PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

HUBERT HENNION

Sur le mouvement d'une particule lourde soumise à des collisions dans un système infini de particules légères

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1
« Probabilités », , p. 87-131
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971___1_87_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE LOURDE SOUMISE A DES COLLISIONS DANS UN SYSTEME INFINI DE PARTICULES LEGERES *

par Hubert HENNION

Laboratoire de Probabilités - Equipe associée du CNRS n° 250
RENNES

TABLE DES MATIERES

Chapitre I — λ processus de Poisson -
Etude de la loi du premier ordre -

Chapitre II — Construction du modèle

Chapitre III — Un théorème général de convergence

Je remercie Monsieur le Professeur METIVIER de m'avoir suggéré ce problème et de l'attention bienveillante qu'il a prêtée à mon travail, ainsi que Monsieur le Professeur FORTET qui a bien voulu m'honorer de sa participation au jury de thèse et Monsieur le Professeur BRUNEL pour la présidence de ce jury.

* Texte de la thèse de 3ème cycle soutenue le 21 décembre 1971

INTRODUCTION

Considérons sur la droite un système dénombrable de particules distribuées suivant un processus de Poisson de densité 1, animées indépendamment des vitesses +1 et -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. A l'instant initial, plaçons à l'origine une particule $\mathcal{P}$ dont la masse est M fois celle des précédentes, laissons alors le système évoluer selon les lois de la mécanique des chocs sans frottements et parfaitement élastiques, le mouvement de $\mathcal{P}$ est aléatoire. Dans [1] Holley a donné un modèle probabiliste $(Z_M(t))$ pour le mouvement de $\mathcal{P}$ et a prouvé le

Théorème

Lorsque M tend vers l'infini, la famille de mesure induite sur $C[0,1]$ par les processus $Y_M(t) = \dfrac{Z_M(Mt)}{\sqrt{M}}$ converge étroitement vers la mesure induite sur le même espace par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à une dimension.

Le processus $Y_M(t)$ a l'interprétation physique suivante, il représente le mouvement de $\mathcal{P}$ lorsque la densité et les vitesses des particules légères au lieu d'être 1 sont multipliées par des facteurs d'ordre $\sqrt{M}$.

L'objet de cette étude est la généralisation des résultats d'Holley au cas du plan.

Notons que s'il existe des modèles pour l'étude des collisions sur la droite (Harris [2]) le cas des dimensions supérieures est plus délicat, puisque, si des particules ponctuelles sont animées indépendamment de vitesses uniformes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, la probabilité de choc entre ces particules est nulle. Nous sommes donc conduit d'une part à représenter la particule $\mathcal{P}$ par un disque, d'autre part, à supposer l'indépendance des mouvements des particules ponctuelles.

Cette hypothèse d'indépendance justifie le choix de processus de Poisson pour la distribution des particules légères dans l'espace de phase.

En effet Stone [3] a établi que la configuration d'un système de particules ponctuelles évoluant dans les conditions décrites précédemment est asymptotiquement celle d'un processus de Poisson, pourvu que soit satisfaite à l'instant initial une condition naturelle de régularité.

Si nous n'avons pas réussi à donner une description probabiliste fidèle du mouvement de $\mathcal{T}$, le processus construit nous en a paru suffisamment proche pour mériter que soit aborder le problème du mouvement limite.
Le théorème démontré affirme sous des conditions identiques à celles d'Holley, la convergence en loi vers le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à deux dimensions.

Au chapitre I, nous établissons certaines propriétés des λ-processus de Poisson qui seront utilisées au chapitre II pour la construction d'un processus $\mathcal{V} = (\mathcal{V}(t))$ représentant le mouvement de $\mathcal{P}$. Le chapitre II contient aussi l'énoncé du théorème de convergence, puis la mise en évidence de certaines propriétés de $\mathcal{V}$ permettant de ramener la démonstration de ce théorème à celle d'un théorème plus général qui sera énoncé et démontré au chapitre III.

Dans [1] la démonstration de la convergence étroite s'appuie sur un résultat relatif aux processus gaussiens énoncé dans [6] (théorème 19.4) ; le problème de la vérification des hypothèses de ce théorème, déjà difficile dans [1], malgré la simplicité de la fonction de transition, nous a conduit à préférer une démonstration faisant davantage appel au caractère markovien du processus des vitesses. Cette démonstration est analogue à celle exposée par Holley dans son étude initiale.

CHAPITRE I

A l'instant initial des particules sont distribuées suivant un processus de Poisson sur le complémentaire d'un fermé E_o de $\mathbb{R}^q$, puis chaque particule évolue indépendamment selon un processus de Markov à trajectoires continues. Dans ce chapitre, nous étudions l'instant et la position d'entrée de la particule qui la première rencontre E_o, ainsi que la configuration du système de particule à cet instant ; les résultats obtenus sont appliqués à un cas particulier seul utile dans la suite.

I.1. Hypothèses et notations.

