ ] mais nous reproduisons cette étape de la démonstration pour la commodité du lecteur.

On a :

$$V^n(1) = \sum_{k=0}^{\infty} [X_{\sigma(n, k+1)}^2 - X_{\sigma(n, k)}^2] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (X_{\sigma(n, k+1)} - X_{\sigma(n, k)}) \cdot X_{\sigma(n, k)}$$

Soit  $Z^n(t)$  le processus prévisible défini sur  $]\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$  par  $Z^n(t) = X_{\sigma(n, k)}$

On a : 
$$V^n(1) = X_1^2 - X_0^2 - 2 \cdot \int_{]0,1]} Z^n(u) \cdot dX_u$$

Or la suite de processus  $Z^n(t)$  converge (uniformément), quand  $n$  tend vers l'infini, vers le processus  $X_{u-}$  donc (convergence dominée)

$$\int_{]0,1]} Z^n(u) \cdot dX_u \text{ converge dans } L_2 \text{ vers } \int_{]0,1]} X_{u-} \cdot dX_u$$

donc  $V^n(1)$  converge de même vers  $V(1)$ .

La variable aléatoire  $V(1)$  est donc positive (P-p.s.) comme limite de variables aléatoires positives.

e) On prouverait, de même, que pour tout couple  $(s,t)$  d'éléments de  $T$  avec  $s < t$ ,  $V_t - V_s \geq 0$ , donc le processus continu à droite  $(V_t)_{t \in T}$  est croissant à l'indistinguabilité près.

f) De plus, on prouverait comme au d), que, pour tout temps d'arrêt  $\sigma$   $V_\sigma^n$  converge dans  $L_1$  vers  $V_\sigma$  quand  $n$  tend vers l'infini. En utilisant le procédé diagonal, on peut donc trouver une application croissante  $g$  de  $N$  dans  $N$  telle que, pour tout rationnel  $t$  et tout temps d'arrêt  $\sigma(n,k)$ ,  $V_t^{g(n)}(\omega)$  (resp.  $V_{\sigma(n,k)}^{g(n)}(\omega)$ ) converge vers  $V_t(\omega)$  (resp.  $V_{\sigma(n,k)}(\omega)$ ), quand  $n$  tend vers l'infini sauf sur un ensemble  $H$  de mesure nulle (qui ne dépend pas de  $t$ ). Notons que, à la fin de la démonstration de [ ] - 1-E-5, il fallait évidemment, comme ici, considérer une sous-suite et non la suite initiale.

g) Pour tout  $n$  et  $k$ , soit :

$$A(n,k) = \left\{ \omega : \left| X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)-} \right| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$B(n,k) = \Omega \setminus A(n,k)$$

$$Z_{n,k} = X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{B(n,k)} + X_{\sigma(n,k)-} \cdot 1_{A(n,k)}$$



De plus, pour tout  $n > 0$ , soit  $U^n(t)$  (resp.  $W^n(t)$ ) le processus défini sur  $[\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)[$ , par

$$U^n(t) = \sum_{j=1}^k (x_{\sigma(n,j)} - z_{n,j})^2 = \sum_{j=1}^k (x_{\sigma(n,j)} - x_{\sigma(n,j)-})^2 \cdot 1_{A(n,k)}$$

$$W^n(t) = \sum_{j=1}^k [x_{\sigma(n,j)} - x_{\sigma(n,j-1)}]^2 \cdot 1_{A(n,k)}$$

Si  $\omega \in A(n,k)$  et si  $t = \sigma(n,k)(\omega)$ , il existe un entier  $k'$  tel que  $\omega \in A(n+1,k')$  et  $t = \sigma(n+1,k')(\omega)$  donc  $U^n(t)$  converge en croissante vers  $U(t)$ .

De plus, sur  $A(n,k)$ ,

$$|x_{\sigma(n,j-1)} - x_{\sigma(n,j)-}| < \frac{1}{n^2} \quad \text{et}$$

$$|x_{\sigma(n,j)} - x_{\sigma(n,j)-}| > \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } |W^n(t) - U^n(t)| < \frac{2}{n} \cdot U^n(t)$$

ce qui montre que la suite de processus  $(W^n(t))_{n>0}$  converge vers le processus  $U(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Soit  $S^n(t)$  le processus défini sur  $[\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)[$  par

$$\begin{aligned} S^n(t) &= \sum_{j=1}^{k+1} [x_{\sigma(n,j)} - x_{\sigma(n,j-1)}]^2 \cdot 1_{B(n,j)} \\ &= V^n(t) - W^n(t) + [x_{\sigma(n,k)} - x_{\sigma(n,k-1)}]^2 \cdot 1_{B(n,k)} \end{aligned}$$

