PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

Formule de Green et théorème de trace associés à l'opérateur : $\sum_{i,j=0}^{n} D_j(a_{ij}(x)\varphi(x)D_i)$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A5_0>

FORMULE DE GREEN ET THEOREME DE TRACE ASSOCIES

A L'OPERATEUR $\sum_{i,j=o}^{n} D_j(a_{ij}(x)\,\varphi(x)\,D_i)$.

par

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS

I. NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) > o\} \ , \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) = o\} \ , \\ \text{Grad } \varphi(x) \neq o \text{ pour } x \in \Gamma. \end{cases}$$

On considère l'opérateur (cf. [2]) :

$$(1.2)\qquad A = A(x;D) = \sum_{i,j=o}^{n} D_j(a_{ij}(x)\,\varphi(x)\,D_i),$$

où les a_{ij} sont des fonctions de $C^\infty(\overline{\Omega})$ (*) et où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 1,2,\dots,n$ et D_o = identité.

On suppose que la forme intégro-différentielle

$$(1.3)\qquad a(u,v) = \sum_{i,j=o}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\,\varphi(x)\,D_i u(x)\,\overline{D_j v(x)}\,dx$$

est coercive sur l'espace.

$$(1.4)\quad V(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ,\ \varphi^{1/2}u \in L^2(\Omega)\ ,\ \varphi^{1/2}D_i u \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = 1,\dots,n\}$$

muni de la norme

$$(1.5)\qquad \|u\|_{V(\Omega)} = \left(\|\varphi^{1/2}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\|\varphi^{1/2}D_i u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > o$ vérifiant :

$$(1.6)\qquad \text{Re } a(u,u) \geq \alpha\,\|u\|^2_{V(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in V(\Omega).\ (**)$$

(*) $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$.

(**) Cette condition est équivalente à deux conditions algébriques portant sur l'opérateur A cf : [3].

Moyennant cette hypothèse (1.6), M.M. BAOUENDI-GOULAOUIC ont établi que

(1.7) l'opérateur A réalise un isomorphisme topologique de $W_1^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, où $W_1^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des distributions u vérifiant

(1.8) $$u \in H^1(\Omega) \ , \ \varphi u \in H^2(\Omega).$$ (*) (**)

L'objet de notre étude est d'établir un théorème de trace et une formule de Green pour "l'opérateur maximal" associé à l'opérateur A.

II - FORMULE DE GREEN ET THEOREME DE TRACE

On désigne par $D(A;\Omega)$ le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur A, c'est-à-dire :

(2.1) $$D(A;\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ , \ A\,u \in L^2(\Omega)\}.$$

On notera $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$ l'opérateur défini par :

(2.2) $$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \ \ \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \operatorname{Cos}(\vec{n}, x_j)$$

où $x \in \Gamma$, et où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure en x à Γ.

Il est bien connu que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ n'est pas dense dans $D(A;\Omega)$, néanmoins, on va montrer que si u appartient à $D(A;\Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et que de plus, on a la formule de Green suivante :

(2.3) $$(Au,v)_{L^2(\Omega)} - (u,A^* v)_{L^2(\Omega)} = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu_A} , \gamma_0 \overline{v} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} ,$$

pour tout v appartenant à $W_1^2(\Omega)$. ($\gamma_0 v$ désigne la restriction de v à Γ).

<u>Démonstration</u> : Elle sera faite en 3 étapes.

(*) $H^s(\Omega)$, où s est un nombre réel, est l'espace de Sobolev habituel défini sur Ω (voir [5] par exemple).

(**) Remarquer que l'opérateur A^* satisfait aux mêmes propriétés que l'opérateur

1ère étape : Choix d'un espace $W(\Omega)$ pour lequel (2.3) a lieu, (ce qui suppose que $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$ est défini sur cet espace). On choisit l'espace suivant :

(2.4) $$W(\Omega) = W_1^1(\Omega) \cap D(A;\Omega) ,$$

où $W_1^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ , \ \varphi u \in H^1(\Omega)\}$.

Il est alors facile de vérifier que si u appartient à $W(\Omega)$, $\gamma_o(\varphi \frac{\partial u}{\partial x_i})$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ pour $i = 1,\dots,n$ et donc $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}$ a un sens et appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Pour établir la formule (2.3), on se ramène par cartes locales au demi-espace $\mathbb{R}^n_+$. (Remarquer que si u appartient à $W(\Omega)$, alors Ψu appartient aussi à $W(\Omega)$ quelle que soit la fonction Ψ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$).

2ème étape : L'espace $W(\Omega)$ est dense dans $D(A;\Omega)$.

Soit donc $u \longmapsto M(u)$ une forme linéaire continue sur $D(A;\Omega)$, nulle sur $W(\Omega)$, i.e :

(2.5) $$\forall \ u \in W(\Omega) \ , \ M(u) = o.$$

Par ailleurs, il existe f et g dans $L^2(\Omega)$ telles que :

(2.6) $$\forall \ u \in D(A;\Omega) \ , \ M(u) = (f,u)_{L^2(\Omega)} + (g,Au)_{L^2(\Omega)} .$$

1°) On utilise (2.5) pour u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$: on obtient facilement que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a

(2.7) $$A^* \tilde{g} = - \tilde{f},$$

où $\tilde{g}$ (resp. $\tilde{f}$) est le prolongement par o de g (resp. de f) dans $\mathbb{R}^n-\overline{\Omega}$.