Précisons les éléments intervenant dans cette étude :

(i) E l'espace $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{B}$ la tribu de ses boréliens et λ une mesure σ-finie sur E, ne chargeant pas les points,

(ii) (P_t) un semi-groupe markovien sur E ayant une réalisation continue $(W, \mathcal{G}, (P^x)_{x\in E}, X(t))$, $(\Omega_x, \mathcal{F}_x, \tilde{P}^x, \tilde{X}_x(t))$ est isomorphe à $(W, \mathcal{G}, P^x, X(t))$ et représente le processus issu de x,

(iii) E_o un fermé de E, τ le temps d'entrée dans E_o de $X(t)$, $\tilde{\tau}_x$ le temps d'entrée dans E_o de $\tilde{X}_x(t)$,

(iv) $(\Omega_o, \tilde{\mathcal{F}}_o, P_o, N)$, où $\tilde{\mathcal{F}}_o$ est complète pour P_o, un λ-processus de Poisson sur $E\setminus E_o$. C'est-à-dire qu'à chaque $\omega_o \in \Omega_o$ correspond une mesure N_{ω_o} sur $E\setminus E_o$ de la forme

$$N_{\omega_o} = \sum_{x\in S(\omega_o)} \varepsilon_x$$

où $S(\omega_o)$ est un sous-ensemble dénombrable de $E\setminus E_o$, de telle façon que : pour toute suite B_i, $i = 1\ldots k$, de boréliens disjoints de $E\setminus E_o$ tels que $\lambda(B_i) < +\infty$, $N(B_i)$, $i = 1\ldots k$, sont des variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda(B_i)$, $i = 1\ldots k$.

Nous donnons maintenant un modèle stochastique pour l'étude d'un système de particules évoluant conformément aux hypothèses :

(H_1) distribution initiale λ-poissonnienne sur $E \setminus E_o$

(H_2) pour une distribution initiale donnée les particules évoluent ultérieurement de façon indépendante, selon une réalisation continue du semi-groupe (P_t). La mesure aléatoire N représentera la distribution des particules légères à l'instant initial, le processus $(\Omega_x, \mathcal{F}_x, \tilde{P}^x, \tilde{X}_x(t))$ le mouvement de la particule qui se trouve dans l'**état** x à l'instant initial.

(1) <u>L'espace fondamental Ω</u>

Posons $\Omega = \sum_{\omega_o \in \Omega_o} \left(\prod_{x \in S(\omega_o)} \Omega_x \right)$, un $\omega = (\omega_o, (\omega_x)_{x \in S(\omega_o)}) = (\omega_o, (\omega_x)) \in \Omega$ représente l'évolution du système lorsque les particules sont distribuées à l'instant 0 selon la mesure N_{ω_o}, celle qui est en $x \in S(\omega_o)$ suivant ensuite un mouvement décrit par $\omega_x \in \Omega_x$.

(2) <u>La tribu $\hat{\mathcal{F}}$ sur Ω</u>

Soit $\mathcal{E}_{\omega_o}$ l'opérateur d'espérance associé à la probabilité produit $\bigotimes_{x \in S(\omega_o)} \tilde{P}^x$ sur $(\mathcal{X}_{\omega_o}, \mathcal{A}_{\omega_o}) = \bigotimes_{x \in S(\omega_o)} (\Omega_x, \mathcal{F}_x)$ identifié à un sous-ensemble de Ω, on considère sur Ω la tribu $\hat{\mathcal{F}}$ des F tels que :

(C_1) $1_F((\omega_o, .))$ est $\mathcal{A}_{\omega_o}$-mesurable,

(C_2) $\mathcal{E}_{\omega_o}[1_F((\omega_o, .))]$ est une fonction $\tilde{\mathcal{F}}_o$-mesurable de ω_o

<u>Lemme I.1</u>

$\hat{\mathcal{F}}$ rend mesurable :

l'application p_x définie sur $\{\omega : S(\omega_o) \ni x\}$ par $p_x(\omega) = \omega_x$

l'application p_o définie par $p_o(\omega) = \omega_o$, on désignera par $\mathcal{F}_o$ la sous-tribu de $\hat{\mathcal{F}}$ engendrée par cette application.

<u>Démonstration du lemme I.1</u>

Soit $F_o \in \tilde{\mathfrak{F}}_o$, $p_o^{-1}(F_o) \quad \sum_{\omega_o \in F_o} \left(\prod_{x \in S(\omega_o)} \Omega_x \right)$, on vérifie aisément que C_1 et C_2 sont satisfaites.

Soit maintenant $F_x \in \mathfrak{F}_x$, $p_x^{-1}(F_x) = \sum_{\{\omega_o : S(\omega_o) \ni x\}} F_x \times \prod_{y \in S(\omega_o) \setminus \{x\}} \Omega_y$

$p_x^{-1}(F_x)$ satisfait à C_1, la condition C_2 s'écrit :

$$1_{\{\omega_o : N_{\omega_o}(x)=1\}}(\omega_o) \,.\, \tilde{P}^x(F_x) \text{ est } \tilde{\mathfrak{F}}_o\text{-mesurable}$$

ce qui découle de (iv). ∎

Il résulte de ce lemme que d'une part $N_{p_o(\omega)}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \hat{\mathfrak{F}})$ et que d'autre part $X_x(t,\omega)$ et $\tau_x(\omega)$ définies pour $x \in S(\omega_o)$ par

$$X_x(t,\omega) = \tilde{X}_x(t, p_x(\omega)) \text{ et } \tau_x(\omega) = \tilde{\tau}_x(p_x(\omega))$$

sont des variables aléatoires définies dans $(\Omega, \hat{\mathfrak{F}})$. Dans la suite $N_{p_o(\omega)}$ sera encore désigné par N_{ω_o}.

