PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

LAURENT GRUSON

Une propriété des couples henséliens

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 10, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A10_0>

UNE PROPRIETE DES COUPLES HENSELIENS

Laurent Gruson

On suppose connues les propriétés élémentaires des algèbres étales (voir les premiers chapitre de [5]).

Soit X un schéma. Rappelons que X est local hensélien s'il est local de point fermé x et si le théorème des fonctions implicites vaut au-dessus de x, i.e. si pour tout X-schéma Y et tout point y de Y au-dessus de x, tels que Y soit X-étale en y et $k(x) = k(y)$, il existe une X-section s de Y telle que $s(x) = y$.
(NB. s est nécessairement unique).

On définit les couples henséliens (EGA IV 18.5.5) en "globalisant" la définition précédente. On se limitera ici aux schémas affines.

Définition. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, $\overline{X}$ un sous-schéma fermé de X. On dit que $(X,\overline{X})$ est un couple hensélien si $\overline{X}$ contient les points fermés de X et si le théorème des fonctions implicites vaut au-dessus de $\overline{X}$, i.e. si pour tout X-schéma Y et tout X-morphisme $\overline{s} : \overline{X} \longrightarrow Y$ tel que Y soit X-étale aux points de $\overline{s}(\overline{X})$, il existe une X-section s de Y prolongeant $\overline{s}$. (NB. s est nécessairement unique).

Les couples henséliens ont été étudiés par Kurke [4]. On se propose ici de présenter l'échantillon suivant des résultats de [4] :

Théorème (Kurke [4], Satz 4.4.5). Soit $(X,\overline{X})$ un couple hensélien. Le foncteur de restriction à $\overline{X}$ est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X sur la catégorie des revêtements étales de $\overline{X}$.
(Par "revêtement étale" de X, on entend un X-schéma fini et étale).

On connaît plusieurs démonstrations de ce théorème. Résumons rapidement celle de Kurke : on se ramène, par passage à la limite, au cas où X est noethérien et universellement japonais ; on introduit le complété Y de X le long de $\overline{X}$, et l'on montre que le foncteur de changement de base $Z \longmapsto Z\times_X Y$ est pleinement fidèle sur la catégorie des X-shémas étales. On en déduit par un procédé de recollement que ce foncteur est une équivalence entre revêtements étales de X et revêtements étales de Y. Il suffit alors de démontrer le théorème pour le couple $(Y,\overline{X}\times_X Y)$, ce qui est facile. Cette démonstration utilise EGA IV 7.

Une autre démonstration est donnée par Greco [3] qui utilise les "schémas henséliens" de Kurke [4].

On donne ici une démonstration complètement élémentaire, fondée sur une idée d'Artin [I]. Résumons-la. Soient A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant X, P un A-module projectif de type fini. On paramètre l'ensemble des structures de A-algèbre étale de P par un X-schéma affine et <u>lisse</u> T (n° 2). On se donne maintenant une structure de (A/I)-algèbre étale sur P/IP, c'est-à-dire (n° 2) un X-morphisme $\overline{s} : \overline{X} \longrightarrow T$. D'après une version du théorème des fonctions implicites prouvée au n° I, on peut trouver une X-section s de T prolongeant $\overline{s}$ (car $(X,\overline{X})$ est un couple hensélien). La section s définit (n° 2) une structure de A-algèbre étale sur P, relevant la structure donnée. Le théorème en résulte facilement (n° 3).

Je voudrais remercier ici J.P. Olivier et M. Raynaud de m'avoir fait connaître la thèse de Kurke, en espérant que la présente variation sur cette thèse pourra rendre un service analogue.

I. Une version du théorème des fonctions implicites.

Pour motiver la considération des couples henséliens, on va tout d'abord résumer les premiers résultats de la thèse de Kurke.

Dans la suite, on appelle couple la donnée d'un schéma affine X et d'un sous-schéma fermé $\overline{X}$ de X. On appelle morphisme du couple $(Y,\overline{Y})$ dans le couple $(X,\overline{X})$ un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ qui induit un morphisme de $\overline{Y}$ dans $\overline{X}$. Soit $(X,\overline{X})$ un couple ; on appelle voisinage étale de $\overline{X}$ dans X un morphisme de couples $f : (Y,\overline{Y}) \longrightarrow (X,\overline{X})$ qui est étale et induit un isomorphisme de $\overline{Y}$ sur $\overline{X}$.

On peut vérifier qu'un couple $(X,\overline{X})$ est hensélien, si et seulement si tout voisinage étale de $\overline{X}$ dans X possède une section unique (au sens de la catégorie des couples) ; dans la suite, cette caractérisation nous servira de définition.

Théorème (I.I). (Kurke [4], Satz 3.I.I). Soient C la catégorie des couples, H la sous-catégorie pleine de C formée des couples henséliens.
L'inclusion de H dans C a un adjoint à gauche $(X,\overline{X}) \longrightarrow (X_h,\overline{X}_h)$, et le morphisme canonique $X_h \longrightarrow X$ est ind-étale et induit un isomorphisme $\overline{X}_h \xrightarrow{\sim} \overline{X}$.

On montre que la catégorie des voisinages étales de $\overline{X}$ dans X est pseudo-filtrante et équivalente à une petite catégorie ; on prend pour $(X_h,\overline{X}_h)$ la limite projective de cette catégorie et l'on vérifie formellement les propriétés annoncées. On dit que $(X_h,\overline{X}_h)$ est le hensélisé de $(X,\overline{X})$.

Soit $(X,\overline{X})$ un couple ; pour avoir prise sur son hensélisé, on décrit un système fondamental simple de voisinage étales de $\overline{X}$ dans X.

Notons A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant $\overline{X}$; soient T une indéterminée, $P = a_o + a_I T + \ldots + a_n T^n$ un élément de $A[T]$; notons B l'anneau quotient $A[T]/(P)$, t l'image de T dans B, f l'image dans B du polynôme dérivé de P : on sait que B_f est une A-algèbre étale ([5] II, prop. 8).

Supposons $a_o \in I$ et a_I inversible modulo I ; soit J l'idéal de B_f engendré par IB_f et t. On voit tout de suite que l'homomorphisme canonique $A/I \longrightarrow B_f/J$ est un isomorphisme. Posons $Y = \mathrm{Spec}(B_f)$, $\overline{Y} = V(J)$; alors $(Y,\overline{Y})$ est un voisinage étale de $\overline{X}$ dans X : on l'appelle le <u>voisinage étale standard</u> défini par P.

On montre que tout voisinage étale est "localement isomorphe" à un voisinage étale standard :

<u>Théorème (I.2)</u> (<u>Kurke [4], Satz 3.4.3</u>). <u>Soient $(X,\overline{X})$ un couple, A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant $\overline{X}$, $(Y,\overline{Y})$ un voisinage étale de $\overline{X}$ dans X. Il existe un entier n et un polynôme unitaire</u> $P \in A[T]$, <u>congru à</u> $T(T-I)^n$ <u>modulo I, vérifiant la condition suivante : soit</u> $(Z,\overline{Z})$ <u>le voisinage étale standard de $\overline{X}$ dans X défini par P ; il existe un $(X,\overline{X})$-isomorphisme d'un voisinage ouvert de $\overline{Y}$ dans Y sur un voisinage ouvert de $\overline{Z}$ dans Z</u>.

Résumons la démonstration. Par passage à la limite, on peut supposer I contenu dans le radical de A. Comme $Y \longrightarrow X$ est quasi-fini, il existe d'après le Main theorem une sous A-algèbre finie C de B telle que $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(C)$ soit une immersion ouverte. Notons J l'idéal de B définissant $\overline{Y}$. Comme le composé de la séquence $A/I \longrightarrow B/IB \longrightarrow B/J$ est un isomorphisme, et comme B/IB est étale sur A/I, B/J est plat sur B/IB et aussi sur C/IC, donc le noyau de la surjection $C/IC \twoheadrightarrow B/J$ est engendré par un idempotent $\overline{e}$.

