A. JEBLI

Sur certaines topologies linéaires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 7, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A7_0>

SUR CERTAINES TOPOLOGIES LINEAIRES

A. JEBLI

Si A est un anneau de Dedekind de corps des fractions K et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses idéaux premiers non nuls, on démontre que les seules topologies linéaires sur K, considéré comme A-module, et compatibles avec sa structure de corps sont les bornes supérieures de familles de topologies p-adiques, $p \in \mathcal{P}$ [4].

I - I . Sous A-modules de K : La démonstration de ce théorème nécessite une étude préalable des sous A-modules de K :

Soit M un sous A-module non nul de K et $a_M = M \cap A$; c'est un idéal non nul de A.

M peut être considéré comme la réunion des idéaux fractionnaires qui y sont contenus et qui contiennent a_M, un tel idéal est de la forme $a_M\, b^{-I}$ où b est un idéal entier. De sorte que si on désigne par $\mathcal{F}_M$ la famille des idéaux entiers vérifiant $a_M\, b^{-I} \subset M$, on peut écrire :

$$(*) \qquad M = \bigcup_{b \in \mathcal{F}_M} a_M\, b^{-I}.$$

Lemme I.I : La famille $\mathcal{F}_M$ possède les propriétés suivantes :

(i) $a \in \mathcal{F}_M \Longrightarrow a$ étranger à a_M

(ii) si $b \in \mathcal{F}_M$ et $b \subset b'$ alors $b' \in \mathcal{F}_M$

(iii) $\mathcal{F}_M$ est stable par intersection finie,

et réciproquement, si $(a, \mathcal{F})$ est un couple vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) alors il existe un et un seul sous A-module M de K tel que $a = a_M$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$.

De plus : pour que M soit un sous anneau de K, il faut et il suffit que $(a_M, \mathcal{F}_M)$ vérifie (i), (ii) et que $\mathcal{F}_M$ soit stable par multiplication.

2 - Sur-anneaux de A : On appelle ainsi les anneaux intermédiaires entre A et K. L'égalité (*) de I) permet de voir que si Δ est une famille d'idéaux premiers de A, alors :

$$(**) \qquad \bigcap_{p \in \Delta} A_p = \bigcup_{\substack{a \not\subset p \\ \forall\, p \in \Delta}} a^{-I} .$$

Lemme I.2 : Soit $p \in \mathcal{P}$. L'anneau $\bigcup_{n \geqslant o} p^{-n}$ (qui est la transformé de Nagata de p) est un anneau de fractions de A, si et seulement si p est d'ordre fini dans le groupe des classes de A.

D'où :

proposition [3] : Tout sur-anneau de A est un anneau de fractions de A, si et seulement si le groupe des classes de A est de Torsion.

II - Topologies linéaires : Soient $\mathcal{C}$ une topologie sur K linéaire et compatible avec sa structure de corps, $\mathcal{M}$ un système fondamental de voisinages de o formé de sous-A-modules de K.

Lemme II.I : Si $M \in \mathcal{M}$ alors on a, sauf pour un nombre fini d'idéaux premiers de A, $p^n \in \mathcal{F}_M$ pour tout $n \geqslant o$.

Preuve : Comme l'application $x \longrightarrow x^{-I}$ est continue, il existe M' tel que $(I+M')^{-I} \subset I+M$, d'où :

$\frac{a}{I+a} \in M$ quel que soit $a \in a_{M'}$. Il existe donc $b_a \in \mathcal{F}_M$ tel que $\frac{a}{I+a} \in a_M \; b_a^{-I}$ ou $(a)\, b_a \subset (I+a)$.

Mais comme (a) et (I+a) sont étrangers, on en déduit $b_a \subset (I+a)$ d'où $(I+a) \in \mathcal{F}_M$ d'après la propriété (ii) de $\mathcal{F}_M$.

D'autre part, pour tout idéal premier ne divisant pas $a_{M'}$, et tout $n \geqslant o$.

on a : $a_{M'} + p^n = A$ d'où l'existence de $a \in a_{M'}$ tq $I + a \in \beta^n$, ce qui implique $p^n \in \mathcal{F}_M$. Les seuls premiers n'ayant pas cette propriété sont parmi les diviseurs de $a_{M'}$ et sont donc en nombre fini.

