B. BALLET

Topologies linéaires et modules absolument purs

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A4_0>

TOPOLOGIES LINEAIRES ET MODULES ABSOLUMENT PURS

B. BALLET

I - Topologies d'Artin-Rees

Rappelons que la topologie $\mathcal{T}$ d'un anneau A est linéaire (à gauche), si l'ensemble $\mathcal{F}$ des idéaux (à gauche) ouverts, est un système fondamental de voisinages de 0. L'ensemble $\mathcal{F}$ a les propriété suivantes :

I) Tout idéal à gauche contenant un élément de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

2) Toute intersection finie d'idéaux de $\mathcal{F}$ est un idéal de $\mathcal{F}$.

3) Si $\mathfrak{J} \in \mathcal{F}$, $a \in A$, l'idéal à gauche des x tels que $x\, a \in \mathfrak{J}$ est ouvert dans A.

Réciproquement, si on se donne un ensemble $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche vérifiant I, 2, 3, alors il existe une topologie et une seule, compatible avec la structure d'anneau de A et pour laquelle $\mathcal{F}$ est l'ensemble des idéaux ouverts.

Toute topologie linéaire sur A peut être définie aussi par la donnée d'une sous catégorie fermée $\underline{C}$ de Mod A_s ($\underline{C}$ est stable par sous objets, quotients, somme directe) : $\mathcal{F}$ est alors l'ensemble des idéaux tels que $A/\mathfrak{J} \in \underline{C}$. Inversement, $\mathcal{F}$ étant donné, $\underline{C}$ est la sous-catégorie de Mod A_s des M tels que $\forall\, x \in M$, $\mathrm{Ann}_A\, x \in \mathcal{F}$. Quand on adopte ce point de vue, on peut définir sur tout A-module M une topologie $T_{\underline{C}}(M)$: N sous module de M est ouvert pour $T_{\underline{C}}(M) \Longleftrightarrow M/N \in \underline{C}$.

Si M est un A-module et P un sous A-module, $T_{\underline{C}}(M)$ induit sur P une topologie $T'_{\underline{C}}(P)$ moins fine que $T_C(P)$ et P. Gabriel a démontré ([4] chapitre V proposition I.I)

<u>proposition I</u>. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

a) <u>Pour tout A-module M et tout sous module P de M</u>,

$T_{\underline{C}}(P) = T'_C(P)$.

b) $\underline{C}$ est stable par enveloppes injectives.

Pour tout A-module M, nous noterons $M_{\underline{C}}$ où $M_{\mathcal{C}}$ (si $\mathcal{C}$ est la topologie sur A définie par C) le plus grand sous objet de M qui est situé dans $\underline{C}$, c'est aussi l'ensemble des éléments de M annulés par un idéal ouvert de A ; a et b) sont alors équivalentes à

c) Pour tout A-module à gauche injectif E, $E_{\underline{C}}$ est injectif.

Quand A est commutatif noethérien, on a une bonne description des catégories $\underline{C}$ vérifiant a).

Proposition 2. Soient A un anneau commutatif noethérien, $\underline{C}$ une sous catégorie fermée de Mod A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\underline{C}$ vérifie les assertionsde la proposition I.

b) Il existe une partie Φ de Spec A, stable par spécialisation telle que $\underline{C} = \{M \,;\, \mathrm{Supp}\, M \subset \Phi\}$. En particulier si Φ est une partie fermée V(G), la topologie $\mathcal{C}$ associée à $\underline{C}$ est la topologie G-adique de A. (On retrouve ainsi le lemme d'Artin Rees sur les topologies adiques d'un anneau noethérien).