Soient x un relèvement de $\overline{e}$ dans C, $y = I-x$, $D = A[x]$. Si p est un point de Y d'images respectives q et r dans Spec(C) et Spec(D), on voit aisément que $D_r \longrightarrow C_q$ est injectif, fini et net ; comme de plus $k(q) = k(r)$, on conclut que $D_r = C_q$ (lemme de Nakayama) ; on en conclut que quitte à remplacer Y par un ouvert affine contenant $\overline{Y}$, on peut supposer que $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(D)$ est une immersion ouverte. En particulier $(D/ID)_y \longrightarrow B/J$ est un isomorhisme, de sorte que $xy^n \in IA[x]$ pour tout entier n assez grand ; quitte à augmenter n, on peut donc trouver un polynôme unitaire $P \in A[T]$ congru à $T(T-I)^n$ modulo I et annulant x. En outre $P'(x)$ est congru à $(-I)^n$ modulo J, donc, quitte à restreindre Y, on peut le supposer inversible, de sorte que $(Y,\overline{Y})$ se factorise par le voisinage étale standard $(Z,\overline{Z})$ défini par P, et on vérifie tout de suite que $Y \longrightarrow Z$ est une immersion ouverte, cqfd (cf. [5] V, théorème I).

Corollaire (I.3). Soient $(X,\overline{X})$ un couple, A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant $\overline{X}$; pour que $(X,\overline{X})$ soit un couple hensélien, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(Lemme de Newton) Tout polynôme unitaire $a_o + a_I T + \ldots + T^n$, tel que $a_o \in I$ et a_I soient inversibles modulo I, a un zéro unique dans I.

On dispose d'autres caractérisation des couples henséliens :

Théorème (I.4). (Kurke [4], Satz 2.2.I). Les conditions de I.3 sont équivalentes à chacune des conditions suivantes :

(relèvement des idempotents) Pour toute A-algèbre finie B et tout idempotent $\overline{e}$ de B/IB, il existe un idempotent unique e de B d'image $\overline{e}$,

(Lemme de Hensel) Pour tout polynôme unitaire $P \in A[T]$ de réduction $\overline{P}$ modulo I, et toute décomposition $\overline{P} = \overline{Q}\,\overline{R}$ de $\overline{P}$ en produit de polynômes unitaires fortement étrangers, il existe une décomposition unique $P = QR$ de P en produit de polynômes unitaires fortement étrangers, relevant la décomposition donnée.

L'essentiel de ce résultat est aussi démontré dans [2].

Corollaire (I.5). Soit $(X,\overline{X})$ un couple hensélien ; pour tout X-schéma fini Y, le couple $(Y,Y\times_X\overline{X})$ est hensélien.

On utilise la caractérisation par relèvement d'idempotents.

Corollaire (I.6). Soient $(X,\overline{X})$ un couple hensélien, A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant $\overline{X}$, B une A-algèbre finie non nécessairement commutative, $\overline{e}$ un idempotent de B/IB ; il existe un idempotent e de B d'image $\overline{e}$ (NB. e n'est pas unique en général).

Démonstration. Soient x un relèvement arbitraire de $\overline{e}$ dans B, C la sous-algèbre (commutative) de B engendrée par x. Comme B est un C-module fidèle et un A-module de type fini, C est finie sur A. Le noyau de l'homomorphisme $C/IC \longrightarrow B/IB$ est nilpotent, et son image contient $\overline{e}$; par relèvement infinitésimal d'idempotents ([5] I, lemme 2), on obtient un idempotent $\overline{f}$ de C/IC d'image $\overline{e}$, et par I.4, il existe un idempotent e de C d'image $\overline{f}$, cqfd.

Corollaire (I.7). Soient $(X,\overline{X})$ un couple hensélien, A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant $\overline{X}$, $\overline{P}$ un (A/I)-module projectif de type fini. Il existe un couple (P,u), unique à isomorphisme (non unique) près, formé d'un A-module projectif de type fini P et d'un isomorphisme $u : P/IP \xrightarrow{\sim} \overline{P}$.

Démonstration. L'assertion d'unicité résulte du fait que $\overline{X}$ contient les points fermés de X. Pour prouver l'assertion d'existence, on peut supposer que $\overline{P}$ est donné comme l'image d'un projecteur $\overline{p}$ de $(A/I)^n$ où n est un entier convenable, et le problème revient à relever $\overline{p}$ en un projecteur de A^n : c'est un cas particulier du problème traité en I.6 (avec $B = \mathrm{End}_A(A^n)$).

On peut maintenant prouver une version du théorème des fonctions implicites.

Théorème (I.8). Soient $(X,\overline{X})$ un couple hensélien, T un X-schéma affine et lisse, $\overline{s} : \overline{X} \longrightarrow T$ un X-morphisme ; il existe une X-section s de T qui prolonge $\overline{s}$ (NB. s n'est pas unique en général).

