PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. CL. TOUGERON

$\mathcal{G}$-stabilité des germes d'applications différentiables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1
« Séminaires d'analyse », , exp. n° 1, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___1_A1_0>

$\mathcal{G}$-STABILITE DES GERMES D'APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

par

J.Cl. TOUGERON

----

1. Notations et définitions.

1.1. Soient Y un sous-espace d'un espace topologique X ; $\mathcal{G}$ un groupe opérant sur X (i.e. on a une application : $\mathcal{G} \times X \ni (g,x) \longrightarrow g.x \in X$ telle que, $\forall\, g,g',x$: $g'.(g.x) = (g'.g)x$, et telle que pour tout $g \in \mathcal{G}$, $x \longmapsto g.x$ soit continu et donc un homéomorphisme de X sur lui-même). Un point $y \in Y$ est dit $\mathcal{G}$-stable dans Y si $\mathcal{G}.y \cap Y$ est un ouvert de Y. Les points $\mathcal{G}$-stables forment un ouvert de Y. Si cet ouvert est dense dans Y, nous dirons que la $\mathcal{G}$-stabilité (dans Y) est générique. Dans cet article, nous étudions un exemple de $\mathcal{G}$-stabilité.

1.2. Soit Γ un sous-groupe de Lie de dimension q du groupe linéaire $G\ell(p,\mathbb{R})$. Soient $C^r_{o,e}(\mathbb{R}^n,\Gamma) = G_r$ le groupe des germes en 0 des applications g de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans Γ telles que $g(o) = e$; $C^r_o(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = X_r$, l'espace des germes en 0 des applications φ de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$; Dif_r le groupe des germes en 0 des difféomorphismes τ de classe C^r d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tels que $\tau(o) = o$. Si $\varphi \in X_r$, on désigne par $j^r(\varphi)$ le jet d'ordre r de φ à l'origine et l'on note $\hat{X}_r$ l'espace de tous ces jets, φ décrivant X_r. Enfin, on munit X_r de l'unique topologie compatible avec sa structure de groupe additif et telle qu'un système fondamental de voisinages de 0 soit formé des $(j^s)^{-1}(o)$, s fini $\leq$ r.

Les groupes G_r et Dif_r opèrent de manière évidente sur X_r ; si $g \in G_r$, $\tau \in \mathrm{Dif}_r$ et $\varphi \in X_r$, par définition : $g.\varphi = (x \longmapsto g(x).\varphi(x))$ et $\tau.\varphi = \varphi \circ \tau^{-1}$. On a visiblement : $\tau.(g.\varphi) = (g \circ \tau^{-1}).(\tau.\varphi)$. Munissons l'ensemble $\mathcal{G}_r = G_r \times \mathrm{Dif}_r$ de la structure de groupe définie par la multiplication :
$(g',\tau').(g,\tau) = (g'.g \circ \tau'^{-1} , \tau'.\tau)$: il est immédiat que le groupe $\mathcal{G}_r$ opère sur X_r par la formule : $(g,\tau).\varphi = g.(\tau.\varphi)$.

Enfin, on désigne par $\hat{G}_r$ (resp. $\widehat{Dif}_r$) le groupe des jets d'ordre r des éléments de G_r (resp. Dif_r) ; par $\hat{\mathcal{G}}_r$ l'ensemble $\hat{G}_r \times \widehat{Dif}_r$ muni de la structure de groupe quotient de $\mathcal{G}_r$. Visiblement, $\hat{\mathcal{G}}_r$ est un groupe de Lie opérant analytiquement sur $\hat{X}_r$ (on quotiente l'action de $\mathcal{G}_r$ sur X_r).

<u>Définition 1.3</u> : Un jet $\omega \in \hat{X}_s$ est <u>$\mathcal{G}_r$-suffisant dans X_m</u> ($m \geq s$, $m \geq r$) si pour tous $\varphi, \varphi' \in X_m$ tels que $j^s(\varphi) = j^s(\varphi') = \omega$, il existe $(g, \tau) \in \mathcal{G}_r$ tel que $\varphi' = (g, \tau) . \varphi$.

En particulier, s'il en est ainsi, l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_r$ contient ω (considéré comme le germe d'une application polynomiale de d° $\leq$ s).

Avec cette définition, on voit qu'un germe $\varphi \in X_m$ ($m < \infty$) est $\mathcal{G}_r$-stable dans X_m ($r \leq m$) si et seulement si $j^m(\varphi)$ est $\mathcal{G}_r$-suffisant dans X_m. De même, un germe $\varphi \in X_\infty$ est $\mathcal{G}_r$-stable dans X_∞ si et seulement s'il existe $s < \infty$ tel que $j^s(\varphi)$ soit $\mathcal{G}_r$-suffisant dans X_∞.

Dans les paragraphes suivants, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un germe $\varphi \in X_\infty$ soit $\mathcal{G}_\infty$-stable dans X_∞ (§ 2) ; $\mathcal{G}_r$-stable dans X_∞ , $r < \infty$ (§ 4). Dans le paragraphe 3, nous caractérisons les groupes Γ pour lesquels la $\mathcal{G}_\infty$-stabilité dans X_∞ est générique. Enfin, nous terminons par quelques exemples (§ 5).

Ce travail s'inspire de [6]. La plupart des résultats du chapitre II de l'article précité sont des cas particuliers des théorèmes qui suivent ; en outre, ces résultats sont démontrés de manière plus naturelle et plus agréable.

Les entiers n et p sont fixés une fois pour toutes ; aussi n'apparaissent-ils pas dans les notations. En outre, l'indice ∞ sera omis et nous noterons $\mathcal{G}$ au lieu de $\mathcal{G}_\infty$; X au lieu de X_∞ , etc...

2. Critères de $\mathcal{G}$-stabilité dans X.

Soient $\mathcal{E}_r$ l'anneau des germes en 0 des applications de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; $\underline{m}_r$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_r$. Rappelons tout d'abord (cf. [6] , chap. II, corollaire prop. 1, lorsque $r = \infty$) le résultat fondamental suivant ($x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_s)$ sont des systèmes de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^s$ respectivement) :

Lemme 2.1 : *Soit* $f = (f_1,\ldots,f_p)$ *le germe à l'origine d'une application de classe* $C^r (r \geq 3)$ *de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *telle que* $f(o,o) = o$. *Soit* M *l'application* $\mathcal{E}_{r-1}$*-linéaire de* $\mathcal{E}_{r-1}^s$ *dans* $\mathcal{E}_{r-1}^p$ *définie par la matrice jacobienne* $(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x,o),\ldots,\frac{\partial f}{\partial y_s}(x,o))$ *; posons* $\mathcal{J} = \mathrm{Ann}\,(\mathrm{coker}\, M)$.

Si $f(x,o) = M.\,\beta(x)$, *où* $\beta(x)$ *a toutes ses composantes dans* $\mathcal{J}\cdot\underline{m}_{r-2}$, *(en particulier, si* $f(x,o)$ *a toutes ses composantes dans* $\mathcal{J}^2.\underline{m}_{r-2}$*), il existe* $y(x)$ *ayant ses composantes dans* $\mathcal{J}.\mathcal{E}_{r-2} \cap \mathcal{J}.\underline{m}_{r-2}.\mathcal{E}_{r-3}$ *telle que* $f(x,y(x)) = 0$.

Preuve : Par hypothèse, $f(x,o) = M.\sum_{i=1}^{m} \delta_i.\beta^i$, où $\delta_1,\ldots,\delta_m \in \mathcal{J}$ et $\beta^1,\ldots,\beta^m$ ont leurs composantes dans $\underline{m}_{r-2}$. Visiblement, il existe des matrices N_j : $\mathcal{E}_{r-1}{}^p \longmapsto \mathcal{E}_{r-1}{}^s$ telles que $M \circ N_j = \delta_j.I$, pour $j=1,\ldots,m$ (I : matrice unité $p \times p$).

Posons $Z = (Z_1,\ldots,Z_s)$; $Z^i = (Z_1^i,\ldots,Z_s^i)$ pour $i=1,\ldots,m$. Développons par la formule de Taylor le germe d'application $f(x,Z)$ sous la forme :

$$f(x,Z) = f(x,o) + M.Z + \sum_{i,j=1}^{s} g_{ij}\, Z_i\, Z_j$$

où les g_{ij} sont de classe C^{r-2}, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Par substitution :

$$f(x, \sum_{i=1}^{m} \delta_i.Z^i) = f(x,o) + M.\sum_{i=1}^{m} \delta_i.Z^i + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_{ij}(x,Z^1,\ldots,Z^m)\,\delta_i\,\delta_j$$

où les γ_{ij} sont de classe C^{r-2}, 1-plates sur le germe d'ensemble $Z^1 = \ldots\ Z^m = 0$.

On a donc :

$$f(x, \sum_{i=1}^{m} \delta_i Z^i) = f(x,o) + M \cdot \sum_{i=1}^{m} \delta_i (Z^i + \sum_{j=1}^{m} N_j \gamma_{ij} (x, Z^1, \ldots, Z^m))$$

Par le théorème des fonctions implicites ordinaire, on peut résoudre par rapport à $Z^1,\ldots,Z^m$, le système :

$$Z^i + \sum_{j=1}^{m} N_j \gamma_{ij} (x, Z^1, \ldots, Z^m) = y^i \qquad i = 1,\ldots,m$$

et donc, trouver des germes d'applications de classe C^{r-2} : $Y^1(x,y^1,\ldots,y^m)$, $\ldots$, $Y^m(x,y^1,\ldots,y^m)$ tels que :

$$f(x, \sum_{i=1}^{m} \delta_i Y^i) = f(x,o) + M. \sum_{i=1}^{m} \delta_i y^i$$

et $Y^1(x,o,\ldots,o) = \ldots = Y^r(x,o,\ldots,o) = o$.

Ainsi : $f(x, \sum_{i=1}^{m} \delta_i Y^i (x, -\beta^1, \ldots, -\beta^m)) = o$

Visiblement, la solution $y(x) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i Y^i (x, -\beta^1, \ldots, -\beta^m)$ a ses composantes dans $\mathcal{J} . \mathcal{E}_{r-2}$. Mais en outre :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i (Y^i(x, -\beta^1, \ldots, -\beta^m) - Y^i(x,o,\ldots,o))$$

a ses composantes contenues dans l'idéal engendré dans $\mathcal{E}_{r-3}$ par les δ_i et les composantes β^j_k des β^j. Ainsi, $y(x)$ a ses composantes dans $\mathcal{J} . \underline{m}_{r-2} . \mathcal{E}_{r-3}$.

<u>Remarque 2.2</u> : Soit A un anneau commutatif et unitaire, et soit M une application A-linéaire de A^s dans A^p. Soient $\mathcal{J}$ l'annulateur de coker M ; $\mathcal{J}_o$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice M (si $s < p$, $\mathcal{J}_o = o$).

On a visiblement $\mathcal{J}_o \subset \mathcal{J}$ (règle de Cramer pour la résolution d'un système linéaire). Réciproquement, si $\delta \in \mathcal{J}$, on a $\delta . I = M.N$, où N est une matrice : $A^p \longmapsto A^s$ et I est la matrice unité $p \times p$. On a donc : $\delta^p = \det(\delta . I) \in \mathcal{J}_o$. Ainsi : $\mathcal{J}_o \subset \mathcal{J} \subset \sqrt{\mathcal{J}_o}$. En particulier, on peut, dans le lemme, remplacer $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}_o$.

2.3. Soit $A_1,\dots,A_q$ une base sur $\mathbb{R}$ de l'algèbre de Lie du groupe Γ. Posons $A = (A_1,\dots,A_q)$; $y = (y_1,\dots,y_q)$; $< y,A > = y_1A_1 + \dots + y_q A_q$. Les éléments $g \in G_r$ sont les matrices $e^{<y(x),A>}$ où $y(x) \in C^r_{o,o}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, espace des germes en O d'applications de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$, nulles à l'origine ; les éléments $\tau \in \mathrm{Dif}_r$ $(r \geq 1)$ sont les germes d'applications :

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto x+z(x) \in \mathbb{R}^n, \text{ où } z(x) \in C^r_{o,o}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ et } \det\left|I + \frac{\partial z}{\partial x}(o)\right| \neq 0.$$

Avec ce choix de coordonnées, on voit que l'application $O_{\varphi,r} : \mathcal{G}_r \ni (g,\tau) \longmapsto (g,\tau).\varphi \in X_r$ s'identifie à l'application :

$$(y(x),\ z(x)) \longmapsto e^{< y(x),A >} . \varphi(x + z(x)).$$

Soit $\varphi' \in X_r$ et posons :

$$f(x,y,z) = e^{< y,A >} . \varphi(x+z) - \varphi'(x).$$

Appliquons le lemme précédent à f (le point (y,z) de $\mathbb{R}^{q+n}$ remplaçant le point y de $\mathbb{R}^s$). Avec les notations de 2.1 :

$$M(y(x),\ z(x)) = < y(x),\ A > . \varphi(x) + < z(x),\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) >$$

où l'on pose :

$$< z, \frac{\partial\varphi}{\partial x} > = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} .$$

En outre : $f(x,o,o) = \varphi(x) - \varphi'(x)$. Ainsi :

<u>Proposition 2.4</u> : *Soit* $\varphi \in X_r$, $r \geq 3$. *Soit* M_φ *l'application* $\mathcal{E}_{r-1}$*- linéaire :*

$$\mathcal{E}_{r-1}^{\,q+n} \ni (y(x),\ z(x)) \longmapsto < y(x),\ A > \ \varphi(x) + < z(x),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) > \in \mathcal{E}_{r-1}^{\,p}$$ *et*

posons $\mathfrak{J}_\varphi$ = Ann (coker M_φ).

Supposons $\mathfrak{J}_\varphi \neq \mathcal{E}_{r-1}$ *et soit* $\varphi' \in X_r$ *tel que* $\varphi(x) - \varphi'(x) = M_\varphi(y(x),\ z(x))$ *où* $y(x)$ *et* $z(x)$ *ont leurs composantes dans* $\mathfrak{J}_\varphi.\underline{m}_{r-2}$ *(en particulier, ceci est vrai si* $\varphi(x) - \varphi'(x)$ *a ses composantes dans* $\mathfrak{J}_\varphi^{\,2}.\underline{m}_{r-2}$*). Alors* φ' *appartient à l'orbite de* φ *sous l'action du groupe* $\mathcal{G}_{r-2}$.

Preuve : En effet, d'après 2.1, l'équation $f(x,y,z) = o$ admet une solution $(y(x), z(x))$ ayant ses composantes dans $\mathcal{I}_\varphi . \mathcal{E}_{r-2} \cap \mathcal{I}_\varphi . \underline{m}_{r-2} . \mathcal{E}_{r-3}$; puisque $\mathcal{I}_\varphi \subset \underline{m}_{r-1}$, $(y(x), z(x))$ est 1-plat à l'origine.

Remarques :

2.5.1. Nous avons éliminé dans la proposition précédente le cas trivial où M_φ est surjective, i.e. $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{E}_{r-1}$. Dans ce cas, l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_r (r \geq 1)$ contient tous les $\varphi' \in X_r$ tels que $\varphi - \varphi'$ soit 1-plat à l'origine (on applique le théorème des fonctions implicites ordinaire).

2.5.2. On peut, suivant une idée de J. Mather, obtenir la proposition 2.4 en intégrant un champ de vecteurs convenable : on construit une famille continue de transformations (g_t , τ_t) telles que $(g_o , \tau_o) = e$ et $\varphi + t(\varphi' - \varphi) = (g_t , \tau_t).\varphi$ pour tout $t \in [0,1]$ (cf. [3]).

2.5.3. Supposons $r = \infty$. La matrice M_φ s'interprète comme suit. L'application de $\bigoplus_{q+n} \underline{m}$ dans $\bigoplus_{p} \underline{m}$ induite par M_φ est en quelque sorte "l'application linéaire tangente" à O_φ : $\mathcal{G} \ni (g,\tau) \longmapsto (g,\tau).\varphi \in X$ en l'élément neutre. De même, si $s < \infty$, l'application de $\bigoplus_{q+n} \underline{m}/\underline{m}^{s+1}$ dans $\bigoplus_{p} \underline{m}/\underline{m}^{s+1}$ déduite de M_φ , s'identifie à l'application linéaire tangente à $O_{j^s(\varphi)}$: $\hat{\mathcal{G}}_s \ni \gamma \longmapsto \gamma . j^s(\varphi) \in \hat{X}_s$.

Appliquons la proposition 2.4 au cas C^∞. Soit $\mathcal{F}$ l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$. On a une projection évidente : $\mathcal{E}^s \ni \psi \longmapsto \hat{\psi} \in \mathcal{F}^s$ associant à tout germe ψ sa série de Taylor à l'origine. Si $M : \mathcal{E}^s \longmapsto \mathcal{E}^p$ est une application $\mathcal{E}$-linéaire, on note $\hat{M} : \mathcal{F}^s \longmapsto \mathcal{F}^p$, l'application $\mathcal{F}$-linéaire induite par M.

Corollaire 2.6 : *Soit $\varphi \in X$ et soit k la dimension de Krull de $\mathcal{F}/\widehat{\mathcal{I}_\varphi}$ (on suppose $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathcal{E}$). Alors, il existe un système de coordonnées locales de classe C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n$: $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$, et un point φ' appartenant à l'orbite* *de* φ *sous l'action du groupe* G, *tels que* φ' *soit polynomial en* $x'_{k+1},\dots,x'_n$ *à coefficients germes indéfiniment dérivables des variables* $x'_1,\dots,x'_k$.

Preuve : On a dim $\widehat{\mathcal{F}/\underline{m}.\,\mathcal{I}_\varphi^2} = k$. D'après les théorèmes de normalisation et de préparation formels (cf. [2]), il existe des formes linéaires indépendantes $x''_1,\dots,x''_n$ telles que $\widehat{\mathcal{F}/\underline{m}.\,\mathcal{I}_\varphi^2}$ soit un module de type fini sur $\mathcal{F}' = \mathbb{R}\,[[x''_1,\dots,x''_k]]$, engendré sur $\mathcal{F}'$ par un nombre fini de monômes en $x''_{k+1},\dots,x''_n$. D'après le théorème de préparation différentiable (cf. [2]), $\mathcal{E}/\underline{m}.\,\mathcal{I}_\varphi{}^2$ est engendré sur l'anneau $\mathcal{E}'$ des germes de fonctions C^∞ à valeurs réelles en les variables $x''_1,\dots,x''_k$, par les mêmes monômes. Il en résulte qu'il existe $\varphi' \in X$ tel que φ' soit polynomial en $x''_{k+1},\dots,x''_n$ à coefficients dans $\mathcal{E}'$ et tel que $\varphi - \varphi'$ ait toutes ses composantes dans $\underline{m}.\,\mathcal{I}_\varphi{}^2$. D'après 2.4, il existe $\tau \in$ Dif et $g \in G$ tels que $\varphi = (g.\varphi') \circ \tau$. Il suffit alors de choisir le système de coordonnées locales $x' = \tau(x'')$.

Corollaire 2.7 : *Soit* $\varphi \in X$ *tel que* $\underline{m} \supset \mathcal{I}_\varphi \supset m^s$ $(s < \infty)$. *Alors le jet* $j^{2s}(\varphi)$ *est* $\mathcal{G}$*-suffisant dans* X.

Preuve : Soit $\varphi' \in X$ tel que $j^{2s}(\varphi) = j^{2s}(\varphi')$. Le germe $\varphi - \varphi'$ a ses composantes dans $\underline{m}^{2s+1} \subset \underline{m}.\,\mathcal{I}_\varphi{}^2$ et donc, d'après 2.4, φ' appartient à l'orbite de φ sous l'action du groupe $\mathcal{G}$.

Le théorème suivant caractérise les éléments de X, $\mathcal{G}$-stables dans X :

Théorème 2.8 : *Soit* $\varphi \in X$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) φ *est* $\mathcal{G}$*-stable dans* X.

(2) $\dim_{\mathbb{R}}$ coker $M_\varphi < \infty$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}}$ coker $\widehat{M}_\varphi < \infty$.

(4) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}/\mathcal{I}_\varphi < \infty$, *i.e.* $\mathcal{I}_\varphi$ *contient une puissance de* $\underline{m}$.

(5) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}/\widehat{\mathcal{I}}_\varphi < \infty$, *i.e.* $\widehat{\mathcal{I}}_\varphi$ *contient une puissance de* $\underline{m}$.

(6) Il existe un entier h *tel que :* $\dim_{\mathbb{R}}(\text{coker } \widehat{M}_\varphi / \widehat{\underline{m}}^{h+1}.\text{coker } \widehat{M}_\varphi) \leq h$

(7) Il existe un entier h *tel que :* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}/\widehat{\mathcal{I}}_\varphi + \widehat{\underline{m}}^{h+1}) \leq h$.

Preuve : L'équivalence des conditions (2), (3), (4), (5) est évidente et laissée au lecteur. Visiblement, ces conditions impliquent (6) et (7). La réciproque est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.9 : *Soit* M *un module de type fini sur un anneau local* A *d'idéal maximal* $\underline{m}$. *Supposons* $\underline{m}$ *de type fini. Si la longueur de* $M/\underline{m}^{h+1}.M$ *est* $\leq h$, *on a* $\underline{m}^h.M = 0$ *et donc* long $(M) \leq h$.

Preuve : On a $\underline{m}^h.M = 0$, car sinon, on aurait des inclusions strictes : $M \supset \underline{m}.M \supset \ldots \supset \underline{m}^h.M \supset \underline{m}^{h+1}.M$ (lemme de Nakayama) et donc long $(M/\underline{m}^{h+1}.M) \geq h+1$, ce qui contredirait l'hypothèse.

Achevons la preuve de 2.8. L'implication (4) $\Longrightarrow$ (1) résulte de 2.7. Démontrons (1) $\Longrightarrow$ (6). Par hypothèse, il existe un entier r tel que $j^r(\varphi)$ soit $\mathcal{G}$-suffisant dans X. Si $s \geq r$, l'orbite de $j^s(\varphi)$ dans $\hat{X}_s$ sous l'action du groupe de Lie $\hat{\mathcal{G}}_s$ contient donc tous les jets ω tels que $j^r(\omega) = j^r(\varphi)$, i.e. contient une sous-variété affine de $\hat{X}_s$ de codimension $\leq h' = \dim_{\mathbb{R}} \hat{X}_r$. D'après un résultat bien connu (cf. lemme 2.10), le conoyau de l'application linéaire tangente au point e à $O_{j^s(\varphi)} : \hat{\mathcal{G}}_s \ni \gamma \longmapsto \gamma.j^s\varphi \in \hat{X}_s$ est de dimension $\leq h'$. D'après 2.5.3, ceci entraîne l'inégalité :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{coker} \hat{M}_\varphi / \hat{\underline{m}}^{s+1}. \operatorname{coker} \hat{M}_\varphi) \leq p+h' = h.$$

Faisant s=h dans l'inégalité précédente, on obtient (6).

Nous avons utilisé le lemme suivant :

Lemme 2.10 : *Soient* $\mathcal{G}$ *un groupe de Lie ;* X *une variété de classe* C^1. *Soit :* $\mathcal{G} \times X \ni (g,x) \longmapsto g.x \in X$ *une application de classe* C^1 *telle que,* $\forall g,g',x$: $g'.(g.x) = (g'.g).x$. *Soit* h *le rang de l'application linéaire tangente en* e *à* $O_x : \mathcal{G} \ni g \longmapsto g.x \in X$. *Alors, l'orbite* $\mathcal{G}.x$ *du point* x *est une sous-variété de classe* C^1*, de dimension* h, *de* X *(par sous-variété, nous entendons l'image d'une immersion injective).*

Preuve : Par homogénéité, le rang de l'application linéaire tangente à O_x en tout point $g \in \mathcal{G}$ est égal à h. Il suffit alors d'appliquer le théorème du rang constant.

Interprétons la matrice M_φ à l'aide de la notion de transversalité. Rappelons tout d'abord la définition suivante (les applications et variétés sont au moins de classe C^1 ; on note $T_x(X)$ l'espace tangent au point x à une variété X) :

Définition 2.1.1 : Une application $\underset{\sim}{\varphi}$ d'une variété X dans une variété Y est transverse en un point $x \in X$ sur une sous-variété Z de Y si : $\underset{\sim}{\varphi}(x) \notin Z$ ou $\underset{\sim}{\varphi}(x) \in Z$ et $\underset{\sim}{\varphi}_*(T_x(X)) + T_{\underset{\sim}{\varphi}(x)}(Z) = T_{\underset{\sim}{\varphi}(x)}(Y)$ ($\underset{\sim}{\varphi}_*$ est l'application linéaire tangente à $\underset{\sim}{\varphi}$). Si $\underset{\sim}{\varphi}$ est transverse sur Z en tout point $x \in X$, nous dirons simplement que $\underset{\sim}{\varphi}$ est transverse sur Z.

Soit $\underset{\sim}{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ un représentant du germe $\varphi^{(1)}$. L'espace tangent en $\underset{\sim}{\varphi}(x)$ à l'orbite de $\underset{\sim}{\varphi}(x)$ sous l'action du groupe Γ est engendré par $A_1 . \underset{\sim}{\varphi}(x), \dots, A_q . \underset{\sim}{\varphi}(x)$; de même, $\underset{\sim}{\varphi}_*(T_x(\mathbb{R}^n))$ est engendré par $\frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial x_n}(x)$. Donc, si $M_{\underset{\sim}{\varphi}}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont $A_1 . \underset{\sim}{\varphi}, \dots, A_q . \underset{\sim}{\varphi}$, $\frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial x_n}$ (ainsi $M_{\underset{\sim}{\varphi}}$ induit M_φ à l'origine) :

2.12. La matrice $M_{\underset{\sim}{\varphi}}(x)$ est de rang p si et seulement si $\underset{\sim}{\varphi}$ est transverse en x à l'orbite $\Gamma . \underset{\sim}{\varphi}(x)$ de $\underset{\sim}{\varphi}(x)$.

Supposons φ analytique et soit $\tilde{\varphi} \in C^\omega_{0,0}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ le complexifié de φ. De même, soit $\tilde{\Gamma}$ le sous-groupe de Lie de $G\ell(p,C)$ complexifié de Γ (si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de Γ, celle de $\tilde{\Gamma}$ est $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). On déduit facilement de 2.8, le :

Corollaire 2.13 : *Si φ est analytique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe W voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\underset{\sim}{\tilde{\varphi}}|W\setminus\{o\}$ soit transverse sur les orbites de tous les points de $\mathbb{C}^p$ sous l'action du groupe $\tilde{\Gamma}$.

(2) φ est $\mathcal{G}$-stable dans X.

<u>Preuve</u> : Soit $\mathcal{J}_\varphi$ l'idéal engendré dans $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ par les mineurs d'ordre p de la matrice M_φ. La condition (1) signifie (d'après 2.12, en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$ et Γ par $\tilde{\Gamma}$) que l'idéal $\tilde{\mathcal{J}}_\varphi = \mathcal{J}_\varphi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ admet $\{o\}$ ou $\emptyset$ comme germe de zéros. D'après le Nullstellensatz, cela signifie que $\mathcal{J}_\varphi$ contient une puissance de l'idéal maximal de $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$, donc que son complété $\hat{\mathcal{J}}_\varphi = \hat{\mathfrak{I}}_\varphi$ contient une puissance de $\hat{\underline{m}}$.

3. $\mathcal{G}$-Stabilité dans X : situation générique.

3.1. Soit $y = (y_1,\dots,y_p)$; $y^1 = (y_1^1,\dots, y_p^1)$; ... ; $y^n = (y_1^n,\dots, y_p^n)$ un système de coordonnées de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{p+np}$. Soient $\tilde{P}$ la projection : $\mathbb{C}^{p+np} \ni (y,y^1,\dots,y^n) \longmapsto y \in \mathbb{C}^p$; P la projection de $\mathbb{R}^{p+np}$ sur $\mathbb{R}^p$ induite par $\tilde{P}$. Si $\varphi \in X$, φ analytique, on note $^1\tilde{\varphi}$ le germe d'application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{p+np}$: $x \longmapsto (\tilde{\varphi}(x), \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_1}(x),\dots, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_n}(x))$; de même, si $\varphi \in X$, on note $^1\varphi$ le germe d'application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{p+np}$: $x \longmapsto (\varphi(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x),\dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x))$ (donc : $\tilde{P} \circ {}^1\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$; $P \circ {}^1\varphi = \varphi$).

Soit $\tilde{\Sigma}_i$ (resp. Σ_i) la sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) formée des points y tels que le rang de la matrice $(A_1.y,\dots,A_q.y)$ soit $\leq p-i$. Evidemment, $\tilde{\Sigma}_o \supset \tilde{\Sigma}_1 \supset \dots \supset \tilde{\Sigma}_p \supset \tilde{\Sigma}_{p+1} = \emptyset$; $\Sigma_o \supset \Sigma_1 \supset \dots \supset \Sigma_p \supset \Sigma_{p+1} = \emptyset$. Chaque ensemble $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$) est la réunion des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ (resp. $\Gamma.y$) de codimension i dans $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$), d'après 2.10.

Soit $\tilde{\mathfrak{I}}$ (resp. $\mathfrak{I}$) l'idéal engendré dans $\mathbb{C}[y ; y^1;\dots; y^n]$ (resp. $\mathbb{R}[y ; y^1;\dots; y^n]$ par les mineurs d'ordre p de la matrice $M = (A_1.y,\dots,A_q.y ; y^1,\dots,y^n)$. Soit $\tilde{\Sigma}$ (resp. Σ) la sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{C}^{p+np}$ (resp. $\mathbb{R}^{p+np}$) formée des zéros de $\tilde{\mathfrak{I}}$ (resp. $\mathfrak{I}$). Visiblement, $\mathfrak{I}_\varphi$ est l'idéal $({}^1\varphi)^*(\mathfrak{I})$ engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les $P \circ {}^1\varphi$, où $P \in \mathfrak{I}$.

---

(1) Plus généralement, à tout germe d'application φ , on associera un représentant noté $\underset{\sim}{\varphi}$ et choisi une fois pour toutes.

3.2. Pour tout $r < \infty$, soit $\hat{Y}_r$ une sous-variété algébrique réelle (resp. un sous-ensemble semi-algébrique) de $\hat{X}_r$, telle que pour tout $s \geq r$: $\pi_{r,s}(\hat{Y}_s) \subset \hat{Y}_r$ (on note $\pi_{r,s} : \hat{X}_s \longmapsto \hat{X}_r$; $\pi_r : \hat{X} \longmapsto \hat{X}_r$ les projections canoniques). Soit $\hat{Y} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \pi_r^{-1}(\hat{Y}_r)$ la limite projective des $\hat{Y}_r$: nous dirons que $\hat{Y}$ est une <u>sous-variété algébrique</u> (resp. <u>un sous-ensemble semi-algébrique</u>) de $\hat{X}$ et nous poserons : $\operatorname{codim}(\hat{Y}) = \lim_{r \to \infty} \operatorname{codim}(\hat{Y}_r)$. Visiblement, la codimension de la variété algébrique Y est infinie si et seulement si la condition suivante est satisfaite:

(3.2.1) $\forall\, r \in \mathbb{N}$ et $\forall\, \omega_r \in \hat{X}_r$, il existe $\omega \in \pi_r^{-1}(\omega_r) \cap (\hat{X} \setminus \hat{Y})$.

<u>Lemme 3.3</u> : *Soit* $\mathcal{J}$ *un idéal de* $\mathbb{R}[y\, ;\, y^1;\ldots;y^n]$. *L'ensemble* $Y = \{\varphi \in X \mid ({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})$ *ne contient pas une puissance de* $\underline{m}\}$ *est l'image réciproque par la projection* $j : X \longmapsto \hat{X}$ *d'une sous-variété algébrique* $\hat{Y}$ *de* $\hat{X}$.

En outre, $\operatorname{codim}(\hat{Y}) = \infty$ *si et seulement si* $\operatorname{ht}(\mathcal{J}) \geq n$.

<u>Preuve</u> : Soit $\hat{Y}_{h+1}$ l'ensemble des $\omega \in \hat{X}_{h+1}$ tels que

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} / \left(\widehat{({}^1\omega)^*(\mathcal{J})} + \hat{\underline{m}}^{h+1} \right) > h$$

Visiblement, $\forall\, \varphi \in (j^{h+1})^{-1}(\omega)$, on a :

$$\widehat{({}^1\omega)^*(\mathcal{J})} + \hat{\underline{m}}^{h+1} = \widehat{({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})} + \hat{\underline{m}}^{h+1} .$$

Il résulte de là et de 2.9 que : $Y = j^{-1}(\hat{Y})$ où $\hat{Y} = \varprojlim \hat{Y}_{h+1}$.

Un jet $\omega \in \hat{Y}_{h+1}$ si et seulement si :

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(({}^1\omega)^*(\mathcal{J}) + \hat{\underline{m}}^{h+1})/\hat{\underline{m}}^{h+1} \right) < h' = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}/\hat{\underline{m}}^{h+1} - h$$

i.e. si et seulement si le rang d'un système linéaire à coefficients polynômes en ω est $< h'$. Ceci entraîne que $\hat{Y}_{h+1}$ est algébrique.

Vérifions enfin la dernière assertion du lemme. Soient Ω l'ensemble des zéros de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}^{p+np}$; $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des zéros de $\hat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^{p+np}$.

Supposons que ht $(\mathcal{J}) < n$; cela signifie qu'il existe un point $\xi \in \mathbb{R}^{p+np}$ tel que $\operatorname{codim}_{\xi} (\tilde{\Omega}) < n$. Considérons l'ensemble des $\varphi \in X$ tels que φ soit algébrique et ${}^1\tilde{\varphi}(o) = \xi$: les $\hat{\varphi}$ forment un ensemble dense dans un ouvert de $\hat{X}$. Or, pour un tel φ :

$$\operatorname{codim}_o \, ({}^1\tilde{\varphi})^{-1}(\tilde{\Omega}) \leq \operatorname{codim}_{\xi}(\tilde{\Omega}) < n \text{ (cf. corollaire 3.5)}$$

i.e ht $(\widehat{({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})}) > n$, i.e. $\hat{\varphi} \in \hat{Y}$. Il en résulte que la codimension de $\hat{Y}$ dans $\hat{X}$ est finie.

Supposons enfin que ht $(\mathcal{J}) \geq n$, i.e. codim $(\tilde{\Omega}) \geq n$. Démontrons que la codimension de $\hat{Y}$ dans $\hat{X}$ est infinie. Soit $\omega \in \hat{X}_r$; il suffit, d'après (3.2.1), de trouver un $\varphi \in X \setminus Y$ tel que $j^r(\varphi) = \omega$. Nous chercherons un φ polynomial de la forme :

$$\omega + \sum_{|\mu|=r+1,r+2} \alpha_\mu \, x^\mu \; , \; \alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1} \, ,\ldots, \, \alpha_{\mu,p}) \ni \mathbb{R}^p \; .$$

Soit A l'espace vectoriel complexe admettant les $a_\mu = (a_{\mu,1},\ldots,a_{\mu,p})$, $|\mu| = r+1,r+2$, comme système de coordonnées. Si $a = (a_\mu) \in A$, posons $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}}_a = \omega + \Sigma \, a_\mu \, x^\mu$, et soit ϕ l'application polynomiale :

$$A \times \mathbb{C}^n \ni (a,x) \longmapsto {}^1\tilde{\underset{\sim}{\varphi}}_a(x) = \left(\tilde{\underset{\sim}{\varphi}}_a(x), \frac{\partial \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}_a}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}_a}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{C}^{p+np}.$$

Nous devons trouver α réel tel que le germe $({}^1\tilde{\varphi}_\alpha)^{-1}(\tilde{\Omega})$ soit $\{o\}$ ou $\emptyset$.

On peut évidemment supposer $r \geq 1$. Le point $\xi = {}^1\tilde{\varphi}_a(o) = \phi\,(a,o)$ est alors indépendant de a et réel. Si $\xi \notin \tilde{\Omega}$, tout α réel est solution (le germe $({}^1\tilde{\varphi}_\alpha)^{-1}(\tilde{\Omega})$ est alors égal à $\emptyset$).

Supposons donc que $\xi \in \tilde{\Omega}$. On vérifie facilement (cf. [6], chap. I, lemme 3) que l'application $\phi \mid A \times (\mathbb{C}^n \setminus \{o\})$ est une submersion. Ainsi $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$ est de codimension $\geq n$ en tout point de $A \times (\mathbb{C}^n \setminus \{o\})$. Puisque $A \times \{o\}$ est de codimension n, $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$ est une variété algébrique de codimension n, contenant $A \times \{o\}$. Soient $V_1,\ldots,V_s$ les composantes irréductibles de $\phi^{-1}(\tilde{\Omega})$, autres que $A \times \{o\}$. On a : codim $(V_1 \cup \ldots \cup V_s) \cap (A \times \{o\}) > n$, et donc il existe (α,o) réel dans $(A \times \{o\}) \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_s)$. Au voisinage de (α,o) : $\phi^{-1}(\tilde{\Omega}) = A \times \{o\}$; visiblement, α est solution.

3.4. Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé, sous la forme du corollaire énoncé plus bas, un résultat classique de la théorie des intersections (cf. [5]) :

Si V, V' sont deux germes de variétés algébriques à l'origine de $\mathbb{C}^n$, on a l'inégalité :

$$\underline{\operatorname{codim}_o (V \cap V') \leq \operatorname{codim}_o (V) + \operatorname{codim}_o (V').}$$

Si l'on a l'égalité, on dit que les germes de variétés se <u>coupent transversalement</u> à l'origine. Par exemple, si $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{p+q}$, si $P : \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n$ et $P' : \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^q$ sont les projections et W (resp. W') est un germe de variété algébrique à l'origine de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{C}^q$), on voit facilement que $P^{-1}(W)$ et $P'^{-1}(W')$ se coupent transversalement. On déduit de l'inégalité précédente, le :

<u>Corollaire 3.5</u> : *Soit* f *une application polynomiale de* $\mathbb{C}^n$ *dans* $\mathbb{C}^p$ *telle que* $f(o) = o$ *et soit* V *un germe de variété algébrique à l'origine de* $\mathbb{C}^p$. *Alors :* $\operatorname{codim}_o (f^{-1}(V)) \leq \operatorname{codim}_o (V)$.

<u>Preuve</u> : Posons $f = \pi \circ i$ où $i : \mathbb{C}^n \ni x \longmapsto (x, f(x)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \ni (x,y) \longmapsto y \in \mathbb{C}^p$. On a :

$\operatorname{codim}_o (\pi^{-1}(V)) = \operatorname{codim}_o (V)$ et d'après 3.4 :

$$p + \operatorname{codim}_o(f^{-1}(V)) = \operatorname{codim}_o(i(\mathbb{C}^n) \cap \pi^{-1}(V)) \leq p + \operatorname{codim}_o(V),$$

d'où l'inégalité cherchée.

Le théorème suivant caractérise les groupes Γ pour lesquels la $\mathcal{G}$-stabilité dans X est générique.

<u>Théorème 3.6</u> : *L'ensemble* $Y = \{ \varphi \in X \mid \varphi$ *n'est pas* $\mathcal{G}$*-stable dans* $X\}$ *est l'image réciproque par la projection* $j : X \longmapsto \hat{X}$ *d'une sous-variété algébrique* $\hat{Y}$ *de* $\hat{X}$.

En outre, la $\mathcal{G}$*-stabilité dans* X *est générique (i.e.* $\operatorname{codim}(\hat{Y}) = \infty$*) si et seulement si l'une des deux conditions suivantes (équivalentes) est satisfaite :*

(1) codim $(\tilde{\Sigma}) \geq n$, i.e. ht $(\mathfrak{J}) \geq n$.

(2) Pour tout $i = o,1,\dots,p$: codim $(\tilde{\Sigma}_i) \geq \inf(i-1,n)$.

Preuve : Un germe $\varphi \in X$ n'est pas $\mathcal{G}$-stable dans X si et seulement si l'idéal $\mathfrak{J}_\varphi = ({}^1\varphi)^* (\mathfrak{J})$ ne contient pas une puissance de $\underline{m}$. D'après (3.3), il suffit de montrer l'équivalence des conditions (1) et (2).

Fixons i et soit $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_p)$ appartenant à $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$. Soient $\xi \in \tilde{P}^{-1}(\eta)$; $\mathfrak{a}_\xi$ le localisé au point ξ de l'anneau des polynômes $\mathbb{C}\,[y\ ;\ y^1;\dots;\ y^n]$. Par hypothèse, le rang de la matrice $(A_1.\eta,\dots,A_q.\eta)$ est égal à p-i. Supposons, par exemple, que le mineur δ de cette matrice formé par l'intersection des p-i premières lignes avec les p-i premières colonnes, est $\neq 0$.

Soit m_{jk} le mineur d'ordre p-i+1 de M obtenu en prenant l'intersection des p-i premières lignes et de la $(j+p-i)^{\text{ème}}$ avec les p-i premières colonnes et la $(k+p-i)^{\text{ème}}$. Soit M' la matrice des m_{jk} et soit I la matrice unité $(p-i)\times(p-i)$. On vérifie facilement (cf. [6], chap. II, lemme 4) l'existence de matrices inversibles P et Q à coefficients dans $\mathfrak{a}_\xi$, telles que : $P\,M\,Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix}$

Ecrivons M' sous la forme $[M''\ M''']$ où M''' est une matrice $i \times n$. Faisons les remarques suivantes :

(i) $\tilde{\Sigma}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de M est $< p$; donc $\tilde{\Sigma}_\xi$ est le germe en ξ de l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de $M' = [M''\ M''']$ est $< i$.

(ii) La suite obtenue en prenant (dans un certain ordre) les éléments de la matrice M''' et $y_1 - \eta_1,\dots,y_p - \eta_p$ peut être complétée de manière à obtenir un système de coordonnées locales en ξ de l'espace $\mathbb{C}^{p+np}$ (remarquer que le jacobien en ξ de cette suite par rapport aux y_j^k $(1 \leq k \leq n\ ;\ p-i+1 \leq j \leq p)$ et $y_1,\dots,y_p$ est égal à δ^{ni} , au signe près).

(iii) Soit $\tilde{\Omega}$ la variété algébrique des points de $\mathbb{C}^{p+np}$ en lesquels le rang de M‴ (matrice ixn) est < i. On a : $\mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{\Omega}) \geq \sup\ (o,n-i+1)$; en outre, la matrice M‴ s'annule au point $\xi^o = (\eta\ ;\ o,\ldots,o)$ et donc : $\mathrm{codim}_{\xi^o}\ (\tilde{\Omega}) = \sup\ (o,n-i+1)$ (on a les inégalités précédentes d'après (ii) et le fait que l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{in}$ en lesquels le rang de la matrice générique ixn est < i est une variété algébrique irréductible de codimension égale à $\sup\ (o,\ n-i+1)$; cf. [6], chap. II, lemme 3). En outre, d'après (ii), les germes de variétés algébriques $\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)_\xi$ et $\tilde{\Omega}_\xi$ se coupent transversalement (cf. 3.4) ; donc :

$$(3.6.3)\qquad \mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) = \mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)) + \mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{\Omega})$$
$$\geq \mathrm{codim}_\eta\ (\tilde{\Sigma}_i) + \sup\ (o,n-i+1).$$

$$(3.6.4)\qquad \mathrm{codim}_{\xi^o}(\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) = \mathrm{codim}_\eta\ (\tilde{\Sigma}_i) + \sup\ (o,n-i+1).$$

Par construction, M″ s'annule sur le germe de variété algébrique $\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)_\xi$. D'après (i) et la définition de $\tilde{\Omega}_\xi$, on a les inclusions :

$$(3.6.5)\qquad \tilde{\Omega}_\xi \supset \tilde{\Sigma}_\xi \supset (\tilde{P}^{-1}\ (\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega})_\xi\ .$$

L'équivalence des conditions (1) et (2) résulte facilement de (3.6.3), (3.6.4) et (3.6.5) :

On a (1) $\Longrightarrow$ (2). En effet, d'après (3.6.4), (3.6.5) et l'hypothèse :

$$\mathrm{codim}_\eta\ (\tilde{\Sigma}_i) + \sup\ (o,n-i+1) \geq \mathrm{codim}_{\xi^o}\ (\tilde{\Sigma}) \geq n$$

d'où $\mathrm{codim}_\eta\ (\tilde{\Sigma}_i) \geq \inf\ (i-1,n)$, pour tout $\eta \in \tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$,

i.e. $\mathrm{codim}\ (\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}) \geq \inf\ (i-1,n)$ pour tout $i=o,1,\ldots,p$. Visiblement, ces inégalités entraînent (2).

On a (2) $\Longrightarrow$ (1). Démontrons par récurrence sur i que pour tout $\xi \in \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1})$, on a $\mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{\Sigma}) \geq n$. Pour i=o, le résultat est trivial (car $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_o \setminus \tilde{\Sigma}_1) = \emptyset$). Supposons donc i > o et soit $\eta = \tilde{P}(\xi)$. D'après (3.6.3) et l'hypothèse :

$$\mathrm{codim}_\xi\ (\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega}) \geq n\ .$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $\xi' \in \mathbb{C}^{p+np} \setminus (\tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i) \cap \tilde{\Omega})$ assez voisin de ξ :

$$\operatorname{codim}_{\xi'}(\tilde{\Sigma}) \geq n.$$

Or, ou $\xi' \notin \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_i)$, i.e. $\xi' \in \tilde{P}^{-1}(\tilde{\Sigma}_j)$, $j < i$, et dans ce cas, on applique l'hypothèse de récurrence ; ou $\xi' \notin \tilde{\Omega}$, et dans ce cas, d'après (3.6.5), $\xi' \notin \tilde{\Sigma}$. Ceci achève la preuve de 3.6.

3.7. La condition (3.6.2) s'interprète aisément. Elle signifie en effet que l'on a des inégalités :

$$\underline{\operatorname{codim}\,(\tilde{\Sigma}_i) \geq i-1,\ 0 \leq i \leq \inf\,(p,n+1).}$$

Chaque $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ étant la réunion des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ de codimension i, les inégalités précédentes signifient donc que les grosses orbites, i.e. celles de codimension $\leq$ inf (p,n+1), forment une famille à 1 paramètre au plus.

Supposons désormais que la condition (3.6.2) est satisfaite. On peut décomposer $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ ($o \leq i \leq \inf\,(p,n+1)$) en une réunion disjointe : $\tilde{\Sigma}_{i,o} \cup \tilde{\Sigma}_{i,1}$, où $\tilde{\Sigma}_{i,o}$ est une variété algébrique régulière de codimension i-1 (éventuellement vide) et $\tilde{\Sigma}_{i,1}$ est une variété algébrique régulière de codimension i (éventuellement vide), réunion d'un nombre fini d'orbites $\tilde{\Gamma}.y$.

Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$ et supposons que l'on peut choisir la décomposition précédente de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite :

($\tilde{H}$) Le point η n'appartient à l'adhérence d'aucune des orbites $\tilde{\Gamma}.y$ contenues dans les $\tilde{\Sigma}_{i,o}$, $o \leq i \leq \inf\,(p,n+1)$.

(La condition ($\tilde{H}$) est visiblement satisfaite si les orbites $\tilde{\Gamma}.y$ sont toutes fermées, en particulier si le groupe $\tilde{\Gamma}$ est compact ; ou encore, s'il existe un nombre fini d'orbites $\tilde{\Gamma}.y$).

On peut alors remplacer la condition (1) du corollaire 2.13 par un nombre fini de conditions de transversalité. De façon précise :

Proposition 3.8 : *Supposons la condition* $(\tilde{H})$ *satisfaite. Si* φ *est analytique telle que* $\varphi(o) = \eta$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe W *voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ *soit transverse sur toutes les variétés* $\tilde{\Sigma}_{i,o}$ *et* $\tilde{\Sigma}_{i,1}$, $o \leq i \leq r = \inf(p, n+1)$, *et tel que* $W \cap \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{r+1}) = \{o\}$ *ou* $\emptyset$.

(2) φ *est* $\mathcal{G}$*-stable dans* X.

Preuve : Démontrons l'équivalence de (2.13.1) et (3.8.1).

(2.13.1) $\Longrightarrow$ (3.8.1) Les $\tilde{\Sigma}_{i,j}$ étant des réunions d'orbites, la transversalité de $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ sur toutes les orbites, implique la transversalité de $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ sur chaque $\tilde{\Sigma}_{i,j}$. En outre, $\tilde{\Sigma}_{r+1}$ est soit vide (si r=p), soit de codimension $\leq n$ (si r=n+1) ; donc $\tilde{\Sigma}_{r+1}$ est une réunion finie de variétés, régulières de codimensions $\leq n$ et réunions d'orbites. Il en résulte que $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ est transverse sur ces variétés et donc que $W \cap \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{r+1}) = \{o\}$ ou $\emptyset$ (en diminuant W si nécessaire).

(3.8.1) $\Longrightarrow$ (2.13.1) Il suffit de montrer que la transversalité de $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ sur $\tilde{\Sigma}_{i,o}$ implique la transversalité de $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ (on diminue W si nécessaire) sur toutes les orbites contenues dans $\tilde{\Sigma}_{i,o}$. Supposons que cela doit faux pour un indice i fixé.

Posons $\Omega = \{x \in \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{i,o}) \cap W \mid \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}$ n'est pas transverse en x à l'orbite $\tilde{\Gamma} . \tilde{\underset{\sim}{\varphi}}(x)\}$: Ω est un sous-ensemble analytique de W, contenu dans $W \setminus \{o\}$, et par hypothèse, cet ensemble adhère au point 0. Il existe donc une courbe analytique : $[o, \varepsilon[\ni t \longmapsto x(t)$ telle que $x(o) = o$ et $x(]o, \varepsilon[) \subset \Omega$.

Posons $y(t) = \tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \circ x(t)$. Pour $t > o$, le vecteur $\frac{dy}{dt}$ est tangent à l'orbite $\tilde{\Gamma} . y(t)$, car sinon $T_{y(t)}(\tilde{\Sigma}_{i,o})$ serait engendré par $\frac{dy}{dt}$ et $T_{y(t)}(\tilde{\Gamma} . y(t))$, ce qui joint à la transversalité de $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{\Sigma}_{i,o}$, entraînerait la transversalité de $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}}$ sur $\tilde{\Gamma} . y(t)$ au point $x(t)$, i.e. $x(t) \notin \Omega$. La courbe $y(]o, \varepsilon[)$ est donc contenue dans une orbite, et ceci contredit l'hypothèse $(\tilde{H})$ (car $y(o) = \eta$).

4. $\mathcal{G}_r$-stabilité dans X $(r < \infty)$.

Définition 4.1 : Soit ψ le germe à l'origine d'une application $\underset{\sim}{\psi}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que ψ est elliptique s'il existe un voisinage W de l'origine de $\mathbb{R}^n$, et des constantes $C > o$ et $\alpha \geq o$ telles que, $\forall\, x \in W$:

$$|\underset{\sim}{\psi}\ (x)| \geq C\,|x|^{\alpha}$$

Un idéal I de $\mathcal{E}$ engendré par $\psi_1,\ldots,\psi_k$ est elliptique si $\sum_{i=1}^{k}|\psi_i|$ (ou $\sum_{i=1}^{k}\psi_i^{\,2}$) est elliptique.

Soit $\underline{m}^{\infty} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \underline{m}^{i}$ l'idéal de $\mathcal{E}$ formé des germes plats à l'origine. Enfin, soit γ une fonction C^{∞} sur $\mathbb{R}^n$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 si $|x| \leq 1/4$ et à 0 si $|x| \geq 1/2$.

Lemme 4.2 : *Soit* I *un idéal de* $\mathcal{E}$ *engendré par* $\psi_1,\ldots,\psi_k$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) I *est elliptique.*

(2) $\underline{m}^{\infty} \subset I$, *i.e. l'application canonique* $\mathcal{E}/I \longmapsto \mathcal{F}/\hat{I}$ *est un isomorphisme.*

(3) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I.\mathcal{E}_r$ *contient une puissance de* $\underline{m}_r$.

Preuve : (1) $\Longrightarrow$ (2) et (3). Posons $\psi = \sum_{i=1}^{k}\psi_i^{\,2}$ et démontrons par exemple que (1) entraîne (3). Par hypothèse, il existe $C > o$, $\alpha \geq o$ et un voisinage W de o dans $\mathbb{R}^n$ tels que, $\forall\, x \in W$: $|\underset{\sim}{\psi}(x)| \geq C|x|^{\alpha}$. Si $f \in \underline{m}_r^{\ \mu}$, on a (d'après la formule de Leibniz), pour tout ω, $|\omega| \leq r$, et tout $x \in W \setminus \{o\}$:

$$|D^{\omega}\ (\underset{\sim}{f}\ /\ \underset{\sim}{\psi})\ (x)| \leq \frac{C'\ |x|^{\mu-|\omega|}}{|\underset{\sim}{\psi}(x)|^{\ |\omega|+1}}$$

(C' est une constante indépendante de x et ω). Donc, si $\mu > r + \alpha(r+1)$, $\lim\limits_{\substack{x \mapsto o \\ x\in W\setminus\{o\}}} D^{\omega}(\underset{\sim}{f}\ /\ \underset{\sim}{\psi})(x) = o$ et $\underset{\sim}{f}\ /\ \underset{\sim}{\psi}$ se prolonge en une fonction r fois continument dérivable sur W, r-plate à l'origine. Donc $f \in I.\mathcal{E}_r$. La preuve de (1) $\Longrightarrow$ (2) est analogue.

(2) ou (3) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que l'idéal I n'est pas elliptique. Il existe une suite x^j de points de $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ telle que $\lim_{j\to\infty} x^j = o$ et $\sum_{i=1}^{k} |\underset{\sim}{\psi}_i(x^j)| \leq |x^j|^{j+1}$.
On peut supposer que les boules euclidiennes $B(x^j, \frac{|x^j|}{2})$ sont disjointes deux à deux. La série $\sum_{j=o}^{\infty} |x^j|^j . \gamma\left(\frac{x-x^j}{|x^j|}\right)$ converge uniformément vers une fonction $\underset{\sim}{f}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, plate à l'origine et telle que pour tout j :

$$\underset{\sim}{f}(x^j) = |x^j|^j \geq |x^j|^{-1} . \sum_{i=1}^{k} |\underset{\sim}{\psi}_i(x^j)|$$

Ainsi, le germe f induit par $\underset{\sim}{f}$ à l'origine appartient à $\underline{m}^\infty$, mais n'appartient pas à $\mathfrak{I} . \mathcal{E}_o$, ce qui contredit (2) et (3).

Lemme 4.3 : *Soient* $\psi \in C^\infty_{o,o}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$; $\mathcal{J}$ *un idéal de polynômes sur* $\mathbb{R}^s$ *engendré par* $P_1,\dots,P_k$; $V(\mathcal{J})$ *la variété des zéros de* $\mathcal{J}$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\psi^*(\mathcal{J})$ *n'est pas elliptique.*

(2) Il existe une suite $x^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, $x^j \longrightarrow 0$, *telle que pour tout* j :

$$d(\underset{\sim}{\psi}(x^j), V(\mathcal{J})) \leq |x^j|^j$$

En conséquence, si $\mathcal{J}'$ *est un second idéal de polynômes tel que* $V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{J}')$, *l'idéal* $\psi^*(\mathcal{J})$ *est elliptique si et seulement si* $\psi^*(\mathcal{J}')$ *est elliptique.*

Preuve : Visiblement, (2) entraîne (1). Réciproquement, si (2) n'est pas satisfaite, il existe $\alpha > o$ et W voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $d(\underset{\sim}{\psi}(x), V(\mathcal{J})) \geq |x|^\alpha$ pour tout $x \in W$. En outre, il existe $C > o$ et $\beta \geq o$ tels que $\sum_{i=1}^{k} |P_i \circ \underset{\sim}{\psi}(x)| \geq C.d(\underset{\sim}{\psi}(x), V(\mathcal{J}))^\beta$ pour tout $x \in W$ (cf. [2], chap. VI).
Ainsi, $\psi^*(\mathcal{J})$ est elliptique.

Lemme 4.4 : *Soit* $\varphi \in X$ *tel que* $\mathfrak{I}_\varphi$ *soit elliptique. Alors, pour tout* $r \in \mathbb{N}$, φ *est* $\mathcal{G}_r$*-stable dans* X.

Preuve : Supposons $\mathfrak{I}_\varphi \neq \mathcal{E}$ (si $\mathfrak{I}_\varphi = \mathcal{E}$, on sait que φ est $\mathcal{G}$-stable dans X) et $r \geq 1$.

Par hypothèse, il existe une application $\mathbb{N} \ni r \longmapsto s(r) \in \mathbb{N}$ telle que $\underline{m}_r . \mathcal{J}_\varphi^2 \supset \underline{m}^{s(r)+1}$. Soit $\varphi' \in X$ tel que $j^{s(r)}(\varphi) = j^{s(r)}(\varphi')$. Le germe $\varphi - \varphi'$ a ses composantes dans $\underline{m}^{s(r)+1} \subset \underline{m}_r . \mathcal{J}_\varphi^2$; d'après 2.4, φ' appartient à l'orbite $\mathcal{G}_r . \varphi$. Ainsi, le jet $j^{s(r)}(\varphi)$ est $\mathcal{G}_r$-suffisant dans X.

Lemme 4.5 : *Le sous-ensemble* $Z = \{ \varphi \in X \mid \mathcal{J}_\varphi$ *n'est pas elliptique*$\}$ *est l'image réciproque par la projection* $j : X \longmapsto \hat{X}$ *d'un sous-ensemble semi-algébrique* $\hat{Z}$ *de* $\hat{X}$.

En outre, la codimension de $\hat{Z}$ *est infinie si la condition suivante est satisfaite :*

(4.5.1) *Pour tout* $i = o,1,\ldots,p$: $\operatorname{codim} (\Sigma_i) \geq \inf (i-1,n)$

Preuve : Soient $\delta_{1,\varphi}, \ldots, \delta_{k,\varphi}$ les mineurs d'ordre p de la matrice M_φ. Posons $\hat{Z}_{h+1} = \{\omega \in \hat{X}_{h+1} \mid \forall\, \varepsilon > o,\ \forall\, C > o,\ \exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq \varepsilon$ tel que $\sum_{i=1}^{k} | \delta_{i,\omega}(x)| < C|x|^h\}$. Les applications $(\omega,x) \longmapsto \delta_{i,\omega}(x)$ étant polynomiales, $\hat{Z}_{h+1}$ est semi-algébrique (d'après le théorème de Seidenberg-Tarski : la projection d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique ; cf. [4]).

Soit $\varphi \in X$ tel que $j^{h+1}(\varphi) = \omega$; pour tout i, $\delta_{i,\omega} - \delta_{i,\varphi}$ est h-plate à l'origine. Il en résulte que pour tout $\varphi \notin (j^{h+1})^{-1}\ (\hat{Z}_{h+1})$, l'idéal $\mathcal{J}_\varphi$ est elliptique. Ainsi, $Z = j^{-1}(\hat{Z})$, où $\hat{Z} = \varprojlim \hat{Z}_{h+1}$.

La condition (4.5.1) équivaut à la suivante :

(4.5.2) On a $\operatorname{codim} (\Sigma) \geq n$ (la preuve est analogue à celle de l'équivalence de (3.6.1) et (3.6.2)).

Supposons la condition (4.5.2) satisfaite, et soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{R}[y\ ;\ y^1;\ldots;\ y^n]$ formé de tous les polynômes nuls sur Σ (donc $V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{I}) = \Sigma$). On a $\operatorname{ht}(\mathcal{I}) \geq n$; d'après (3.3), l'ensemble $Y = \{ \varphi \in X \mid ({}^1\varphi)^*(\mathcal{I})$ ne contient pas une puissance de $\underline{m}\}$ est l'image réciproque par j d'une sous-variété algébrique de codimension infinie $\hat{Y}$ de $\hat{X}$. D'après 4.3, l'idéal $\mathcal{J}_\varphi = ({}^1\varphi)^*(\mathcal{J})$ est elliptique si et seulement si $({}^1\varphi)^*(\mathcal{I})$ est elliptique ; ainsi $\hat{Y} \supset \hat{Z}$ et $\operatorname{codim} (\hat{Z}) = \infty$.

Le théorème suivant caractérise les germes $\mathcal{G}_r$-stables dans X ($r < \infty$) lorsque (4.5.1) est satisfaite (je ne sais pas caractériser la $\mathcal{G}_r$-stabilité lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée) :

Théorème 4.6 : *Supposons que le groupe* Γ *vérifie (4.5.1). Pour un* $\varphi \in X$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'idéal $\mathcal{I}_\varphi$ *est elliptique.*

(2) Pour tout $r \in \mathbb{N}$*,* φ *est* $\mathcal{G}_r$ *-stable dans* X.

(3) φ *est* $\mathcal{G}_o$*-stable dans* X.

En outre, l'ensemble Z *des* $\varphi \in X$ *qui ne vérifient pas ces conditions, est l'image réciproque par la projection* $j : X \longmapsto \hat{X}$ *d'un sous-ensemble semi-algébrique de codimension infinie* $\hat{Z}$ *de* $\hat{X}$ *(donc la* $\mathcal{G}_r$*-stabilité dans* X*,* $r < \infty$*, est générique).*

Preuve : D'après 4.4 et 4.5, il suffit de monter l'implication : non (1) $\Longrightarrow$ non (3). Supposons donc $\mathcal{I}_\varphi$ non elliptique. D'après 4.3, il existe une suite $x^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ telle que $x^j \longrightarrow o$ et $d\,({}^1\underset{\sim}{\varphi}(x^j), \Sigma) \leq |x^j|^j$. Soit $\xi^j \in \Sigma$ tel que : $|{}^1\underset{\sim}{\varphi}(x^j) - \xi^j| = d({}^1\underset{\sim}{\varphi}(x^j), \Sigma)$. Soient $\underset{\sim}{\xi}^j$ l'unique application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que ${}^1\underset{\sim}{\xi}^j(x^j) = \xi^j$; $\underset{\sim}{\varphi}^j$ l'unique application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que ${}^1\underset{\sim}{\varphi}^j(x^j) = {}^1\underset{\sim}{\varphi}\ (x^j)$.

On peut visiblement supposer que les boules $B(x^j, \frac{|x^j|}{2})$ sont disjointes deux à deux. Alors la série :

$$\underset{\sim}{\varphi} + \sum_{j=o}^{\infty} (\underset{\sim}{\xi}^j - \underset{\sim}{\varphi}^j) \cdot \gamma\left(\frac{x-x^j}{|x^j|}\right)$$

converge uniformément vers une fonction C^∞ $\underset{\sim}{\varphi}'$ telle que $\varphi' - \varphi$ soit plate à l'origine ; en outre, pour tout j : ${}^1\underset{\sim}{\varphi}'\ (x^j) = \xi^j \in \Sigma$, i.e. $\underset{\sim}{\varphi}'$ n'est pas transverse en x^j à l'orbite $\Gamma \cdot \underset{\sim}{\varphi}'(x^j) = \mathcal{O}_j$.

Posons $k_j = \operatorname{codim}(\mathcal{O}_j)$. D'après 4.7, il existe pour tout j tel que $k_j \leq n$, une fonction C^∞ $\underset{\sim}{\psi}^j$, aussi petite que l'on veut, telle que $(\underset{\sim}{\varphi}' + \underset{\sim}{\psi}^j)\ (x^j) = \underset{\sim}{\varphi}'(x^j)$ et telle que $\underset{\sim}{\varphi}' + \underset{\sim}{\psi}^j$ soit semi-transverse sur $\mathcal{O}_j$ en x^j ; si $k_j > n$, posons $\psi^j = o$. Les ψ^j étant choisies assez petites, la série :

$$\varphi' + \sum_{j=o}^{\infty} \psi^j . \gamma \left(\frac{x-x^j}{|x^j|} \right)$$

converge vers une fonction C^∞ φ'' telle que $\varphi' - \varphi''$ soit plate à l'origine ; en outre, φ'' est semi-transverse sur $\mathcal{O}_j$ en x^j, si $k_j \leq n$.

Supposons que φ'' soit $\mathcal{G}_o$-stable dans X. Il existe alors $g \in G_o$ et $\tau \in \mathrm{Dif}_o$ tels que $\varphi''' = (g.\varphi'') \circ \tau^{-1}$ soit algébrique et $\mathcal{J}_{\varphi'''}$ soit elliptique. En particulier, pour tout j assez grand, φ''' est transverse en $\tau(x^j)$ à $\mathcal{O}_j$; en outre, τ induit un homéomorphisme du germe de $(\varphi'')^{-1}$ $(\mathcal{O}_j)$ en x^j sur le germe de variété, de codimension k_j, de $(\varphi''')^{-1}$ $(\mathcal{O}_j)$ en $\tau(x^j)$. D'après 4.7, ceci est absurde si $k_j < n$; absurde aussi lorsque $k_j > n$, car alors le germe $(\varphi''')^{-1}$ $(\mathcal{O}_j) = \{o\}$ ou $\emptyset$. Ainsi, en supposant qu'il existe une infinité d'indices j tels que $k_j \neq n$, φ'' n'est pas $\mathcal{G}_o$-stable ; il en sera de même de φ.

Il reste à examiner le cas où $k_j = n$ pour tout j assez grand, i.e. $\varphi''(x^j) \in \Sigma_n \setminus \Sigma_{n+1}$. Soit $\Sigma_{n,o}$ la partie régulière de codimension n-1 de $\Sigma_n \setminus \Sigma_{n+1}$; son complémentaire $\Sigma_{n,1}$ est une réunion finie d'orbites de codimension n. On peut donc supposer que les $\varphi''(x^j)$ appartiennent à $\Sigma_{n,o}$ (car le germe $(\varphi''')^{-1}(\Sigma_{n,1}) = \{o\}$ ou $\emptyset$). Procédant comme plus haut, on démontre que φ'' est transverse en tout point x^j sur $\Sigma_{n,o}$; de même, φ''' est transverse en $\tau(x^j)$ à $\Sigma_{n,o}$. Soit C_j le germe de courbe régulière en x^j induit par $(\varphi'')^{-1}$ $(\Sigma_{n,o})$; $\tau(C_j)$ est donc le germe de courbe régulière induit en $\tau(x^j)$ par $(\varphi''')^{-1}$ $(\Sigma_{n,o})$. On vérifie que φ''' $(\tau(C_j))$ (resp. $\varphi''(C_j)$) traverse (resp. ne traverse pas) au point φ''' $(\tau(x^j))$ (resp. φ'' (x^j)) l'hypersurface $\mathcal{O}_j$ de $\Sigma_{n,o}$. Ceci est absurde et donc φ'' et φ ne sont pas $\mathcal{G}_o$-stables.

Nous avons utilisé précédemment les remarques qui suivent :

4.7. Soit ψ une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\psi(o) = o$ et soit Ω la sous-variété de $\mathbb{R}^p$ définie par les équations $y_1 = \ldots = y_k = o$ $(1 \leq k \leq n)$.

Si $\underset{\sim}{\psi}$ n'est pas transverse sur Ω en o, on peut trouver $\underset{\sim}{\psi}'$ aussi voisin que l'on veut de $\underset{\sim}{\psi}$ (pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact de $\mathbb{R}^n$) et un système de coordonnées locales à l'origine de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1,\dots,x_n)$ tel que $\psi'_1 = x_1,\dots,\psi'_{k-1} = x_{k-1}$; ψ'_k est une forme quadratique non dégénérée en $x_k,\dots,x_n$ (ceci est une conséquence facile du lemme de Morse). En outre, on vérifie que le germe $(\psi')^{-1}$ (Ω) à l'origine de $\mathbb{R}^n$ n'est jamais homéomorphe à un germe de variété topologique de codimension k, si $1 \leq k < n$. (cf. par exemple [1]). Nous dirons qu'un tel ψ' est <u>semi-transverse</u> sur Ω à l'origine.

On déduit de 4.6. la conséquence suivante (comparer à 2.13).

<u>Corollaire 4.8</u> : *Supposons que le groupe* Γ *vérifie (4.5.1). Si* φ *est analytique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe W *voisinage ouvert de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\underset{\sim}{\varphi} \mid W \setminus \{o\}$ *soit transverse sur les orbites de tous les points de* $\mathbb{R}^p$ *sous l'action du groupe* Γ.

(2) φ *est* $\mathcal{G}_r$*-stable dans* X $(r < \infty)$.

<u>Preuve</u> : La condition (1) signifie que le germe des zéros de l'idéal $\mathfrak{I}_\varphi$ est {o} ou $\emptyset$; l'idéal $\mathfrak{I}_\varphi$ étant engendré par des fonctions analytiques, cela signifie que $\mathfrak{I}_\varphi$ est elliptique, i.e. que φ est $\mathcal{G}_r$-stable dans X $(r < \infty)$.

4.9. Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$. Sous l'hypothèse (4.5.1), on peut décomposer $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ $(o \leq i \leq \inf(p,n+1))$ en une réunion disjointe $\Sigma_{i,o} \cup \Sigma_{i,1}$ où $\Sigma_{i,o}$ est une variété algébrique régulière de codimension i-1 (éventuellement vide) et $\Sigma_{i,1}$ est une variété algébrique régulière de codimension i (éventuellement vide), réunion d'un nombre fini d'orbites $\Gamma.y$.

Soit η un point fixé de $\mathbb{R}^p$ et supposons que l'on peut choisir la décomposition précédente de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite (comparer à $(\tilde{H})$) :

(H) Le point η n'appartient à l'adhérence d'aucune des orbites $\Gamma.y$ contenues dans les $\Sigma_{i,o}$, $o \leq i \leq \inf (p,n+1)$.

On peut alors remplacer la condition (4.8.1) par un nombre fini de conditions de transversalité. De façon précise :

Proposition 4.10 : *Supposons la condition (H) satisfaite. Si φ est analytique telle que $\varphi(o) = \eta$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe W *voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\underset{\sim}{\varphi} \mid W \setminus \{o\}$ *soit transverse sur toutes les variétés* $\Sigma_{i,o}$ *et* $\Sigma_{i,1}$, $o \leq i \leq r = \inf (p,n+1)$ *et tel que* $W \cap \underset{\sim}{\varphi}^{-1}(\Sigma_{r+1}) = \{o\}$ *ou* $\emptyset$.

(2) φ *est* $\mathcal{G}_r$*-stable dans* X $(r < \infty)$.

Preuve : Elle est analogue à celle de 3.8.

5. Exemples.

Par la suite, W désigne un voisinage convenable de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$) est la réunion des orbites de codimension i du groupe $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ).

Exemple 5.1 : $\Gamma = \{e\}$; $\tilde{\Gamma} = \{e\}$

$$M_{\varphi} = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}).$$

Le germe φ est $\mathcal{G}$-stable dans X si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{D(x_{i1}, \dots, x_{ip})}$ contient une puissance de $\underline{m}$.

Les orbites sont les points. La $\mathcal{G}$-stabilité sera donc générique si et seulement si p=1.

Supposons p=1. On a $\tilde{\Sigma}_o = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}$; $\Sigma_o = \Sigma_1 = \mathbb{R}$.

Posons $\tilde{\Sigma}_{1,o} = \mathbb{C} \setminus \{o\}$; $\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{o\}$; $\Sigma_{1,o} = \mathbb{R} \setminus \{o\}$; $\Sigma_{1,1} = \{o\}$.

Les conditions $(\tilde{H})$ et (H) sont alors satisfaites (on prend $\eta = o$). Ainsi :
Un germe analytique φ tel que $\varphi(o) = o$ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si $\underset{\sim}{\tilde{\varphi}} | W \setminus \{o\}$ (resp. $\underset{\sim}{\varphi} | W \setminus \{o\}$) est transverse sur $\{o\}$.

<u>Exemple 5.2</u> : $\Gamma = G\ell(p, \mathbb{R})$; $\tilde{\Gamma} = G\ell(p, \mathbb{C})$

Le germe φ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{D(x_{i1}, \ldots, x_{ip})}$ contient une puissance de $\underline{m}$ (resp. est elliptique).

On a $\tilde{\Sigma}_o = \mathbb{C}^p$; $\tilde{\Sigma}_1 = \ldots = \tilde{\Sigma}_p = \{o\}$; $\Sigma_o = \mathbb{R}^p$; $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_p = \{o\}$.
La $\mathcal{G}$-stabilité dans X est donc toujours générique.

Un germe analytique φ tel que $\varphi(o) = o$ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X) si et seulement si $\underset{\sim}{\tilde{\varphi}} | W \setminus \{o\}$ (resp. $\underset{\sim}{\varphi} | W \setminus \{o\}$) est transverse sur $\{o\}$.

<u>Exemple 5.3</u> : Γ est le groupe des homothéties $y \longmapsto \lambda.y$, $\lambda \neq o$; $\tilde{\Gamma}$ est aussi le groupe des homothéties :

$$M_\varphi = (\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}).$$

On a : $\tilde{\Sigma}_o = \ldots = \tilde{\Sigma}_{p-1} = \mathbb{C}^p$; $\tilde{\Sigma}_p = \{o\}$; $\Sigma_o = \ldots = \Sigma_{p-1} = \mathbb{R}^p$; $\Sigma_p = \{o\}$.
La $\mathcal{G}$-stabilité dans X est donc générique si et seulement si $p \leq 2$.

<u>Supposons p=2</u>. Toutes les orbites de $\tilde{\Sigma}_1 \setminus \tilde{\Sigma}_2$ (resp. $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$) adhèrent à $\{o\}$. Il est donc impossible de trouver une décomposition de $\tilde{\Sigma}_1 \setminus \tilde{\Sigma}_2$ (resp. $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$) vérifiant $(\tilde{H})$ (resp. (H)).

Le germe φ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par les $\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} - \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$ et les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_{i1}, x_{i2})}$ contient une puissance de $\underline{m}$ (resp. est elliptique).

Exemple 5.4 : Γ (resp. $\tilde{\Gamma}$) est le sous-groupe de $G\ell(p, \mathbb{R})$ (resp. $G\ell(p,\mathbb{C})$) formé des matrices diagonales.

Les orbites sont en nombre fini : ce sont les $\tilde{\Gamma}.y$ (resp. $\Gamma.y$), y ayant ses composantes égales à 0 ou 1. On a donc :

$$\tilde{\Sigma}_i = \{y \in \mathbb{C}^p \mid \text{au moins } i \text{ coordonnées de } y \text{ sont nulles}\}.$$

$$\Sigma_i = \tilde{\Sigma}_i \cap \mathbb{R}^p$$

$\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ et $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ sont des variétés régulières de codimension i, réunions d'un nombre fini d'orbites. La $\mathcal{G}$-stabilité dans X est donc générique.

Posons $\tilde{\Sigma}_{i,o} = \emptyset$; $\tilde{\Sigma}_{i,1} = \tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$; $\Sigma_{i,o} = \emptyset$; $\Sigma_{i,1} = \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$.

Les conditions $(\tilde{H})$ et (H) sont vérifiées, pour tout η.

Un germe analytique φ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W\setminus\{o\}$ (resp. $\underset{\sim}{\varphi} \mid W\setminus\{o\}$) est transverse sur les variétés $\tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ (resp. $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$), $0 \leq i \leq p$.

Exemple 5.5 : Γ (resp. $\tilde{\Gamma}$) est le sous-groupe de $G\ell(p, \mathbb{R})$ (resp. $G\ell(p,\mathbb{C}$) formé des matrices diagonales, de déterminant égal à 1.

On a $\tilde{\Sigma}_o = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}^p$; $\Sigma_o = \Sigma_1 = \mathbb{C}^p$.

Pour $i \geq 2$, $\tilde{\Sigma}_i$ (resp. Σ_i) est le même que le $\tilde{\Sigma}_i$ (resp. Σ_i) de l'exemple 5.4. La $\mathcal{G}$-stabilité dans X est donc générique.

Posons $\tilde{\Sigma}_{1,o} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid \text{toutes les coordonnées de } y \text{ sont} \neq 0\}$

$\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid$ il existe une coordonnée de y et une seule égale à $0\}$.

$\tilde{\Sigma}_{i,o} = \emptyset$; $\tilde{\Sigma}_{i,1} = \tilde{\Sigma}_i \setminus \tilde{\Sigma}_{i+1}$ si $i \geq 2$.

Enfin, définissons de manière analogue les $\Sigma_{i,j}$, i.e. $\Sigma_{i,j} = \tilde{\Sigma}_{i,j} \cap \mathbb{R}^p$.

On vérifie alors facilement les conditions $(\tilde{H})$ et (H) lorsque $\eta \in \mathbb{R}^p \setminus \Sigma_{1,0}$.

Les variétés $\tilde{\Sigma}_{1,0}$ et $\Sigma_{1,0}$ sont ouvertes dans $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Ainsi :

Pour un germe analytique φ tel que $\varphi(o) \in \mathbb{R}^p \setminus \Sigma_{1,0}$, la $\mathcal{G}$-stabilité dans X (resp. la $\mathcal{G}_r$-stabilité dans $X, r < \infty$) équivaut à celle de l'exemple 5.4.

Exemple 5.6 : Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont les groupes de transformations qui laissent invariante la forme quadratique : $-y_1^2 - \dots - y_\nu^2 + y_{\nu+1}^2 + \dots + y_p^2 = Q(y)$.

Les orbites $\tilde{\Gamma}.y$ sont les hypersurfaces :

$\tilde{S}_\lambda = \{y \in \mathbb{C}^p \mid Q(y) = \lambda\}$, $\lambda \neq 0$

$\tilde{S}_o = \{y \in \mathbb{C}^p \setminus \{o\} \mid Q(y) = o\}$ et $\{o\}$

De même, les orbites $\Gamma.y$ sont les $\tilde{S}_\lambda \cap \mathbb{R}^p = S_\lambda$; $\tilde{S}_o \cap \mathbb{R}^p = S_o$ et $\{o\}$.

On a :

$\tilde{\Sigma}_o = \tilde{\Sigma}_1 = \mathbb{C}^p$; $\tilde{\Sigma}_2 = \dots = \tilde{\Sigma}_p = \{o\}$

$\Sigma_o = \Sigma_1 = R^p$; $\Sigma_2 = \dots = \Sigma_p = \{o\}$

La $\mathcal{G}$-stabilité dans X est donc générique. Posons :

$\tilde{\Sigma}_{1,o} = \{y \in \mathbb{C}^p \mid Q(y) \neq 0\}$

$\tilde{\Sigma}_{1,1} = \{y \in \mathbb{C}^p \setminus \{o\} \mid Q(y) = o\} = \tilde{S}_o$

et définissons $\Sigma_{1,0}$ et $\Sigma_{1,1}$ de manière analogue. Les conditions (H) et $(\tilde{H})$ sont alors satisfaites pour $\eta = o$. Ainsi :

Un germe analytique tel que (o) = o est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\varphi} \mid W \setminus \{o\}$ (resp. $\varphi \mid W \setminus \{o\}$) est transverse sur les variétés $\tilde{S}_o$ et $\{o\}$ (resp. S_o et $\{o\}$).

En particulier, si Γ est le groupe orthogonal ($\nu = o$), $S_o = \emptyset$. Comparant avec 5.2, on voit que les $\mathcal{G}_r$-stabilités ($r < \infty$) pour le groupe orthogonal ou le groupe linéaire sont les mêmes.

Exemple 5.7 : Soient α, β deux entiers tels que $p = \alpha \cdot \beta$ et $\beta \geq \alpha$. Identifions $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$) à l'espace des matrices $\alpha \times \beta$ à coefficients réels (resp. complexes).

Par composition à droite et à gauche, on définit un homomorphisme :

$G\ell(\alpha, \mathbb{R}) \times G\ell(\beta, \mathbb{R}) \ni (A,B) \longmapsto g_{A,B} \in G\ell(p, \mathbb{R})$ (si $M \in \mathbb{R}^p$, on pose $g_{A,B}(M) = AM\,B^{-1}$). Soit Γ l'image de cet homomorphisme ($\tilde{\Gamma}$ se définit de manière analogue).

Soit $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) ($0 \leq i \leq \alpha$) le sous-ensemble de $\mathbb{C}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) formé des matrices M telles que le rang de M soit égal à $\alpha - i$: $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) est une variété algébrique régulière de codimension $i(\beta-\alpha+i)$ (cf. [6], chap. II) ; en outre, les $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i) sont les orbites de $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ). Ainsi :

Un germe analytique φ est $\mathcal{G}$-stable dans X (resp. $\mathcal{G}_r$-stable dans X, $r < \infty$) si et seulement si $\tilde{\underset{\sim}{\varphi}} \mid W \setminus \{o\}$ (resp. $\underset{\sim}{\varphi} \mid W \setminus \{o\}$) est transverse sur les variétés $\tilde{\Omega}_i$ (resp. Ω_i), $0 \leq i \leq \alpha$.

5.8. Pour terminer, nous ferons deux remarques :

1) Soit Dif_ω le groupe des difféomorphismes de classe C^ω à l'origine de $\mathbb{C}^n$; $\tilde{\Gamma}$ un sous-groupe de Lie de $G\ell(p,\mathbb{C})$; $X_\omega = C^\omega_o(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ l'espace des germes à l'origine d'applications holomorphes. Le groupe $\mathcal{G}_\omega = C^\omega_{o,e}(\mathbb{C}^n, \tilde{\Gamma}) \times \mathrm{Dif}_\omega$ opère de manière évidente sur X_ω ; on peut donc étudier la $\mathcal{G}_\omega$-stabilité dans X_ω. Tous les résultats des paragraphes 2 et 3 se transposent alors de manière évidente.

2) Les propositions 3.8 et 4.10 fournissent des critères de stabilité pour des germes analytiques. Si φ n'est pas analytique, on peut donner des critères analogues (leur formulation nécessite la notion de quasi-transversalité, cf. [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BOCHNAK and S. ŁOJASIEWICZ : A converse of the Kuiper. Kuo theorem, lecture notes in mathematics, 192, Springer.

[2] B. MALGRANGE : Ideals of differentiable functions, Oxford Uni. Press.(1966).

[3] J. MATHER : Stability of C^{∞} mappings, II, Ann. of Math. 89, 254-291 (1969).

[4] A. SEIDENBERG : Anew décision method for elementary algebra. Ann. of Math, (2), 60, 365-374 (1954).

[5] J.P. SERRE : Algèbre locale - Multiplicités. Lecture notes in Mathematics, 11 - Springer.

[6] J.Cl. TOUGERON : Idéaux de fonctions différentiables I, Annales de l'Institut Fourier, tome XVIII.

J.Cl. TOUGERON

Département de Mathématiques et Informatique

RENNES - BEAULIEU

35 - RENNES