(3) <u>La probabilité sur $\hat{\mathfrak{F}}$</u>

Pour $F \in \hat{\mathfrak{F}}$ définissons

$$\hat{P}(F) = \int P_o(d\,\omega_o) \quad \mathcal{E}_{\omega_o}\left[1_F((\omega_o,.))\right]$$

cette formule exprime simultanément les hypothèses H_1 et H_2. Il est clair que si l'on désigne encore par P_o la mesure image de P_o par p_o, P_o est la restriction à $\mathfrak{F}_o$ de $\hat{P}$, par suite pour toute fonction ϕ positive mesurable sur $(\Omega, \hat{\mathfrak{F}})$ on a :

$$E[\phi \mid \mathfrak{F}_o](\omega_o) = \mathcal{E}_{\omega_o}[\phi((\omega_o,.))] \qquad \text{p.s.}$$

Enfin $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est l'espace probabilisé obtenu par complétion de $(\Omega, \hat{\mathfrak{F}}, \hat{P})$.

I.2. Quelques résultats utiles pour la suite.

I.2.1 Mesure aléatoire de Poisson

Rappelons quelques propriétés de la λ-mesure aléatoire de Poisson sur $E\setminus E_o$.

(i) Pour toutes f et g mesurables positives sur E et $E \times E$ respectivement

$$E\left[\int f(x)\ N(dx)\right] = \int_{E\setminus E_o} f(x)\ \lambda(dx)$$

$$E\left[\int g(x,y)\ N(dx).N(dy)\right] = \int_{E\setminus E_o} g(x,y)\ \lambda(dx)\ \lambda(dy)\ .$$

(ii) La fonctionnelle génératrice de N est définie pour toute h mesurable sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$E\left[\exp(-\int h(x)\ N(dx))\right] = \exp\left[\int_{E\setminus E_o}(e^{-h(x)}-1)\ \lambda(dx)\right]$$

Pour les calculs ultérieurs, il sera commode d'utiliser la relation précédente sous la forme

$$E\left[\exp(\int \mathrm{Log}\ h(x).N(dx))\right] = \exp\left[\int_{E\setminus E_o}(h(x)-1)\ \lambda(dx)\right]$$

pour h mesurable sur E telle que $0 \leq h(x) \leq 1$. (cf. [8]).

(iii) Si E_k, $k = 1\ldots\infty$ est une partition de $E\setminus E_o$ par des boréliens tels que $\lambda(E_k) < +\infty$, les mesures aléatoires N^k et $\overline{N}^k$ de supports S_k et $\overline{S}_k$ obtenues par restriction de N à E_k et $E\setminus E_k$ respectivement sont indépendantes. Sachant $[N^k(E) = n]$, la mesure aléatoire N^k est engendrée par n particules distinctes distribuées indépendamment sur E_k selon la restriction à E_k de la mesure $\frac{\lambda}{\lambda(E_k)}$.

I.2.2 Trois lemmes

Lemme I.2

Soient

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé,*

Y *une variable aléatoire à valeurs dans* $(A, \mathcal{A})$,

Ψ *une fonction positive mesurable sur* $(A \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}_1)$, *si* $\mathcal{F}_1$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *indépendante de la variable aléatoire* Y, *alors :*

$$E[\Psi(Y,.) \mid Y = y] = E[\Psi(y,.)] \qquad P_Y \text{ - p.s.}$$

où P_Y *désigne la loi propre de* Y.

Démonstration du lemme I.2

Il suffit de prouver cette égalité lorsque $\Psi(y,\omega) = f(y).K(\omega)$, où f est positive mesurable définie sur $(A,\mathcal{A})$ et K est une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_1$-mesurable.

Dans ce cas, si $\Gamma \in \mathcal{A}$

$$\int_{[Y\in\Gamma]} \Psi(Y,.)dP = E[1_\Gamma(Y).f(Y).K] = E[1_\Gamma(Y).f(Y)].\ E[K]$$

$$= \int_\Gamma E[K]\ f(y)\ P_Y(dy)$$

et

$$E[\Psi(Y,.)|Y=y] = E[K]f(y) = E[f(y).K] = E[\Psi(y,.)] \qquad P_Y\text{-p.s.} \quad \blacksquare$$

Lemme I.3

Soient

$(E_i, \mathcal{B}_i)$ $i = 1,2,3$ *trois espaces mesurés*

$\mathbb{Q}$ *un noyau défini sur* $E_1 \times \mathcal{B}_2$

f *une fonction réelle positive, mesurable sur* $E_1 \times E_2 \times E_3$

alors

$$\mathbb{Q}(f)(x,z) = \int \mathbb{Q}(x,dy)\ f(x,y,z)$$

est mesurable sur $E_1 \times E_3$.