Démonstration. En utilisant I.7, on va construire un sous-schéma fermé X' de T contenant $\overline{s}(\overline{X})$ et X-étale aux points de $\overline{s}(\overline{X})$, puis on appliquera la définition des couples henséliens pour prolonger $\overline{s}$ en une X-section s de X', ce qui entraînera le théorème.

On note A l'anneau de X, I l'idéal de A définissant le sous-schéma fermé $\overline{X}$ de X, B l'anneau de T, J l'idéal de B définissant le sous-schéma fermé $\overline{s}(\overline{X})$ de T. Alors J contient IB et l'homomorphisme composé de la séquence $A/I \longrightarrow B/IB \longrightarrow B/J$ est un isomorphisme. Comme B/IB est une (A/I)-algèbre lisse, on voit que le (A/I)-module $\overline{P} = J/(J^2+IB)$ est projectif de type fini et que, si $\overline{S}$ désigne l'algèbre symétrique du (A/I)-module $\overline{P}$, l'homomorphisme canonique $\overline{S} \longrightarrow gr_J(B/IB)$ est un isomorphisme.

Comme le couple $(X,\overline{X})$ est hensélien, on peut, utilisant I.7, trouver un couple (P,u) formé d'un A-module projectif de type fini P et d'une application A-linéaire $u : P \longrightarrow J$ définissant par passage au quotient un isomorphisme $P/IP \xrightarrow{\sim} J/(J^2+IB)$. Notons S l'algèbre symétrique du A-module P, $h : S \longrightarrow B$ l'unique A-homomorphisme qui prolonge u, K l'idéal de S engendré par P. Par construction même, h définit par passage aux gradués associés un isomorphisme $gr_K(S/IS) \xrightarrow{\sim} gr_J(B/IB)$.

Lemme (I.9). Spec(h) est étale aux point de $\overline{s}(\overline{X}) = V(J)$.

Comme S et B sont A-lisses, il suffit, d'après le critère de lissité par fibres (EGA IV I7.II.I), de vérifier que si q est un point de V(J) d'images respectives p et r dans X et Spec(S), Spec(h $\otimes$ k(p)) est étale en q. Pour cela, on pose $S' = (S \otimes_A k(p))_r$ et $B' = (B \otimes_A k(p))_q$: ce sont des anneaux locaux noethériens dont les complétés sont isomorphes, grâce à l'isomorphisme $gr_K(S') \xrightarrow{\sim} gr_J(A')$: l'assertion en résulte aussitôt.

Soit X' le sous-schéma fermé de T défini par l'idéal KB de B. Comme l'homomorphisme composé $A \longrightarrow S \longrightarrow S/K$ est un isomorphisme, il résulte de I.9 que X' est X-étale aux points de $\overline{s}(\overline{X})$. Il existe donc un voisinage ouvert de $\overline{s}(\overline{X})$ dans X' qui est un voisinage étale de $\overline{X}$ dans X, de sorte que, puisque le couple $(X,\overline{X})$ est hensélien, il existe une section s de X' qui prolonge $\overline{s}$; cette section répond évidemment à la question, cqfd.

2. Etude des structures de revêtement étale sur un module donné.

Soient A un anneau, P un A-module projectif de type fini ; pour toute A-algèbre B, on note F(B) l'ensemble des lois de composition B-bilinéaires ("multiplications") du B-module $B \otimes_A P$, qui font de $B \otimes_A P$ une B-algèbre étale. On définit ainsi un foncteur F de la catégorie des A-algèbres dans la catégorie des ensembles. L'objet de ce numéro est de prouver le résultat suivant :

Proposition (2.I). F est représentable pour une A-algèbre lisse.

Autrement dit, il existe un couple (U,m_U) formé d'une A-algèbre U et d'une multiplication étale m_U de $U \otimes_A P$, qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout couple (B,m) formé d'une A-algèbre B et d'une multiplication étale m_U de $B \otimes_A P$, il existe un A-homomorphisme unique de U dans B par lequel l'image directe de m_U soit égale à m. En outre, le couple (U,m_U) est unique à isomorphisme unique près (comme toujours) et U est A-lisse.