Lemme II.2 : Si $M \in \mathcal{M}$, il existe un idéal entier a et une famille finie d'idéaux premiers $p_I, \dots, p_h$ tels que

$$M = a^{-I}\, a_M\, (A_{p_I} \cap \dots \cap A_{p_h}).$$

Preuve : Considérons les idéaux premiers (en nombre fini d'après le lemme précédent) $p_I, \dots, p_h$, pour lesquels il existe une plus grande puissance finie $p_i^{n_i}$ appartenant à $\mathcal{F}_M$. Parmi les idéaux entiers qui se décomposent uniquement à l'aide de $p_I, \dots, p_h$ il y en a un plus petit, c'est $a = p_I^{n_I} \dots p_h^{n_h}$.
Nous avons alors

$$M = (a^{-I}\, a_M) \bigcup_{\substack{(b, p_i) = I \\ i = I, \dots, h}} b^{-I} = a^{-I}\, a_M\, (A_{p_I} \cap \dots \cap A_{p_h}) \quad \text{d'après } (**)$$

Théorème : Toute topologie linéaire de corps sur K est la borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques, de plus la famille est finie, si et seulement si la topologie est localement bornée.

Démonstration : Soient $\mathcal{T}$ une telle topologie et $\mathcal{M}$ un système fondamental de voisinages de o formé de sous-A-modules de K.
Si $M \in \mathcal{M}$ on a, d'après le lemme précédent, $(a a_M^{-1}) M = A_{p_I} \cap \dots \cap A_{p_h}$. donc chaque A_{p_i} est un voisinage de o pour $\mathcal{T}$, on en déduit que $\mathcal{T}$ est la borne supérieure des topologies p-adiques pour $p \in \Lambda$ où Λ est la famille des idéaux premiers p tels que A_p soit voisinage de o pour $\mathcal{T}$.
Le reste résulte de [I] § 6, ex 20.

Corollaire : Un anneau de Dedekind est ouvert pour une topologie linéaire de corps de son corps des fractions, si et seulement si il est semi local.

Cela résulte aussi du résultat plus général, et facile, suivant :

Proposition [5] : Un anneau commutatif intègre est ouvert pour une topologie de corps linéaire de son corps des fractions, si et seulement si son radical de Jacobson est non nul, et dans ce cas, la seule topologie qui convient est celle définie par tous ses idéaux $\neq (o)$.

En effet, la topologie de tous les idéaux $\neq (o)$ est une topologie de corps, si et seulement Rad A $\neq (o)$ car :

$$(I+a)^{-I} \subset I + a \quad \text{si} \quad a \subset \text{Rad } A.$$

Remarque : On peut voir facilement que : toute topologie linéaire de corps sur le corps des fractions d'un anneau de Krull (ou un anneau "presque de Dedekind"(3)), A est la borne supérieure d'une famille de topologies définies par des valuations essentielles (p-adiques), si et seulement si A est de Dedekind, c'est-à-dire que la propriété introduite par le théorème caractérise les Dedekind parmi les Krull et les "presque de Dedekind". En particulier, tous les anneaux de Prüfer ne possèdent pas cette propriété, mais nous ne savons pas caractériser ceux qui la possèdent.

On peut aussi se poser la question plus générale suivante : Etant donné un anneau intégralement clos A, K son corps des fractions et (v_i) une famille de valuations de K telle que $A = \bigcap A_{v_i}$ est l'anneau de v_i.

Soient (T_i) les topologies définies sur K par les v_i. Comment caractériser A pour que toute topologie de corps, linéaire sur K, soit borne supérieure d'une sous famille de (T_i) ?

BIBLIOGRAPHIE

[I] N. BOURBAKI Topologie génerale, chapitre III.

[2] E. CORREL Topologics on quotients fields : Duke M.J., 35, n° I (I968) p. I75-I78.

[3] GILMER Multiplicative ideal theory II : Queen's papers on pure and applied Mathematics, n° I2.

[4] A. JEBLI C.R.A.S. t. 272, p. II73-II74 (I97I).

[5] A. JEBLI C.R.A.S. t. 274, p. 446-446 (I972).

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° 7 A. JEBLI
UER Math 35I
Cours de la Libération
33 - TALENCE