Michel Raynaud

Anneaux henséliens et approximations

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A13_0>

ANNEAUX HENSELIENS ET APPROXIMATIONS

Michel RAYNAUD

Soit (A,I) un couple formé d'un anneau A (commutatif) et d'un idéal I. On lui associe $(\hat{A},\hat{I})$ son complété pour la topologie I-adique et $(\tilde{A},\tilde{I})$ son hensélisé [9] et [10]. Ce n'est que récemment, grâce au théorème d'approximation de M. Artin [1], que l'on s'est aperçu à quel point les relations entre $\tilde{A}$ et $\hat{A}$ pouvaient être étroites. Pour les formuler commodément, posons d'abord une définition.

Définition. Le couple (A,I) satisfait à la propriété d'approximations si, pour toute famille finie $\underline{f} = (f_1,\dots,f_N)$ de polynômes dans $\tilde{A}[X_1,\dots,X_m]$, tout entier n et toute solution $\hat{\underline{x}}$ de $\underline{f} = 0$ dans $\hat{A}$, il existe une solution $\tilde{x}$ de $\underline{f} = 0$ dans $\tilde{A}$ telle que $\tilde{x} \equiv \hat{x} \mod \hat{I}^n$.

Théorème 1 (M. Artin). Soient A le localisé en un idéal premier d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent et I son idéal maximal. Alors (A,I) satisfait à la propriété d'approximation.

Ce théorème s'est avéré extrêment utile en géométrie algébrique en permettant d'algébriser nombre de constructions formelles ; joint à la considération des espaces algébriques, il a permis de donner une réponse très satisfaisante aux problèmes de représentabilité ([2], [3], [4]).

La démonstration proprement dite de ce théorème n'utilise pas vraiment d'idée nouvelle. Elle repose sur une utilisation très astucieuse du théorème de préparation et du lemme de Newton, et procède par récurrence sur la dimension de A.

On peut penser qu'une classe beaucoup plus large de couples (A,I) satisfait au théorème d'approximation ; en particulier, l'hypothèse A local ne devrait pas être essentielle. Il suffit peut-être que A soit noethérien excellent. Notons que dans le cas traité par M. Artin, les propriétés d'excellence de A sont dissimulées dans l'utilisation du théorème de préparation. Pour aborder des cas plus généraux, il faudra des idées de démonstration tout à fait nouvelles.

Dans cet exposé, nous commençons par donner des exemples d'utilisation des propriétés henséliennes pour résoudre des équations algébriques dans des cas suffisamment lisses. Les résultats énoncés sont essentiellement dus à Mademoiselle Renée Elkik. Puis nous nous livrons à quelques réflexions sur le théorème I qui font suite à des conversations avec M. Artin et Mlle Elkik.

I - Le cas lisse

Soient (A,I) un couple hensélien, $(S,\overline{S}) = (\mathrm{Spec}(A),\mathrm{Spec}(A/I))$ le couple de schémas correspondant, X un S-schéma affine de présentation finie, de sorte que $X = \mathrm{Spec}(B)$, $B = A[T_I,\dots T_m]/J$, $J = (\underline{f}) = (f_I,\dots,f_N)$.

Supposons que X soit lisse sur S, et cherchons à relever un point de X à valeurs dans $\overline{S}$ en un point de X à valeurs dans S. Lorsque A est complet, ceci est possible, compte tenu de la propriété infinitésimale de relèvement des morphismes lisses (EGA IV I7). En fait, c'est déjà possible dans le cas hensélien :

Théorème 2. Sous les conditions précédentes, l'application de restriction

$$X(S) \longrightarrow X(\overline{S})$$

est surjective, autrement dit, toute solution de $\underline{f} = 0$, mod I se relève en une solution de $\underline{f} = 0$ dans A.

La démonstration de ce théorème est immédiate dans le cas où A est local ; étudions le cas général.

Soit $\mathbb{A}^m = \operatorname{Spec} A[T_I,\ldots,T_m]$ et notons encore J le faisceau d'idéaux qui définit le sous-schéma fermé X de $\mathbb{A}^m$. On a la suite exacte de faisceaux localement libres :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J/J^2 \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{A}^m/S}\ {}^{m}|X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_{X/S} \arrow[r] & 0 \\ & & O_X^m & & \end{tikzcd}$$

Comme X est affine, cette suite est scindée, et on peut trouver un fibré normal à X dans $\mathbb{A}^m$. Il correspond à un quotient N de $\Omega_{\mathbb{A}^m/S}|X$ tel que la flèche composée

$$J/J^2 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{A}^m/S}|X \longrightarrow N$$

soit bijective. Notons $p : Y \longrightarrow X$ le X-schéma lisse égal au fibré vectoriel défini par N, et notons $\varepsilon : X \longrightarrow Y$ sa section nulle. Comme N est un quotient de O_X^m, Y est un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^m x_S X$ et à fortiori, un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^m x_S \mathbb{A}^m$. Soit $u : Y \longrightarrow \mathbb{A}^m$ la restriction à Y du morphisme d'addition $\mathbb{A}^m x_S \mathbb{A}^m \longrightarrow A^m$. Vu le choix de N, u est étale aux points de $\varepsilon(X)$, donc au-dessus d'un voisinage ouvert W de ε dans Y.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] & Y \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "u"] & \\ & X \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^m \end{tikzcd}$$

Partons d'un point $\overline{x} \in X(\overline{S})$ que l'on relève n'importe comment en un point $a \in \mathbb{A}^m(S)$. L'image réciproque de a dans W est étale sur S et possède une section au-dessus de $\overline{S}$, donc possède une section $w \in W(S)$, puisque $(S,\overline{S})$ est hensélien. Alors $x = p\circ w \in X(S)$ est un relèvement de $\overline{x}$.

<u>Corollaire I</u>. <u>Tout A/I-module projectif $\overline{P}$, de type fini, se relève en un A-module projectif P, de type fini, unique à isomorphisme près</u>.

Il suffit de noter que le foncteur des décompositions en somme directe de deux facteurs, d'un module libre de type fini est représentable par un schéma lisse et affine.

<u>Corollaire 2</u>. <u>L'application de restriction de S à $\overline{S}$ induit une équivalence de catégories entre revêtements finis étales de S et de $\overline{S}$</u> (cf. [8]).

Noter que les structures de A-algèbres étales sur un A-module projectif de type fini sont représentables par un schéma lisse, quasi-affine. On peut aussi procéder plus directement en plongeant les schémas étales dans un espace affine.

II - <u>Le cas lisse sur le complémentaire de V(I)</u>

Gardons les notations du numéro précédent, mais supposons A noethérien et X <u>lisse au-dessus de</u> $U = S - \overline{S}$. Dans ce cas, le problème du relèvement des solutions se traite classiquement à l'aide du lemme de Newton. Sous sa forme la plus simple, ce lemme nous dit que si $\underline{f} = (f_1,\dots,f_N)$, si $\Delta = |\partial f_i/\partial X_j|$, $i,j = 1,\dots,N$ et si $\underline{x}$ est une solution approchée telle que $f(\underline{x}) \equiv 0 \mod \Delta(\underline{x})^2 I^n$, alors il existe une solution $\underline{x}'$ de $\underline{f} = 0$, telle que $\underline{x}' \equiv \Delta(x)\, I^n$ (Bourbaki. Alg. Com. III, § 4, Théorème 2). Des raffinements de ce résultat ont été obtenus par Tougeron ([11]). Généralement, on fait des hypothèses restrictives sur X, du type X est localement ou globalement défini par le "bon nombre" d'équations. Pour les applications géométriques, il est intéressant de les éliminer. C'est ce qui est en train d'être fait par Mlle Elkik. Le résultat en vue est alors le suivant :

<u>Théorème 3</u>. <u>Sous les conditions précédentes, il existe un couple d'entiers (r,s) tel que pour tout entier</u> $n \geq s$ <u>et pour tout</u> $\underline{x}$ <u>tel que</u> $\underline{f}(\underline{x}) = 0 \mod I^{n+r}$, <u>il existe une solution</u> $\underline{x}'$ <u>de</u> $\underline{f} = 0$, <u>telle que</u> $\underline{x}' \equiv \underline{x} \mod I^n$.

Autrement dit, le système projectif des solutions approchées mod. les puissances de I, satisfait une condition de Mittag-Lefler uniforme.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de générateurs de I. Lorsque I est monogène, U est affine et on utilise une méthode analogue à celle indiquée dans le cas lisse pour se ramener au cas où $\Omega_{X/S}$ est libre au-dessus de U.

Des résultats complémentaires devraient permettre de comparer les hensélisés de X le long de deux section suffisamment voisines.

Indiquons quelques applications.

Corollaire I. Si $\hat{x}$ est une solution de $f = 0$ dans $\hat{A}$, pour tout n, il existe une solution x de $f = 0$ dans A, congrue à $\hat{x}$ mod $\hat{I}^n$.

Notons $\hat{S} = \mathrm{Spec}(\hat{A})$ et $\hat{U} = \hat{S} - \overline{S}$.

Corollaire 2. Soit M' un $\hat{S}$-faisceau cohérent localement libre sur $\hat{U}$, alors il existe un S-module cohérent M tel que $M \times_S \hat{S}$ soit isomorphe à M'.

Des résultats plus complets devraient permettre de retrouver et de généraliser certains énoncés de Hironaka ([7]).

Corollaire 3. Le couple (A,I) est parafactoriel (EGA IV 2I-I3), si et seulement si il en est de même de $(\hat{A},\hat{I})$ et plus généralement, l'application naturelle

$$\mathrm{Pic}(U) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{U})$$

est bijective.

Corollaire 4. L'application de changement de base $U \longrightarrow \hat{U}$ induit une équivalence de catégories entre celle des revêtements finis étales de U et celle relative à $\hat{U}$.

Corollaire 5. On a U connexe $\Longleftrightarrow \hat{U}$ connexe et si cette condition est réalisée, U et $\hat{U}$ ont des groupes fondamentaux isomorphes.

III - Quelques remarques sur la propriété d'approximation

Soient (A,I) un couple hensélien noethérien et $(\hat{A},\hat{I})$ son complété. Si l'on veut que (B,IB) possède la propriété d'approximation pour toute A-algèbre finie B, il est facile de voir que les fibre du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ doivent être géométriquement normales. Vu notre ignorance, on peut envisager une hypothèse encore plus forte sur les fibres en question :

Définition. Le couple (A,I) est excellent, si A est noethérien et si les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ sont géométriquement régulières (On prendra garde que cette définition ne recouvre pas la notion d'anneau excellent introduite par Grothendieck (EGA IV 7)).

Question I. Est-il vrai qu'un couple excellent satisfait à la propriété d'approximation ?

En dehors du cas traité par M. Artin, le seul résultat positif dans cette direction dont nous disposons, est une esquisse de démonstration dans le cas $\dim(A) \leq 2$. Il se peut, que pour étudier un tel problème, on ait à regarder de très près les relations entre morphismes lisses et morphismes géométriquement réguliers. Par exemple, pour ne pas parler dans le vide, nous envisageons le problème suivant où tous les schémas considérés sont noethériens.

Problème. Soient $X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini, $S' \longrightarrow S$ un morphisme régulier (donc plat à fibres géométriquement régulières) et $u : S' \longrightarrow x$ un S-morphisme.

Peut-on trouver un X-schéma Y, <u>lisse</u> sur S, et une factorisation de u à travers Y.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, dashed] & \\ X \arrow[dr] & & S' \arrow[ll, "u"] \arrow[ul, dashed] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Un tel énoncé, s'il était vrai, entraînerait immédiatement qu'un couple (A,I) excellent satisfait à la propriété d'approximation. Mais si des énoncés du type ci-dessus existent, on peut craindre que leur démonstration soit de difficulté comparable à celle des problèmes de désingularisation.

Enfin, signalons pour terminer, qu'il est temps de s'apercevoir que même dans le cas (A,I) complet, on a finalement très peu d'informations sur l'existence et la répartition des solutions d'un système d'équations polynomiales. On dispose essentiellement des résultats de Greenberg dans le cas d'un anneau de valuation discrète [6], et de son foncteur dans le cas local complet à corps résiduel parfait [5]. Malheureusement, le foncteur de Greenberg "tue" un peut trop la structure de départ.

Rappelons pour mémoire la question suivante :

<u>Question 2</u>. Supposons que $\underline{f} = 0$ admette des solutions modulo toute puissance de I. Alors $\underline{f} = 0$ a-t-il une solution dans $\hat{A}$?

Posons encore une autre question pour laquelle une réponse positive aurait comme conséquence des propriétés de finitude intéressantes.

<u>Question 3</u>. Peut-on ramener le système d'équations $\underline{f} = 0$ à un système d'équations lisses ? Plus précisément, si $X = \mathrm{Spec}(A[T_1,\dots,T_m]/(\underline{f}))$, peut-on trouver un S-schéma lisse de type fini Y et un S-morphisme $u : Y \longrightarrow X$ tel que l'application $Y(S) \longrightarrow X(S)$ soit surjective ?

Utilisant la désingularisation et la lissification de Néron, on peut montrer qu'il en est bien ainsi lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète.

- BIBLIOGRAPHIE -

[I] M. ARTIN Pub. I.H.E.S. n° 36. Algebraic approximation of structures over complete local rings.

[2] M. ARTIN Algebraization of formal moduli : I. Global Analysis - papers in honor of Kodaira - Princeton University press.

[3] M. ARTIN Algebraization of formal moduli : II. Annals of Math. Vol. 9I I970.

[4] M. ARTIN The implicit function theorem in algebraic geometry. Bombay Colloquium, Oxford, Bombay I969.

[5] M. GREENBERG Schemata over local rings - Annals of Math. Vol. 73 I96I.

[6] M. GREENBERG Rational points in henselian discrete valuation rings Pub. I.H.E.S. n° 23 (I964).

[7] H. HIRONAKA Formal line bundles along exceptonal loci - Bombay colloquium, Oxford, Bombay I969.

[8] H. KURKE Grundlagen des theorie des henselschen ringe und schemata und ihrer anwendungen - Humboldt-Universität zu Berlin I969.

[9] J.P. LAFON Anneaux henséliens - Bul. Soc. Math. de France t. 9I (I963).

[IO] M. RAYNAUD Anneaux locaux henséliens - Lectures Notes in Math. n° I69 Springer-Verlag I970.

[II] J.C. TOUGERON Idéaux de fonctions différentiables. Thèse - Faculté de Rennes I967.

[I2] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de géométrie algébrique (cité E.G.A.) Publ. I.H.E.S. n° 4 ...

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I3 M. RAYNAUD
Les Bruyères
97, rue Colonel Fabien
92 - ANTONY