Lorsqu'on se donne un anneau strictement linéairement compact A ([3], chapitre III, § 2, Ex I9), la topologie $T_{\underline{C}}(P)$ est la même que la topologie $T'_{\underline{C}}(P)$ quand P est un sous module de type fini d'un module de présentation finie M, mais les assertions de la proposition I ne sont pas vérifiées, à moins que A ne soit noethérien ([I], chapitre II, proposition 2.3) ; ceci va nous conduire à étudier un affaiblissement de la condition de Gabriel. Nous allons supposer désormais qu'il y a un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'idéaux bilatères, de façon que pour tout A-module de type fini M, $T_{\underline{C}}(M)$ ait pour système fondamental de voisinage de 0 les $\mathfrak{J}M$, pour $\mathfrak{J}$ ouvert dans A. Notons alors F(M) la condition : si $N \subset M$ et si N est de type fini, $T_{\underline{c}}(N) = T'_{\underline{c}}(N)$, c'est-à-dire : pour tout idéal $\mathfrak{J}$-bilatère ouvert de A, $\exists$ $\mathfrak{J}'$ bilatère ouvert tel que $\mathfrak{J} N \supset \mathfrak{J}' M \cap N$. On a alors

Proposition 3. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) F(M) est vérifée pour tout A-module libre de type fini.

b) F(P) est vérifiée pour tout A-module de présentation finie.

c) Pour tout A-module injectif E, $E_{\mathcal{C}}$ est un sous A-module pur de E, et donc un A-module absolument pur.

La démonstration se trouve dans ([I], chapitre IV, proposition I.4), on utilise la caractérisation des suites pures donnée dans ([5], chapitre I, lemme 2.2).

On appellera topologie d'Artin Rees, toute topologie vérifiant les conditions de la proposition 3.

Les modules absolument purs (purs dans tout module les contenant), ont été étudiés en particulier par Stenström et Goblot, en voici quelques caractérisations.

Proposition 4. Soient A un anneau, M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes

(AP_I) M est absolument pur

(AP_2) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

où L est libre de type fini, N de type fini, la suite

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,M) \longrightarrow 0$ est exacte.

(AP_3) $\mathrm{Ext}^I_A(P,M) = 0$ pour tout module de présentation finie P. Si de plus, A est cohérent à gauche, (AP_I),$(AP_2)(AP_3)$ sont équivalentes à

(AP_4) Pour tout idéal G de type fini, la flèche canonique

$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(G,M)$ est surjective.

(AP_5) Si B est un anneau commutatif, $P : B \longrightarrow A$ un homomorphisme de B dans le centre de A et E un B-cogénérateur injectif, le A module à droite

$\mathrm{Hom}_B(M,E)$ est plat.

On en déduit

Proposition 5. Si A est cohérent, muni d'une topologie linéaire $\mathscr{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes

I) $\mathscr{C}$ est d'Artin Rees

2) F(A) est vérifiée.

Corollaire. Soient A un anneau commutatif limite inductive plate d'anneaux noethériens, G un idéal de type fini, alors la topologie G-adique est d'Artin Rees (Exemple : anneau de polynômes à une infinité d'indéterminées sur un corps).

II - Platitude du séparé complété d'un anneau cohérent.

Proposition 6. Soit A un anneau cohérent à gauche muni d'une topologie d'Artin Rees $\mathscr{C}$. Pour que le séparé complété $\hat{A}$ de A soit un A-module à droite plat, il suffit que le foncteur complétion soit exact à droite sur la sous catégorie pleine des modules de présentation finie ; ces modules étant munis de la topologie déduite de celle de A.

En effet, pour tout idéal G de type fini de A, la topologie déduite de celle de A est la même que celle induite par celle de A puisque $\mathscr{C}$ est d'Artin-Rees. le séparé complété $\hat{G}$ s'identifie donc à $\hat{A} \otimes_A G$ d'une part, et il s'injecte d'autre part dans $\hat{A}$.

Cette condition suffisante est vérifiée quand il y a un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 ([3] chapitre III, § 2, proposition I.5, lemme 2) ou bien quand la topologie est <u>artinienne</u> (si $\mathfrak{J}$ est un idéal ouvert $A/\mathfrak{J}$ est un A module artinien) ([2], chapitre III, § 7, n° 4 théorème I Exemple II).