Démonstration du lemme I.3

Ce résultat est immédiat lorsque f est le produit de trois fonctions mesurables de x, y, z respectivement, il est par suite valable pour n'importe quelle fonction positive mesurable sur $E_1 \times E_2 \times E_3$. ∎

Le lemme suivant concerne l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ défini au paragraphe I.1.

Lemme I.4

Soit Y *une fonction définie sur* $F \in \mathcal{F}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *supposons que pour tout* $\delta \geq 0$

$(1_F . e^{-\delta Y})((\omega_0, .))$ soit $\mathcal{G}_{\omega_0}$-mesurable

$\mathcal{E}_{\omega_0}[(1_F . e^{-\delta Y})((\omega_0, .))]$ *soit* $\mathcal{F}_0$*-mesurable*

où $1_F . e^{-\delta Y}$ *est définie sur* Ω *par une convention évidente alors* Y *est* $\mathcal{F}$*-mesurable.*

Démonstration du lemme I.4

$f = 1_{[0,t[}$ est limite sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n) de fonctions continues définies par

$$f_n(x) = 1 \text{ si } x \in \left[0, t-\frac{1}{n}\right] \quad , \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in [t, +\infty[$$

$$f_n(x) \text{ linéaire pour } x \in \left[t - \frac{1}{n}, t\right]$$

L'algèbre A engendrée par les fonctions $e^{-\delta x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $\delta \geq 0$ contient les constantes et sépare les points, par suite pour tout n, il existe $g_n \in A$ telle que quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$|f_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2^n} .$$

Par suite g_n converge simplement vers f et puisque

$(1_F . g_n(Y))((\omega_0, .))$ est $\mathcal{G}_{\omega_0}$-mesurable et

$\mathcal{E}_{\omega_0}[(1_F . g_n(Y))((\omega_0, .))]$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable

le lemme est établi par passage à la limite en n. ∎

I.3 Etude du système de particules à l'instant de la première entrée dans E_o.

$Fr(E_o)$ désigne la frontière de E_o et $\mathcal{B}_o$ la tribu de ses boréliens.

Posons pour $B \in \mathcal{B}_o$ et $s \in \mathbb{R}_+$

$$H^x(s,B) = P^x[\tau \leq s,\ X(\tau) \in B] \ , \qquad H^x(s) = P^x[\tau \leq s] \ .$$

Proposition I.1

Supposons que pour tout $t \geq 0$

(1) $\lambda P_t(Fr(E_o)) = 0$

(2) $\int_{E \setminus E_o} H^x(t)\ \lambda(dx) < +\infty$

alors si T *est la borne inférieure des temps d'entrée dans* E_o *des particules du système satisfaisant aux hypothèses du paragraphe* I.1 :

T *est une variable aléatoire qui coïncide p.s. avec le temps d'entrée d'une particule sur* $[T < +\infty]$,

si $X(T)$ *désigne la position de cette particule à son entrée dans* E_o, $X(T)$ *est une variable aléatoire,*

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $B \in \mathcal{B}_o$

$$P[T \leq t,\ X(T) \in B] = \int_{E\setminus E_o} \lambda(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds,B) \exp\left(-\int_{E \setminus E_o} H^x(s)\ \lambda(dx)\right)$$

Supposons de plus que pour tout $t \geq 0$

(3) *pour tout* $\Gamma \in \mathcal{B}$, $\Gamma \subset E \setminus E_o$, $\lambda(\Gamma) = \int_{E \setminus E_o} P^x[X(t) \in \Gamma,\ \tau > t] \quad \lambda(dx)$

alors conditionnellement à $[T < +\infty]$ *les particules, non en collision avec* E_o, *sont distribuées à l'instant* T *suivant un* λ*-processus de Poisson sur* $E \setminus E_o$.

Démonstration de la proposition I.1

Nous allons d'abord prouver par deux lemmes utilisant respectivement les hypothèses (1) et (2) que pour presque tout ω satisfaisant à $T(\omega) < +\infty$ il existe un $x \in S(\omega_o)$ unique tel que :

$$T(\omega) = \inf_{y \in S(\omega_o)} \tau_y(\omega) = \tau_x(\omega)$$

Lemme I.5

Soit $F = \{\omega$: il existe x et $y \in S(\omega_o)$, $x \neq y$, $\tau_x = \tau_y < +\infty\}$ *l'hypothèse (1) implique* $F \in \mathcal{F}$ *et* $P(F) = 0$.

Démonstration du lemme I.5

$1_F((\omega_o,.))$ est $\mathcal{A}_{\omega_o}$-mesurable et en posant $g(x,y) = H^x(ds) \otimes H^y(dt)\ (\Delta)$ (Δ diagonale de $\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[1_F((\omega_o,.))] \leq \sum_{\substack{x,y \in S(\omega_o) \\ x \neq y}} g(x,y) = \int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ N_{\omega_o}(dx).N_{\omega_o}(dy)$$

où D_2 est la diagonale de $E \times E$.

La mesurabilité de $g(x,y)$ résulte de celle de $H^x(]s,t]) = P^x[s<\tau\leq t]$ et implique celle de

$$\int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ N_{\omega_o}(dx)\ N_{\omega_o}(dy)$$

comme fonction de ω_o. Par suite nous pouvons écrire :

$$\int P_o(d\omega_o) \int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ N_{\omega_o}(dx)\ N_{\omega_o}(dy) = \int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ \lambda(dx).\lambda(dy)$$

mais

$$\int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ \lambda(dx)\ \lambda(dy) = \int_E \lambda(dy) \int H^y(dt) \int_{E\setminus\{y\}} H^x(ds)(\{t\})\ \lambda(dx)$$

et

$$\int H^x(ds)(\{t\})\ \lambda(dx) = \int P^x\ [\tau=t]\ \lambda(dx) \leq \int P^x[X(t) \in Fr(E_o)]\ \lambda(dx) =$$

$$\lambda\ P_t(Fr(E_o)) = 0$$

donc

$$\int_{E\times E\setminus D_2} g(x,y)\ N_{\omega_o}(dx).N_{\omega_o}(dy) = 0 \qquad P_o - p.s.$$

Revenant à l'inégalité de départ

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[1_F((\omega_o,.))] = 0 \qquad P_o - p.s.$$

puisque $\mathcal{F}_o$ est complète pour P_o, $\mathcal{E}_{\omega_o}[1_F((\omega_o,.))]$ est $\mathcal{F}_o$-mesurable et $\mathbf{E}[\mathcal{E}_{\omega_o}[1_F((\omega_o,.))]] = 0$, ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme I.6

L'hypothèse (2) implique

$$P\Big[\sum_{x\in S(\omega_\circ)} 1_{[\tau_x \leq t]} = +\infty\Big] = 0.$$

Démonstration du lemme I.6

Posons $M(\omega) = \sum_{x\in S(\omega_\circ)} 1_{[\tau_x \leq t]}(\omega)$ (nombre de particules entrant avant t), pour $\omega_\circ$ fixé c'est une fonction $\mathcal{A}_{\omega_\circ}$-mesurable, d'autre part pour tout $n \geq 0$

$$\mathcal{E}_{\omega_\circ}\big[1_{[M\geq n]}((\omega_\circ,.))\big] = \int_{E^n\setminus D_n} \prod_{i=1}^{n} P^{x_i}[\tau\leq t]\; N_{\omega_\circ}(dx_1)\dots N_{\omega_\circ}(dx_n)$$

où D_n est la diagonale de E^n, est une fonction mesurable de $\omega_\circ$, M est donc une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$E[M] = \int P_\circ(d\omega_\circ)\; \mathcal{E}_{\omega_\circ}\Big[\sum_{x\in S(\omega_\circ)} 1_{[\tau_x\leq t]}((\omega_\circ,.))\Big] = \int P_\circ(d\omega_\circ) \sum_{x\in S(\omega_\circ)} P^x[\tau\leq t]$$

$$= \int P_\circ(d\omega_\circ) \int P^x[\tau\leq t]\; N_{\omega_\circ}(dx) = \int_{E\setminus E_\circ} P^x[\tau\leq t]\;\lambda(dx) < +\infty$$

le lemme en résulte. ∎

Notons N^T la famille de mesure N^T_ω, $\omega \in [T < +\infty]$, définies par

$$N^T_\omega = \sum_{y\in S(\omega_\circ)} \varepsilon_{X_y(T(\omega),\omega)}$$

la suite de la démonstration de la proposition I.1 repose sur l'étude de la fonction

$$\Psi(\omega) = 1_{[T\leq t]}(\omega)\;.\;\exp\Big(-\int h(x)\; N^T_\omega(dx)\Big)$$

où h est une fonction positive mesurable sur E. (avec la convention que $\Psi(\omega) = 0$ si N^T_ω n'est pas définie).

Posons $G_k = \{\omega : \text{il existe } x \text{ unique tel que } \tau_x = T < +\infty \text{ et } x \in S_k(\omega_o)\}$

et écrivons $\Psi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{G_k}(\omega).\Psi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\omega)$ p.s.

