Publications mathématiques et informatiques de Rennes

Jean-Pierre Olivier

Fermeture intégrale et changements de base absolument plats

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 9, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FERMETURE INTEGRALE ET CHANGEMENTS DE BASE ABSOLUMENT PLATS

Jean Pierre OLIVIER

0 - Tous les anneaux seront commutatifs unitaires.

Définition : Un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ sera dit absolument plat si f et $B \otimes_A B \longrightarrow B$ sont des homomorphismes plats.

Nous utilisons dans la suite deux résultats

i) Si $f : A \longrightarrow B$ est absolument plat, alors pour toute A-algèbre A', $A' \longrightarrow A' \otimes_A B$ est aussi absolument plat [3] ;

ii) Soit $K \longrightarrow L$ une extension du corps K, alors le morphisme $K \longrightarrow L$ est absolument plat, si et seulement si L est une extension algébrique séparable de K [3].

I - Quelques anneaux.

(I.I) Rappelons (Cartan-Eilenberg, p. I4) qu'un anneau A est dit semi-héréditaire, si tout idéal de type fini de A est projectif.

Un anneau de valuation est semi-héréditaire ; un anneau absolument plat est semi-héréditaire.

Soient A un anneau semi-héréditaire et t un élément de A ; alors Ann(t) est engendré par un idempotent de A puisque $A/\mathrm{Ann}(t) \cong tA$ est projectif.

Par suite, l'anneau total des fractions K de A est absolument plat : en effet, K est encore semi-héréditaire ; donc si t est un élément de K, $\mathrm{Ann}_K(t)$ est engendré par un idempotent e ; il est clair que tout élément régulier de K/eK est inversible dans K/eK ; donc l'image de t dans K/eK est inversible ; bref, $tK + eK = K$ et tK est engendré par l'idempotent $I - e$.

(I.2) Un produit d'anneaux semi-héréditaires est semi-héréditaire.

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux semi-héréditaires et a un idéal de type fini de $A = \prod_{i \in I} A_i$; pour un entier n convenable, on a donc une application surjective $q : A^n \longrightarrow a$; en désignant par a_i la projection de a dans A_i, on déduit de q une famille de surjections $q_i : A_i^n \longrightarrow a_i$; comme l'application canonique $A^n \longrightarrow \Pi A_i^n$ est un isomorphisme, l'application produit des q_i définit une surjection $A^n \longrightarrow \Pi a_i$ qui se factorise évidemment par q ; donc $a = \Pi a_i$ et $q = \Pi q_i$. Comme chaque anneau A_i est semi-héréditaire, chaque q_i admet une section ; donc q est scindée.

(I.3) Soient A un anneau et n un entier $\geqslant 0$. On dit que A est de <u>dimension</u> faible (weak dimension) plus petite que n, et on note $Wd(A) \leqslant n$, si pour tout couple de A-modules E,F, on a $\mathrm{Tor}_{n+1}^{A}(E,F) = 0$.

Les anneaux absolument plats sont ceux de dimension faible nulle. Si A est un anneau local régulier, $Wd(A) = \dim(A)$.

<u>Lemme (I.4)</u> : <u>Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) $Wd(A) \leqslant 1$.

ii) <u>Tout idéal de A est plat</u>.

iii) <u>Tout idéal de type fini de A est plat</u>.

<u>Preuve</u> : Le seul point non évident est que iii) implique i) et il s'agit de montrer que sous l'hypothèse iii), tout sous-module d'un module plat est plat. Soient M un module plat et N un sous-module de M ; il faut montrer que pour tout idéal de type fini a de A, $a \otimes N \longrightarrow N$ est injectif ; or, cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} a\otimes N & \longrightarrow & a\otimes N \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & M \end{array}$$

et de la platitude de a et de M.

(I.5) Pour qu'un anneau A soit semi-héréditaire, il faut et il suffit que A soit cohérent et que $Wd(A) \leqslant I$.

Il existe des anneaux de dimension faible plus petite que I qui ne sont pas semi-héréditaires : en effet, soit V un anneau de valuation discrète contenant un corps K ; d'après [5], il existe un anneau A égal à son anneau total des fractions et possèdant les propriétés suivantes : pour tout idéal maximal m de A, A_m est isomorphe à K ou à V, et il existe un idéal maximal m tel que A_m soit isomorphe à V. Cette dernière propriété montre que A n'est pas absolument plat ; d'autre part, comme $Wd(V) = I$, $Wd(A) = I$. Si A était semi-héréditaire, il serait absolument plat puisqu'il est égal à son anneau total des fractions.

Le lemme suivant montre que dans le cas local, la situation est bien meilleure :

Lemme (I.6) : Soit A un anneau local. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est un anneau de valuation ou un corps.

ii) A est un anneau semi-héréditaire.

iii) $Wd(A) \leqslant I$.

Preuve : Il suffit de vérifier que iii) implique i).

Montrons d'abord que si $Wd(A) \leqslant I$, alors A est intègre : soient t un élément non nul de A et $I = Ann(t)$. Le quotient A/I est plat puisqu'il est isomorphe à l'idéal tA ; comme t est non nul, I est contenu dans l'idéal maximal de A, donc $A \longrightarrow A/I$ est un homomorphisme local ; comme il est plat, il est même fidèlement plat et, en particulier injectif ; donc $I = 0$ et A est intègre. Soient K le corps des fractions de A et V un anneau de valuation de K dominant A ; comme V est contenu dans le module plat K, V est plat sur A ; comme l'homomorphisme $A \longrightarrow V$ est local, V est fidèlement plat sur A et le lemme suivant permet de conclure :

Lemme (I.7) : Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow K$ deux homomorphismes d'anneaux. On suppose que f est fidèlement plat, que g est injectif et que gf est un épimorphisme plat. Alors f est un isomorphisme.

Preuve : Comme f est fidèlement plat, il suffit de montrer que $B \longrightarrow B \otimes_A B$ est un isomorphisme. Considérons le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont définies par la multiplication :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[dr, equal] & B \otimes_A B \arrow[r, "g \otimes g"] \arrow[d, "p"] & K \otimes_A K \arrow[d, "q"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & K
\end{tikzcd}$$

Comme gf est un épimorphisme, q est un isomorphisme ; comme g est injectif $g \otimes g$ est injectif puisque B et K sont plats sur A ; donc p est injectif, et, par suite un isomorphisme ; d'où le résultat.

2 - Un critère pour la fermeture intégrale.

Théorème de Ker Chalon (2.I) : Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est intégralement fermé dans B.

ii) Il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & K \end{array}$$

où V est semi-héréditaire d'anneau total des fractions K.

iii) Il existe un carré cartésien comme en ii), mais où $Wd(V) \leqslant I$ et où $V \longrightarrow K$ est un épimorphisme plat injectif.

(Rappelons qu'un carré d'homomorphismes d'anneaux noté comme ci-dessus est dit cartésien, si les homomorphismes $A \longrightarrow B$ et $A \longrightarrow V$ permettent d'identifier A à un produit fibré de V et de B au-dessus de K, ou encore s'ils définissent un isomorphisme de A sur l'ensemble formé des couples d'un élément de B et d'un élément de V qui ont la même image dans K).

Preuve : L'implication ii) $\Longrightarrow$ iii) résulte immédiatement des généralités rappelées en I. Montrons que iii) implique i) : comme le carré est supposé cartésien, il suffit de vérifier que V est intégralement fermé dans K. Or, soit W la fermeture intégrale de V dans K. Comme K est plat sur V, $V \longrightarrow W$ est plat puisque $Wd(V) \leqslant I$. Comme W est entier sur V, $V \longrightarrow W$ est fidèlement plat ; on termine en utilisant (I.7).
Pour prouver que i) implique ii), on raisonnera par étapes.

(2.2) Cas où B est un corps.
On sait qu'alors A est l'intersection de la famille F des sous-anneaux de va-

luation de B contenant A. Ceci s'interprète en disant que le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod\limits_{V \in F} V & \longrightarrow & B^F \end{array}$$

est cartésien. Mais, d'après (I.2), $\prod\limits_{V \in F} V$ est semi-héréditaire, et il est clair que son anneau total des fractions est isomorphe à B^F.

(2.3) Cas où B est absolument plat.

Posons $X = \mathrm{Spec}(B)$, $A' = \prod\limits_{p \in X} A/p \cap A$ et $B' = \prod\limits_{p \in X} B/p$

et montrons que A est isomorphe au produit fibré $C = A' \times_{B'} B$.

Par construction, C est une sous-A-algèbre de B ; donc tout idéal premier minimal de C se relève à B ; de plus, si p est un idéal premier de B, $A/p \cap A \longrightarrow C/p \cap C$ est un isomorphisme, donc $C/p \cap C$ est entier sur A. On va utiliser le résultat suivant :

<u>Lemme</u> (2.4) : <u>Soit</u> $A \longrightarrow B$ <u>un homomorphisme d'anneaux. Pour qu'un élément x de B soit entier sur A, il faut et il suffit que pour tout idéal premier minimal p de B, l'image de x dans B/p soit entière sur A</u>.

<u>Preuve de</u> (2.4) : La condition est évidemment nécessaire ; pour montrer qu'elle est suffisante, on peut se ramener au cas où B est engendré par x ; B est alors isomorphe à $A[X]/J$ pour un idéal convenable J de l'anneau de polynômes $A[X]$. Soit S l'ensemble des polynômes unitaires de $A[X]$. Par hypothèse, tout idéal premier de $A[X]$, contenant J rencontre S ; comme S est visiblement une partie multiplicative, $J \cap S \neq \emptyset$; il existe donc un polynôme unitaire P tel que $P \in J$, c'est-à-dire tel que $P(x) = 0$.

Revenons à la démonstration du théorème.

Il résulte de (2.4) que C est entier sur A ; comme A est intégralement fermé dans B, A = C ; par suite, le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Montrons que $A/p \cap A$ est intégralement fermé dans B/p : comme B est absolument plat, p est engendré par des idempotents de B, lesquels sont dans A puisque A est intégralement fermé dans B ; soit $I \subset p \cap A$ l'idéal de A engendré par ces idempotents ; comme A/I est un anneau de fractions de A, A/I est intégralement fermé dans B/IB = B/p ; donc $I = p \cap A$ et $A/p \cap A$ est intégralement fermé dans B/p. Utilisant alors (2.2) et passant au produit, on obtient le résultat pour $A' \longrightarrow B'$, et le fait que le carré ci-dessus soit cartésien permet de conclure.

(2.5) Cas général.

Soit n le nilradical de B. Comme A est intégralement fermé dans B, n est un idéal de A ; donc le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/n & \longrightarrow & B/n \end{array}$$

est cartésien ; ceci permet de supposer que B est réduit. Mais alors il existe un anneau absolument plat B' et un homomorphisme injectif $B \longrightarrow B'$ (On peut prendre pour B' le produit des corps résiduels en tous les idéaux premiers minimaux de B). En désignant par A' la fermeture intégrale de A dans B', on voit que le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

est cartésien. Il ne reste plus qu'à appliquer (2.3) à $A' \longrightarrow B'$.

3 - Le théorème de changement de base.

Lemme (3.I) : Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Appelons ϕ le morphisme composé $A \longrightarrow B \longrightarrow B \otimes_A B$ et ∇_f la multiplication $B \otimes_A B \longrightarrow B$.
Il existe un et un seul foncteur $\otimes^f$ de $\mathrm{Mod}\, B \times \mathrm{Mod}\, B$ dans $\mathrm{Mod}\, B \otimes_A B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}\, B \times \mathrm{Mod}\, B \arrow[r, "\otimes^f"] \arrow[d, "f_* \times f_*"'] & \mathrm{Mod}\, B \otimes_A B \arrow[d, "\phi_*"] \\
\mathrm{Mod}\, A \times \mathrm{Mod}\, A \arrow[r, "\otimes_A"'] & \mathrm{Mod}\, A
\end{tikzcd}$$

commute. De plus $\nabla_f^* \otimes^f = \otimes_B$.

L'unicité résulte du fait que ϕ_* est fidèle. L'existence est tout aussi facile : si M et N sont deux B-modules, on prend pour $M \otimes^f N$ le $B \otimes_A B$-module dont le groupe sous-jacent est $M \otimes_A N$, et on le munit de la structure de $B \otimes_A B$-module défini par

$$(b \otimes c)\ (x \otimes y) = b\, x \otimes y\, c.$$

Nous devons maintenant démontrer que pour tout B module Q, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_B N,\ Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B \otimes_A B}\ (M \otimes^f N,\ (\nabla_f)_*\ Q)$$

est bijective. Elle est injective puisque $M \otimes^f N \longrightarrow M \otimes_B N$ est surjective. Il faut montrer qu'elle est surjective. Désignons par i l'application A-bilinéaire canonique de $M \times M$ dans $M \otimes_A N$. Soit g un élément de $\mathrm{Hom}_{B \otimes_A B}\ (M \otimes^f N,\ (\nabla_f)_*\ Q)$: $g\, i$ est B-bilinéaire

en effet $g((b \otimes c)(x \otimes y)) = bc\ g(x \otimes y)$ équivaut à

$$g\ i(bx,cy) = bc\ gi(x,y).$$

D'où la conclusion.

Il existe évidemment un lemme analogue pour les Hom. Un tel lemme donnera des renseignements sur les morphismes dont la diagonale est une immersion ouverte.

<u>Corollaire</u> (3.2) : <u>Soit</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>un homomorphisme d'anneaux. Si</u> ∇_f <u>est plat, alors tout B-module plat sur A est plat sur B</u>.

Soit M un B-module plat sur A. Nous avons $\otimes_B M = \nabla_f^*(\otimes^f M)$. Le foncteur $\otimes^f M$ est exact, ∇_f^* est exact, donc $\otimes_B M$ est exact.

<u>Corollaire</u> (3.3) : <u>Si</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>est un morphisme absolument plat, la transformation naturelle</u> $\nabla_f^* \operatorname{Tor}^A \longrightarrow \operatorname{Tor}^B$ <u>est un isomorphisme. En particulier si</u> Wd $A \leqslant I$ <u>alors</u> Wd $B \leqslant I$, <u>et si A est absolument plat, alors B est absolument plat</u>.

<u>Théorème</u> (3.4) : <u>Soit</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>un morphisme absolument plat et soit</u> $g : A \longrightarrow C$ <u>un morphisme quelconque. Alors si A' est la fermeture intégrale de A dans C</u>, $A' \otimes_A B$ <u>est la fermeture intégrale de B dans</u> $B \otimes_A C$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & A' \otimes_A B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

Comme $A' \longrightarrow A' \otimes_A B$ est absolument plat et comme le carré (*) est cocartésien, il suffit de démontrer que si A est intégralement clos dans C, alors B est intégralement clos dans $B \otimes_A C$.

Dire que A est intégralement clos dans B revient à dire qu'il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ C \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

où $Wd(V) \leqslant I$ et $V \longrightarrow K$ est un épimorphisme plat.

Considérons le carré

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes_A V \arrow[d] \\ B \otimes_A C \arrow[r] & B \otimes_A K \end{tikzcd}$$

Il est cartésien puisque f est plat.

Puisque $A \longrightarrow B$ est absolument plat $V \longrightarrow V \otimes_A B$ est absolument plat, par suite $Wd(V \otimes_A B) \leqslant I$ (3.3).

Le morphisme $B \otimes_A V \longrightarrow B \otimes_A K$ est un épimorphisme plat.

<u>Corollaire</u> (3.5) : <u>Soit</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>un morphisme absolument plat. Si A est intègre intégralement clos et si B est connexe, alors B est intègre intégralement clos</u>.

Considérons le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ K \arrow[r] & B \otimes_A K \end{tikzcd}$$

où K désigne le corps des fractions de A. L'anneau B est intégralement fermé dans $B \otimes_A K$ qui est absolument plat. Comme B est connexe, les seuls idempotents de $B \otimes_A K$ sont 0 et I, i.e $B \otimes_A K$ est un corps. L'anneau B s'injecte dans un corps, il est intègre.

4 - Applications aux homomorphismes absolument plats locaux.

Théorème (4.I) : Soient A un anneau local strictement hensélien, B un anneau local et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local absolument plat. Alors f est un isomorphisme.

Démonstration : Soient $A \longrightarrow K$ un homomorphisme où K est un corps et A' la fermeture intégrale de A dans K ; d'après (3.4), $B' = A' \otimes_A B$ s'identifie à la fermeture intégrale de B dans $L = K \otimes_A B$. Soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de A. Comme f est absolument plat, $B/\underline{m}B$ est un corps extension algébrique séparable de A/m ; mais, par hypothèse, le corps résiduel de A est séparablement clos ; donc $A/\underline{m} \longrightarrow B/\underline{m}B$ est un isomorphisme ; on en déduit immédiatement que le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')$ établit une bijection entre l'ensemble des idéaux maximaux de B' et l'ensemble des idéaux maximaux de A'.
Comme A est local hensélien, A' est local ; B' est donc un anneau local intégralement fermé dans l'anneau absolument plat L ; donc L ne possède pas d'idempotent non trivial ; c'est donc un corps.
Comme l'homomorphisme $K \longrightarrow L$ possède au plus une rétraction, $A \longrightarrow K$ possède au plus une factorisation par f qui est donc un homomorphisme radiciel ([4]). Par suite, le noyau de $B \otimes_A B \longrightarrow B$ est un nilidéal ; comme cet homomorphisme est plat par hypothèse, c'est un isomorphisme et sa section $B \longrightarrow B \otimes_A B$ est aussi un isomorphisme, d'où le résultat par descente fidèlement plate à $A \longrightarrow B$.

Corollaire (4.2) : Soient A et B deux anneaux locaux, $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local absolument plat et $u : A \longrightarrow A'$ un henselisé strict de A. Alors u se factorise en

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{v} A'$$

<u>où v est un homomorphisme local fidèlement plat. Réciproquement, pour toute factorisation de ce type, f est absolument plat</u>.

<u>Démonstration</u> : Posons $B' = (A' \otimes_A B)_{\underline{n}}$ où $\underline{n}$ est un idéal premier de $A' \otimes_A B$ dont l'image réciproque dans A' soit l'idéal maximal ; d'après (4.I), l'homomorphisme local absolument plat $A' \longrightarrow B'$ est un isomorphisme ; on obtient v en composant l'homomorphisme fidèlement plat $B \longrightarrow B'$ avec l'isomorphisme réciproque de $A' \longrightarrow B'$.

Réciproquement, il résulte d'abord de [I], chapitre I, § 3, n° 4, remarque 2, que f est plat ; considérons d'autre part le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{v \otimes v} & A' \otimes_A A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[v]{} & A' \end{array}$$

Comme A' est un henselisé strict de A, l'homomorphisme vertical de droite est plat ; il résulte de la fidèle platitude de v et de loc. cit. que $B \otimes_A B \longrightarrow B$ est plat.

BIBLIOGRAPHIE

[I] N. BOURBAKI Algèbre commutative

[2] H. CARTAN et S. EILENBERG Homological Algebra

[3] D. FERRAND Epimorphismes d'anneaux et algèbres séparables ; C.R. Acad. Sc. Paris t. 265 (9 Octobre I965) p. 4II-4I4.

[4] A. GROTHENDIECK Eléments de Géométrie algébrique, chapitre I, Springer.

[5] M. NAGATA Mim. of College of Sciences, Kyoto, 33 (I960).

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 9 J.P OLIVIER
26, rue de l'Aiguillerie
34 - MONTPELLIER

Reproduction interdite