<u>Exemple</u> : Soient K un corps, $K[X_i]_{i \in I}$ un anneau de polynômes sur K à une infinité d'interminées, m l'idéal maximal des polynômes sans coefficients constants, alors le séparé complété de $K[X_i]_{i \in I}$ pour la topologie m-adique s'identifie à l'anneau $K[[X_i]]_d$ des séries sur K n'ayant chacune qu'un nombre fini de termes de degré donné ([3], chapitre III, § 2 Exemple I2) et c'est un $K[X_i]_{i \in I}$ module plat.

En effet, il y a un système fondamental dénombrable de 0 et comme l'anneau $K[X_i]_{i \in I}$ est cohérent, on vérifie que la topologie m-adique est d'Artin Rees avec la proposition 5.

<u>proposition 7. ([I], chapitre III, proposition 2.3)</u>

Dans le cas où la topologie $\mathcal{T}$ est artinienne, il est équivalent de dire que :

(i) $\mathcal{T}$ est d'Artin Rees

(ii) Il existe un A module cogénérateur injectif E tel que $E_{\mathcal{T}}$ soit absolument pur

(iii) $\hat{A}$ est un A-module à droite plat.

III - Séparé complété d'un module de type fini

Reprenons les conventions du début : A est un anneau muni d'une topologie linéaire $\mathcal{C}$ ayant un système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux bilatères ; nous allons voir que le séparé complété d'un module de type fini M, muni de la topologie $T_{\underline{C}}(M)$ s'identifie à un module d'homomorphismes muni de la topologie de la convergence simple. Ceci résulte du

Lemme de densité. Soient A un anneau, E un A-module cogénérateur injectif, A' l'anneau $\mathrm{Hom}_A(E,E)$ et E' un sous A-A' bimodule de E. Si on désigne, pour tout A-module M, par φ_M l'application canonique

$$\varphi_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M,E'),E).$$

Alors $\varphi_M(M)$ est un sous A-module partout dense dans $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M,E'),E)$ muni de la topologie de la convergence simple.
De plus, si M est un sous module d'un E'^m, φ_M est surjectif, il est bijectif si $\mathrm{Hom}_A(M,E') = \mathrm{Hom}_A(M,E)$.

Appliquons le lemme en prenant E = produit des enveloppes injectives des $A^{(N)}/F$ pour F sous module de $A^{(N)}$ et $E' = \varinjlim_{\mathfrak{J} \text{ ouvert}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{J},E)$; pour tout idéal bilatère ouvert $M/\mathfrak{J}M$ s'injecte dans E' et comme

$$\mathrm{Hom}_A(M/\mathfrak{J}M,\ E) = \mathrm{Hom}_A(M/\mathfrak{J}M,\ E'),$$

on déduit du lemme $M/\mathfrak{J}M = \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M/\mathfrak{J}M,\ E'),E)$
et donc $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M,E'),E)$.

Proposition 8. Si la catégorie $\underline{C}$ associée à $\mathcal{C}$ est stable par enveloppes injectives, pour toute suite exacte de modules de type fini

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \longrightarrow 0$$

la suite $0 \longrightarrow \hat{M} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{N} \xrightarrow{\hat{v}} \hat{P}$ qu'on en déduit par passage aux séparés complétés est exacte ; de plus, $\hat{u}$ est un morphisme strict et $\hat{v}(\hat{N})$ est partout dense dans $\hat{P}$. Si $\mathscr{C}$ est d'Artin-Rees, la conclusion précédente reste vraie, à condition de prendre M,N,P de présentation finie.

On utilise l'interprétation précédente et le fait que dans le premier cas E' est A-injectif, et dans le second absolument pur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BALLET Thèse, Orsay 1971.

[2] N. BOURBAKI Théorie des Ensembles.

[3] N. BOURBAKI Algèbre commutative.

[4] P. GABRIEL Des Catégories abéliennes, Thèse, Paris 1960.

[5] D. LAZARD Autour de la platitude, Thèse, Paris 1968.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° 4 B. BALLET
Rés. Marie-Christine
58, rue des Caillols
13 - MARSEILLE (12^{e})