(On suppose évidemment que les coefficients a_{ij} sont prolongés à $\mathbb{R}^n$ de sorte que l'opérateur $\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)\ D_i)$ soit elliptique dans $\mathbb{R}^n$).

Mais, l'opérateur A^* peut toujours s'écrire sous la forme :

(2.8) $$A^* u = P^2(x,D) \ \{\varphi u\} + P^1(x;D)\ \{u\},$$

où $P^2(x;D)$ est un opérateur d'ordre 2, elliptique dans $\mathbb{R}^n$ et $P^1(x;D)$ un opérateur d'ordre 1. Par suite, de (2.7) et (2.8) on déduit que $P^2(x;D)\{\varphi\tilde{g}\}$ appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. La régularité locale des opérateurs elliptiques implique que $\varphi\tilde{g}$ appartient à $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Par restriction à Ω, il vient :

(2.9) $\quad$ g appartient à $W^1_1(\Omega)$.

Ainsi g appartient à $W^1_1(\Omega)$ et de plus, on a $A^* g = -f$; donc, g appartient à $W^*(\Omega)$ (*) et $\frac{\partial g}{\partial \nu_{A^*}}$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On écrit alors la formule de Green (2.3) pour g et pour l'opérateur A^* :

(2.10) $$(\widetilde{A^* g}, \phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} - (\tilde{g}, A\phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -\langle \frac{\partial g}{\partial \nu_{A^*}}, \overline{\gamma_o \phi}\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)},$$

pour tout ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Mais $\widetilde{A^* g} = -\tilde{f}$, on en déduit que $\frac{\partial g}{\partial \nu_{A^*}} = o$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Finalement, g vérifie :

(2.11) $$\begin{cases} g \in W^1_1(\Omega) , \\ A^* g = -f \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial g}{\partial \nu_{A^*}} = o \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

2°) <u>On prouve que g appartient à</u> $W^2_1(\Omega)$: Pour cela, il suffit de prouver (d'après (1.7) qui est aussi valable pour A^*) que le problème :

(2.12) $$\begin{cases} u \in W^1_1(\Omega) \\ A^* u = o \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{A^*}} = o \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

n'admet que la solution u=o. Or si u satisfait à (2.12), u appartient à $W^*(\Omega)$ et appliquant la formule de Green (2.3) pour u et pour l'opérateur A^*, il vient

---

(*) $W^*(\Omega)$ désigne l'espace $W^1_1(\Omega) \cap D(A^*;\Omega)$.

(2.13) $$(u,Av)_{L^2(\Omega)} = o$$

pour tout v appartenant à $W_1^2(\Omega)$. D'après (1.7), cela implique $u \equiv o$.

3°) <u>On prouve que g appartient à</u> $\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega) = \{u \in H_o^1(\Omega)\ ,\ \varphi u \in H^2(\Omega)\}$

Il faut montrer que $\gamma_o g = o$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour cela, on remarque que si Ψ appartient à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, la fonction

(2.14) $$u_\Psi(x) = \text{Log}\ \varphi(x)\ .\ \Psi(x),$$

appartient à $W(\Omega)$ et de plus :

(2.15) $$\frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A} = -\gamma_o \left(\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \varphi_i\ \varphi_j}{\|\text{grad}\,\varphi\|} \right) .\ \gamma_o \Psi,$$

où $\varphi_\ell = \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}$ pour $\ell = 1,\dots,n$.

On applique la formule de Green (2.3) à de telles fonctions u_Ψ et à g (qui appartient à $W_1^2(\Omega)$) :

(2.16) $$(Au_\Psi,g)_{L^2(\Omega)} - (u_\Psi,A^* g)_{L^2(\Omega)} = - \langle \frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}\ ,\ \gamma_o \overline{g} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} .$$

Or $A^* g = -f$, par suite, d'après (2.5), il vient :

(2.17) $$\langle \frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}\ ,\ \gamma_o \overline{g} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = o.$$

Mais d'après (2.15), lorsque Ψ parcourt $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}$ parcourt $\mathcal{D}(\Gamma)$; il en résulte que $\gamma_o g = o$.

4°) <u>La forme M est identiquement nulle</u> : Comme g appartient à $\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)$ et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)$, on en déduit que pour u appartenant à $D(A;\Omega)$, on a :

(2.18) $$(Au,g)_{L^2(\Omega)} = (u,A^* g)_{L^2(\Omega)} .$$

Tenant compte du fait que $A^* g = -f$, on en déduit que pour u appartenant à $D(A;\Omega)$, $M(u) = o$ i.e : $M \equiv o$.

<u>$3^{\text{ème}}$ étape</u> : L'application $u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu_A}$: $W(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ se prolonge par continuité à $D(A;\Omega)$ et on a la formule de Green (2.3).

Soit $\varphi \longrightarrow R\varphi$ un relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $W_1^2(\Omega)$ (cf : [4]) et posons, selon la méthode de [5] :

(2.19) $$Z_u(\varphi) = (Au,R\varphi)_{L^2(\Omega)} - (u,A^*R\varphi)_{L^2(\Omega)}$$

pour u appartenant à $D(A;\Omega)$.

Montrons que $Z_u(\varphi)$ ne dépend pas du relèvement $R\varphi$ choisi de φ dans $W_1^2(\Omega)$. Pour cela, il suffit de prouver que si v appartient à $\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)$ alors

$$(Au,v)_{L^2(\Omega)} - (u,A^*v)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ce qui est immédiat.

Par suite, l'application : $\varphi \longmapsto Z_u(\varphi)$ est linéaire continue de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $\mathbb{C}$, il existe donc $\tau(u)$ appartenant à $H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que :

(2.20) $$Z_u(\varphi) = \langle \tau(u),\varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

De plus, $u \longmapsto \tau(u)$ est linéaire continue de $D(A;\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Il suffit maintenant d'interpréter $\tau(u)$ pour u appartenant à $W(\Omega)$; de (2.3), il vient :

(2.21) $$\tau(u) = -\frac{\partial u}{\partial \nu_A},$$

ce qui achève la démonstration.

<u>III. APPLICATION AUX PROBLEMES AUX LIMITES ASSOCIES A L'OPERATEUR</u> $\sum_{i,j=0}^{p} D_j\,(a_{ij}(x)\,\varphi(x)\,D_i)$.

On va démontrer, à l'aide des méthodes de M.M. BAOUENDI-GEYMONAT (cf : [1]) le résultat suivant :

<u>Théorème 3.1</u> : <u>L'application</u> $\{A,\frac{\partial}{\partial \nu_A}\}$: $D(A;\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Démonstration :

1°) Introduction d'un "potentiel" : Soit $\varphi \longmapsto R\varphi$ un relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $W_1^2(\Omega)$; posons :

(3.1) $$K\varphi = A^* R\varphi .$$

L'application : $(u,\varphi) \longmapsto A^*u+K\varphi : \mathring{W}_1^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un isomorphisme. En effet :

- Injectivité : $A^*(u+R\varphi) = o$ implique $u + R\varphi = o$ d'après (1.7), d'où : $\gamma_o(u+R\varphi) = \varphi = o$; il en résulte que $u=o$.

- Surjectivité : D'après (1.7), étant donné f appartenant à $L^2(\Omega)$, il existe W dans $W_1^2(\Omega)$ tel que $A^*w = f$. Il suffit ensuite de prendre $\varphi = \gamma_o w$ et $u = w - R\,\gamma_o\, w$.

2°) Transposition : Transposant l'isomorphisme précédent, on obtient que l'application

(3.2) $$u \longmapsto (Au, K^*u) : L^2(\Omega) \longrightarrow [\mathring{W}_1^2(\Omega)]' \times H^{-1/2}(\Gamma),$$

est un isomorphisme.

3°) Interprétation de l'opérateur K^* : On revient à la formule de Green (2.3) appliquée à u appartenant à $D(A;\Omega)$ et à $v = R\varphi$. Il en résulte que pour u appartenant à $D(A;\Omega)$, on a :

(3.3) $$K^*u = R^*Au + \frac{\partial u}{\partial \nu_A}.$$

4°) Démonstration du théorème :

- Injectivité : cela résulte de (3.2) et (3.3).

- Surjectivité : soient f et g dans $L^2(\Omega)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ respectivement. D'après (3.2), il existe u_1 et u_2 dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} Au_1 = f \\ K^*u_1 = g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Au_2 = o \\ K^*u_2 = R^*f \end{cases}$$

Utilisant la formule (3.3), on en déduit que la fonction $u = u_1+u_2$ satisfait à

$$\begin{cases} Au = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = g. \end{cases}$$

Remarque 1 : Le théorème 3.1 permet de résoudre le "problème de Neumann" non-homogène :

$$(3.4) \qquad \begin{cases} Au = f \in L^2(\Omega), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = g \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ u \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Remarque 2 : Il résulte du théorème 3.1 que la solution du problème variationnel associé à l'opérateur A

$$\begin{cases} Au = f \in L^2(\Omega) \\ u \in V(\Omega) \end{cases}$$

est en fait la solution du problème aux limites (3.4) avec condition frontière homogène.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI-G. GEYMONAT : Résultats de dualité dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques. C.R.A.S. Paris Série A 270 (1970) p.p. 370-372.

[2] M.S. BAOUENDI-C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Arch. Rat. Méc. Anal. 34 n° 5 (1969) p. 361-379.

[3] P. BOERO-R. PAVEC : Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids. C.R.A.S. Paris t 270 p. 1416-1419 (1970).

[4] P. BOLLEY-J.CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables. Article à paraître.

[5] J.L.LIONS-E.MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Dunod Paris 1968.