Lemme I.7

> Ψ et Ψ_k *sont* $\mathcal{F}$*-mesurables et*
>
> $$E[\Psi_k \mid \mathcal{F}_o] = \int N^k(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds, dz)\, e^{-h(z)} . \prod_{y \in S(\omega_o) \setminus \{x\}} \hat{h}(s,y) \quad \text{p.s.}$$
>
> *avec* $\hat{h}(s,y) = E^y\left[1_{[s<\tau]} . \exp(-h(X(s)))\right]$

Démonstration du lemme I.7

Pour $x \in S_k(\omega_o)$, posons

$$\Psi_{kx}(s,z,\omega) = \Big(\prod_{y \in S(\omega_o)\setminus\{x\}} (1_{[s<\tau_y]}(s,\omega) . \exp(-h(X_y(s,\omega))))\Big).\ 1_{[0,t]}(s).e^{-h(z)}$$

$$\Psi^n_{kx}(s,z,\omega) = \Big(\prod_{y \in S(\omega_o)\cap K_n \setminus\{x\}} (1_{[s<\tau_y]}(s,\omega).\exp(-h(X_y(s,\omega))))\Big).1_{[0,t]}(s).e^{-h(z)}$$

où $K_n = \bigcup_{\ell=1}^{n} E_\ell$ · (cf. I.2.1 (iii) pour la définition de E_k)

$$\Psi_{kx}(s,z,\omega) = \lim_{n\to+\infty} \Psi^n_{kx}(s,z,\omega)$$

Si $G_{kx} = \{\omega : T(\omega) = \tau_x(\omega) < +\infty\}$

$$\Psi_k(\omega) = \sum_{x \in S_k(\omega_o)} 1_{G_{kx}}(\omega).\Psi_k(\omega) = \int N^k_{\omega_o}(dx)\, 1_{G_{kx}}(\omega).\Psi_k(\omega)$$

pour $x \in S_k(\omega_o)$

$$1_{G_{kx}}(\omega) . \Psi_k(\omega) = \Psi_{kx}(\tau_x(\omega), X_x(\tau_x(\omega),\omega),\omega)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Psi^n_{kx}(\tau_x(\omega), X_x(\tau_x(\omega),\omega),\omega) .$$

Les fonctions de (s,z,ω), $1_{[s<\tau_y]}(s,\omega)$, $X_y(s,\omega)$, $1_{[0,t]}(s)$, z sont mesurables, il en est donc de même de $\Psi^n_{kx}(s,z,\omega)$. Il en résulte d'une part que $\Psi^n_{kx}(\tau_x(\omega), X_x(\tau_x(\omega),\omega),\omega)$ est une variable aléatoire sur $(\mathcal{X}_{\omega_o}, \mathcal{A}_{\omega_o})$ (ce qui implique la même propriété pour Ψ_k), d'autre part d'après le lemme I.2 :

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi^n_{kx}(\tau_x,X_x(\tau_x),.,.)\,|\,(\tau_x,X_x(\tau_x))=(s,z)] = \mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi^n_{kx}(s,z,.,.)],\ H^x(ds,dz)\text{ p.s.}$$

mais

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi^n_{kx}(s,z,.,.)] = 1_{[0,t]}(s).e^{-h(z)}\ .\prod_{y\in S(\omega_o)\cap K_n\setminus\{x\}} \tilde{E}^y[1_{[s<\tilde{\tau}_y]}\,.\,\exp(-h(\tilde{X}_y(s)))]$$

par suite

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi^n_{kx}(\tau_x,X_x(\tau_x),.,.)] = \int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)}.\prod_{y\in S(\omega_o)\cap K_n\setminus\{x\}} \hat{h}(s,y)$$

et

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi_{kx}(\tau_x,X_x(\tau_x),.,.)] = \int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)}.\prod_{y\in S(\omega_o)\setminus\{x\}} \hat{h}(s,y)\ .$$

Enfin

$$\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi_k] = \mathcal{E}_{\omega_o}[\int N^k_{\omega_o}(dx).\Psi_{kx}(\tau_x,X_x(\tau_x),.,.)] = \int N^k_{\omega_o}(dx).\ \mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi_{kx}(\tau_x,X_x(\tau_x),.,.)]$$

$$= \int N^k_{\omega_o}(dx)\int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)}.\prod_{y\in S(\omega_o)\setminus\{x\}}\hat{h}(s,y)$$

$$= \int N^k_{\omega_o}(dx)\int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)}.\exp\Big(\int_{E\setminus\{x\}} \operatorname{Log}\hat{h}(s,y).N_{\omega_o}(dy)\Big)$$

Sous cette dernière forme, il est immédiat par applications répétées du lemme I.3 que $\mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi_k]$ est une fonction mesurable de ω_o.

Rappelons qu'en plus de la mesurabilité ci-dessus énoncée, nous avons déjà prouvé que pour ω_o fixé Ψ_k est $\mathcal{G}_{\omega_o}$-mesurable, si $h = 0$ et si t tend vers $+\infty$ nous en déduisons $G_k \in \mathcal{F}$. Mais les propriétés de mesurabilité énoncées pour Ψ_k restent vraies pour $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$ et $\mathcal{F}$ est complète pour P ;

prenant, d'abord $h = 0$ et $t < +\infty$ nous en déduisons la mesurabilité de T, puis $h = \delta.1_C$, $C \in \mathcal{B}$, $\delta \geq 0$ et faisant tendre t vers $+\infty$ celle de $N^T(C)$ en utilisant le lemme I.4 (en particulier si $C \in \mathcal{B}_o$ $N^T(C) = 1_{[X(T) \in C]}$, donc $X(T)$ est une variable aléatoire). Il en résulte immédiatement que Ψ et Ψ_k sont des variables aléatoires.

La démonstration du lemme I.7 est achevée, puisque pour Ψ_k mesurable

$$E[\Psi_k \mid \mathcal{F}_o](\omega_o) = \mathcal{E}_{\omega_o}[\Psi_k((\omega_o,.))] \qquad P_o - \text{p.s.} \quad \blacksquare$$

$$E[\Psi_k \mid \mathcal{F}_o] \quad (\omega_o)$$

$$= \int N^k_{\omega_o}(dx)\int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)} \prod_{y \in S_k(\omega_o)\setminus\{x\}} \hat{h}(s,y).\exp(\int \mathrm{Log}\hat{h}(s,y)\bar{N}^k(dy))$$

est une fonction mesurable du couple de variables aléatoires indépendantes $(N^k, \bar{N}^k)$ (cf. I.2.1 (iii)) par suite

$$E[\Psi_k \mid N^k] = E[E[\Psi_k \mid \mathcal{F}_o] \mid N^k]$$

$$= \int N^k_{\omega_o}(dx)\int_{[0,t]} H^x(ds,dz).e^{-h(z)}. \prod_{y \in S_k(\omega_o)\setminus\{x\}} \hat{h}(s,y).E[\exp(\int \mathrm{Log}\hat{h}(s,y)\bar{N}^k(dy)]$$

avec

$$E[\exp(\int \mathrm{Log}\ \hat{h}(s,y)\ \bar{N}^k(dy))] = \exp(\int_{E\setminus E_o \cup E_k} (\hat{h}(s,y)-1)\ \lambda(dy))$$

Puis

$$E[\Psi_k \mid N^k(E) = n] = E[E[\Psi_k \mid N^k] \mid N^k(E) = n]$$

$$= n \int_{E_k} \frac{\lambda(dx)}{\lambda(E_k)}\int_{[0,t]} H^x(ds,dz).e^{-h(z)}(\int_{E_k} \hat{h}(s,y)\frac{\lambda(dy)}{\lambda(E_k)})^{n-1}.\exp(\int_{E\setminus E_o \cup E_k} (\hat{h}(s,y)-1)\lambda(dy))$$

Finalement, intégrant par rapport à $N^k(E)$

$E[\Psi_k]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(E_k)}}{(n-1)!} \int_{E_k} \lambda(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds,dz) e^{-h(z)} (\int_{E_k} \hat{h}(s,y)\lambda(dy))^{n-1} .$$

$$\exp(\int_{E\setminus E_\circ \cup E_k} (\hat{h}(s,y)-1)\lambda(dy))$$

$$= \int_{E_k} \lambda(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds,dz)\ e^{-h(z)}\ .\ \exp(\int_{E\setminus E_\circ} (\hat{h}(s,y)-1)\lambda(dy)$$

et

$E[\Psi]$

$$= \int_{E\setminus E_\circ} \lambda(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds,dz) e^{-h(z)} . \exp(-\int_{E\setminus E_\circ} P^x[\tau \leq s]\, \lambda(dx)) .$$

$$\exp(\int_{E\setminus E_\circ} E^y[1_{[s<\tau]} (e^{-h(X(s))}-1)]\, \lambda(dy))$$

Soit $B \in \mathcal{B}_\circ$, si $h = 0$ sur $E\setminus Fr(E_\circ)$ et $h = -\mathrm{Log}\ 1_B$ sur $Fr(E_\circ)$

$$P[T \leq t,\ X(T) \in B] = \int_{E\setminus E_\circ} \lambda(dx) \int_{[0,t]} H^x(ds,\ B)\ .\ \exp(-\int_{E\setminus E_\circ} H^x(s)\ \lambda(dx))$$

D'autre part sous l'hypothèse (3)

$$\int_{E\setminus E_\circ} E^y[1_{[s<\tau]} (e^{-h(X(s))} -1)]\ \lambda(dx) = \int_{E\setminus E_\circ} (e^{-h(x)} -1)\ \lambda(dx)$$

et si h est nulle sur $E\setminus E_\circ$ et si l'on fait tendre t vers $+\infty$

$$E[1_{[T<+\infty]}\ .\ \exp(- \int h(x)\ N^T(dx))] = P[T<+\infty] .\ \exp(\int_{E\setminus E_\circ} (e^{-h(x)}-1)\ \lambda(dx))$$

ce qui achève la preuve de la proposition I.1. ∎

I.4 Le cas du mouvement rectiligne uniforme.

Considérons le cas où :

$E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$X(t) = (U(t),\ V(t))$ est une réalisation continue du semi-groupe

$$P_t((u,v),\ A \times B) = 1_{A\times B}\ (u + vt,\ v)$$

$E_\circ = D(\gamma,r) \times \mathbb{R}^2$, $D(\gamma,r)$ est le disque de centre γ et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$.