Ce résultat est connu, et prouvé dans un contexte bien plus général dans [I], exposé XIII ; donnons quand même une démonstration.

Supposons prouvée la représentabilité de F et vérifions que le représentant U de F est lisse. Cela revient à dire que "le foncteur F est de présentation finie et formellement lisse", autrement dit, on est ramené à prouver les deux assertions suivantes :

(i) le foncteur F commute aux limites inductives filtrantes ;

(ii) pour toute A-algèbre B et tout idéal nilpotent I de B, l'application canonique $F(B) \longrightarrow F(B/IB)$ est surjective.

Prouvons (i) : soit (B_i) un système inductif filtrant de A-algèbres de limite B et soit m un élément de $F(B_i)$; pour i assez grand, m provient d'une multiplication m_i de $B_i \otimes_A P$, et quitte à augmenter i, on peut supposer que m_i est étale ; d'autre part, si m_i et m_i' sont deux multiplications de $B_i \otimes_A P$ de même image directe par $B_i \longrightarrow B$, il existe $j \geq i$ tel que m_i et m_i' aient même image directe par $B_i \longrightarrow B_j$; d'où (i).

Prouvons (ii) : posons $\overline{B} = B/IB$; soit m un élément de $F(\overline{B})$. D'après le relèvement infinitésimal des algèbres étales (EGA IV I8.I.2), il existe une B-algèbre étale E et un isomorphisme de E/IE sur $\overline{B} \otimes_A P$ muni de $\overline{m}$; comme E est un revêtement étale, le B-module sous-jacent à E est projectif, dont l'isomomorphisme précédent se relève en une application linéaire $u : E \longrightarrow B \otimes_A P$ qui est nécessairement un isomorphisme. En transportant à $B \otimes_A P$ la multiplication de E par u, on obtient un élément m de F(B) qui relève $\overline{m}$, cqfd.

Reste à prouver que F est représentable. Pour simplifier, on va supposer que P est un A-module libre de base $(e_i)_{i \in I}$; on peut toujours se ramener à ce cas, puisque le problème posé est local pour la topologie de Zariski sur Spec(A) (il est d'ailleurs facile d'adapter le raisonnement qui suit au cas général).

Soit B une A-algèbre. On remarque que F(B) est canoniquement isomorphe à l'ensemble des couples (m,e) formés d'une multiplication étale m sur $B\otimes_A P$ et de l'élément unité e de cette multiplication.

La multiplication m est déterminée par sa "table", c'est-à-dire la famille $(m_{ijk})_{(i,j,k)\in I\times I\times I}$ d'éléments de B qui vérifie les relations

$$m(e_i,e_j) = \sum_{k\in I} m_{ijk}\, e_k \quad ((i,j)\in I\times I).$$

L'associativité, resp. la commutativité de m se traduisent sur la table par la validité des relations

$$\sum_{l\in I} (m_{ijl}\, m_{lkn} - m_{jkl}\, m_{iln}) = 0 \quad ((i,j,k,n)\in I^4)$$

$$(\text{resp. } m_{ijk} - m_{jik} = 0 \quad ((i,j,k)\in I^3))\ ;$$

d'autre part, l'élément e est déterminé par ses coordonnées $(x_i)_{i\in I}$ dans la base $(e_i)_{i\in I}$ et le fait que e soit élément unité pour m se traduit par la validité des relations

$$\sum_{i\in I} x_i\, m_{ijk} = \sum_{i\in I} x_i\, m_{jik} = \delta_{jk} \quad ((j,k)\in I^2)$$

où δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker. Enfin, si l'on suppose vérifiées les relations précédentes, on peut exprimer que m est étale de la façon suivante : notons Tr la forme trace sur $B\otimes_A P$, de sorte que Tr(x) est la trace de l'endomorphisme m(x,.) du B-module libre $B\otimes_A P$; alors le "discriminant" $\det((\mathrm{Tr}(m(e_i,e_j))_{(i,j)\in I\times I})$ est un élément inversible de B. En explicitant, on trouve la condition cherchée sous la forme

$$\text{dét}((\sum_{(k,l)\in I\times I} m_{ikl}\, m_{jlk})_{(i,j)\in I\times I}) \in B^*.$$

En résumé, on obtient un isomorphisme canonique de F(B) sur l'ensemble des couples $((m_{ijk})_{(i,j,k)\in I\times I\times I}, (x_i)_{i\in I})$ de familles d'éléments de B qui vérifient les relations écrites ci-dessus.

Soient alors $(T_{ijk})_{(i,j,k) \in I\times I\times I}$ et $(X_i)_{i \in I}$ deux familles d'indéterminées, U_o l'anneau de polynômes construit sur ces indéterminées à coefficients dans A, m_o la multiplication de $U_o \otimes_A P$ dont la table est $(T_{ijk})_{(i,j,k) \in I\times I\times I}$. On forme l'idéal J de U_o engendré par les polynômes $\sum_{l \in I} T_{ijl}\, T_{lkn} - T_{jkl}\, T_{iln}$ $((i,j,k,n) \in I^4$,

$T_{ijk} - T_{jik}$ $((i,j,k) \in I^3)$ $\sum_{i \in I} X_i\, T_{ijk} - \delta_{jk}$ $((j,k) \in I\times I)$;

on pose $D = \text{dét}((\sum_{(k,l) \in I\times I} T_{ikl}\, T_{jlk})_{(i,j) \in I\times I})$.

Soient U l'anneau $(U_o/J)\,[D^{-1}]$ et m_U la multiplication de $U \otimes_A P$ image directe de m_o. Alors il est clair que le couple (U, m_U) représente le foncteur F, cqfd.

3. Démonstration du théorème.

Soient $(X,\overline{X})$ un couple hensélien, A l'anneau de X, I l'idéal de A qui définit X. On veut prouver que le foncteur $Z \longmapsto Z\times_X \overline{X}$ est une équivalence entre revêtements étales de X et revêtement étales de $\overline{X}$.

(i) Montrons que le foncteur est pleinement fidèle ; plus généralement, montrons que si Y est X-étale et Z est X-fini, l'application canonique $\mathrm{Hom}_X(Z,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Z\times_X\overline{X}, Y\times_X\overline{X})$ est bijective. Or, pour tout X-schéma X', on a une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{X'}(Z\times_X X', Y\times_X X')$ sur l'ensemble des sections du $Z\times_X X'$-schéma $Y\times_X Z\times_X X'$: cette bijection transforme un morphisme en son graphe. Mais, comme le couple $(Z, Z\times_X\overline{X})$ est hensélien, tout Z-morphisme de $Z\times_X\overline{X}$ dans $Y\times_X Z$ se prolonge de manière unique en une Z-section de $Y\times_X Z$ (car $Y\times_X Z$ est Z-étale), ce qui prouve l'assertion.

(ii) Montrons que le foncteur est essentiellement surjectif. Soit $\overline{Z}$ un revêtement étale de $\overline{X}$, d'anneau $\overline{E}$. D'après I.7, il existe un A-module projectif de type fini P et un isomorphisme u de P/IP sur le module de $\overline{E}$. Soit T le spectre de l'algèbre qui représente le foncteur des multiplications étales de P (2.I) ; T est lisse. En transportant par u à P/IP la multiplication de $\overline{E}$, on obtient un X-morphisme $\overline{s} : \overline{X} \longrightarrow T$, qui, par I.8, se prolonge en une X-section s de T ; celle-ci définit une multiplication étale sur P ; si Z est le spectre du revêtement étale de X ainsi défini, on a bien par construction un isomorphisme $Z \times_X \overline{X} \xrightarrow{\sim} \overline{Z}$, cqfd.

- REFERENCES -

[I] M. Artin, in S.G.A.A., exposés XII et XIII.

[2] E. CREPEAUX, Une caractérisation des couples henséliens, L'enseignement mathématique IIe série, t. I3 (I967), pp. 273-279.

[3] S. Greco, Sul sollevamento dei rivestimenti étale, à paraître (Convegno di Algebra, Rome, novembre I97I).

[4] H. Kurke, thèse (multigraphiée) Grundlagen der Theorie der Henselschen Ringe und Schemata und ihrer Anwendungen, Humboldt-Universität, Berlin, R.D.A.

[5] M. Raynaud, Anneaux locaux henséliens, Lecture notes in Mathematics n° I69, Springer-Verlay.

EGA = éléments de géométrie algébrique, comme d'habitude.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° IO GRUSON
3, avenue des Chalets
75 - PARIS I6^{e}