Ce qui précède et le f) montre que, sauf sur  $H$ , la suite  $S^{g(n)}$  converge sur les rationnels et les temps d'arrêt  $\sigma(n,k)$  vers  $V(t) - U(t) = S(t)$

h) Pour tout  $n$ , on a :

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{h>0} [f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})] (1_{A(n,k)} + 1_{B(n,k)})$$

D'après la formule de Taylor, pour tout  $n, k$ , et  $\omega$ , il existe  $R_{n,k}(\omega) \in [X_{\sigma(n,k)}, X_{\sigma(n,k+1)}]$  tel que

$$f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)}) = [X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}] f'(X_{\sigma(n,k)}) + \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 \cdot f''(R_{n,k})$$

(en fait, l'identité qui précède ne sera utilisée que sur  $B(n,k)$ ).

$$\text{On a donc : } f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k>0} \left\{ \sum_{i=1}^4 a_{n,k}^i \right\} \text{ avec}$$

$$a_{n,k}^1 = (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) \cdot f'(X_{\sigma(n,k)})$$

$$a_{n,k}^2 = \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 \cdot f''(X_{\sigma(n,k)}) \cdot 1_{B(n,k)}$$

$$a_{n,k}^3 = \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 \cdot [f''(R_{n,k}) - f''(X_{\sigma(n,k)})] \cdot 1_{B(n,k)}$$

$$a_{n,k}^4 = \left[ - (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) f'(X_{\sigma(n,k)}) + f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)}) \right] \cdot 1_{A(n,k)}$$

On se propose, maintenant, de montrer que  $\sum_k a_{n,k}^i$  converge, pour  $1 \leq i \leq 4$ , quand  $n$  tend vers l'infini.

i) Soit  $Z^n(t)$  le processus prévisible défini, sur  $]\sigma(n,k), \sigma(n,k+1[$ ,

$$\text{par } Z^n(t) = X_{\sigma(n,k)}. \text{ On a } \sum_{k>0} a_{n,k}^1 = \int Z^n(t) \cdot dX_t$$

Or  $Z^n(t)$  converge (uniformément) vers  $X_{u-}$  quand  $n$  tend vers l'infini, donc (convergence dominée)  $\sum_{k>0} a_{n,k}^1$  converge dans  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vers  $\int X_{u-} \cdot dX_u$

j) Puisque l'espace des valeurs de  $X$  est borné,  $f''$  est uniformément continue sur cet espace ; donc  $\forall \epsilon > 0$ , pour  $n$  assez grand,  $|f''(R_{n,k}) - f''(X_{(n,k)})| < \epsilon$  si  $\omega \in B(n,k)$  ; ceci et la fin du g) montre que  $\sum_{k>0} a_{n,k}^3$  converge vers 0 dans  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

k) On a  $\sum_{k>0} a_{n,k}^2 = \int_0^1 f''(X_t) \cdot dS^n(t)$  (cf. la fin du g)).

La fin du g) et le lemme 2 montrent alors que  $\sum_{k>0} a_{g(n),k}^2$  converge, sauf sur  $H$ , vers  $\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 f''(X_{u-}) \cdot dS_u$ .

l) En considérant des sous-suites, on peut déduire de la convergence dans  $L_1$  une convergence presque sûre. On peut donc construire une application croissante  $h$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que, pour  $i=1, 2$  ou  $3$ ,  $\sum_{k>0} a_{h(n),k}^i$  converge P-p.s. quand  $n$  tend vers l'infini.

Enfin,  $\sum_{k>0} a_{n,k}^4$  converge vers  $Q(1)$  d'après le lemme 1 et le fait que la suite  $(K_n)_{n>0}$  de parties de  $\Omega \times T$  est croissante et épuise les sauts de  $X_t$ , en posant  $K_n = \bigcup_{k>0} \{ (t, \omega) : \omega \in A(n,k) \}$  et  $t = \sigma(n,k)(\omega)$

m) Soit  $\sigma$  un temps d'arrêt ; le lemme 3 et la définition de  $S(t)$  montrent que  $S_\sigma = S_{\sigma-}$ . On en déduit que  $S(t)$  est à trajectoires continues ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque :

Dans ce qui précède, la "variation quadratique" est toujours calculée globalement. On peut se demander s'il est possible de la calculer par trajectoires.

B I B L I O G R A P H I E

- [ 1 ] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER - *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales.*  
Séminaire de Probabilités IV - Lecture Notes in Mathematics 124 - Springs Verlag
- [ 2 ] M. METIVIER - *Stochastic integral and vector valued measures*
- [ 3 ] J. PELLAUMAIL - *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer*  
Astérisque - Novembre 73 - Société mathématique de France.