PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. F. NOURRIGAT

Problèmes d'évolution dégénérés d'ordre 2

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 9, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A9_0>

PROBLEMES D'EVOLUTION DEGENERES D'ORDRE 2

par

J.F. NOURRIGAT

On se donne deux espaces de Hilbert V et H tels que :

$$(1) \qquad \begin{cases} V \hookrightarrow H, \ V \text{ dense dans } H, \ H \text{ assimilé à son antidual, donc} \\ \qquad\qquad V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \end{cases}$$

un nombre $T > 0$ et une fonction $A(t) \in C^1([0,T], \mathcal{L}(V,V'))$ telle que :

$$(2) \qquad \begin{cases} \langle A(t)\, u,v \rangle_{V' \times V} = \langle u, A(t)\, v \rangle_{V \times V'} \quad \forall\, t \in [0,T] \quad \forall\, u \text{ et } v \in V \\ \mathrm{Re} \langle A(t)\, v,v \rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|v\|_V^2 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ indépendant de t et v.

On considère, d'autre part, un opérateur différentiel P sur $]0,T[$, d'ordre 2, à coefficients $C^\infty([0,T])$

$$P\, u(t) = t\, u''(t) + a(t)\, u'(t).$$

Nous nous proposons d'étudier le problème de Cauchy pour l'opérateur $Pu(t) + A(t)\, u(t)$. On peut aussi étudier un problème de Sturm-Lionville pour l'opérateur

$$-t\,(1-t)\, u''(t) - a(t)\, u'(t) + A(t)\, u(t)$$

avec données en $t=0$ et $t=1$.

Enonçons le théorème d'existence et d'unicité lorsque le second membre est dans $L^2(0,T\,;H)$.

__Théorème 1.__

Sous les hypothèses (1), (2) et

$$(3) \qquad \mathrm{Re}\, a(o) > 1/2\,,$$

pour tous $f \in L^2(0,T\,;H)$ et $u_o \in V$, il existe un u et un seul tel que

$$(4) \qquad \begin{cases} u \in L^{\infty}(0,T\,;V) \\ Pu \in L^{2}(0,T\,;V') \\ Pu + Au = f \\ u(o) = u_0 \end{cases}$$

Remarque 1 : On peut démontrer l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l} u \in L^{\infty}(0,T\,;V) \\ Pu + Au \in L^{2}(0,T,H) \end{array}\right\} \Longrightarrow u \in \mathscr{C}([0,T],\ V)$$

de sorte que le problème (4) a un sens.

Remarque 2 : La condition (3) est nécessaire pour l'unicité.

Le théorème 1 se démontre par la méthode de Galerkine ; la démonstration est voisine de celle utilisée dans LIONS-MAGENES [1] pour l'équation des ondes.

Introduisons maintenant les espaces intervenant pour la régularité d'ordre k :

$$X_k = \{u \in \mathscr{C}^k([0,T],V) \mid u(0)=0,\ u^{(k+1)},\ tu^{(k+2)} \in L^2(0,T;V')\} \quad k \text{ entier} \geq 0$$
$$Y_k = \{f \in H^k(0,T\,;H) \mid f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.

Si $a(0) + k > 1/2$, pour tout $f \in Y_k$, il existe un $u \in X_k$ et un seul tel que $Pu + Au = f$, et l'on a :

$$\gamma_j u = 0 \quad \text{pour} \quad j \leq k.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS-MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes.