PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

HAMET SEYDI

# La théorie des anneaux japonais

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 12, p. 1-83
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A12_0>

# LA THEORIE DES ANNEAUX JAPONAIS

Hamet SEYDI

Dans cet article, on essaie de classifier les divers concepts qui découlent du concept d'anneau japonais. Comme il est à peine moins facile dans ce domaine de démontrer de théorèmes que de trouver une terminologie qui convienne à tous, il y a de fortes chances que celle que nous utiliserons dans la suite de cet article ne soit admise par tout le monde, et nous nous en excusons par avance.

Nous appelons anneaux de Mori, les anneaux intègres A tels que la clôture intégrale de A (i.e sa fermeture intégrale dans son corps des fractions), est un A-module de type fini en hommage aux travaux de Y. Mori sur la finitude de la fermeture intégrale. Nos anneaux japonais distingués sont les anneaux de la classe (K) de [I2] (du moins s'ils sont noethériens). Nos anneaux pseudo-géométriques sont les anneaux pseudo-géométriques A de [I0] qui vérifient en outre la condition supplémentaire suivante : pour toute A-algèbre de type fini B, l'ensemble des points s de S = Spec(B) où l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est régulier et ouvert dans S.

Nous appelons anneau de Nagata, les anneaux pseudo-géométriques universellement catenaires, c'est-à-dire les anneaux qui possèdent toutes les propriétés géométriques étudiées par Nagata dans ses divers articles d'algèbre commutative.

Nous appelons anneau géométrique, tout anneau pseudo-géométrique A tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ soit à fibres formelles géométriquement régulières, donc les anneaux excellents de Grothendieck sont nos anneaux géométriques qui sont universellement catenaires.

## I - ANNEAU DE MORI

(I.0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau de Mori, si A est intègre et si sa clôture intégrale A est un A-module de type fini

(I.0.I) Donc tout anneau intègre et intégralement clos est un anneau de Mori, et tout anneau de fractions d'un anneau de Mori, est un anneau de Mori.

(I.I) Théorème : Soit A un anneau de Mori. Alors tout anneau de polynômes $B = A[T_\alpha]_{\alpha \in \Lambda}$ pour tout ensemble $\Lambda$ est un anneau de Mori.

Preuve : Soient $\bar{A}$ la clôture intégrale de A et $B' = \bar{A}[T_\alpha]_{\alpha \in \Lambda}$.
Alors $B' = B[\bar{A}]$, donc B' est entier sur B et a même corps des fractions que B. En outre, B' est intégralement clos, donc B' est la clôture intégrale de B. Donc B est un anneau de Mori puisque $B' = B[\bar{A}]$ est un B-module de type fini, parce que $\bar{A}$ est un A-module de type fini.

(I.2) Théorème : Soit A un anneau de Mori noethérien. Alors tout anneau de séries formelles $B = A[[T_\alpha]]_{\alpha \in \Lambda}$ pour tout ensemble $\Lambda$ (B désignant la réunion des $B_E = A[[T_\alpha]]_{\alpha \in E}$, où E est une partie finie de $\Lambda$) est un anneau de Mori.

Preuve : Soient $\bar{A}$ la clôture intégrale de A et $B' = B[\bar{A}]$. Alors B' est un B-module de type fini ayant même corps des fractions que B. Pour prouver que B' est la clôture intégrale de B, il suffit de prouver que $B'_E = B_E[\bar{A}]$ est intégralement clos pour toute partie finie E de $\Lambda$. Or $B'_E = \bar{A}[[T_\alpha]]_{\alpha \in E}$, donc $B'_E$ est intégralement clos (cf [IO] 47.6, p.200), d'où la conclusion.

(I.3.I) Proposition : Soit A un anneau semi-local intègre. Alors A est un anneau de Mori, si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{M}}$ est un anneau de Mori.

Preuve : La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Puisque A est semi-local et $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Mori, il existe une sous-A-algèbre finie A' de la clôture intégrale $\bar{A}$ de A tel que $A'_{\mathfrak{m}} = \bar{A}_{\mathfrak{m}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Donc $\bar{A} = A$, d'où la conclusion.

(I.3.2) Remarque : La proposition précédente n'est pas vraie si A n'est pas semi-local, même si A est noethérien (cf [IO] Ex.8, p.2II).
En revanche, on a le

(I.3.3) Théorème (Nagata) : Soient A un anneau intègre noethérien, K son corps des fractions, K' une extension finie de K, A' la fermeture intégrale de A dans K'. Pour que A' soit une A-algèbre finie, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i) Il existe $f \neq o$ dans A tel que $A'_f$ soit une $A_f$-algèbre finie.

ii) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la fermeture intégrale $A'_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ dans K' est une A-algèbre finie (donc aussi pour tout idéal premier $p \in$ (Spec (A)), la fermeture intégrale $A'_p$ de $A_p$ dans K' est une $A_p$-algèbre finie).

Nous aurons besoin du lemme suivant :

(I.3.3.I) Lemme : Soient A un anneau noethérien intègre et X = Spec(A). Supposons qu'il existe f $(\neq o)$ A tel que $A_f$ soit normal. Alors Nor(X) (notation de [4] (6.I3.I)) est ouvert dans X.

Preuve : Alors $D(f) \subseteq$ Nor(X). D'autre part, soit $E = \{p \in \mathrm{Ass}_A(A/fA) \mid$ ou bien $ht(p) = I$ et $A_p$ n'est pas régulier, ou bien $ht(p) > I\}$ ; E est un ensemble fini, et d'après le critère de normalité de Serre ([4] 5.8.6),
$\mathrm{Nor}(X) = X - \bigcup_{p \in E} V(p)$, donc Nor(X) est ouvert dans X.

(I.3.3.2) <u>Démonstration de (I.3.3)</u> : Les conditions sont évidemment nécessaires, car pour toute partie multiplicative S de A, $S^{-I} A'$ est la fermeture intégrale de $S^{-I}A$ dans K, et est par hypothèse un $S^{-I}A$-module de type fini ; et pour la condition (i), il suffit de prendre f = I. Pour voir qu'elles sont suffisantes, soit $(B_\lambda)$ la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres finies de K', ayant K' pour corps des fractions et contenant un système générateur du $A_f$-module $A'_f$. Posons Y = Spec(A), $X_\lambda = \mathrm{Spec}(B_\lambda)$, désignons par $u_\lambda$ le morphisme $X_\lambda \longrightarrow Y$ et soient

$$S_\lambda = X_\lambda - \mathrm{Nor}(X_\lambda) \quad , \quad T_\lambda = u_\lambda(S_\lambda).$$

D'après le choix des $B_\lambda$ on a $(B_\lambda)_f = A'_f$, donc $S_\lambda$ est fermé d'après le lemme (I.3.3.I). Puisque $u_\lambda$ est un morphisme fermé, $T_\lambda$ est fermé dans Y.
Soit $p \in \mathrm{Spec}(A)$, il existe alors d'après (ii) un $\lambda$ tel que $(B_\lambda)_p = A'_p$, et par suite tous les points de $X_\lambda$ au-dessus de p appartiennent à $\mathrm{Nor}(X_\lambda)$ ; en d'autres termes $\bigcap_\lambda T_\lambda = \phi$; comme Y est noethérien et les $T_\lambda$ fermés dans Y, il existe un $\lambda_o$ tel que $T_{\lambda_o} = \phi$, donc $B_{\lambda_o}$ est intégralement clos et comme son corps des fractions est K', on a $B_{\lambda_o} = A'$. c.q.f.d.

(I.3.3.3) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau noethérien intègre. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>A est un anneau de Mori</u>

(ii) <u>Il existe un élément</u> f ≠ o <u>dans A tel que A soit un anneau de Mori et pour tout idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$ <u>de A, l'anneau local</u> $A_{\mathfrak{m}}$ <u>est un anneau de Mori</u>.

(I.4) <u>Théorème</u> : <u>Soient A un anneau intègre et intégralement clos</u>, $A' = A[t]$ <u>une A-algèbre finie monogène et sans torsion, et d le discriminant d'un polynôme unitaire de degré minimum de t sur A et</u> $\overline{A'}$ <u>la clôture intégrale de A</u>.
<u>Alors on a l'inclusion</u> $d\overline{A'} \subseteq A$.

En particulier, si A est noethérien et d ≠ o, $\overline{A'}$ est un A-module de type fini.

I.4.I. Lemme : Soient $A$ un anneau intègre et intégralement clos, $A' = A[T]$ une $A$-algèbre finie monogène et sans torsion, et $f(T)$ un polynôme unitaire de degré minimum de $t$ sur $A$. Alors l'homomorphisme $\varphi : A[T] \longrightarrow A'$ de $A$-algèbres défini par $\varphi(T) = t$ a pour noyau $f(T)\,A[T]$, en d'autres termes $A' \simeq A[T]/f(T)A[T]$ et $f(T)$ est unique.

Preuve : L'homomorphisme canonique $A' \longrightarrow A' \otimes_A K$ (où $K$ désigne le corps des fractions de $A$) est injectif. Soit $g(t) \in K[T]$ le polynôme minimal de $t \otimes_A I$ sur $K$, alors $A' \otimes_A K \simeq K[T]/g(T)K[T]$.
Puisque $A' \longrightarrow A \otimes_A K$ est injectif, $g(T)$ a ses coefficients dans $A$ d'après le lemme de Kronecker. Donc $g(T) = f(T)$ à cause de la minimalité du degré de $f(T)$. Alors $A' \longrightarrow A' \otimes_A K$ se factorise en

$$A' \xrightarrow{\varphi} A[T]/f(T)A[T] \longrightarrow A' \otimes_A K.$$

Il est clair que $\varphi$ est surjectif, il est aussi injectif puisque $A' \longrightarrow A' \otimes_A K$ est injectif, d'où la conclusion.

(I.4.2) Démonstration de (I.4) : On a donc $A' \simeq A[T]/f(T)A[T]$ où $f(T)$ est l'unique polynôme unitaire de degré minimum de $t$ sur $A$. Si $d = o$, l'assertion est triviale, nous pouvons donc supposer $d \neq o$. Soient $K$ le corps des fractions de $A$, $L$ une extension finie de $K$ dans laquelle $F(T)$ se décompose en polynôme du premier degré et $Q$ l'anneau total des fractions de $A'$.
Alors $Q = K[t] \simeq K[T]/f(T)K[T]$.
Soient $a_I,\dots,a_n$ ($n = \deg f$) les racines de $f(T)$ dans $L$ ; alors il existe un $K$-homomorphisme $\phi_i : Q \rightarrow L$ tel que $\phi_i(t) = a_i$ quel que soit $i = I,\dots,n$.
Soit $b \in \overline{A}'$, alors $b = \sum\limits_{I \leq j \leq n-I} u_j\, t^j$ ($u_i \in K$, $x = \deg f$).

Alors $\phi_i(b) = \sum\limits_{I \leq j \leq n-I} u_j\, a_j^i$.

Si nous regardons ces égalités comme des équations linéaires en les inconnues $u_j$, le déterminant D du système est égal à $\prod_{i<j} (a_i - a_j)$ (cf. Van der Monde), donc $D^2 = d$.

Puisque les $\phi_i(b)$ et les $a_i$ sont entiers sur A, les $du_i$ sont aussi entiers sur A. Mais $du_i \in K$ quel que soit i et A est intégralement clos, donc $db \in A'$, donc $d\bar{A}' \subseteq A'$. On voit donc que si $d \neq o$, $\bar{A}'$ est contenu dans le sous A'-module de $A'_d$ engendré par $\frac{I}{d}$, donc $\bar{A}'$ est un A-module de type fini si A est noethérien et $d \neq o$. c.q.f.d.

(I.4.3) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau de Mori noethérien. Alors toute A-algèbre intègre finie contenant A, et dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A, est un anneau de Mori</u>.

<u>Preuve</u> : Soit A' une telle A-algèbre. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $t \in A'$ tel que A' et $A[t]$ aient même corps des fractions. Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A. Alors le polynôme minimal de t sur $\bar{A}$ est séparable, donc la clôture intégrale de $A[t]$, qui est aussi celle de A', est un $\bar{A}$-module de type fini, donc un A-module de type fini puisque $\bar{A}$ est un A-module de type fini. c.q.f.d.

(I.5) <u>Théorème</u> : <u>Soient A un anneau de Mori et X = Spec(A). Alors l'ensemble Nor(X) des points de X, où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est intégralement clos, est ouvert dans X</u>.

<u>Preuve</u> : Soient $\bar{A}$ la clôture intégrale de A et X' = Spec($\bar{A}$).
Soit $f : X' \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Alors $f_*(\underline{O}_{X'})$ est un $O_X$-module quasi-cohérent de type fini ([2] 6.7 p.3I3) et Nor(X) est l'ensemble des points x de X où $\underline{O}_{X,x} \longrightarrow (f_*(O_{X'}))_x$ est surjective, i.e l'ensemble des

points x de X, où le $\underline{O}_X$-module de type fini Coker($\underline{O}_X \longrightarrow f_*(O_{X'})$) est nul, qui est ouvert. c.q.f.d.

(I.5.I) Corollaire : Soient A un anneau semi-local noethérien. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout anneau quotient intègre de A est un anneau de Mori

(ii) Pour tout anneau quotient intègre B de A, le complété $\hat{B}$ de B est réduit.

Preuve : Montrons d'abord que (i) implique (ii).
C'est clair, si dim(A) = o. Supposons que n = dim(A) $\geqslant$ I. Il suffit tout simplement de prouver que si A est intègre, son complété $\hat{A}$ est réduit.
Si n = I, la fermeture intégrale de $\bar{A}$ est un anneau régulier, donc $\hat{A} \subseteq (A\ )^\wedge$ est réduit. On peut donc supposer n $\geqslant$ 2.
Soient X = Spec(A), X' = Spec($\bar{A}$) (où $\bar{A}$ désigne la clôture intégrale de A) et $\varphi$ : X' $\longrightarrow$ X l'homomorphisme canonique.
Soient S = X - Nor(X) et S' = $\varphi^{-I}$(S). Puisque Nor(X) $\neq \emptyset$ et $\varphi$ est surjectif. U' = X' - S' $\neq \emptyset$ , et S' est fermé dans X' puisque S est fermé dans X.
Il existe donc un élément f $\in$ A' tel que f(s) $\neq$ o pour tout point maximal s de S'. Donc si p' est un idéal premier minimal de fA', p = p'$\cap$ A $\in$ Nor(X), donc ht(p) = ht(p') = I (cf [IO] IO.I4, p.32) ; donc $A_p$ est un anneau valuation discrète ([IO] I2.4, p.40) ; donc $A_p = A'_{p'}$ ; d'où l'on conclut que A'/p' et A/p ont même corps des fractions, donc le complété de A'/p' est réduit puisqu'il en est ainsi de celui de A/p.
En appliquant donc le lemme de Zariski ([IO] 36.3, p.I32) à A' et f, on en conclut que le complété $\hat{A}'$ de A' est réduit, donc $\hat{A}$ ($\subseteq \hat{A}'$) est aussi réduit.
On a donc prouvé que (i) implique (ii).

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) découle du théorème suivant dû à Mori, que nous démontrerons plus loin (II 4.7).

(I.5.2) Théorème : Soit A un anneau semi-local noethérien intègre. Si le complété $\hat{A}$ de A est réduit, alors A est un anneau de Mori

Nous avons le corollaire suivant dû à Nagata.

(I.5.3) Corollaire : Soient A un anneau semi-local noethérien vérifiant les conditions équivalentes de (I.5.I) et X = Spec(A). Alors l'ensemble Reg(X) des points x de X, où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier, est ouvert dans X.

(I.5.4) Remarque : Si A est un anneau de Mori semi-local noethérien, le complété $\hat{A}$ de A n'est pas nécessairement réduit (cf [IO] Ex. 6, p.208). Cependant, on a le résultat suivant :

(I.5.5) Théorème : Soit A un anneau de Mori semi-local noethérien. On suppose que pour tout idéal premier p de A tel que $A_p$ soit un anneau de valuation discrète, l'anneau quotient A/p est "formellement réduit" (i.e son complété est réduit). Alors le complété $\hat{A}$ de A est réduit.

Preuve : Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A. D'après le raisonnement de (I.5.I), il existe un élément $f \in A$ tel que quel que soit l'idéal premier minimal p' de $f\bar{A}$, $p = p' \cap A \in \mathrm{Nor}(\mathrm{Spec}(A))$, donc ht(p) = ht(p') = I (cf [IO] IO.I4, p.32), donc $A_p$ est un anneau de valuation discrète ([IO] I2.I, p.40), donc $\bar{A}/p$ est "formellement réduit" par hypothèse.
D'autre part, on a en particulier $\bar{A}_{p'} = A_p$, donc $\bar{A}/p'$ a même corps des fractions que A/p, d'où l'on conclut que $\bar{A}/p'$ est "formellement réduit" puisque $(A/p)^\wedge$ et $(\bar{A}/p)^\wedge$ ont même anneau total des fractions ($\varphi$ : $A/p \longrightarrow \bar{A}/p$ étant injectif et fini).

En appliquant maintenant le lemme de ZARISKI [I0] 3b.3, p.I32) a $\bar{A}$ et $f$, on en conclut que $\bar{A}$ est "formellement réduit", donc $\hat{A}$ est réduit puisque $\hat{A} \subseteq (\bar{A})^{\wedge}$ ($A \to \bar{A}$ étant injectif et fini). c.q.f.d.

(I.5.6) Corollaire : Tout anneau semi-local noethérien intègre de dimension $\leq$ I qui est un anneau de Mori est "formellement réduit".

(I.6) Théorème (Zariski) : Soient A un anneau semi-local noethérien intègre dont le complété $\hat{A}$ est normal et B une A-algèbre finie intègre contenant A, et dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A. On suppose que pour tout idéal premier p de hauteur I de B, le complété de l'anneau semi-local B/p est réduit et que $\hat{B}$ est normal. Alors le complété B de B est normal.

Preuve : D'après le critère de Serre ([4] 5.8.6), il nous suffit de prouver que $B' = \hat{B}$ vérifie $(S_2)$ et $(R_I)$. Montrons d'abord que $B'$ vérifie $(R_I)$. Soit p' un idéal premier de hauteur $\leq$ I. Si $p = p' \cap B \neq 0$, alors $ht(p) = I$, et puisque $B'/pB'$ est réduit par hypothèse, on en conclut que $p'B'_{p'} = pB'_{p'}$, donc $B'_{p'}$ est un anneau de valuation discrète puisque $B_p$ est un anneau valuation discrète (B est normal par hypothèse). Si $p = o$, et si K désigne le corps des fractions de $\hat{A} \otimes_A L$ qui est normal puisque $\hat{A} \otimes_A K$ est normal en tant qu'anneau de fractions de $\hat{A}$ et $\hat{A} \otimes_A L = (\hat{A} \otimes_A K) \otimes_K L$.

On en conclut donc que $B'$ vérifie $(R_I)$. Pour voir maintenant que $B'$ vérifie $(S_2)$, on remarque d'abord que si $p' \in \mathrm{Spec}(B')$ et $p' \cap B = o$, alors $B'_{p'}$ est normal en tant qu'anneau de fractions de $A \otimes_A L$. Mais si $p' \cap B \neq o$, alors si $a\ (\neq o) \in p' \cap B$, l'anneau quotient $B'/aB'$ complété de $B/aB$ vérifie $(S_I)$, puisque $B/aB$ vérifie $(S_I)$ (B étant normal) et pour tout idéal premier minimal $p$ de $aB$, $B'/pB'$ est réduit par hypothèse. Donc $B'_{p'}$, est de profondeur $\geq 2$, d'où la conclusion.

Nous allons appliquer le raisonnement précédent pour prouver la

(I.6.I) <u>Théorème de "Pureté" (Nagata-Zariski)</u> : <u>Soient $S$ un schéma régulier</u>, $\varphi : X \to S$ <u>un morphisme fini et $x$ un point de $S$</u>.
<u>On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

(i) <u>$x$ est un point unibranche de $X$ où $X$ vérifie</u> $(S_I)$

(ii) $\dim(\underline{O}_{X,x}) = \dim(\underline{O}_{S,\varphi(x)})$ (<u>cond</u>ition qui est satisfaite si $X$ et <u>$S$ sont intègres et $\varphi$ dominant</u>).

(I.6.3) <u>Théorème de normalité analytique (Zariski-Nagata-Grothendieck)</u>
<u>Soient $A$ un anneau semi-local noethérien et $\bar{A}$ sa clôture intégrale. On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

(i) <u>Les fibres formelles de $A$ aux points génériques des composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(A)$ sont normales (ce qui implique que le complété $\hat{A}$ de $A$ est réduit, donc $\bar{A}$ est un $A$-module de type fini (cf II 4.7), et à fortiori un anneau semi-local noethérien).</u>

(ii) <u>Pour tout idéal premier $p'$ de $\bar{A}$ de hauteur I, le complété l'anneau quotient $\bar{A}/p'$ est réduit.</u>

<u>Alors le complété $B$ de l'anneau $\bar{A}$ est normal et $B$ est la clôture intégrale de $\hat{A}$.</u>

<u>Preuve</u> : Puisque $\bar{A}$ est un $A$-module de type fini, on voit facilement que $B$ et $\hat{A}$ ont mène anneau total des fractions ; et puisque $B$ est un $\hat{A}$-module de type fini (puisque $\bar{A}$ est un $A$-module de type fini), pour prouver que $B$ est la clôture intégrale de $\hat{A}$, il suffit donc de prouver que $B$ est normal. Pour cela, on remarque que si $p'$ est un idéal premier de $B$ tel que $p' \cap \bar{A}$

soit minimal comme idéal premier de $\overline{A}$, posant $p = p' \cap \hat{A}$,
alors $p \cap A$ est un idéal premier minimal de A, donc $\hat{A}_p$ est normal d'après l'hypothèse (i), donc $B_{p'}$ qui est un anneau de fractions d'une $\hat{A}_p$-algèbre finie contenu dans le corps des fractions de $\hat{A}_p$ est aussi normal.
On vient donc de prouver que pour tout idéal premier p' de B tel que $\overline{A} \cap p'$ soit un idéal premier minimal de $\overline{A}$, l'anneau local $B_{p'}$ est normal.
Donc l'hypothèse (ii) permet par le même raisonnement fait dans (I.6) pour prouver que $\hat{B}$ vérifie $(S_2)$ et $(R_I)$, de prouver que B vérifie $(S_2)$ et $(R_I)$, donc que B est normal (cf [4] 5.8.6). c.q.f.d.

(I.6.4) Remarque :

(i) Le théorème (I.6.3) a été d'abord prouvé par Zariski ([I3]), en supposant que A est un localisé d'une algèbre de type fini sur un corps, Nagata l'a étendu aux localisés des algèbres de type fini sur un anneau de Dedekind qui est un anneau japonais (cf (II.0)), et finalement Grothendieck ([4] I.6.I) a montré que le théorème reste vrai en supposant seulement que les fibres formelles de A sont géométriquement normales, hypothèse qui est plus forte que la conjonction de nos hypothèses (i) et (ii).

(ii) Dans l'énoncé de (I.6), on remarque que le fait que A est normal implique $\hat{A}$ est normal, donc le fait que B est une A-algèbre intègre finie contenant A et dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A, est équivalent au fait que B est une A-algèbre entière intègre contenant A, et dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A (cf. I.4.3).

(I.7) Théorème (lemme de Hironaka) : Soient A un anneau noethérien et x un élément appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :

(i) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $B = A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Mori et pour tout idéal premier minimal P' de $x\overline{B}$ (où $\overline{B}$ désigne la clôture intégrale de B), $P' \cap B$ est un idéal premier de hauteur I (cette dernière condition est satisfaite si A est universellement catenaire).

(ii) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $B = A_{\mathfrak{m}}$ est intègre et l'anneau $B^{(I)}$ (notation de [4] 5.I0.I7) est une B-algèbre finie.

(iii) A est catenaire et vérifie $(S_I)$ et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $B = A_{\mathfrak{m}}$ est équidimensionnel et pour tout idéal premier minimal q de $B = A_{\mathfrak{m}}$, posant $B_o = B/q$, l'anneau $B_o^{(I)}$ (notation de [4] 5.I0.I7) est une $B_o$-algèbre finie.

On suppose de plus vérifiées les deux conditions suivantes :

a) xA n'a qu'un seul idéal premier minimal p, et $xA_p = p\,A_p$ et $\dim (A_p) = I$.

b) A/p est intégralement clos.

Alors A est intègre et intégralement clos et $p = xA$, et $\dim(A/xA) = \dim(A)-I$ (cf [3] I6.3.7).

Nous aurons besoin du lemme suivant mis en évidence par D. Ferrand et l'auteur.

(I.7.I) Lemme : Soient A un anneau noethérien et $x \in A$ tel que $p = xA$ soit un idéal premier non minimal. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est intègre

(ii) A est séparé pour la topologie p-adique.

Preuve : (i) implique (ii) d'après ([I4] Théorème I3, Corollaire p.220, Volume I).

Montrons maintenant que (ii) implique (i). Soit A' le séparé complété de A pour la topologie p-adique. Alors $A'/xA' \simeq A/xA$, donc $p' = xA'$ est un idéal premier qui n'est pas minimal puisque $A_p \longrightarrow A'_{p'}$ est fidèlement plat. En outre $A \longrightarrow A'$ est injectif. Il suffit donc de prouver que A' est intègre. On est donc ramené au cas où A est séparé et complet pour la topologie p-adique. Soit q un idéal premier minimal de A contenu dans $p = xA$. Puisque $x \notin q$, on vérifie vien que $q = xq$ (en effet si $a \in q$, alors $a = xb$ donc $b \notin q$ puisque $x \notin q$), donc $q = o$ d'après le lemme de Nakayama, i.e o est un idéal premier, donc A est intègre.

(I.7.2) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau noethérien. S'il existe un idéal premier de A non minimal, qui est monogène et contenu dans le radical de Jacobson de A, alors A est intègre</u>.

(I.7.3) <u>Démonstration de (I.7)</u> : Supposons le théorème démontré pour les anneaux locaux. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, on aura $pA_{\mathfrak{m}} = xA_{\mathfrak{m}}$ et $A_{\mathfrak{m}}$ est normal, donc A est normal et $p = xA$, donc aussi A est intègre d'après (I.7.2). On est donc ramené au cas où A est local.

(i) Supposons d'abord que A satisfasse à la condition (i).

Donc A est intègre puisqu'il est local. Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A et soit p' un idéal premier minimal de $x\bar{A}$. Puisque $p' \cap A$ est de hauteur I par hypothèse, alors $p' \cap A = p$, donc $A'_{p'} = A_p$ puisque le second est un anneau de valuation discrète d'après a). On en conclut donc que p' est unique puisque $p = A' \cap pA_p$. Mais $p'A'_{p'} = x\, A'_{p'}$, donc $p' = xA'$ puisque A' est un anneau de Krull (II 6) et p' est le seul idéal premier minimal de xA'.
D'autre part, A/p et A'/p' ont même corps des fractions puisque $A'_{p'} = A_p$, donc $\varphi : A/p \longrightarrow A'/p'$ est un isomorphisme puisque le premier est intégrale-

ment clos et $\varphi$ est entier. On a donc $A' = A + p' = A + xA'$, donc $A = A'$ d'après le lemme de Nakayama puisque x est contenu dans le radical de Jacobson de A et A' est un A-module de type fini, donc A est intégralement clos et $p = p' = xA$. Le théorème est donc établi dans ce cas.

(ii) Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (ii). Soit p' un idéal premier minimal de $xA^{(I)}$. Alors $p' \cap A$ est de hauteur I. Donc comme précédemment, on a $A^{(I)}_{p'} = A_p$ et p' est unique et égal à $A^{(I)} \cap pA_p$ et $A/p \longrightarrow A^{(I)}/p'$ puisque $A^{(I)}$ vérifie $(S_2)$ ([4] 5.I0.I7) et p' est le seul idéal premier minimal et $p' A^{(I)}_{p'} = x A^{(I)}_{p'}$ d'après le théorème de décomposition primaire. Donc $A = A^{(I)}$ d'après le raisonnement fait pour A' dans ( ) puisque par hypothèse $A^{(I)}$ est un A-module de type fini. Donc $p = xA$, et A est intégralement clos d'après (I.7.4).

(iii) Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (iii). Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors $V(xA) = Z$ n'est contenu que dans une seule composante irréductible $X_o$ de X puisque $A_p$ est intègre. Soient $X_I,\ldots,X_n$ les autres composantes irréductibles de X. Puisque Z n'est contenu dans aucun des $X_i$ $(I \leq i \leq n)$, alors $\dim(Z) > \dim(X_i \cap Z)$ quel que soit $i = I,\ldots,2$.
Or $\mathrm{codim}(X_i \cap Z, X_i) = I$ quel que soit $i = I,\ldots,2$,
donc $\dim(X_i) = \dim(X_i \cap Z) + \mathrm{codim}(X_i \cap Z, X_i)$ (puisque X est catenaire (cf [4] I4.3.3 c))) $< \dim(Z) + \mathrm{codim}(X_o \cap Z, X_o) = \dim(X)$, donc $X_o$ est la seule composante irréductible de X puisque X est équidimensionnel. Donc puisque A vérifie $(S_I)$ et X est irréductible, alors $A \longrightarrow A_p$ est injectif parce que $S = A - p$ ne contient aucun diviseur de zéro de A, donc A est intègre puisque $A_p$ est intègre. On voit donc qu'on est ramené au cas (ii).
Il nous reste donc à prouver :

(I.7.4) <u>Proposition</u> : <u>Soient A un anneau noethérien et $x \in A$ tel que $p = xA$ soit un idéal premier non minimal de A contenu dans le radical de Jacobson de A. Alors A est intègre et intégralement clos</u>.

<u>Preuve</u> : Soit A' le séparé complété de A pour la topologie p-adique. L'homomorphisme canonique $A \longrightarrow A'$ étant fidèlement plat, pour prouver que A est intègre et intégralement clos, il suffit de prouver que A' est intègre et intégralement clos. On peut donc supposer que A est séparé et complet pour la topologie p-adique puisque $p' = xA'$ est un idéal premier $(A'/p' \simeq A/p)$ non minimal $(ht(p') = ht(p) = I$ cf [IO] IO.I4 p.32). D'après (I.7.I), A est intègre. Soit $\overline{A}$ sa clôture intégrale. Soit p' un idéal premier minimal de $x\overline{A}$. D'après (II 6.3) $p' \cap A \in Ass_A(A/xA) = \{p\}$ , donc $p' \cap A = p$, ce qui prouve que p' est unique et égal à $\overline{A} \cap pA_p$ et $\overline{A}_{p'} \simeq A_p$. Donc $p' = x\overline{A}$ puisque $\overline{A}$ est un anneau de Krull (II 6) et p' est le seul idéal premier minimal de $x\overline{A}$ et $p\overline{A}_p = x\overline{A}_p$(cf [IO] 33.3 p.II5).
En outre, A/p et $\overline{A}/p'$ ont même corps des fractions puisque $A_p \simeq \overline{A}_{p'}$, donc $\varphi : A/p \longrightarrow \overline{A}/p'$ est un isomorphisme puisque $\varphi$ est entier et A/p est intégralement clos. D'autre part, d'après (II 4.I) la topologie p'-adique de $\overline{A}$ est induite par celle de $\overline{A}_p$, donc est séparé puisque $\overline{A}_{p'}$ est noethérien.
En appliquant donc le lemme de Chevalley ([IO] 30.6 p.IO5) à l'anneau A, on voit que $\overline{A}$ est engendré en tant que A-module par l'élément I, donc $\overline{A} = A$.

c.q.f.d.

(I.7.5) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau noethérien caténaire et</u> $x_I,\ldots,x_n$ <u>des éléments appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose que</u>

$$ht\Big(\sum_{I\leq i\leq n} x_i A\Big) = r \quad \underline{\text{et que}} \quad \sum_{I\leq i\leq n} x_i A$$

<u>n'a qu'un seul idéal premier minimal p et que</u> $pA_p = \sum_{I\leq i\leq n} x_i A_p$.

*On suppose de plus satisfaites les conditions suivantes* :

(i) *A satisfait à l'une des conditions (i), (ii) et (iii) du lemme de Hironaka (I.7) et tout anneau quotient intègre $B = A/q$ avec $q \subseteq p$ satisfait à l'une des conditions (i), (ii) et (iii) du lemme de Hironaka.*

(ii) *$A/p$ est intégralement clos.*

*Alors A est intègre et intégralement clos et* $p = \sum_{I \leq i \leq n} x_i A$.

*En outre, pour tout entier i* $(I \leq i \leq n)$, *l'anneau quotient* $A_i = A / \sum_{I \leq j \leq i} x_j A$ *est intègre et intégralement clos et* $\dim(A_i) = \dim(A) - i$.

*Preuve* : Nous allons raisonner par récurrence sur n.

Si $n = I$, on applique le lemme de Hironaka. Supposons donc $n > I$.

Soit q un idéal premier minimal de $x_I A$. Si p' est un idéal premier minimal de $q + \sum_{I < i \leq n} x_i A$, alors $ht(p'/q) \leqslant n-I$, d'après le Primidealsatz de Krull ([IO] 9.3 p. 26), donc $ht(p') \leqslant n$ puisque $A_{p'}$ est catenaire et équidimensionnel et $ht(q) \leqslant I$ d'après le Hauptidealsatz de Krull ([IO] 9.2 p. 26), donc $p' = p$, et par conséquent $q \subseteq p$. Mais les $x_{i/I}$ forment un système régulier de paramètres de $A_p$, donc q est unique et $qA_q = x\, A_q$. Soit $A' = A/q$. En appliquant l'hypothèse d'induction à A' et au $x_i$ mod q $(2 \leq i \leq n)$, on voit que $p/q = (q + \sum_{i \leq i \leq n} x_i A) \big/ q$ et que $A \big/ (q + \sum_{i \leq i \leq n} x_j A)$ est intègre et intégralement clos, de dimension égale à $\dim(A/q) - (i-I) = \dim(A) - i$ pour $I < i \leq n$.

En appliquant maintenant le lemme de Hironaka à A et $x_I$ compte tenu du fait que $x_I A$ n'a qu'un seul idéal premier minimal q et $qA_q = x_I\, A_q$ et $A/q$ est intègre et intégralement clos, on en conclut que A est intègre et intégralement clos et $q = x_I A$. Ceci termine la démonstration.

(I.7.6) *Corollaire* : *Soient A un anneau noethérien tel que pour tout point fermé x de X = Spec(A), l'anneau local* $\underline{O}_{X,x}$ *soit équidimensionnel et*

$x_I,\dots,x_n$ des éléments appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose :

(i) $\sum_{I\leq i\leq n} x_iA = n$ , $\sum_{I\leq i\leq n} x_iA$ n'a qu'un seul idéal premier minimal p, $pA_p = \sum_{I\leq i\leq n} x_i\, A_p$ et A/p est intègre et intégralement clos, et A vérifie $(S_I)$.

(ii) On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) A est quotient d'un anneau de Cohen-Macaulay.

b) A est universellement catenaire et pour tout anneau quotient intègre $B = A/q$ avec $q \subseteq p$ et tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, l'anneau local $B_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Mori.

Alors A est intègre et intégralement clos et $p = \sum_{I\leq i\leq n} x_iA$.

En outre, pour tout entier i $(I\leq i\leq n)$, l'anneau quotient $A_i = A / \sum_{I\leq i\leq n} x_jA$

Preuve : En effet dans le cas a), A et tous ses quotients intègres vérifient la condition (iii) du lemme de Hironaka (cf I 7), et dans le cas b), A et tous ses quotients intègres $B = A/q$ avec $q \subseteq p$ vérifient la condition (iii) du lemme de Hironaka. D'où la conclusion compte tenu de (I.7.5).

(I.7.7) Théorème (Nagata-Samuel) : Soit A un anneau local noethérien. Alors A est un anneau régulier, si et seulement si A est de multiplicite I, et si son complété $\hat{A}$ est équidimensionnel et vérifie $(S_I)$.

Preuve : Quitte à remplacer A par A(X) (cf [I0] 6.I4 p. I8), on peut supposer que le corps résiduel de A est infini. D'autre part, $\hat{A}$ étant de multiplicté I, on est ramené à prouver le théorème quand A est complet puisque pour prouver que A est régulier, il suffit de prouver que $\hat{A}$ est régulier. On supposera donc que A est complet et à corps résiduel infini. Nous raisonnerons par récurrence sur $n = \dim(A)$. Si $n \leqslant I$, A est un anneau de Cohen-Macaulay puisqu'il vérifie

$(S_I)$ par hypothèse, donc A est régulier d'après ([IO] § 25, p. 82).
Supposons maintenant $n \geqslant 2$. En appliquant la formule de transitivité ([IO] 23.5, p. 76), on obtient $I = m(A) = \sum m(A/p) \operatorname{long}(A_p)$, où p parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A, donc A n'a qu'un seul idéal premier minimal p et $A_p$ est un corps, par conséquent A est intègre puisqu'il vérifie $(S_I)$. Soit x un élément superficiel de A, alors $m(A/xA) = I$ et A/xA est équidimensionnel puisque A est catenaire (cf [IO] 34.4, p. I24), en appliquant alors la formule de transitivité à A/xA, on voit comme précédemment que xA n'a qu'un seul idéal premier minimal p et que $m(A/p) = I$ et $pA_p = xA_p$.
D'après l'hypothèse de récurrence A/p est un anneau régulier. Or la fermeture intégrale $\overline{A}$ de A est un A-module de type fini et pour tout idéal premier minimal p' de $x\overline{A}$, $p' \cap A$ est de hauteur I (puisque A est universellement catenaire et (cf [II] I.2)), donc $p' \cap A = p$ puisque $x \in p' \cap A$.
On en conclut donc d'après le lemme de Hironaka (I.7) que $p = xA$, donc A est régulier ([3] I7.I.8) puisque A/xA est régulier.

(I.8) <u>Théorème</u> : <u>Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

(i) <u>A est séparé et complet pour la topologie xA-adique</u>.

(ii) <u>xA n'a qu'un seul idéal premier minimal p, et si $\overline{A}$ désigne la clôture intégrale de A, pour tout idéal premier minimal p' de $x\overline{A}$, on a $p' \cap A = p$</u>.

(iii) <u>A/p est un anneau de Mori et</u> $pA_p = xA_p$.

<u>Alors A est un anneau de Mori</u>.

<u>Preuve</u> : En effet, en raisonnant comme dans (I.7), on prouve que $x\overline{A} = p'$ est un idéal premier et $p' \cap A = p$, donc $A_p = \overline{A}_{p'}$ et à fortiori $\overline{A}/p'$ est contenu dans la clôture intégrale de A/p, donc $\overline{A}/p'$ est un A/p module de type fini.

D'autre part, A est séparé pour la topologie xA-adique d'après (II 4.I), donc $\overline{A}$ est un A-module de type fini d'après le lemme de Chevalley ([IO] 30.6 p. IO5) puisque $\overline{A}/x\overline{A}$ est un A/xA-module de type fini et A est séparé et complet pour la topologie xA-adique. c.q.f.d.

(I.8.I) Corollaire : Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) A est séparé et complet pour la topologie xA-adique.

(ii) xA n'a qu'un seul idéal premier minimal p.

(iii) A/p est intégralement clos et pour tout idéal premier p' de hauteur I dans la clôture intégrale de A contenant x, on a p' $\cap$ A = p. Alors A est intégralement clos et p = xA.

Preuve : Elle découle du lemme de Hironaka (I.7) et de (I.8).

(I.8.2) Remarque : Soient A un anneau noethérien intègre et $\overline{A}$ sa clôture intégrale. Soit p' un idéal premier de hauteur I de A. Alors p = p' $\cap$ A est un idéal premier de hauteur I de A, si A est universellement catenaire (cf [II] I.2) ou bien si A vérifie $(S_2)$.

(I.9) Théorème : Soient A un anneau local et A' son henselisé (resp. son henselisé strict). Alors pour que A' soit un anneau de Mori, il faut et il suffit que A soit un anneau de Mori unibranche (resp. un anneau de Mori géométriquement unibranche).

Preuve : En effet, pour que A' soit intègre, il faut et il suffit que A($\subseteq$ A') soit intègre et unibranche (resp. géométriquement unibranche). Et s'il en est ainsi si $\overline{A}$ désigne la clôture intégrale de A, alors $\overline{A} \otimes_A A'$ est la clôture intégrale de A' (                    ), et puisque A' est un A-module fidèlement plat (                    ), pour que $\overline{A}$ soit un A-module de type fini, il faut et il suffit que $\overline{A} \otimes_A A'$ soit un A'-module de type fini.

## II - ANNEAUX JAPONAIS

(II.0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau japonais si A est intègre et si la fermeture intégrale de A dans toute extension finie de son corps des fractions est un A-module de type fini.
Il revient au même de dire que toute A-algèbre finie contenant A, qui est intègre, est un anneau de Mori.

(II.0.I) Tout anneau japonais est donc un anneau de Mori, mais la réciproque n'est pas vraie, même si l'anneau est régulier.

(II.0.2) (i) Si A est un anneau japonais, tout anneau de fractions de A est un anneau japonais. En outre, toute A-algèbre finie contenant A qui est intègre, est un anneau japonais.

(ii) D'autre part, pour tout homomorphisme injectif et fini $\varphi : A \longrightarrow B$ d'anneaux noethériens intègres, pour que B soit un anneau japonais, il faut et il suffit que A le soit.

(II.0.3) Un corps est un anneau japonais.

(II.I) Théorème : Soit A un anneau noethérien intègre.
Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau japonais.

(ii) Il existe un élément f ($\neq$o) de A tel que $A_f$ soit un anneau japonais, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau japonais.

Preuve : Elle découle de (I.3.3) et de la définition (II.0).

(II.I.0) Remarque : Un anneau semi local intègre A est un anneau japonais, si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ , l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau japonais. Pour le voir, il suffit d'appliquer le raisonnement de (I.3.I).

(II.2) Proposition : Soit A un anneau noethérien intègre. Alors A est un anneau japonais, si et seulement si la fermeture intégrale de A dans toute extension radicielle finie de son corps des fractions, est un A-module de type fini.

Preuve : Soit K' une extension galoisienne finie du corps des fractions K de A. Soit K" la plus grande extension radicielle de K contenue dans K'. Alors K' est une extension séparable de K". Soit A" la fermeture intégrale de A dans K".

Supposons que A" soit un A-module de type fini, alors A" est un anneau noethérien normal, donc la fermeture intégrale de A" dans K', qui est un A"-module de type fini, donc un A-module de type fini. Or, toute extension finie de K est contenue dans une extension galoisienne finie de K. Donc si la fermeture intégrale de A dans toute extension radicielle finie de K est un A-module de type fini, il en est de même de sa fermeture intégrale dans toute extension finie de K puisque A est noethérien, d'où la conclusion.

(II.2.I) Corollaire : Soit A un anneau noethérien intègre dont le corps des fractions est de caractéristique 0. Alors A est un anneau japonais, si et seulement si A est un anneau de Mori.

En particulier, tout anneau noethérien intègre et intégralement clos, dont le corps des fractions est de caractéristique 0 est un anneau japonais.

(II.2) Théorème (Nagata) : Soit A un anneau japonais noethérien. Alors tout anneau de polynômes à un nombre fini de variables $B = A[T_I,\ldots,T_r]$ est un anneau japonais.

Preuve : Soit L' une extension radicielle finie du corps des fractions L de B. Il existe alors une puissance q de l'exposant caractéristique de L et des éléments $a_I,\ldots,a_n \in A$ tels que

$$L' \subseteq L(a_I^{I/q},\ldots,a_n^{I/q},T_I^{I/q},\ldots,T_r^{I/q}) = L''.$$

Soit A' la clôture intégrale de $A[a_I^{I/q},\ldots,a_n^{I/q}]$ qui est un A-module de type fini puisque A est un anneau japonais, alors $B' = A'[T_I^{I/q},\ldots,T_r^{I/q}]$ est une B-algèbre finie et un anneau intégralement clos ; donc B" est la fermeture intégrale de B dans L". On en conclut donc que la fermeture intégrale de B dans L' est un B-module de type fini. c.q.f.d.

(II.3) Théorème : Soient A un anneau noethérien et B une A-algèbre intègre contenant A qui est un anneau de fractions d'une A-algèbre de type fini. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) A est un anneau japonais.

(ii) Le morphisme canonique $\varphi$: Spec(B) $\longrightarrow$ Spec(A) est universellement générisant ([2] 3.9.2, p. 253) en tout point fermé de Spec(B).

Alors B est un anneau japonais.

On aura besoin des théorèmes suivants :

(II.3.I) Théorème : Soient $f : X \longrightarrow S$ et $h : Y \longrightarrow S$ des morphisme de schémas localement de présentation finie et $g : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme. Soient s un point de S, Z une composante irréductible de X, de point générique z, x un point de Z et $y = g(x)$.

On suppose

(i) f est universellement ouvert au point z.

(ii) $\dim_x(X_s) = \dim(Z)$.

(iii) $Y_s$ est géométriquement normal en y sur k(s).

(iv) $\dim_x(X_s) - \dim_y(Y_s) \geqslant \dim_x(g_s^{-1}(y))$.

Alors g est universellement ouvert en tous les points d'un voisinage de x dans Z.

La démonstration de ce théorème sera donnée dans [5].

(II.3.2) Théorème (Nagata) : Soient A un anneau japonais noethérien et B une A-algèbre affine (i.e B est un anneau de fractions d'une A-algèbre de type fini et intègre B' contenant A).

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B est un anneau de Mori (resp. un anneau japonais)

(ii) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Mori (resp. un anneau japonais).

Preuve : D'après le théorème de normalisation ([IO] I4.4, p. 45), il existe un élément f ($\neq$ o) de A, des indéterminées $T_I,\ldots,T_r$ et un homomorphisme injectif et fini $\varphi : A_f[T_I,\ldots,T_r] \longrightarrow B'_f$, donc $B_f$ est un anneau japonais d'après (II.2) et (II.2 (i) et (ii)), d'où la conclusion d'après (I ) et (II.I).

(II.3.3) Démonstration de (II.3) : Soit C ($\subseteq$ B) une A-algèbre de type fini telle que B soit un anneau de fractions de C. Soit x un point fermé de Spec(B). Désignons également par x son image dans Spec(C). Alors d'après ([4] I3.3.I.I) le morphisme $\varphi$ : Spec(C) $\longrightarrow$ Spec(A) se factorise en

$$\mathrm{Spec}(C) \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(A[T_I,\ldots,T_r]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

avec g quasi fini en x et tel que si s désigne l'image de x dans Spec(A), x soit un point maximal de $X_s$ où X = Spec(S) $\dim_x(X_s) = r$, donc g est universellement ouvert en x d'après (II.3.I) puisque $\varphi$ est universellement ouvert en x (cf II.3.I) ; donc g est un morphisme dominant, i.e $R = A[T_I,\dots,T_r] \longrightarrow C$ est injectif. Or $\underline{O}_{X,x}$ (où X = Spec(C)) est un anneau de fractions d'une R-algèbre finie contenue dans C d'après le Main Theorem de Zariski ([4] I8.I2.I3), donc $\underline{O}_{X,x}$ est un anneau japonais d'après (II.2), (II.0.2 (i) et (ii)), d'où la conclusion d'après (II.3.2).

(II.3.4) Corollaire : Soient A un anneau japonais noethérien et B une A-algèbre essentiellement affine qui est un A-module plat. Alors B est un anneau japonais.

(II.4) Théorème : Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) p = xA est un idéal premier et A est séparé et complet pour la topologie p-adique

(ii) A/p est un anneau japonais.

Alors A est un anneau japonais.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

(II.4.I) Lemme : Soient A un anneau et x un élément de A non diviseur de zéro dans A tel que p = xA soit un idéal premier. Alors $x^nA$ est l'image réciproque dans A de $x^n A_p$ quel que soit $n \geqslant I$.

Preuve : Si n = I, l'assertion est évidente. Supposons qu'elle soit établie pour $n = m \geqslant I$. Soit b un élément appartenant à l'image réciproque dans A de

$x^{m+I} A_p$. Donc $b/I \in x^{m+I} A_p$, donc il existe $s \in A$-$p$ tel que $sb \in x^{m+I}A \subseteq p$, donc $b \in p = xA$, i.e $b = xb'$ avec $b' \in A$, donc $sb' \in x^m A$ puisque $x$ n'est pas diviseur de zéro dans A, donc $b'/I \in x^m A_p$, donc $b' \in x^m A$ d'après l'hypothèse de récurrence, a fortiori $b \in x^{m+I}A$. c.q.f.d.

(II.4.2) Démonstration de (II.4) : Nous allons d'abord démontrer le théorème dans le cas où A est intégralement clos. Si $x = o$, l'assertion est triviale. Nous pouvons donc supposer $x \neq o$. Nous devons prouver que la fermeture intégrale A' de A dans toute extension radicielle finie L du corps des fractions K de A est un A-module de type fini. Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de K telle que $L^q \subseteq K$. Quitte à agrandir L, on peut supposer qu'il existe un élément y appartenant à L tel que $y^q = x$.

Posons $V = A_p$ ; alors V est un anneau de valuation discrète, donc sa fermeture intégrale $V' = S^{-I}A'$ (avec $S = A$-$p$) dans L est un anneau de valuation discrète, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}'$ est l'ensemble des $x' \in L$ tels que $x'^q \in \mathfrak{m} = xV$, et dont le corps résiduel $V'/\mathfrak{m}'$ est une extension finie du corps résiduel $V/\mathfrak{m}$ de V (Bourbaki, Al. Comm., Chapitre IV, § 8, n° I Lemme 2).

Montrons maintenant que pour tout entier n I, on a

(III.4.2.0) $\qquad \mathfrak{m}'^n \cap A' = y^r A'$

Puisque $y^q = x \in \mathfrak{m}$, alors $y \in \mathfrak{m}'$, donc $y^n A' \subseteq \mathfrak{m}'^n \cap A$.

Inversement, soit $x' \in \mathfrak{m}'^n \cap A'$ ; posons $x' = z'y^n$ avec $z' \in L$ ; $x'^q \in K \cap A' = A$ (puisque A est intégralement clos). D'autre part, $x'$ est somme de produits $t_I \ldots t_n$ avec $t_i \in \mathfrak{m}'$, donc $x'^q \in \mathfrak{m}^n$ puisque $t_i^q \in \mathfrak{m}$, donc $x'^q \in \mathfrak{m}^n \cap A = x^n A$ d'après (II.4.I) ; or $x'^q = z'^q (y^n)^q = z'^q x^n$, donc $z'^q \in A$, donc $z' \in A'$, i.e $x' \in y^n A'$.

On a donc fini de prouver la relation (II.4.2.0).

On déduit en particulier de la relation (II 4.2.0) et du fait que $x = y^q$, que la topologie x A'-adique de A' est induite par la topologie $\mathfrak{m}'$-adique de V' qui est séparée puisque V' est noethérien, donc la topologie xA'-adique de A' est séparée.

D'autre part, en appliquant (II 4.2.0) pour n = I, on voit que p' = yA' est un idéal premier, et $V' = A'_{p'}$. Donc $V'/\mathfrak{m}'$ est le corps des fractions de A'/yA'. Mais puisque A'/yA' est entier sur A/xA ($yA' \cap A = xA$ et A' est entier sur A), on en conclut que A'/yA' est un A/xA-module de type fini puisque A/xA est noethérien et $V'/\mathfrak{m}'$ est une extension finie du corps des fractions $V/\mathfrak{m}$ de A/xA. Or pour tout entier k, $y^k A'/y^{k+I}A' \simeq A'/yA'$, donc $A'/y^q A' = A'/xA'$ est un A/xA-module de type fini. Donc A' est un A-module de type fini d'après le lemme de Chevalley ([I0] 30.6, p. I05), ce qui termine la démonstration du théorème dans le cas où A est intégralement clos. Nous donnerons la démonstration du cas général plus loin.

(II 4.3) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau noethérien japonais. Alors tout anneau de séries formelles à un nombre fini de variable</u> $B = A[[T_I,\dots,T_r]]$ <u>est un anneau japonais</u>.

<u>Preuve</u> : Soit A' la clôture intégrale de A. Alors A' est un A-module de type fini, donc $B' = A'[[T_I,\dots,T_r]]$ est un B-module de type fini. On est donc ramené à prouver que B' est un anneau japonais d'après (II 0.2 (ii)).

En raisonnant par récurrence sur r, on est ramené au cas r = I.

Mais $B' = A[[T_I]]$ est un anneau intégralement clos noethérien ([I0] 47.6, p. 200), B est séparé et complet pour la topologie $T_I$-adique. D'autre part, $B'/T_IB \simeq A$ est un anneau japonais (donc $p = T_IB$ est un idéal premier), donc B' est un anneau japonais d'après le cas déjà établi de (II 4).

(II 4.4) Corollaire : Soit A un anneau local noethérien intègre et complet. Alors tout anneau de séries restreintes à un nombre fini de variables $B = A\{T_I,\dots,T_r\}$ est un anneau japonais.

Nous donnerons la démonstration de (II 4.4) plus loin (II 6.8).

(II 4.5) Corollaire (Mori-Nagata) : Tout anneau local noethérien intègre et complet est un anneau japonais.

Preuve : Soit A un anneau local noethérien intègre et complet.
D'après le théorème de structure de Cohen et (II 0.2 (ii)), pour prouver que A est un anneau japonais, on peut supposer que A est régulier. Nous raisonnerons par récurrence sur n = dim(A). Si n = o, A est un corps donc un anneau japonais.
Supposons n > I et l'assertion établie pour les anneaux locaux réguliers complets de dimension < n. Soit x un élément de A n'appartenant pas au carré de l'idéal maximal de A. Alors A est séparé et complet pour la topologie xA-adique, p = xA est un idéal premier et A/xA est un anneau local régulier et complet de dimension n-I, donc un anneau japonais d'après l'hypothèse de récurrence, donc A est un anneau japonais d'après le cas déjà établi de (II 4) puisque A est un anneau intégralement clos d'après ([IO] 25,I4 p. 87) c.q.f.d.

(II 4.6) Corollaire (Mori) : Soit A un anneau semi local noethérien dont le complété $\hat{A}$ est réduit. Alors la clôture intégrale $\overline{A}$ de A est un A-module de type fini.

Preuve : Puisque A, A est réduit. Soient $A_i$ ($I \leq i \leq n$) les quotients de A par ses idéaux premiers minimaux. Alors $\overline{A}$ est composé direct des clôtures intégrales $\overline{A}_i$ des $A_i$ ($I \leq i \leq n$), donc $\overline{A}$ est un A-module de type fini puisque chaque

$\overline{A}_i$ est un $A_i$-module de type fini, donc un A-module de type fini. c.q.f.d.

(II 4.7) Corollaire (Mori) : Tout anneau semi-local noethérien intègre dont le complété est réduit est un anneau de Mori.

(II 4.8) Corollaire : Soit A un anneau local noethérien intègre et complet. Alors la fermeture intégrale de A dans toute extension finie de son corps des fractions est un anneau local noethérien complet.

Preuve : Soit A la fermeture intégrale de A dans une extension finie de son corps des fractions. D'après (II 4.5), A' est un A-module de type fini, donc un anneau semi-local noethérien et complet. Donc A' est un produit d'anneaux locaux ([IO] I7.7 p. 56), et puisque A' est intègre, c'est un anneau local.

(II 5) Proposition : Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions, K' une extension finie de K, et A' la fermeture intégrale de A dans K'.

(i) On suppose qu'il existe un anneau noethérien B d'anneau total des fractions R qui vérifie les trois conditions suivantes :

a) B est une A-algèbre fidèlement plate

b) $R \otimes_A K'$ est un anneau réduit

c) Pour tout idéal premier minimal p de B, l'anneau quotient B/p est un anneau japonais

Alors A' est un A-module de type fini.

(ii) En particulier, s'il existe un anneau noethérien qui vérifie les conditions a) et c) de (i), et dont l'anneau total des fraction est une K-algèbre séparable, alors A est un anneau japonais.

<u>Preuve</u> : Posons $A'_I = A' \otimes_A B$ et $K'_I = K' \otimes_A B$

Comme B est un A-module plat, $A_I$ s'identifie à un sous anneau de $K_I$ et est entier sur B. D'autre part, si l'on pose $K_I = K \otimes_A B$, on peut écrire $K_I = K \otimes_K K_I$, comme   est intègre et que B est un A-module plat, tout élément ($\neq$ o) de A est non diviseur de 0 dans B, comme $K = S^{-I}A$ où $S = A - \{0\}$, on a $K_I = S^{-I}B$, et la remarque précédente prouve que $K_I$ s'identifie à un sous-anneau de R.

Puisque K est un corps, $K'_I = K' \otimes_K K_I$ s'identifie alors à un sous-anneau de $K' \otimes_K R$ qui est par hypothèse réduit et  est une R-algèbre finie. Désignons par $p_i$ $(I \leq i \leq n)$, les idéaux premiers minimaux de B, et par $B_i$ l'anneau quotient $B/p_i$, par $L_i$ le corps des fractions de $B_i$. Alors $K' \otimes_K R$ est composé direct des $K' \otimes_K L_i$, ces dernières étant réduites sont composées directes de corps extensions finies des $L_i$. Comme $B_i$ est un anneau japonais par hypothèse, la fermeture intégrale de $B_i$ dans $K' \otimes_K L_i$ est un $B_i$-module de type fini, comme tout élément de $K' \otimes_K L_i$ qui est entier sur B est entier sur $B_i$ (étant annulé par $p_i$). On en conclut finalement que la fermeture intégrale de B dans $K' \otimes_K R$ est un B-module de type fini. Mais comme $A'_I$ est contenu dans cette fermeture intégrale et que B est noethérien par hypothèse, $A'_I$ est aussi un B-module de type fini. Enfin comme $A \longrightarrow B$ est fidèlement plat, on en conclut que A' est un A-module de type fini.

L'hypothèse (ii) implique que b) est vrai pour toute extension K', d'où la conclusion.

(II 5.I) <u>Corollaire (Grothendieck-Mori)</u> : <u>Soient A un anneau semi-local noethérien, $\hat{A}$ son complété, K le corps des fractions de A et T l'anneau total des fractions de $\hat{A}$. Soient K' une extension finie de K et A' la fermeture intégrale de A dans K'. On suppose que l'anneau</u> $R \otimes_K K'$ <u>est réduit</u>.

Alors A' est un A-module de type fini.

En particulier si R est une K-algèbre séparable, A est un anneau japonais.

(II 5.2) Corollaire : Soient A un anneau local intègre et A' son henselisé (resp. son henselisé strict). Si A est un anneau japonais unibranche (resp. un anneau japonais géométriquement unibranche), il en est de même de A'. Réciproquement, si A est noethérien et si A' est un anneau japonais, alors A est un anneau japonais unibranche (resp. géométriquement unibranche).

Preuve : Si A' est un anneau japonais et A est noethérien, alors A est un anneau japonais d'après (II 5) appliqué avec B = A' puisque A($\subseteq$ A') est intègre. Donc A est également unibranche (resp. géométriquement unibranche). Maintenant si A est un anneau japonais unibranche (resp. un anneau japonais géométriquement unibranche), alors A' est intègre. Soient L le corps des fractions de A', $L' = L(a_1,\ldots,a_t)$ une extension finie de L et B' la fermeture intégrale de A' dans L'. Alors si K' est le corps engendré par les $a_i$ ($1\leq i\leq t$) sur le corps des fractions K de A, alors K' est une extension finie de K. Donc la fermeture intégrale B de A dans K' est un A-module de type fini. Soit $\mathfrak{m}$ l'image réciproque de l'idéal maximal de B' dans B. Il est clair que A' domine le henselisé (resp. le henselisé strict) R de $B_{\mathfrak{m}}$. Mais R est un A'-module de type fini ([I0] 43.I8, p. I86), où l'on peut remplacer henselisé par henselisé strict) et R a même corps des fractions que B', donc R = B', d'où la conclusion.

(II 6) Théorème (Mori-Nagata) : Soient A un anneau noethérien intègre et A' sa fermeture intégrale dans une extension finie K' de son corps des fractions K. Alors :

(i) A' est un anneau de Krull

(ii) Pour tout idéal premier p de A, il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier p' de A' au-dessus de p, et pour un tel idéal premier p', le corps des fractions de A'/p' est une extension finie de celui de A/p.

Pour prouver (II 6), il suffit, quitte à remplacer A par une sous-A-algèbre finie de K' ayant K' pour corps des fractions, de supposer que K' = K. Ce que nous supposerons désormais. Nous prouverons d'abor de lemme suivant :

(II 6.I) Lemme : Soient A un anneau intègre et B une A-algèbre fidèlement plate, donc l'homomorphisme $A \longrightarrow C = B\text{réd}$ est injectif et se prolonge en un homomorphisme (injectif) du corps des fractions K de A dans l'anneau total des fractions R de C. Soit $\overline{C}$ la clôture intégrale de A, alors $\overline{A} = K \cap \overline{C}$ est la clôture intégrale.

Preuve : Il est clair que $\overline{A}$ contient la clôture intégrale de A. Réciproquement, soit $a/b \in \overline{A}$. Il existe donc des éléments $\overline{c}_I \in C$ $\quad I \leq i \leq n-2$ tels que :

$$(a/b)^n + \overline{c}_I (a/b)^{n-I} + \ldots + \overline{c}_{n-I}(a/b) = 0.$$

Soit pour tout entier i $(I \leq i \leq n-I)$ $c_i \in B$ tel que $\overline{c}_i = c_i$ mod où désigne le nilradical de B. Alors on a :

$$x = a^n + c_I\, a^{n-I} b + \ldots + c_i\, a^{n-i} b^i + \ldots + c_n b^n \in \mathfrak{N} .$$

Donc x est nilpotent, donc il existe un entier $m > I$ et des éléments $d_i^!$ $(I \leq i \leq m) \in B$ tels que

$$a^m + d_i^!\, a^{m-I} b + \ldots + d_i^!\, a^{m-i} b^i + \ldots + d_m^! b^m = 0,$$

i.e $\quad a^m \in \Big( \sum\limits_{I \leq i \leq n} a^{m-i}\, b^i\, B \Big) \cap A = \sum\limits_{I \leq i \leq n} a^{m-i}\, b^i\, A$

(puisque B est un A-module fidèlement plat), donc il existe des éléments $d_i$ $(I \leq i \leq n) \in A$ tels que

$$a^m + d_I a^{m-I} b + \ldots + d_i a^{m-i} b^i + \ldots + d_m b^m = 0$$

donc

$$(a/b)^m + d_I (a/b)^{m-I} + \ldots + d_i (a/b)^{m-i} + \ldots + d_m = 0$$

i.e a/b est entier sur A. c.q.f.d.

(II 6.2) <u>Démonstration de (II 6)</u> : Supposons d'abord que A est local d'idéal maximal p. Soient $B = (\hat{A})_{réd}$ et $\overline{B}$ la clôture intégrale de B.
Puisque $\hat{A}$ est une A-algèbre fidèlement plate, on a $A' = K \cap B$. Si $p_I, \ldots, p_m$ désignent les idéaux premiers de $\hat{A}$ et $B_i = \hat{A}/p_i$, alors $\overline{B}$ est composé direct des clôtures intégrales $\overline{B}_i$ des $B_i$ qui sont des anneaux noethériens locaux et complets. D'autre part, l'anneau total des fractions R de B est composé direct des corps des fractions $L_i$ des $B_i$ et l'homomorphisme $K \longrightarrow R$ est composé direct des $K \longrightarrow L_i$, donc

$$A' = K \cap \overline{B} = \bigcap_{I \leq i \leq m} (K \cap \overline{B}_i).$$

Or chacun des anneaux $K \cap \overline{B}_i$ est un anneau de Krull (cf [IO] 33.5, p. II6), donc $\overline{A}$ est aussi un anneau de Krull (cf loc. eit). Soit $(A_\lambda)$ la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres finies de A, alors $(\hat{A}_\lambda)_{réd} \subseteq \overline{B}$, et puisque $\overline{B}$ est un module de type fini sur l'anneau noethérien B, et les $(\hat{A}_\lambda)_{réd}$ des sous-B-modules de $\overline{B}$, il existe un $\alpha$ tel que $(\hat{A}_\alpha)_{réd} \longrightarrow (\hat{A}_\lambda)_{réd}$ soit un isomorphisme quel que soit $\lambda \geq \alpha$, donc quels que soient $\lambda' \geq \lambda \geq \alpha$, tout idéal maximal de $A_\lambda$ est image réciproque d'un seul idéal maximal de $A_\lambda$ , donc A' est semi-local puisque chacun des $A_\lambda$ est semi-local.
D'autre part, puisque $(\hat{A}_\alpha)_{réd} \longrightarrow (\hat{A}_\lambda)_{réd}$ est un isomorphisme quel que soit $\lambda \geq \alpha$, les extensions résiduelles de $\mathrm{Spec}(A_\lambda) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ aux points fermés de $\mathrm{Spec}(A_\lambda)$ sont triviales quel que soit $\lambda \geq \alpha$, donc les extensions résiduelles de $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ aux points fermés de Spec(A') sont triviales, donc pour tout idéal maximal p' de A', le corps A'/p' est une extension finie du corps

$A/p$ puisque $A_\alpha$ est une A-algèbre finie. Nous avons donc prouvé l'assertion (ii) dans le cas où A est un anneau local d'idéal maximal.

Considérons maintenant le cas général. Si p est un idéal premier de A, alors $A'_p$ est la clôture intégrale de $A_p$, donc d'après ce quie nous venons de prouver, $A'_p$ est semi-local et les extensions résiduelles de $\mathrm{Spec}(A'_p) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_p)$ aux points fermés de $\mathrm{Spec}(A'_p)$ sont finies, i.e il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers p' de A' au-dessus de p, et pour un tel idéal premier, le corps des fractions de A'/p' est une extension finie de celui de A/p.

D'autre part, puisque pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A'_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Krull, on en conclut que pour tout idéal premier p' de hauteur I de A', $A'_{p'}$ est un anneau de valuation, et puisque A' est intersection des $A'_{\mathfrak{m}}$ où parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A, on en conclut que $A' = \bigcap A'_{p'}$, où p' parcourt l'ensemble des idéaux premiers de hauteur I de A'. Donc d'après ([IO] 33.3, p. II5), il suffit de prouver que tout principal aA' de A', avec $a \neq o$, a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux qui sont nécessairement de hauteur I puisque les $A'_{\mathfrak{m}}$ sont des anneaux de Krull. Et quitte à remplacer A par A[a], on peut supposer que $a \in A$.

Et puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers de A' au-dessus d'un idéal premier donné de A, et que pour tout anneau noethérien R, $\mathrm{An}_R(M)$ est fini pour tout A-module de type fini M (cf il suffit donc de prouver le lemme suivant).

(II 6.3) <u>Lemme (Nagata)</u> : <u>Avec les notations et les hypothèses de (II 6) soit</u> a ($\neq$ o) $\in$ A. <u>Alors pour tout idéal premier minimal p' de aA'</u>,

$p' \cap A \in \mathrm{Ass}_A(A/_{aA})$

<u>Preuve</u> (d'après H. Matsumura) : Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale de A.

Alors $ht(p' \cap \overline{A}) = ht(p') = I$ (cf ), donc $p' \cap \overline{A}$ est un idéal premier minimal de $a\overline{A}$. On est donc ramené au cas où $\overline{A} = A'$.

D'autre part, quitte à remplacer A par $A_p$ (ou $p = p' \cap A$) et A' par $A'_p$, on peut supposer (d'après ) que A est un anneau local d'idéal maximal $p = p' \cap A$. Dans ce cas, p' est un idéal maximal de A', et puisque A' est semi-local, il existe un élément $x \in p'$, qui n'appartient à aucun des autres idéaux maximaux de A'.

Soit $A'' = A[x]$, donc $p'' = p'$ A'' est tel que p' est le seul idéal maximal de A' au-dessus de p'', donc $ht(p'') = ht(p') = I$ et p'' est maximal.

Soit $\hat{A}''$ le complété de A'', A'' est composé direct d'anneaux locaux complets $A_i$ $(I \leq i \leq n)$ où $A_I$ est le complété de $A''_{p''}$.

Soit e l'élément unité de $A_I$. Soit A le complété de A. Alors $\hat{A}' = \hat{A}[x]$.

D'autre part, puisque A'' est un A-module de type fini contenu dans le corps des fractions de A, il existe b $(\neq o) \in A$ tel que $bA'' \subseteq A$, donc $b\hat{A} \subseteq \hat{A}$.

En outre, puisque $ht(p'') = I$, il existe un entier n tel que $p^n A_I \subseteq bA_I$.

Donc $p^n e \subseteq bA_I \subseteq A$, et par conséquent $p^{nt} e \subseteq b^t A_I \subseteq b^{t-I} A$.

Supposons pour le moment que $p \notin An_A(A/_{bA})$. Donc $p \notin An_A(A/_b tA)$ quel que soit l'entier t (cf donc p contient un élément p qui n'est pas diviseur de 0 modulo $b^t A$ (dans A), donc aussi modulo $b^t$ A dans $\hat{A}$. Donc le fait que $p^{tn}(p^n e) = p^{(+I)n} e \subseteq b^t \hat{A}$ implique que $p^n e \subseteq b^t \hat{A}$ quel que soit l'entier t, ce qui est impossible puisque $\bigcap_t b^t \hat{A} = 0$ à moins que b soit inversible dans A, auquel cas $A = A''$, donc $p = p''$ et par conséquent $ht(p) = I$, donc $p \in An_A(A/aA)$. Donc $p \in An_A(A/bA)$, donc aussi $p \in An_A(A/aA)$ d'après (II 6.3). Donc le lemme est complètement démontré, et par conséquent, le théorème (II 6) est complètement établi ainsi que (I 7).

(II 6.4) <u>Fin de la démonstration de (II 4)</u> : Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale de A. Alors pour tout idéal premier minimal p' de $a\overline{A}$, $p' \cap A \in An_A(A/aA)$ d'après le lemme (II 6.3), donc $p' \cap A = p$ puisque $p = aA$ est premier.

Puisque $A_p$ est un anneau de valuation discrète (u moins dans le cas où $a \neq o$ puisque le cas $a = o$ est trivial), on en conclut que $A_p = A'_{p'}$, donc $p' = pA_p \cap A'$, d'où l'on conclut que $a\bar{A}$ n'a qu'un seul idéal premier minimal $p'$ et $a\bar{A}_{p'} = p'\bar{A}_{p'}$, donc $p' = a\bar{A}$ puisque $\bar{A}$ est séparé pour la topologie $p'$-adique d'après (II 4.I) puisque $\bar{A}'_{p'}$ est un anneau de valuation discrète, donc un anneau noethérien. Mais l'égalité $A_p = \bar{A}_{p'}$ implique que $\bar{A}/a\bar{A}$ qui est entier sur $A/aA$, donc est un anneau japonais et un $A/aA$-module de type fini. Puisque $A/aA$ est un anneau japonais par hypothèse. Donc $\bar{A}$ est un A-module de type fini d'après le lemme de Chevalley ([IO] 30.6, p. IO5), donc $\bar{A}$ est séparé et complet pour la topologie $p'$-adique, donc $\bar{A}$ est un anneau japonais d'après la première partie de la démonstration puisque $\bar{A}$ est noethérien intègre et intégralement clos. Donc A est aussi un anneau japonais (cf II 0.2 (ii)) puisque $A \longrightarrow \bar{A}$ est fini. c.q.f.d.

(II 6.5) Corollaire : Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A appartenant au radical de Jacobson de A.

On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) $p = xA$ est un idéal premier et le corps des fractions du complété de A pour la topologie $p$-adique (qui est un anneau intègre cf (II 4.I)), est une extension séparable de celui de A (cette dernière condition est satisfaite si $A_p$ est un anneau japonais, puisque le corps des fractions du complété de A pour la topologie $p$-adique est un sous-corps des fractions du complété de $A_p$ qui est une extension séparable de celui de A cf( ))

(ii) $A/p$ est un anneau japonais.

Alors A est un anneau japonais.

Preuve : Il suffit d'appliquer (II 5) en prenant pour B le complété de A pour la topologie p-adique, compte tenu de (III 2).

(II 6.6) Corollaire : Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) xA n'a qu'un seul idéal premier minimal p, $pA_p = xA_p$, et pour tout idéal premier minimal p' de $x\bar{A}$ (où $\bar{A}$ désigne la clôture intégrale de A) $p' \cap A = p$ (cette dernière condition est satisfaite si A est universellement catenaire ou vérifie $(S_2)$).

(ii) A est séparé et complet pour la topologie xA-adique et A/p est un anneau japonais.

Alors A est un anneau japonais.

Preuve : On voit donc que $a\bar{A}$ n'a qu'un seul idéal premier minimal $p' = pA_p \cap \bar{A}$, donc $\bar{A}_{p'} = A_p$, d'où l'on conclut que $p' = a\bar{A}$ puisque $p'\bar{A}_{p'} = a\bar{A}_{p'}$ et $\bar{A}$ est un anneau de Krull (II 6) ; on en conlut d'autre part $\bar{A}/p$ qui est entier sur A/p et contenu dans le corps des fractions de A/p, est un A/aA-module de type fini et un anneau japonais.
Donc $\bar{A}$ est un A-module de type fini d'après le lemme de Chevalley ([IO] 30.6 p. IO5) puisque $\bar{A}$ est séparé pour la topologie $a\bar{A}$-adique d'après (II 4.I), donc $\bar{A}$ est un anneau japonais d'après (II 4), donc A est un anneau japonais d'après (II 0.2(ii)).

(II 6.7) Remarque : Le théorème (II 4) a été prouvé par Tate dans le cas où A est intégralement clos et par l'auteur dans le cas général.

(II 6.8) Démonstration de (II 4.4) : Soit $\mathfrak{m}$ l' déal maximal de A ; alors B est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}B$-adique, et $B/\mathfrak{m}B$ est isomorphe à l'anneau des polynômes $k[T_I,\dots,T_r]$ (avec $k = A/\mathfrak{m}$), donc B est noethérien (cf [ ] chapitre 2, prop. 6, cor. 3). D'autre part, il existe un sous-anneau local régulier complet A' de A tel que A est un A'-module de type fini d'après le théorème de structure de Cohen ([ ] 3I.6, p. I09) ; donc $B' = A'\{T_I,\dots,T_r\}$ est un sous-anneau de B et B est un B' module de type fini. Il suffit donc d'après (II 0.2 (ii)) de prouver que B' est un anneau japonais. On est donc ramené au cas où A est un anneau local régulier complet. Soit $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, alors $A_I = A/xA$ est un anneau local régulier complet et $\dim(A_I) = \dim(A) - I$ ; d'autre part, $B/xB \simeq A_I\{T_I,\dots,T_r\}$, donc $p = xB$ est un idéal premier ; et B est séparé et complet pour la topologie p-adique.

En raisonnant donc par récurrence sur $n = \dim(A)$, compte tenu de (II 4), on est donc ramené au cas où A est un corps. Dans ce cas, $B = k[T_I,\dots,T_r]$, anneau des polynômes à r variables sur A qui est un anneau japonais d'après (II 2) et (II 0.3).

(II 7) Théorème (W. Heinzer) : Soit A un anneau noethérien de dimension $\leq 2$. Alors tout anneau de Krull contenant A, et dont le corps des fractions est une extension finie de celui de A est un anneau noethérien de dimension $\leq 2$.

Preuve : Soit A' un tel anneau. D'après le théorème de Cohen ([I0] 3I.6, p. I09), il suffit de prouver que tout idéal premier de A' est de type fini. Soit B une sous-A-algèbre de type fini de A.

Posons $X = \mathrm{Spec}(B)$ , $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $\varphi : X \longrightarrow S$ le morphisme canonique. Soit $x \in X$ et soit $s = \varphi(x)$.

En appliquant la formule des dimensions ([4] 5.58) à $\underline{O}_{S,s}$ et $\underline{O}_{X,x}$, on voit que $\dim(\underline{O}_{X,x}) \leq 2$, donc $\dim(B) \leq 2$. D'autre part, soit p un idéal premier de

A. Si $p = o$, $p' = o$ est le seul idéal premier de $A'$ au-dessus de $p$.

Si $p \neq o$, soit $a$ $(\neq o) \in p$, alors tout idéal premier $p'$ de $A'$ de hauteur I au-dessus de $p$ est un idéal premier minimal de $aA'$, donc l'ensemble des idéaux premiers de hauteur I de $A'$ au-dessus de $p'$ est fini.

Soit donc $p'$ un idéal premier de hauteur I de $A'$.

Supposons que nous ayons démontré que tout idéal maximal de $A'$ est de type fini. Quitte à remplacer $A$ par une sous-$A$-algèbre de type fini de $A'$.

On peut supposer que $p'$ est le seul idéal premier de hauter I de $A'$ au-dessus de $p = p' \quad A$, et qu'il existe un élément $b$ de $A$ tel que $p'A_{p'} = bA'_{p'}$, donc $p'A_{p'} = pA'_{p'}$. Posons $q' = pA' : p'$, alors $q'$ contient $bA' : p'$.

Si $bA'$ était primaire pour $p'$, on aurait $p' = bA'$ puisque $A'$ est un anneau de Krull par hypothèse ([IO] 33.3, p. II5).

Sinon $bA' = p' \cap q'_I \cap \dots \cap q'_r$ avec $r \geqslant I$ où les $q_i$ sont des idéaux primaires $(\not\subseteq p')$ de hauteur I. Quitte à remplacer $A$ par une sous-$A$-algèbre de type fini de $A'$, on peut supposer qu'aucun des $q_i \cap A$ n'est contenu dans $p$.

Donc $q' \cap A$ qui contient $(q'_I \cap A) \dots (q'_r \cap A)$ n'est pas contenu dans $p$.

Mais $p \subseteq q' \cap A$ ; donc si $p$ était maximal, on aurait $q' \cap A = A$, donc $q' = A'$, i.e $p' = pA$, donc $p'$ est de type fini.

On a donc prouvé que tout idéal premier de hauteur I de $A'$ au-dessus d'un idéal maximal de $A$ est de type fini, et cela indépendamment de l'hypothèse que tout idéal maximal de $A'$ est de type fini.

Supposons maintenant que $p$ ne soit pas maximal. Si $q' \cap A = A$, on aurait comme précédemment $p' = pA'$, donc $p'$ serait de type fini.

Supposons donc de plus que $q' \cap A \neq A$. Puisque $q' \cap A$ contient $p$, mais n'est pas contenu dans $p$, on a $\dim(A/q' \cap A) = 0$. Soit $p'_i$ la racine de $q'_i$ pour $(1 \leq i \leq r)$. Supposons $p'_i$ maximal pour $i > t$. Soit $p''$ un idéal premier minimal de $q'$. Si $p'' \supseteq p'_i$ pour un $i > t$, alors $p'' = p'_i$, donc $p''$ est de type fini d'après ce qu'on vient de prouver puisque $p'' \cap A$ est maximal. Sinon, $p'' \supseteq p'_{i_0}$ pour un $i_0 < t$ puisque $b \in p''$. Si $p'' = p'_{i_0}$, on en conclurait que $p''$ est de type fini comme ci-dessus.

Supposons $p'' \neq p'_{i_0}$, donc $p''$ est maximal de hauteur 2, donc de type fini d'après l'hypothèse faite. Quitte à remplacer A par une sous-A-algèbre de type fini de $A'$, on peut supposer que $p'' \cap A \neq p'_{i_0} \cap A$.

Soit $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A dans le corps des fractions de $A'$, alors $\bar{A} \subseteq A'$. Posons $p_0 = p'_{i_0} \cap \bar{A}$, alors $\bar{A}_{p_0}$ est un anneau de valuation discrète, donc $\bar{A}_{p_0} = A'_{p'_{i_0}}$.

On en conclut que $\bar{A}/p_0$ et $A'/p'_{i_0}$ ont même corps des fractions, donc d'après le théorème de Krull-Akizuki, il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux maximaux de $A'/p_0$ ayant même image réciproque $p''/p_0$ dans $\bar{A}/p_0$. Or $A/q' \cap A$ est artinien, donc semi-local, donc l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $q'$ distincts de $p_i$ quel que soit i est fini et ces idéaux sont maximaux de hauteur 2. Donc la racine $\bar{q}'$ de $q'$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers $\bar{p}'_i$ $(1 \leq i \leq u)$ qui sont tous de type fini. Soit $q_0$ le produit des $\bar{p}_i$, alors $q_0^n$ est de type fini quel que soit n et $A'/q_0^n$ est noethérien d'après le théorème de Cohen ([I0] 3I.6, p. I09) puisque par hypothèse tout idéal maximal de hauteur 2 contenant $q_0$ est de type fini, et les $\bar{p}_i$ sont aussi de type fini. Donc un des $q_0^n$ est contenu dans $q'$ puisque $q_0$ est contenu dans la racine de $q'$ et est de type fini, donc $q'$ est de type fini puisque $A'/q_0^n$ est noethérien. Donc $q'/q'p'$ est un $A'/p'$-module noethérien puisque $A'/p'$ est noethérien (En effet, on peut voir que $A'/p'$ est noethérien comme suit : si $p'$ est maximal, c'est clair. Sinon, en raisonnant comme pour $q'_{i_o}$ plus haut, on voit que $A'/p'$ est un anneau noethérien de dimension $\leqslant$ I, ce qui prouve en même temps que $\dim(A') \leqslant 2$ puisque $A'/p'$ est de dimension $\leqslant$ I pour tout idéal premier de hauteur I). Donc $p' \cap q'/p'q' \subseteq q'/p'q'$ est un $A'p'$-module de type fini, et puisque $p'q' \subseteq pA' \subseteq p' \cap q$, on en conclut que $p' \cap q'/pA'$ est un A-module de type fini, donc $p' \cap q'$ est un A-module de type fini puisque $pA'$ est de type fini. Mais puisque $A'/p'$ et $A'/q'$ sont noethériens, $A'/p' \cap q'$ est noethérien(                    ), donc $p'/p' \cap q'$ est un idéal de type fini de $A'/p' \cap q'$, donc $p'$ est un idéal de type fini de $A'$. Donc tout idéal premier de hauteur I de $A'$ est de type fini, si tout idéal maximal de hauteur 2 de $A'$ est de type fini ; et puisque $\dim(A') \leqslant 2$, il nous reste donc à prouver que $\mathfrak{m}'$ est de type fini si $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de hauteur 2 de $A'$. Soit $p'$ $(\subset \mathfrak{m})$ un idéal premier de hauteur I. Quitte à remplacer A par une sous-A-algèbre de type fini de $A'$, on peut supposer que $\mathfrak{m}' \cap A \neq p' \cap A$, donc $\mathfrak{m}' \cap A$ est un idéal maximal de A de hauteur 2. Soient a et $b \in \mathfrak{m}' \cap A$ tels que $ht(aA'+bA) = 2$. Soit T une indéterminée, on voit que $aT-b$ engendre un idéal premier de $A'[T]$ (cf              ), donc $(aT-b)A'(T)$ est un idéal premier de $A'(T)$.

Soient $R = A(T)/(aT-b)A'(T) \cap A(T)$ et $R' = A'(T)/(aT-b)A'(T)$.

Alors R est un anneau noethérien de dimension $\leqslant$ I ayant même corps des fractions que A. Donc puisque $R'$ a même corps des fractions que $A'$, donc $R'$ est noethérien d'après le théorème de Krull-Akizuki (                    ), donc $\mathfrak{m}'A(T)$ est un idéal de type fini de $A'(T)$ donc $\mathfrak{m}'$ est un idéal de type fini de $A'$ (En effet, si $f_I,\dots,f_s \in A'[T]$ engendrent $\mathfrak{m}'A'(T)$, leurs coefficients engendrent $\mathfrak{m}'$), ce qui termine la démonstration du théorème.

(II 7.I) Corollaire (Mori-Nagata) : Soient A un anneau noethérien de dimension 2, K son corps des fractions et $K_i$ $(I \leq i \leq n)$ un nombre fini d'extensions finies de K. Alors la fermeture intégrale de A dans $R = \bigoplus_{I \leq i \leq n} K_i$ est un anneau noethérien.

(II 7.2) Remarque : Il existe des anneaux locaux noethériens henséliens intègres qui sont même des intersections complètes, dont la clôture intégrale n'est pas un anneau noethérien (cf [ ] ).
On a cependant le résultat suivant :

(II 7.3) Théorème : Soient A un anneau semi-local noethérien réduit et $\bar{A}$ sa clôture intégrale. Alors Spec($\bar{A}$) est un espace noethérien.

Ce théorème découle de l'assertion suivante :

(II 7.3.I) Proposition (Grothendieck) : Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, B un anneau noethérien, $q_i$ $(I \leq i \leq n)$ ses idéaux premiers minimaux, $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose que les $B/q_i$ sont des anneaux japonais, et que B est un A-module plat. Soit K' une extension finie de K, et soit $(C_\lambda)$ la famille filtrante croissante des sous anneaux de K' qui sont des A-algèbres finies et admettant K' pour corps des fractions ; la réunion A' des $C_\lambda$ est donc la fermeture intégrale de A dans K'. Alors :

(i) Il existe un indice $\alpha$ tel que pour $\lambda \geq \alpha$, l'homomorphisme

$$(C_\alpha \otimes_A B)_{\text{réd}} \longrightarrow (C_\lambda \otimes_A B)_{\text{réd}}$$

soit bijectif.

(ii) Si en outre B est un A-module fidèlement plat, le morphisme $\operatorname{Spec}(A') \longrightarrow \operatorname{Spec}(C_\alpha)$ est radiciel ; donc dans ce cas Spec(A') est un espace noethérien.

Preuve :

(i) Soit $B_I = B_{réd}$, et soit R l'anneau total des fractions de $B_I$ ; comme A est intègre et B un A-module plat, tout élément $\neq$ o de A est B-régulier ([I0] I8.I, p. 58), donc l'homomorphisme compose

$$A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow B_I$$

se prolonge en un homomorphisme $K \longrightarrow R$ ; on peut alors écrire

$$K' \otimes_A R = (K' \otimes_A K) \otimes_K R,$$

et comme $K' \otimes_A K$ s'identifie à $K'$, on a $K' \otimes_A R = K' \otimes_K R'$.
Comme R est composé direct des corps des fractions $L_i$ des $B/q_i$, $K' \otimes_A R$ est composé direct des $K' \otimes_K L_i$, et par suite $(K' \otimes_A R)_{réd}$ est composé direct d'un nombre fini d'extensions finies des $L_i$. En vertu de l'hypothèse, la fermeture intégrale de $B/q_i$ dans une extension finie de $L_i$ est un $B/q_i$-module de type fini, donc un B-module de type fini ; on en conclut que la fermeture intégrale B' de B dans $(K' \otimes_A R)_{réd}$ est un B-module de type fini. Mais les $(C_\lambda \otimes_A B)_{réd}$ s'identifient canoniquement à des sous-anneaux de $(K' \otimes_A R)_{réd}$ qui sont des B-algèbres finies, donc contenues dans B'. Comme B est noethérien et B' est un B-module de type fini, la famille filtrante des $(C_\lambda \otimes_A B)_{réd}$ admet un plus grand élément $(C_\alpha \otimes_A B)_{réd}$, ce qui prouve (i).

(ii) Comme B est un A-module fidèlement plat, $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est surjectif, il suffit donc ([2] 3.7.6, p. 249) de prouver que le morphisme

$$\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)$$

est radiciel, ou, ce qui revient au même ([2] 3.7.6, p. 249) que le morphisme

$$\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B)_{réd} \longrightarrow \mathrm{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)_{réd}$$

est radiciel ; mais on a

$$A' \otimes_A B = \varinjlim_\lambda (C_\lambda \otimes_A B), \text{ donc } (A' \otimes_A B)_{réd} = \varinjlim_\lambda (C_\lambda \otimes_A B)_{réd},$$

donc $(A' \otimes_A B)_{réd} = \varinjlim_\lambda (C_\lambda \otimes_A B)_{réd}$, et la conclusion résulte de (i), et du fait que puisque $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\alpha)$ est surjectif, c'est un homéomorphisme.

(II 7.3.2) Corollaire : Soient A un anneau semi-local noethérien, K son corps des fractions, K' une extension finie de K. Soit $(C_\lambda)$ la famille filtrante croissante des sous-anneaux de K' qui sont des A-algèbres finies (donc des anneaux semi-locaux noethériens), et admettant K' pour corps des fractions. Alors il existe un $\alpha$ tel que l'homomorphisme $(\hat{C}_\alpha)_{réd} \longrightarrow (\hat{C}_\lambda)_{réd}$ soit un isomorphisme pour $\lambda \geq \alpha$, et si A' est la fermeture intégrale de A dans K', le morphisme Spec(A') $\longrightarrow$ Spec($C_\alpha$) est radiciel, donc Spec(A') est un espace noethérien.

Preuve : Soit $B = \hat{A}$ ; alors pour tout idéal premier p de B, B/p est un anneau semi-local noethérien intègre et complet, donc un anneau local, donc un anneau japonais (cf                ). D'autre part, B est un A-module fidèlement plat, donc l'assertion découle de (II 7.3.I) puisque $\hat{C}_\lambda = C_\lambda \otimes_A B$.

(II 7.3.3) Remarque : Si dans (II 7.3.I) K' = K, il suffit de supposer que les $B/q_i$ sont des anneaux de Mori puisque $K' \otimes_A R = R$.

(II.8) Soient A un anneau intègre et M un A-module. On dira que M est un A-module linéairement séparé si pour tout m $(\neq o) \in$ M, il existe $\varphi \in M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$ tel que $\varphi(m) \neq o$, donc tout sous A-module de M est aussi un A-module linéairement séparé.

(II.8.I) Soit A un anneau intègre. Alors tout A-module linéairement séparé M est un A-module sans torsion.
En effet, soit m $(\neq o) \in$ M. Supposons qu'il existe a $(\neq o) \in$ A tel que am = o. Soit $\varphi \in M^*$ tel que $\varphi(m) \neq o$, alors $\varphi(am) = a\,\varphi(m) = o$, ce qui est contradictoire puisque $\varphi(m) \neq o$ et A est intègre.

(II 8.2) <u>Proposition</u> : <u>Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions et M un A-module tel que</u> $\mathrm{rang}_K(M \otimes_A K)$ <u>soit fini.</u>
<u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>M est un A-module de type fini sans torsion</u>

(ii) <u>M est un A-module linéairement séparé</u>.

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord que (i) implique (ii). Soit $m\ (\neq 0) \in M$.
Puisque M est un A-module sans torsion $m \otimes_A 1 \neq 0$ dans $M \otimes_A K$. Donc puisque $M \otimes_A K$ est un espace vectoriel sur K, il existe $\varphi' \in \mathrm{Hom}_K(M \otimes_A K, K)$ tel que $\varphi'(m \otimes_A 1) \neq 0$. Soient $m_1, \dots, m_t$ des éléments en nombre fini de M qui engendrent M en tant que A-module. Il existe alors $d \in A$ tel que $d\,\varphi'(m_i \otimes_A 1) \in A$ quel que soit $i = 1, \dots, t$. Alors la restriction $\varphi$ de $d\,\varphi'$ à $M \subseteq M \otimes_A K$ est un élément de $M^*$ tel que $\varphi(m) \neq 0$. Montrons maintenant que (ii) implique (i). Nous allons raisonner par récurrence sur $r = \mathrm{rg}_K(M \otimes_A K)$.
Si $r = 0$, alors $M = 0$ puisque M est un A-module sans torsion.
Supposons donc $r \neq 0$, alors $M \neq 0$. Soit $m\ (\neq 0) \in M$, et soit $\varphi \in M^*$ tel que $\varphi(m) \neq 0$. Alors $P = \varphi(M)$ est un idéal non nul de A, donc un A-module de type fini (puisque A est noethérien) tel que $P \otimes_A K \neq 0$ puisque A est intègre.
Soit $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a alors une suite

$$0 \longrightarrow N \otimes_A K \longrightarrow M \otimes_A K \longrightarrow P \otimes_A K \longrightarrow 0,$$

donc $\mathrm{rg}(N \otimes_A K) < r$ puisque

$$\mathrm{rg}(P \otimes_A K) = \mathrm{rg}_K(M \otimes_A K) - \mathrm{rg}(P \otimes_A K) \neq 0.$$

Or N est un A-module linéairement séparé, donc d'après l'hypothèse de récurrence N est un A-module de type fini ; et puisque $P \simeq M/N$ est un A-module de type fini, on en conclut que M est un A-module de type fini. c.q.f.d.

(II 8.2.I) Corollaire : Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions, K' une extension finie de K et A' la fermeture intégrale de A dans K. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A' est un A-module de type fini

(ii) A' est un A-module linéairement séparé.

En particulier, pour que A soit un anneau de Mori, il faut et il suffit que sa clôture intégrale $\overline{A}$ soit un A-module linéairement séparé.

(II 8.2.2) Corollaire : Soient A un anneau noethérien intègre et K son corps des fractions. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau japonais

(ii) Pour toute extension finie K' de K, la fermeture intégrale A' de A dans K' est un A-module linéairement séparé.

(II 8.2.3) Corollaire (L. Gerritzen) : Soient A un anneau noethérien, K son corps des fractions, p l'exposant caractéristique de K et $K_I = K^{p^{-I}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau japonais

(ii) Pour toute extension finie K' de K contenue dans $K_I$, la fermeture intégrale A' de A dans K' est un A-module de type fini.

Preuve : (i) implique (ii) trivialement. Montrons que (i) implique (i). Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale de A. Alors $\overline{A}$ est un A-module de type fini, donc un anneau noethérien normal. En outre, A' est un $\overline{A}$-module sans torsion de type fini, donc A' est un $\overline{A}$-module linéairement séparé d'après (II 8.2). Donc l'implication découle de ([ ] § 2, Satz 2 p. I83, Satz I p. I8I et § I Satz I p. I80 appliqué en prenant pour M la fermeture intégrale de A dans $K_I$, pour $M_\lambda$ les fermetures intégrales de A dans extensions finies $K_\lambda$ de K contenue dans $K_I$).

(II.9) Exemple d'un anneau de Gorenstein local normal japonais $A_o$ de dimension 3, dont le complété n'est pas réduit.

Soit T l'anneau local de ([IO] Exemple 6, p. 208). Avec les notations de ([ ]loc. cit) $T \simeq R[X]/(X^2-d^2)$, donc T est une intersection complète puisque R est un anneau local régulier. Soit V un $2^e$ anneau de Cohen dont le corps résiduel est $K^2$. Alors il existe une injection $\varphi : V \longrightarrow V'$ où V' est un $2^e$ anneau de Cohen et un homomorphisme surjectif $\Pi' : V' \longrightarrow K$ qui prolonge $\Pi : V \longrightarrow K^2$.

Soit $B = V[[x,y]] \otimes_V V'$ et soit $C = B[X]/(X^2+2\delta X+\delta^2)$ où $\delta$ est un élément de B dont l'image dans

$$K^2[[x,y]] \otimes_{K^2} K \simeq K^2[[x,y]]\ [K] \simeq B/2B \text{ est } d.$$

Puisque K est de caractéristique 2, alors -I = I dans K, donc $(X^2+2\delta X+\delta^2) \bmod (2B[X]) = X^2 + d^2 = X^2 - d^2$, donc $C/2C \simeq T$.

D'autre part, C étant un V'-module fidèlement plat, 2 n'est pas diviseur de zéro dans C. Donc le séparé complété de C pour la topologie 2C-adique est un sous-anneau du séparé complété de $S = C_p$ ou $p = 2C$ (qui est un idéal premier puisque $C/2C \simeq T$ est intègre) (cf ).

Soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{n=I}^{\infty} 2^n S$. Soit $c \in \mathfrak{a} \cap V'$, par fidèle platitude $c \in \bigcap_{n=I}^{\infty} 2^n V' = (o)$, donc $S/\mathfrak{a}$ contient V' et domine V', donc le séparé complété $\hat{S}$ de S pour la topologie 2S-adique contient V' (cf [II] ), donc 2 n'est pas nilpotent dans $\hat{S}$. Mais $\hat{S}$ est un anneau noethérien dont l'idéal maximal est engendré par 2 (cf [ ] ), donc S est un anneau de valuation discrète. On en conclut donc que le séparé complété A de C pour la topologie 2C-adique est un anneau intègre. En outre A est noethérien (cf [ ] loc. cit) puisque

$A/2A \simeq T$ est noethérien. Puisque T est local, il en est de même de A puisque 2 appartient au radical de Tacobson, donc A est normal d'après (I 7.4) puisque T est normal. Donc A est un anneau japonais (cf II )
puisque son corps des fractions est de caractéristique 0. De plus $\dim(A) = 3$ puisque $\dim(A/2A) = \dim(A) - I = \dim(T) = 2$ ; et A est un anneau de Gorentein puisque $T \simeq A/2A$ est une intersection complète.
Enfin l'homomorphisme local canonique $B \longrightarrow B' = V'[[x,y]]$ se prolonge en un homomorphisme local $C \longrightarrow C' = B[X]/(X^2+2\delta X+\delta^2)$, donc aussi en un homomorphisme local $\varphi : A \longrightarrow C'$ puisque $C'$ est séparé et complet.
On a donc un homomorphisme local $\hat{\varphi}$ du complété $\hat{A}$ de A dans $C'$ qui prolonge $\varphi$, et qui est surjectif d'après ([IO] 30.6, p. IO5) puisque l'image de l'idéal maximal de $\hat{A}$ par $\hat{\varphi}$ engendre l'idéal maximal de $C'$ et $\hat{\varphi}$ induit un isomorphisme du corps résiduel de $\hat{A}$ sur celui de $C'$. Puisque $C'/2C'$ est le complété de $T \simeq A/2A$, on en conlut que $\bar{\varphi} : \hat{A}/2\hat{A} \longrightarrow C'/2C'$ induit par $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Or, c'est un $V'$-module plat donc $\mathrm{Tor}_I^{V'}(C',V'/2V') = o$, on en conclut donc que si $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\hat{\varphi})$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}/2\mathfrak{a} \longrightarrow \hat{A}/2\hat{A} \xrightarrow{\bar{\varphi}} C'/2C' \longrightarrow 0$$

en appliquant la suite exacte des Tor à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}} C' \longrightarrow 0,$$

donc $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}$ puisque $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, donc $\mathfrak{a} = o$ d'après le lemme de Nakayama puisque 2 appartient au radical de Jacobson de $\hat{A}$, i.e $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Or $C' = B'[X]/((X+\delta)^2)$ n'est pas réduit, donc A n'est pas réduit, donc $A_o = A$ vérifie les conditions de (II, 9).

## III - ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS

(III 0) Définition : On dit qu'un anneau A est universellement japonais si toute A-algèbre intègre de type fini est un anneau japonais, ou ce qui revient au même si toute A-algèbre intègre de type fini est un anneau de Mori, donc toute A-algèbre de type fini est aussi universellement japonais.

(III I) Théorème (Nagata) : Soit A un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau universellement japonais

(ii) Tout anneau quotient intègre de A est un anneau japonais

(iii) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, tout anneau quotient intègre de $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau japonais, et pour tout anneau quotient intègre B de A, de corps des fractions K, toute extension radicielle finie K' de K, il existe une sous-A-algèbre finie B' de K' ayant K' pour corps des fractions et un élément $f' \neq o$ dans B tel que $B'_{f'}$ soit intégralement clos.

De plus, si A vérifie ces conditions, il en est de même de toute A-algèbre de type fini et de tout anneau de fractions $S^{-I}A$ de A.

Nous allons d'abord prouver le théorème suivant

(III I.I) Théorème (Rees) : Soient A un anneau semi-local noethérien intègre et B une A-algèbre semi-locale essentiellement affine (donc B est noethérien). On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) Le complété $\hat{A}$ de A est réduit

(ii) Le corps des fractions de B est une extension séparable de celui de A.

Alors le complété $\hat{B}$ de B est réduit.

Preuve : Supposons d'abord que B soit un anneau de fractions de A. Puisque $\hat{B}$ est composé direct des complétés des anneaux locaux de Spec(B) en ses points fermés ([IO] I7.7, p. 56), on peut supposer que B est local, donc $B = A_p$ avec $p \in \mathrm{Spec}(A)$. Soit $p' \in \mathrm{Spec}(\hat{A})$ tel que $p' \cap A = p$, alors par fidèle platitude le complété $\hat{B}$ de $B = A_p$ est un sous-anneau du complété de $C = \hat{A}_{p'}$. Mais tout anneau quotient intègre de C est un anneau de fractions d'un anneau quotient intègre de $\hat{A}$, c'est-à-dire d'un anneau local noethérien complet, donc d'un anneau japonais d'après (II 4.5), donc tout anneau quotient intègre de C est un anneau japonais.
On en conclut d'après (I 5.I) que le complété de tout anneau quotient intègre de C est réduit, donc le complété de C est réduit (puisque C est réduit), donc aussi celui de B.
Revenons maintenant au cas général. Comme précédemment, on peut supposer que B est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Il existe d'après ([IO] 39.II, p. I52) des éléments $x_I,\dots,x_n$ de B algébriquement indépendants sur A tels que le corps des fractions de B soit une extension séparable de celui de $A[x_I,\dots,x_n]$.
Soient $p' = A[x_I,\dots,x_n] \cap \mathfrak{m}$ et $p = A \cap \mathfrak{m}$.
Posons $R = A_p$ et $S = A[x_I,\dots,x_n]_{p'}$.
Montrons que l'on peut choisir les $x_i$ de façon que le complété $\hat{S}$ de S soit réduit. Si R est un anneau régulier, il en est de même de X (cf [IO] I4.8, p. 46), donc $\hat{S}$ est réduit. Si R n'est pas régulier, alors $p \neq o$.
Soit $a\ (\neq o) \in p$, alors les $y_i = ax_i$ sont algébriquement indépendants sur A et $A[y_I,\dots,y_n]$ et $A[x_I,\dots,x_n]$ ont même corps des fractions. Quitte donc à remplacer les $x_i$ par les $y_i$, on peut supposer que $x_i \in p'$.
Alors il existe un idéal premier p" de l'anneau des séries formelles $A[[x_I,\dots,x_n]]$ au-dessus de p'.
Pour prouver que $\hat{S}$ est réduit, il suffit de prouver que le complété de

$A[[x_I,\ldots,x_n]]_{p''}$ est réduit puisqu'il contient S par fidèle platitude.
Il suffit donc d'après ce que nous avons vu au début de prouver que le complété $\hat{D}$ de $D = A[[x_I,\ldots,x_n]]$ est réduit. Mais $\hat{D} = \hat{A}[[x_I,\ldots,x_n]]$, donc $\hat{D}$ est réduit puisque $\hat{A}$ est réduit. On peut donc remplacer A par S.
Soit $c \in B$ entier sur S tel que B et $S[c]$ aient même corps des fractions (cf le théorème de l'élément primitif). Soient K le corps des fractions de S et K' celui de B et soit $S' = S[c]$.
Alors $\hat{S}' \subseteq \hat{S}' \otimes_{S'} K' \simeq (\hat{S} \otimes_S K) \otimes_K K'$ puisqu'aucun élément non nul de S' n'est diviseur de zéro dans $\hat{S}'$ (cf [IO] I8.I, p. 58). Or $\hat{S} \otimes_S K$ est un anneau de fractions de S donc est réduit, donc $(\hat{S} \otimes_S K) \otimes_K K'$ est réduit puisque K' est une extension séparable de K.
On en conclut donc que $\hat{S}'$ est réduit, donc la clôture intégrale $\bar{S}'$ de S' est un S'-module de type fini (donc un anneau noethérien semi-local), et son complété est aussi réduit puisqu'il est contenu dans l'anneau total des fractions de $\hat{S}'$. Quitte donc à remplacer A par $\bar{S}'$, on peut supposer que A et B ont même corps des fractions. On peut même supposer que B est un anneau de fractions d'une A-algèbre affine monogène $A[x]$. Soit q un idéal premier de $A[x]$ tel que $B = A[x]_q$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $A[x]$ contenant q, pour prouver que le complété de B, il suffit de prouver que celui de $A[x]_{\mathfrak{m}}$ est réduit. On peut donc supposer que q est maximal. D'autre part, quitte à remplacer A par $A_{q_o}$ ou $q_o = q \quad A$, on peut supposer que A est local et l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ local. Soit p' le seul idéal premier de $B' = \hat{A} \otimes_A B$ au-dessus de p. Alors $\hat{B} \simeq (B'_{p'})^{\wedge}$ (cf [4] 7.9.3.I). Or $B' \subseteq \hat{A} \otimes_A K$ qui est réduit, donc $B'_{p'}$ est réduit. Pour prouver que $(B'_{p'})^{\wedge}$ est réduit, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de ses quotients par ses idéaux premiers maximaux. On est donc ramené au cas où A est un anneau local noethérien intègre et complet.
Soit $\bar{x}$ l'image de x dans le corps résiduel k' de B. Alors $k' = k[\bar{x}]$ où k

désigne le corps résiduel de A. Donc il existe un polynôme unitaire f(T) à coefficients dans A tel que $f(x) \in \mathfrak{M}$ = idéal maximal de B. Soit L une extension finie de K tel que

$$f(T) = \prod_{I \leq i \leq n} (T-a_i) \text{ avec } a_i \in L.$$

Les $a_i$ sont donc entiers sur A. Soit A la fermeture intégrale de A dans L qui est un anneau noethérien local intègre et complet (cf II 4.8) et un A-module de type fini (cf II 4.5). Pour prouver que $\hat{B}$ est réduit, il suffit de prouver que le complété de B[A'] est réduit, donc que les complétés des anneaux locaux de Spec(B[A']) en ses points fermés sont réduits.

On est donc ramené au cas où A est normal et

$$f(T) = \prod_{I \leq i \leq n} (T-a_i) \text{ avec } a_i \in A.$$

Il existe donc un entier $i_o$ tel que l'image de $x-a_{i_o}$ dans k' est égal à 0. Quitte donc à remplacer x par $x - a_{i_o}$, on peut supposer que x appartient à l'idéal maximal de B. Soit $\varphi : A[T] \longrightarrow A[x]$ le A-homomorphisme défini par $\varphi(T) = x$. Alors le noyau de $\varphi$ est engendré par les polynômes aT-b avec $x = a/b$ (En effet, si $g(T) = a_o T^{=} + \ldots + a_{m-I}T + a_m \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, alors $a_o x$ est entier sur A, donc $b = a_o x \in A$ puisque A est normal.

Donc $g(T) - (aT-b)T^{m-I} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et l'assertion x prouve par induction sur $m = \deg(g(T))$).

Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A engendré par de tels éléments b, alors

$\mathfrak{a} = xA[x] \cap A$. Mais $A = \bigcap_{ht(q)=I} A_q$ ,

donc si $q_I, \ldots, q_t$ sont les idéaux premiers de hauteur I de A tels que $x \in q_i A_{q_i}$, alors $\mathfrak{a} = xA[x] \cap A = \bigcap_{I \leq i \leq n} (xA_{q_i} \cap A)$ ,

donc $A/\mathfrak{a} \simeq A[x]/(x)$ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés et tout idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$ est de hauteur I. Puisque $A/\mathfrak{a} \simeq A[x]/(x)$, tout idéal premier minimal de xA x est au-dessus d'un idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$ , donc

pour tout idéal premier minimal p de $xA[x]$, $A[x]_p$ est un anneau de valuation discrète puisque $A_{p\cap A}$ est un anneau valuation, et en outre $A[x]/p$ qui est isomorphe à un quotient de $A/\mathfrak{a}$ est un anneau local noethérien complet.
En outre $A[x]/(x) \simeq A/\mathfrak{a}$ vérifie $(S_I)$. Donc $B/xB$ vérifie $(S_I)$, pour tout idéal premier minimal p' de xB, $B_p$ est un anneau de valuation, et $B/p'$ est un anneau de fractions d'un anneau local noethérien complet, donc son complété est réduit d'après ce qu'on a démontré au début. Donc B est réduit d'après le lemme de Zariski ([I0] 36.3, p. I32).

(III I.2) <u>Démonstration du théorème (III I)</u> : Il est clair que (i) implique (ii). Montrons maintenant que (ii) implique (i). Soit $B = A[x_I,\dots,x_n]$.
Nous devons prouver que B vérifie la condition (ii) de (III I).
En raisonnant par récurrence sur n, nous prouvons que $B = A[x]$, et même que B est intègre. Il suffit de montrer que B est un anneau japonais.
Quitte à remplacer A par son image dans B, on peut supposer que $A \subseteq B$.
Si x est transcendant sur A, B est un anneau japonais d'après (II 2).
Si x est algébrique sur A, soit K' une extension finie du corps des fractions de B. Quitte à remplacer A par une sous-A-algèbre finie de K' ayant K' pour corps des fractions, on peut supposer que K' est le corps des fractions de A et B. Soit p un idéal premier de p, alors tout anneau quotient intègre de $C = A_p$ est un anneau japonais d'après (II 0.2(i)) puisque c'est un anneau de fractions d'un quotient intègre de A qui est par hypothèse un anneau japonais. Donc le complété $\hat{C}$ de C est réduit, donc aussi pour tout idéal premier p' de B, le complété de $B_{p'}$ est réduit d'après le théorème de Rees (III I.I), donc $B_p$ est un anneau de Mori (I 5.2), donc B est un anneau de Mori.
On a donc prouvé que la fermeture intégrale de B dans K' est un B-module de type fini, donc B est un anneau japonais. Donc (ii) implique (i).

D'autre part, (ii) implique (iii) d'après (II 0.2 (i)) et (II I).
Montrons maintenant que (iii) implique (ii). Soit B un anneau quotient intègre de B. Soit K' une extension radicielle finie de son corps des fractions.
Par hypothèse, il existe une sous-A-algèbre finie B' de K' ayant K' pour corps des fractions et un élément $f' \in B'$, $f' \neq o$, tel que $B'_{f'}$ soit normal.
Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de B', alors $B'_{\mathfrak{m}'}$ est un anneau japonais puisque $B_{\mathfrak{m}' \cap B}$ est un anneau japonais. Donc B' est un anneau de Mori d'après (I 3.3), donc la fermeture intégrale de B dans K' est un B-module de type fini, donc B est un anneau japonais d'après (II 0).
Le reste de la démonstration découle du fait que tout anneau de fractions d'un anneau universellement japonais est un anneau universellement japonais.

(III 2) <u>Corollaire (Nagata-Zariski)</u> : <u>Soit A un anneau semi-local noethérien. Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>A est universellement japonais</u>

(ii) <u>Les fibres formelles de A sont géométriquement réduites ( 4 7.3.I3)</u>

(iii) <u>Pour toute A-algèbre finie réduite B, le complété de de B est réduit</u>

(iv) <u>Pour toute A-algèbre finie intègre B, le complété de de B est réduit</u>.

(III 2.0) <u>Corollaire (Nagata)</u> : <u>Tout anneau semi-local noethérien complet est un anneau universellement japonais</u>.

(III 2.I) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau semi-local noethérien réduit et $\hat{A}$ son complété. On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

(i) A est universellement japonais (donc la fermeture intégrale $\overline{A}$ de A est un A-module de type fini (cf (III 2) et (II 4.6)).

(ii) Les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ aux points génériques de Spec(A) sont normales.

Alors le complété $(\overline{A})^{\wedge}$ de $\overline{A}$ est la clôture intégrale de $\hat{A}$.

Preuve : Découle de (II 2) et de (I 6.3).

(III 2.2) Corollaire : Soit A un anneau local noethérien intègre vérifiant les conditions (i) et (ii) de (III 2.I).

Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) A est universellement catenaire

(ii) Pour toute A-algèbre finie monogène et intègre, B contenue dans le corps des fractions de A, et tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, $\dim(B_{\mathfrak{n}}) = \dim(A)$.

Preuve : Découle de (II 2.I) et de ([II] I.II).

(III 2.3) Corollaire : Tout anneau semi-local noethérien hensélien qui vérifie les conditions (i) et (ii) de (III 2.I) est universellement catenaire.

(III 2.4) Corollaire : Tout anneau local noethérien unibranche qui vérifie les conditions (i) et (ii) de (III 2.I) est universellement catenaire et son complété est unibranche qui est intègre si A est intègre.

Preuve : Soit A un anneau local noethérien unibranche qui vérifie les conditions (i) et (ii) de (III 2.I). On peut supposer que A est intègre. Alors A est universellement catenaire d'après (III 2.2) et le complété de la clôture intégrale de A est un anneau noethérien local normal, donc un anneau intègre, donc le complété de A est intègre, donc A est unibranche (cf [2] 6.5.I4, p. I5I).

(III 2.5) Corollaire : Soit A un anneau semi-local noethérien normal qui vérifie les conditions (i) et (ii) de (III 2.I). Alors A est universellement catenaire et son complété est normal.

Preuve : Découle de (III 2.I) et de (III 2.4).

(III 2.6) Corollaire (Nagata) : Soit A un anneau local noethérien intègre, unibranche et universellement japonais. On suppose qu'il existe un sous-anneau local noethérien B de A, dont le complété $\hat{B}$ est normal tel que A soit un A-module de type fini.
Alors le complété $\hat{A}$ de A est intègre. En outre, si A est normal et si le corps des fractions de A est une extension séparable de celui de B, le complété $\hat{A}$ de A est normal.

Preuve : Quitte à remplacer A par sa clôture intégrale, on peut supposer que A est normal. Soit C la fermeture intégrale de B dans la plus grande extension séparable du corps des fractions de B contenue dans le corps des fractions de A. Alors le complété $\hat{C}$ de C est normal d'après ( ) appliqué avec A = B et B = C. Ce qui établit la deuxième partie de la proposition puisque dans ce cas C = A.
D'autre part, le corps des fractions de A est une extension radicielle de celui de C, donc pour tout élément a de $\hat{A}$, il existe une puissance q de l'exposant caractéristique du corps des fractions de A indépendant de a, tel que $a^q \in C$, donc $\hat{A}^q \subseteq \hat{C}$, donc $\hat{A}^q$ est intègre. Mais puisque $\hat{A}$ est réduit d'après (II 2), l'homomorphisme $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}^q$ est bijectif, donc $\hat{A}$ est aussi intègre.

(III 2.7) Corollaire (Nagata) : Soient A un anneau local noethérien hensélien universellement japonais dont le complété $\hat{A}$ est normal. Alors pour toute A-

<u>algèbre finie intègre contenant A, le complété $\hat{B}$ de B est intègre et B est algébriquement fermé dans $\hat{B}$.</u>

<u>Preuve</u> : En effet, B étant un anneau local noethérien intègre et unibranche, $\hat{B}$ est intègre d'après (III 2.6) et (II 2.7).
D'autre part, soient a un élément de $\hat{B}$ qui est algébrique sur B et b ($\neq$ o) un élément de B tel que c = ab soit entier sur B. Si B' désigne la clôture intégrale de B, $\hat{B}'$ est intègre d'après la première partie de la démonstration et $\hat{B} \subseteq \hat{B}'$. Donc puisque $B'[c] \subseteq \hat{B}'$, $B'[c]$ est intègre, donc aussi son complété $(B'[c])^{\wedge}$ d'après la première partie de la démonstration. Soit f(T) un polynôme unitaire sur B' de degré minimal annulé par c,
alors $B'[c] \simeq B'[T]/(f(T))$ (cf I ) puisque B' est normal.
Donc $(B'[c])^{\wedge} \simeq B'[c] \otimes_{B'} \hat{B}' \simeq \hat{B}'[T]/(f(T))$, ce qui implique que f(T) est irréductible dans $\hat{B}'[T]$. Finalement, puisque $c \in \hat{B}'$ est zéro de f(T), on en conclut que f(T) = T-c, donc $c \in B'$ puisque $f(T) \in B'[T]$. Si K désigne le corps des fractions de B, on a alors $a \in K \cap \hat{B} = B$ (cf [IO] I8.4, p. 59).

c.q.f.d.

(III 2.8) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau local noethérien hensélien japonais de dimension I, et $\hat{A}$ son complété, alors $\hat{A}$ est intègre et A est algébriquement fermé dans $\hat{A}$.</u>

<u>Preuve</u> : Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A, alors $\bar{A}$ est un anneau de valuation discrète, donc $\hat{A}$ ( $\subseteq (\bar{A})^{\wedge}$) est intègre. En outre, $\bar{A}$ est un anneau universellement japonais d'après (III I (ii)) puisque tout anneau quotient intègre de $\bar{A}$ est un anneau japonais, donc $\bar{A}$ est algébriquement fermé dans $(\bar{A})^{\wedge}$ (cf III 2.7) puisque $(\bar{A})^{\wedge}$ est normal. Soit c un élément de $\hat{A}(\subseteq (\bar{A})^{\wedge})$ algébrique sur A et soit K le corps des fractions de A,
alors $c \in \hat{A} \cap \bar{A} \subseteq \hat{A} \cap K = A$ (cf [ ] I8.4, p. 59) c.q.f.d.

(III 3) Théorème (Nagata) : Soient A un anneau semi-local noethérien universellement japonais et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors l'ensemble $\mathrm{Reg}(X)$ des points x de X, où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier est ouvert dans X (donc l'ensemble $U_{R_n}(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ vérifie $(R_n)$ est ouvert dans X (cf Grothendieck ([4] 6.I2.9)).

En outre :

(i) Si pour tout point x de X, l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est catenaire et équidimensionnel, l'ensemble $M_n(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est de multiplicité $\leqslant n$ est ouvert dans X.

(ii) Pour tout morphisme localement de type fini $S \longrightarrow X$, l'ensemble $\mathrm{Reg}(S)$ est ouvert dans S (donc l'ensemble $U_{R_n}(S)$ des points s S où l'anneau $\underline{O}_{S,s}$ vérifie $(R_n)$ est ouvert dans X (cf Grothendieck (loc. cit)), et si pour tout point s de S, l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est catenaire et équidimensionnel, l'ensemble $M_n(S)$ des points de S où l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est de multiplicité $< n$ est ouvert dans S.

Preuve : Découle des deux théorème suivants

(III 3.I) Théorème (Nagata) : Soient A un anneau noethérien et $X = \mathrm{Spec}(A)$. On suppose que pour tout anneau quotient intègre B de A, il existe $f\ (\neq o) \in B$ tel que $B_f$ soit un anneau régulier. Alors :

(i) L'ensemble $\mathrm{Reg}(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier est ouvert dans X( donc l'ensemble $U_{R_n}(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ vérifie $(R_n)$ est ouvert dans X (cf Grothendieck [4] 6.I2.9)).
De plus, si pour tout point x de X. l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est catenaire et équidimensionnel et tout anneau quotient intègre de $\underline{O}_{X,x}$ est un anneau de Mori (cf ), alors l'ensemble $M_n(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est de multiplicité $\leqslant n$ est ouvert dans X.

(ii) Si pour tout anneau quotient intègre B de A et toute extension radicielle finie K' du corps des fractions de B, il existe une sous-B-algèbre finie B' ayant K' pour corps des fractions, il existe un élément $f'(\neq o)$ de B tel que $B'_{f'}$ soit régulier, alors pour tout morphisme localement de type fini $S \longrightarrow X$, l'ensemble Reg(S) des points s de S où l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est régulier est ouvert dans S (donc l'ensemble $U_{R_n}(S)$ des points s de S où l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ vérifie $(R_n)$ est ouvert dans S (cf Grothendieck (loc. cit)). De plus, si pour tout point s de S, l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est caténaire et équidimensionnel et tout anneau quotient intègre de $\underline{O}_{S,s}$ est un anneau de Mori, alors l'ensemble $M_n(S)$ des points s de S où l'anneau local $\underline{O}_{S,s}$ est de multiplicité $\leq n$ est ouvert dans S.

Preuve : Découle de ([4] 6.I2.4) et de ([IO] 40.3, p. I55) où pour prouver que $M_n(X)$ est ouvert on doit supposer que les anneaux locaux $\underline{O}_{X,x}$ sont caténaires et équidimensionnels et les quotients intègres des $\underline{O}_{X,x}$ sont "formellement réduits", i.e leurs complétés sont réduits (cette dernière condition étant équivalente au fait que tout anneau quotient intègre de tout $\underline{O}_{X,x}$ est un anneau de Mori (cf I 5.I)) puisque la démonstration de ce fait s'appuie sur (|IO| 40.I, p. I53)).

(III 3.2) Théorème (Nagata ([9])) : Soit A un anneau semi-local noethérien tel que tout anneau quotient intègre de A soit un anneau de Mori (ou ce qui revient au même, le complété de tout anneau quotient intègre de A est réduit (cf I 5.I)). Alors l'ensemble Reg(Spec(A)) des points x de X = Spec(A), où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier est ouvert dans Spec(A).

(III 3.3) Nagata prouve même dans [9] que si A est un anneau semi-local noethérien tel que $\mathrm{Reg}(\mathrm{Spec}(\hat{A}))$ soit un ouvert non vide (ou ce qui revient au même d'après (III 3) et (III 2.0), $\mathrm{Reg}(\mathrm{Spec}(\hat{A}))$ contient un ouvert non vide), alors il existe un élément $f \in A$ non nilpotent tel que $A_f$ soit un anneau régulier, donc si le complété de A est réduit, il existe un élément $f \in A$ non nilpotent tel que $A_f$ soit un anneau régulier.

(III 4) Théorème : Soit A un anneau de Mori noethérien.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est "formellement réduit", i.e son complété est réduit.

(ii) Toute A-algèbre affine dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A est un anneau de Mori.

(iii) Toute A-algèbre affine contenue dans le corps des fractions de A est un anneau de Mori.

(iv) Toute A-algèbre locale essentiellement affine dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A est un anneau de Mori.

(v) Toute A-algèbre locale essentiellement affine contenue dans le corps des fractions de A est un anneau de Mori.

De plus, si A vérifie ces conditions, il en est de même de toute A-algèbre essentiellement affine, dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A.

Preuve : Montrons que (i) implique (ii).
Soit B une A-algèbre affine dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A. Alors pour tout idéal premier p' de B, le complété de l'anneau local $B_{p'}$ est réduit d'après (III I.I) puisque celui de $A_{p' \cap A}$ l'est (En effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal contenant $p = p' \cap A$, $(A_{\mathfrak{m}})^{\wedge}$

est réduit, donc $(A_p)^\wedge$ est aussi réduit d'après (III I.I)). Donc $B_p$ est un anneau de Mori. D'autre part, d'après ([IO] 39.II, p. I52), il existe des éléments $x_I,\ldots,x_n$ de B algébriquement indépendants sur A tels que le corps des fractions de B soit une extension finie séparable de celui de $A[x_I,..,x_n]$ et qu'il existe un élément f ($\neq$ o) de A tel que $A_f[x_I,\ldots,x_n] \longrightarrow B_f$ soit fini. Donc $B_f$ est un anneau de Mori d'après (I 4.3) puisque $A_f[x_I,\ldots,x_n]$ est un anneau de Mori d'après (I 0.I) et (I I). Donc B est un anneau de Mori. Maintenant prouvons que (v) implique (i). On peut supposer que A est local. Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A qui est une A-algèbre finie. Pour prouver que $\hat{A}$ est réduit, il suffit de prouver que $(\bar{A})^\wedge$ est réduit. Nous allons raisonner par récurrence sur n = dim(A). Si n $\leqslant$ I, $\bar{A}$ est un anneau régulier, donc son complété qui est également régulier est réduit.

Supposons dim(A) $\geqslant$ 2. Soient a et b $\in \bar{A}$ tels que $ht(a\bar{A}+b\bar{A}) = 2$. Alors aT-b engendre un idéal premier dans l'anneau des polynômes $\bar{A}[T]$, donc aussi dans A(T). Soit $C = \bar{A}(T)/(aT-b)$, alors C est contenu dans le corps des fractions de A et dim(C) = n-I, donc pour tout point fermé x de X = Spec(C), le complété de $\underline{O}_{X,x}$ est réduit d'après l'hypothèse de récurrence puisque $\underline{O}_{X,x}$ vérifie aussi l'hypothèse (v), et c'est un anneau de Mori à cause de l'hypothèse (v). Donc puisque C est semi-local, son complété C est réduit, donc le complété de A(T) est réduit d'après le lemme de Zariski ([IO] 36.3, p. I32), donc $(\bar{A})^\wedge$ est réduit par fidèle platitude. On a donc prouvé que (v) implique (i). Mais (ii) implique (ii) et (iv) qui impliquent tous les deux (v), et puisque (i) et (v) sont équivalentes et que (i) implique (ii), on en conclut que toutes les cinq conditions sont équivalentes. c.q.f.d.

(III 4.I) <u>Remarque</u> : L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) de (II 4) est due à Kikuchi, l'équivalence des cinq conditions précédentes est due à l'auteur.

(III 4.2) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau régulier intègre</u>.
<u>Alors toute A-algèbre essentiellement affine, dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A est un anneau de Mori</u>.
<u>En particulier, toute algèbre essentiellement affine sur un anneau régulier intègre, dont le corps des fractions est de caractéristique 0 est un anneau japonais</u>.

## IV - ANNEAUX JAPONAIS DISTINGUES

(IV 0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau japonais distingué, si A est intègre et si toute A-algèbre affine est un anneau japonais, ou ce qui revient au même si toute A-algèbre affine est un anneau de Mori.

(IV 0.I) (i) Tout anneau japonais distingué est un anneau japonais.

(ii) Tout anneau de fractions d'un anneau japonais distingué est un anneau japonais distingué.

(iii) Tout algèbre affine sur un anneau japonais distingué est un anneau japonais distingué.

(iv) Tout anneau universellement japonais intègre est un anneau japonais distingué.

(IV I) Théorème : Soit A un anneau noethérien intègre.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau japonais distingué.

(ii) A est un anneau japonais et toute A-algèbre locale essentiellement affine est un anneau de Mori.

(iii) A est un anneau japonais et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, si R désigne l'anneau total des fractions du complété de l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$, et K le corps des fractions de A, R est une K-algèbre séparable.

Preuve : Il est clair, d'après la définition (iv o) que (i) implique (ii). D'autre part, (ii) implique (i) d'après (II 3.2). Montrons maintenant que (i) implique (iii). On peut supposer que A est local puisque la condition A est un anneau japonais est impliquée par (i). Dans ce cas, toute A-algèbre finie intègre B contenant A est un anneau japonais distingué.

Donc pour tout point fermé x de X = Spec(B), le complété $\hat{\underline{O}}_{X,x}$ de $\underline{O}_{X,x}$ est réduit d'après (III 4), et puisque B est semi-local, son complété $\hat{B}$ est donc réduit. Soit alors K' une extension finie de K et soit B une A-algèbre finie admettant K' pour corps des fractions, alors $R\otimes_K K' \simeq R\otimes_A K'$ est un anneau de fractions de $\hat{B}$, donc $R\otimes_K K'$ est réduit puisque B est réduit d'après ce qu'on vient de voir, et puisque K' est arbitraire, on en conclut que R est une K-algèbre séparable, donc (i) implique (iii).

Montrons maintenant que (iii) implique (ii). On peut supposer que A est local. Soit C une A-algèbre locale essentiellement affine. Pour prouver que C est un anneau de Mori, on peut supposer que C est localisé de $A_I = A[x_I,\dots,x_n] \subseteq C$ en un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A_I$. Soit $p = \mathfrak{m} \cap A$ et soit p' un idéal premier de $\hat{A}$ au-dessus de p. Alors l'anneau total des fractions R du complété de $A_p$ est un sous anneau de l'anneau total des fractions R' du complété de $\hat{A}_{p'}$. Puisque l'anneau total des fractions de $\hat{A}$ est par hypothèse une K-algèbre séparable, on en conclut que l'anneau total des fractions de $\hat{A}_{p'}$ est composé direct d'un nombre fini de corps $L_i$ extensions séparables de K. Mais $\hat{A}$ est un anneau universellement japonais, donc $\hat{A}_p$ est aussi un anneau universellement japonais (cf III I), donc les fibres formelles de $\hat{A}_{p'}$ sont géométriquement réduites (cf III 2), donc l'anneau total des fractions R' de $(\hat{A}_{p'})^{\wedge}$ est composé direct d'un nombre fini de corps qui sont chacun extension séparable d'un des $L_i$, donc R' est une K-algèbre séparable et à fortiori $R \subseteq R'$ est une K-algèbre séparable. Quitte donc à remplacer A par $A_p$, on peut supposer que p est l'idéal maximal de A. Donc il n'existe qu'un seul idéal premier $\mathfrak{m}_I$ de $A' = \hat{A}\otimes_A A_I$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $A'_{\mathfrak{m}_I}$ a même complété que $C = (A_I)_{\mathfrak{m}}$. Mais A' est un anneau universellement japonais puisque c'est une A-algèbre de type fini, et $\hat{A}$ est universellement japonais (cf III 0 et III 2.0), donc $A'_{\mathfrak{m}_I}$ est universellement japonais (cf III I).

Mais si L désigne le corps des fractions de $A_I$, on voit que $A' \subseteq R \otimes_K L$ qui est réduit puisque R est une K-algèbre séparable, donc $A'_{\mathfrak{m}_I}$ est un anneau réduit, donc son complété qui est aussi le complété de C est réduit d'après (III 2) puisque $A'_{\mathfrak{m}_I}$ est un anneau universellement japonais, donc (iii) implique bien (ii). c.q.f.d.

(IV I.I) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau semi-local noethérien intègre, K son corps des fractions, A le complété de A et R l'anneau total des fractions de $\hat{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

(i) <u>A est un anneau japonais distingué</u>.

(ii) <u>R est une K-algèbre séparable</u>.

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord que (i) implique (ii). Soient $\mathfrak{m}_I,\dots,\mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux de A, pour tout entier i ($I \leq i \leq r$), soit $R_i$ l'anneau total des fractions du complété $(A_{\mathfrak{m}_i})^\wedge$ de l'anneau local $A_{\mathfrak{m}_i}$. Puisque $\hat{A}$ est composé direct des $(A_{\mathfrak{m}_i})^\wedge$, R est composé direct des $R_i$. Mais d'après (IV I (iii)), chaque $R_i$ est une K-algèbre séparable, donc R est une K-algèbre séparable. Prouvons maintenant que (ii) implique (i). Si la condition (ii) est satisfaite, A est un anneau japonais d'après (II 5) et chaque $R_i$ est une K-algèbre séparable, i.e A satisfait à la condition (iii) de (IV I), donc A est un anneau japonais distingué. c.q.f.d.

(IV I.2) <u>Corollaire</u> : <u>L'anneau</u> $A_o$ <u>de (II 9) est un anneau japonais qui n'est pas un anneau japonais distingué</u>.

(IV I.3) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément de A. On suppose</u> :

(i) p = xA <u>est un idéal premier et A est séparé et complet pour la topologie p-adique</u>.

(ii) <u>A/p est un anneau japonais distingué</u>.

<u>Alors A est un anneau japonais distingué</u>.

<u>Preuve</u> : D'après (II 4) A est un anneau japonais.

D'autre part, puisque A est séparé et complet pour la topologie p-adique, x appartient au radical de Jacobson de A. Montrons maintenant que A satisfait à la condition (iii) de (IV I). On peut pour cela supposer que A est local parce qu'on ne se servira que du fait que x appartient au radical de Jacobson de A et p = xA premier. Il nous suffit donc d'après le raisonnement de (IV I (iii)) de prouver que pour tout homomorphisme injectif et fini $A \longrightarrow B$ avec B intègre, le complété B de B est réduit. Quitte à remplacer B par sa clôture intégrale (puisque A est un anneau japonais), on peut supposer que B est normal. Soit p' un idéal premier minimal de xB, alors

$$p' \cap A \in \mathrm{Ass}_A(A/xA) = \{p\}$$

(cf II 6.3), donc $p' \cap A = p$ et puisque A/p est un anneau japonais distingué par hypothèse, on en conclut que le complété de B/p' est réduit. Donc le complété B de B est réduit d'après le lemme de Zariski ([I0] 36.3, p. I32).

c.q.f.d.

Dans la démonstration de (IV I.3), l'hypothèse (i) n'intervient que pour prouver que A est un anneau japonais, et que x appartient au radical de Jacobson. On peut donc prouver de la même manière le

(IV I.4) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau noethérien japonais et x un élément de A appartenant au radical de Jacobson de A. Alors A est un anneau japonais distingué si A/xA est un anneau japonais distingué</u>.

(IV I.5) <u>Corollaire</u> : <u>Soient A un anneau japonais distingué noethérien</u>.

<u>Alors tout anneau de séries formelles</u> $B = A[[T_1,\dots,T_n]]$ <u>à un nombre fini de variables sur A est un anneau japonais distingué</u>.

(IV 2.I) <u>Théorème</u> : <u>Tout anneau régulier intègre, dont le corps des fractions est de caractéristique 0, est un anneau japonais distingué</u>.

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence de (III 4.2).

En fait, on a le résultat plus général suivant

(IV 2.2) <u>Théorème</u> : <u>Soient A un anneau régulier intègre, K son corps des fractions et p l'exposant caractéristique de K. Supposons que</u> $[K : K^p] < +\infty$.
<u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>A est un anneau japonais</u>.

(ii) <u>A est un anneau japonais distingué</u>.

<u>Preuve</u> : Il est clair que (ii) implique (i).
Pour prouver que (i) implique (ii), on peut supposer que A est local.
Il suffit de prouver que la fibre du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ au point générique de Spec(A) est géométrique réduite d'après ((III I.I) et sa démonstration).
Il suffit donc de prouver la proposition suivante :

(IV 2.3) <u>Proposition</u> : <u>Soient A un anneau semi-local régulier japonais, K son corps des fractions et p l'exposant caractéristique de K. Supposons que</u> $[K : K^p] < +\infty$. <u>Alors la fibre du morphisme</u> $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ <u>au point générique de</u> Spec(A) <u>est géométriquement régulière</u>.

<u>Preuve</u> : Soit K' une extension radicielle finie de K.

Il existe donc une puissance q de p tel que $K' \subseteq K_I = k^{q^{-I}}$.

Puisque $[K : K^p] < +\infty$, alors $[K_I : K] < +\infty$, donc la fermeture intégrale $A_I$ de A dans $K_I$ est un A-module de type fini.

D'autre part, si $\mathfrak{m}_I$ est un idéal maximal de $A_I$, et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_I \cap A$, si les $x_i$ $(I \leq i \leq n)$ engendrent l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{m}}$, les $y_i = x_i^{q^{-I}}$ $(I \leq i \leq n)$ engendrent l'idéal maximal de $A_{I\mathfrak{m}_I}$ ; et puisque $\dim(A_{\mathfrak{m}}) = \dim(A_{I\mathfrak{m}_I})$ (cf [IO] IO.I4, p. 32), on en conclut que $A_{I\mathfrak{m}_I}$ est un anneau local régulier, donc A est un anneau semi-local régulier. Donc $\hat{A}_I$ est un anneau semi-local régulier et par conséquent

$$\hat{A} \otimes_A K_I \simeq (\hat{A} \otimes_A A_I) \otimes_{A_I} K_I \simeq \hat{A}_I \otimes_{A_I} K_I$$

qui est un anneau de fractions de $\hat{A}_I$ est un anneau régulier.

Mais $B_I = \hat{A} \otimes_A K_I \simeq (\hat{A} \otimes_A K') \otimes_{K'} K_I$, donc $B_I$ un $A \otimes_A K'$-module fidèlement plat, donc $\hat{A} \otimes_A K'$ est un anneau régulier (cf [3] I7.3.3), donc la fibre du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$, au point générique de Spec(A) est bien géométriquement régulière.

(IV 2.4) <u>Corollaire</u> : <u>L'anneau R de ([IO] Ex 7, p. 209) dans le cas où K est un corps de caractéristique 0 est un anneau local régulier de dimension 2, qui n'est pas un anneau universellement japonais, mais qui est un anneau japonais distingué</u>.

En effet, puisque R est un local régulier dont le corps des fractions est de caractéristique 0, c'est un anneau japonais distingué (cf III 2.I), et la fibre du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ au point générique de Spec(A) est géométriquement régulière (cf IV 2.3), donc la fibre du morphisme

$$X' = \operatorname{Spec}(\hat{R}[X]/(X^2-z)\hat{R}[X]) \longrightarrow X = \operatorname{Spec}(R[X]/(X^2-z)R[X])$$

au point générique de X. Or $A = R[X]/(X^2-z)R[X]$ est un anneau local normal, donc si A était un anneau universellement japonais, son complété $\hat{A}$ serait normal d'après le théorème de Zariski (I 6), ce qui n'est pas la cas, donc R n'est pas non plus universellement japonais.

(IV 3) Proposition : Soit A un anneau noethérien intègre.
On suppose qu'il existe une A-algèbre noethérienne réduite B qui est un A-module fidèlement plat, et qui vérifie les conditions suivantes :

(i) L'anneau total des fractions de B est une algèbre séparable sur le corps des fractions de A.

(ii) Pour tout idéal premier minimal p de B, l'anneau quotient B/p est un anneau japonais distingué.

Alors A est un anneau japonais distingué.

Preuve : En effet, d'après (II 5), A est un anneau japonais.
Pour prouver donc que A est un anneau japonais distingué, on peut d'après (IV I (iii)) supposer que A est local, donc aussi que B est local.
Soit A' une A-algèbre intègre finie contenant A. Posons $B' = B\otimes_A A'$.
Soient K le corps des fractions de A, K' celui de A' et R l'anneau total des fractions de B. Par platitude on voit que

$$B' \subseteq R' = R \otimes_K K' \simeq R \otimes_A K',$$

donc B' est un anneau réduit, puisque R' est réduit parce que R est une K-algèbre séparable par hypothèse ; et il est alors clair que R' est l'anneau total des fractions de B'. Soit p' un idéal premier minimal de B, alors p'R' est un idéal premier de R', donc $p'R' \cap R$ est un idéal premier de R, donc $p = p' \cap B$ est un idéal premier minimal de B puisque B est réduit, donc $(P'/p')^{\wedge}$ complété de B'/p' est réduit (cf IV I (iii)) puisque B/p est un anneau japonais distingué par hypothèse et $B/p \longrightarrow B'/p'$ est fini.

Cela étant vrai pour tout idéal premier minimal p' de B', et B' étant réduit, on en conclut que le complété B' de B' est réduit. A fortiori, le complété A' de A' est réduit puisque A' $\longrightarrow$ B' est fidèlement plat. Cela étant vrai pour toute A-algèbre intègre et finie A' contenant A, on en conclut d'après ((IV I.2) et sa démonstration que l'anneau total des fractions Q du complété A de A est une K-algèbre séparable, donc A est un anneau japonais distingué d'après (IV I.2) c.q.f.d.

(IV 4) Corollaire : Soient A un anneau local noethérien et A' son henselisé (resp. son henselisé strict). Alors A' est un anneau japonais distingué, si et seulement si A japonais distingué unibranche (resp. un anneau japonais distingué géométriquement unibranche).

Preuve : Si A' est un anneau japonais distingué, alors A ($\subseteq$A') est intègre et c'est un anneau japonais distingué d'après (IV I.I), puisque le corps des fractions de A' est une extension séparable de celui de A ( cf [4] I8.6.9. et I8.8.I2). Réciproquement, si A est un anneau japonais distingué unibranche (resp. un anneau japonais distingué géométriquement unibranche) A' est intègre (cf [4] I8.6.I). Soit B une A'-algèbre finie intègre contenant A'. Il existe alors une A-algèbre essentiellement étale $A_o$ (cf [4] I8.6.I) et une $A_o$-algèbre finie (nécessairement intègre et contenant $A_o$) $B_o$ telle que $B \simeq B_o \otimes_{A_o} A'$. Puisque A est un anneau japonais distingué, le complété de $B_o$ qui est isomorphe au complété de B est réduit. Donc A' est un anneau japonais distingué d'après (IV I.I).

## V - ANNEAUX PSEUDO-GEOMETRIQUES

(V 0) Définition : On dit qu'un anneau A, est un anneau pseudo-géométrique, si A est noethérien et vérifie les deux conditions suivantes :

(i) A est un anneau universellement japonais (III 0)

(ii) Pour tout anneau quotient intègre B, et pour toute extension radicielle finie K' du corps des fractions K de B, il existe une sous-B-algèbre finie B' de K' admettant K' pour corps des fractions, et un élément $f'(\neq o) \in B'$ tel que $B'_{f'}$ soit un anneau régulier.

(V 0.I) En vertu de (III I (iii)), A est un anneau pseudo-géométrique si A est noethérien et satisfait à la condition (ii) de (V 0) et à la condition suivante :

(i)' Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau universellement japonais.

(V 0.2) Théorème (Nagata) : Soit A un anneau noethérien. Si A est un anneau pseudo-géométrique, alors toute A-algèbre de type fini B est un anneau pseudo-géométrique.

Preuve : En effet, B est un anneau universellement japonais d'après (III 0), et pour toute B-algèbre de type fini B' (donc B' est une A-algèbre de type fini) l'ensemble Reg(X') des points x' de X' = Spec(B'), où l'anneau local $\underline{O}_{X',x'}$ est régulier est ouvert dans X' d'après le théorème de Nagata ([IO] 6.I2.4), donc si B' est intègre, il existe $f'(\neq o) \in B'$ tel que $B'_{f'}$ soit un anneau régulier, donc B satisfait aux conditions (i) et (ii) de (V 0). c.q.f.d.

On a en même temps prouvé

(V 0.3) Théorème : Soit A un anneau noethérien pseudo-géométrique. Alors l'ensemble Reg(X) des points x de X = Spec(A) où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier est ouvert dans X.

En particulier, l'ensemble $U_{R_n}(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ vérifie $(R_n)$ est ouvert dans X (cf Grothendieck ( )).
En outre, si pour tout point x de X, l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est catenaire et équidimensionnel, l'ensemble $M_n(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est de multiplicité $\leqslant$ n est ouvert dans X quel que soit n $\geqslant$ I.

(V I) Théorème (Nagata) : Tout anneau semi-local noethérien universellement japonais est un anneau pseudo-géométrique.

En particulier, tout anneau semi-local noethérien complet est un anneau pseudo-géométrique.

Preuve : Découle de (III 3) et (III 2.0).

(V 2) Théorème : Soient A un anneau noethérien pseudo-géométrique, X = Spec(A) et F un $\underline{O}_X$-module cohérent. Alors les ensembles suivants sont ouverts dans X (quel que soit l'entier n $\geqslant$ o) :

(i) $U_{C_n}(F)$ = ensemble des points x de X où $F_x$ est un $\underline{O}_{X,x}$ module de coprofondeur $\leqslant$ n.

(ii) $U_{S_n}(F)$ = ensemble des points x de X où $F_x$ est un $\underline{O}_{X,x}$ module qui vérifie $(S_n)$.

(iii) CM(F) = ensemble des x $\in$ X où $F_x$ est un $\underline{O}_{X,x}$ module de Cohen Macaulay.

Preuve : Découle de (V 0.3) ([4] 6.II.3).

(V 2.I) Remarque : Le théorème (V        ) est vrai lorsque A vérifie seulement la condition (i) de (III 3.I).

(II 2.2) Corollaire : Soient A un anneau noethérien pseudo-géométrique et X = Spec(A). Les ensembles suivants sont ouverts dans X (quel que soit l'entier $n \geq o$) :

(i) $U_{C_n}(X)$ = ensemble des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est de profondeur $\leqslant n$.

(ii) $U_{S_n}(X)$ = ensemble des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ vérifie $(S_n)$.

(iii) CM(X) = ensemble des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est un anneau de Cohen-Macaulay.

## VI - ANNEAUX DE NAGATA

(VI 0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau de Nagata, si A est un anneau pseudo-géométrique (V,0) universellement catenaire.

(VI I) Théorème : Si A est un anneau de Nagata, alors toute A-algèbre de type fini est un anneau de Nagata.

Preuve : Découle de (V 0.2) et ([II] I.5).

(VI 2) Théorème : Tout anneau semi-local noethérien complet est un anneau de Nagata.

Preuve : Découle de (V I) et ([II] I.II).

(VI 3) Remarque : Les théorèmes (V 2) et (V 2.2) sont en particuliers vrais si A est un anneau de Nagata.

En outre, comme cas particulier de (V 0.3), on a

(VI 4) Théorème : Soient A un anneau de Nagata et X = Spec(A).

Les ensembles suivants sont ouverts (quel que soit l'entier $n \geqslant o$)

(i) Reg(X) = ensemble des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est régulier.

(ii) $U_{R_n}(X)$ = ensemble des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ vérifie $(R_n)$.

En outre, si pour tout point x de X, l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est équidimensionnel, l'ensemble $M_n(X)$ des points x de X où l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est de multiplicité $\leqslant n$ est ouvert dans X quel que soit l'entier $n \geqslant o$.

(VI 5) Théorème : Soit A un anneau de Nagata. Alors A possède les propriétés suivantes :

(i) Pour tout anneau quotient intègre B de A, l'anneau $B^{(I)}$ (notation de [4] 5.I0.I7) est une B-algèbre finie.

(ii) Pour toute partie fermée T de X = Spec(A) et tout $O_U$-module cohérent $\mathcal{G}$ (où U = X - T) tel que pour tout $x \in \mathrm{An}(\mathcal{G})$, on ait $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap T, \overline{\{x\}}) \geq 2$, $i_*(\mathcal{G})$ (où $i : U \to X$ est l'injection canonique) est un $O_X$-module cohérent.

Preuve : Découle de (VI 0) et ([4] 5.II.6).

(VI 6) Théorème : Soit A un anneau semi-local noethérien pseudo-géométrique réduit. On suppose que les fibres formelles de A aux points génériques des composantes irréductibles de X = Spec(A) sont normales.
Alors la clôture intégrale $\overline{A}$ de A est un anneau de Nagata.

Preuve : Elle découle de (I 6.3), ([II], I.II) et (VI 0).

(VI 7) Remarque : L'anneau R de ([I0] Ex 2, p. 203) dans le cas où m > o est un anneau pseudo-géométrique (et même géométrique (cf VII)) qui n'est pas un anneau de Nagata, i.e qui n'est pas universellement catenaire, donc un anneau pseudo-géométrique, n'est pas nécessairement un anneau de Nagata.

## VII - ANNEAUX GEOMETRIQUES

(VII 0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau géométrique, si A est noethérien et vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est à fibres formelles géométriquement régulières.

(ii) Pour tout anneau quotient intègre B de A, et pour toute extension radicielle finie K' du corps des fractions K de B, il existe une sous-B-algèbre finie B' de K', admettant K' pour corps des fractions, et un élément f'($\neq$ o) de B' tel que $B'_{f'}$ soit un anneau régulier.

(VII 0.I) Tout anneau géométrique est un anneau pseudo-géométrique.

(VII 0.2) Tout anneau semi-local noethérien complet est un anneau géométrique.

(VII I) Théorème : Si A est un anneau géométrique, alors toute A-algèbre de type fini est un anneau géométrique.

Preuve : Découle de ([4] 7.3.I3), (VII 0.I) et (V 0.2).

(VII 2) Théorème : Soit A un anneau semi-local noethérien. Alors A est un anneau géométrique, si et seulement si A vérifie la condition (i) de (VII 0).

Preuve : En effet, si A vérifie la condition (i) de (VII 0), A est universellement japonais, donc A est un anneau pseudo-géométrique (cf V I), donc A vérifie la condition (ii) de (VII 0) d'après (V 0).

On a le théorème suivant que nous énonçons sans démonstration.

(VII 3) Théorème (E. Kunz ([7] Corollaire 2.6, p. 77) : Soit A un anneau semi-local noethérien contenant un corps de caractéristique $p \neq o$, et tel que A soit un $A^p$-module de type fini. Alors A est un anneau géométrique.

(VII 3.I) Corollaire : Soit A un anneau semi-local noethérien japonais, dont le corps des fractions K est de caractéristique $p \neq o$, et tel que $[K : K^p] < +\infty$. Alors A est un anneau géométrique.

Preuve : En effet, A contient le corps $F_p$, donc il suffit d'après (VII 3) de prouver que A est un $A^p$-module de type fini. Soient $K' = K^{p^{-I}}$ et A' la fermeture intégrale de A dans K'. Puisque $[K : K^p] < +\infty$, alors $[K' : K] < +\infty$, donc A' est un A-module de type fini, puisque A est un anneau japonais par hypothèse. Donc $A'^p$ est un $A^p$-module de type fini. Or $A'^p$ est la clôture intégrale de A, donc A est un $A^p$-module de type fini. c.q.f.d.

(VII 3.2) Remarque : Le corollaire (VII, 3.I) est faux en caractéristique 0, en effet on a vu (IV 2.4) que l'anneau R de ([IO] Ex 7, p. 209) dans le cas où K est de caractéristique 0, est un anneau japonais distingué qui n'est pas un anneau universellement japonais, donc R est un contre exemple à (VII 3.I) en caractéristique 0, et R est même un anneau japonais distingué.

(VII 4) Théorème : Soient A un anneau local noethérien intègre contenant un corps de caractéristique $p \neq o$, K son corps des fractions. On suppose que A est un anneau japonais distingué et son corps résiduel k est tel que $[k : k^p] < +\infty$. Alors $[K : K^p] < +\infty$, donc A est un anneau géométrique (cf VII 3.I).

Preuve : Nous allons raisonner par récurrence sur n = dim(A).

Supposons d'abord $n \geqslant 2$. Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale. Alors quitte à remplacer A par un anneau local $\overline{A}_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal (ce qui ne détruit pas les hypothèses faites sur A), on peut supposer que A est normal.

Soient a et $b \in A$, tels que $ht(aA+bA) = 2$, alors $B = A(T)/(aT-b)$ est un anneau intègre contenant A, et qui est essentiellement de type fini sur A (cf [IO], II.I3, p. 39), donc B est un anneau japonais distingué (cf IV 0). Or le corps résiduel de B est $k' = k(T)$, donc $[k' : k'^p] < +\infty$. Mais K est le corps des fractions de B. On est donc ramené à prouver le théorème pour B.

Mais $\dim(B) = \dim(A) - I$, on voit donc qu'on est ramené au cas où $\dim(A) \leqslant I$. Si $\dim(A) = o$, A est un corps et c'est trivial. Si $\dim(A) = I$, comme précédemment, on peut supposer que A est normal, donc un anneau de valuation discrète. Soit $A_I$ la fermeture intégrale de A dans $K_I = K^{p^{-I}}$ qui est un anneau de valuation discrète (cf [IO] I2.5, p. 40). Alors $k_I = k^{p^{-I}}$ est le corps résiduel de $A_I$ ; donc $[k_I : k] < +\infty$ puisque $[k : k^p] < +\infty$. Mais puisque A est un anneau japonais, il existe alors une sous-algèbre finie A' de $A_I$ dont le corps résiduel est $k_I$, dont l'idéal maximal engendre celui de $A_I$ et qui est normale, donc $\hat{A}' \longrightarrow \hat{A}_I$ est un isomorphisme. Soit R le henselisé de A'. Alors R est algébriquement fermé dans $\hat{R} = \hat{A}' = A_I$ (cf ).

Or $A_I \subseteq \hat{A}_I$ est entier sur $A' \subseteq R$, donc $A_I \subseteq R$, donc le corps des fractions $K_I$ de $A_I$ est une extension séparable du corps des fractions K' de A' puisque le corps des fractions de R est une extension séparable de celui de A' d'après ([4] I8.6.9 (ii)), donc $K_I = K'$ puisque $K_I \subseteq K'^{p^{-I}}$.

On en conclut donc que $K_I$ est une extension finie de K, donc $[K : K^p] < +\infty$.

c.q.f.d.

(VII 4.I) <u>Corollaire</u> : <u>Soit A un anneau local noethérien contenant un corps de caractéristique $p \neq o$, et dont le corps résiduel k est tel que</u> $[k : k^p] < +\infty$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

(i) _A est un anneau géométrique_.

(ii) _A est un anneau universellement japonais_.

(iii) _Les fibres du morphisme_ $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ _aux points génériques de_ $\mathrm{Spec}(A)$ _sont géométriquement réduites_.

## VIII - ANNEAUX EXCELLENTS

(VIII 0) Définition : On dit qu'un anneau A est un anneau excellent si A est un anneau géométrique universellement catenaire.

(VIII 0.I) Tout anneau excellent est un anneau de Nagata.

(VIII 0.2) Tout anneau semi-local noethérien complet est un anneau excellent.

(VIII 0.3) Tout anneau noethérien japonais ou universellement japonais de dimension $\leqslant$ I est excellent.

(VIII I) Théorème : *Si A est un anneau excellent, il en est de même de toute A-algèbre de type fini B.*

Preuve : Découle de (VII I) et de (VIII 0).

(VIII 2) Théorème : *Soit A un anneau noethérien.*
*On suppose que A vérifie l'une des conditions suivantes* :

(i) *A est un anneau normal.*

(ii) *A est un anneau local unibranche.*

(iii) *A est un anneau semi-local noethérien.*

*Alors pour que A soit un anneau excellent, il faut et il suffit que A soit un anneau géométrique.*

Preuve : Découle de (VIII 0), (II 2.3), (II 2.4) et (II 2.5).

(VIII 2.I) Corollaire : *Soit A un anneau pseudo-géométrique réduit. Alors la clôture intégrale $\bar{A}$ de A est un anneau excellent.*

(VIII 3) <u>Théorème</u> : <u>Soit A un anneau excellent. Alors A possède les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Pour tout anneau quotient intègre B de A, l'anneau $B^{(I)}$ (notation de [4] 5.I0.I7) est une B-algèbre finie</u>.

(ii) <u>Pour toute partie formée T de</u> X = Spec(A) <u>et tout $\mathcal{O}_U$-module cohérent</u> $\mathcal{G}$ <u>(où U = X-T) tel que pour tout</u> $x \in \mathrm{Ass}(\mathcal{G})$, <u>on ait</u> $\mathrm{codim}(\{\overline{x}\} \cap T, \{\overline{x}\}) \geqslant 2$, $i_*(\mathcal{G})$ <u>(où</u> $i : U \longrightarrow X$ <u>est l'injection canonique) est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent</u>.

(iii) <u>Si A est local pour que A soit un anneau unibranche (resp. intègre et unibranche, resp. normal), il faut et il suffit que son complété $\hat{A}$ le soit</u>.

<u>Preuve</u> : Découle de (VI 5), (III 2.3), (III 2.4) et (III 2.5).

(VIII 4) <u>Remarque</u> : A part le fait que les anneaux excellents possèdent de très bonnes propriétés arithmétiques et que certaines de leurs propriétés se conservent par complétion (on ne sait pas cependant si le complété d'un anneau excellent A pour une topologie I-adique (I idéal de A) est encore excellent), on connaît très peu de choses sur les anneaux excellents.
On ne sait même pas si l'anneau des séries formelles sur un anneau excellent est excellent.

## BIBLIOGRAPHIE


[I] H. BASS On the ubiquity of Gorenstein ring, Math. Zeit. 82 (I963) p. 8-28.

[2] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de Géométrie algébrique I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York.

[3] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de Géométrie algébrique Chapitre 0 IV, Paris, P.U.F n° 20 (I964).

[4] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de Géométrie algébrique Chapitre IV, Paris, P.U.F n° 24 (I965), n° 28 (I966), n° 32 (I967).

[5] A. GROTHENDIECK et H. SEYDI Morphismes universellement ouverts (à paraître).

[6] L. GERRITZEN Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funtionentheorie, Inv. Math. 2 (I967) p. I78-I90.

[7] E. KUNZ A characterization of regular local rings of characteristic p, Am. T. of Math, vol. 9I (I967), p. 74-80.

[8] H. MATSUMURA Commutative Algebra, Benjamin.

[9] M. NAGATA On the closedness of singular loci, Publ. Math Inst. Hautes Et. Sc. 2 (I959), p. 29-36.

[IO] M. NAGATA Local Rings, Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, vol. I3 (I962) Interscience New-York.

[II] H. SEYDI Anneaux henséliens et conditions de chaînes I, Bull Soc. Math. France, vol. 98 (I970) p. 9-3I.

[I2] H. SEYDI La réciproque d'un théorème de Kikuchi J. of Math. Kyoto Univ. vol. II, n° 3 (I97I) p. 4I5-424.

[I3] O. ZARISKI Sur la normalité analytique des variétés normales
Ann. Inst. Fourier 2 (I950) p. I6I-I64.

[I4] O. ZARISKI et P. SAMUEL Commutative algebra, vol. I et II,
Van Nostrand, Univ. Series in Higher Mathematics.

Institut Henri Poincaré
II, rue Pierre et Marie Curie
PARIS V$^e$

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I2 SEYDI
39, avenue Claude Villefaux
75 - PARIS IO$^e$