On pose $D(v) = \{u : \text{pour tout } t \geq 0,\ u - vt \notin D(\gamma, r)\}$, et pour h constante positive et μ probabilité sur $\mathbb{R}^2$, on désigne par $\lambda(h,\mu)$ la mesure de densité $h \,.\, 1_{D(v)}(u)$ par rapport à $\ell \otimes \mu(du, dv)$, où ℓ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition I.2

Si μ *a un moment absolu d'ordre* 1, $\alpha(\mu) = \int |v|\ \mu(dv)$ *les hypothèses* (1), (2), (3) *de la proposition* I.1 *sont satisfaites et :*

T *et* $(U(T), V(T))$ *sont des variables aléatoires indépendantes,*

T *suit une loi exponentielle de paramètre* $2rh\,\alpha(\mu)$

si A *et* B *sont des boréliens de* $\mathbb{R}^2$

$$P[U(T) \in A,\ V(T) \in B] = \frac{1}{2r\,\alpha(\mu)} \int_B C(A,v)\ |v|\ \ \mu(dv)$$

où $C(A,v)$ *est la mesure de la projection de l'intersection de* A *avec le demi-cercle frontière de* $D(v)$, *sur un diamètre perpendiculaire à la direction de* v.

Démonstration de la proposition I.2

$$\int_{E\setminus E_0} H^{(u,v)}(s, A\times B)\lambda(h,\mu)(du,dv) = \int_B \mu(dv) \int_{D(v)} P^{(u,v)}[\tau \leq s, u+v\tau \in A]\ \ h.\ell(du)$$

$$= \int_B \mu(dv)\ h\ s|v|\ C(A,v) = sh \int_B C(A,v)\ |v|\ \ \mu(dv)$$

en particulier

$$\int_{E\setminus E_0} H^{(u,v)}(s)\ \lambda(h,\mu)(du,dv) = s.2rh \int |v|\ \ \mu(dv) < +\infty$$

et

$$P[T \leq t,\ (U(T), V(T)) \in A\times B] = h \int_B C(A,v)\ |v|\ \ \mu(dv)\ .\ \int_0^t e^{-s.2rh\,\alpha(\mu)}\ ds$$

Pour A et B boréliens de $\mathbb{R}^2$

$$\int \lambda(h,\mu)(du,dv)\ P^{(u,v)}\ [(U(t), V(t)) \in A\times B,\ \tau > t]$$

$$= \int_B \mu(dv)\ h\ \ell(\{u : u+vt \in A,\ \tau_{(u,v)} > t\} \cap D(v))$$

or $\{u : \tau_{(u,v)} > t\} \cap D(v)$ est le translaté de $D(v)$ par le vecteur $-vt$, et le second membre s'écrit

$$\int_B \mu(dv)\, h\, \ell\, (A \cap D(v)) = \lambda(h,\mu)\, (A \times B)$$

l'hypothèse (3) est vérifiée. ∎

CHAPITRE II

Rappelons la situation physique que nous voulons décrire.

Une particule $\mathcal{P}$ de masse $M > 1$, représentée par le disque $D(\gamma,r)$, est placée sans vitesse initiale à l'origine des espaces, elle subit les chocs sans frottements et parfaitement élastiques de particules ponctuelles de masse 1, animées de mouvements uniformes, distribuées initialement suivant un processus de Poisson dans l'espace de phase.

Au chapitre I, nous avons étudié le système de particules à l'instant du premier choc d'une particule ponctuelle et de la particule $\mathcal{P}$, à partir de là, nous construisons un processus de saut représentant la vitesse de $\mathcal{P}$.

II.1 Construction d'un modèle probabiliste pour le mouvement de $\mathcal{P}$.

Nous définissons ici un processus de saut $W = (W(t))$, représentant la vitesse de $\mathcal{P}$, la loi du mouvement $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))$ est alors obtenue en intégrant chaque trajectoire de W.

Selon la construction classique [4], il nous suffit pour définir W de préciser les temps de séjour et la distribution des sauts. Nous aurons besoin du

Lemme II.1

Imaginons le choc sans frottement et parfaitement élastique de la particule $\mathcal{P}$ immobile et d'une particule ponctuelle (point γ') de masse 1 *de vitesse v', la vitesse de la particule $\mathcal{P}$ après le choc est*

$$v = \frac{2}{M+1} \operatorname{proj}_{\gamma\gamma'} v'$$

Démonstration du lemme II.1

Si v'_1 désigne la vitesse de la particule γ' après le choc, alors $v'_1 - v' + Mv = o$, $\operatorname{proj}_{\gamma\gamma'}(v'_1 - v) = -\operatorname{proj}_{\gamma\gamma'} v'$ et v est porté par $\gamma\gamma'$, le lemme s'en déduit. ∎

Les notations sont celles de **I.**2.

Soit μ_k la probabilité uniforme sur le cercle de centre O de rayon k, $k > o$, nous y penserons comme à loi des vitesses des particules légères.

Supposons qu'à l'instant O, $\mathcal{P}$ ait la vitesse w, $|w| \leq k$, et portons notre attention sur le mouvement des particules légères tel qu'il est observé d'un repère animé de la vitesse de translation w, leurs vitesses sont distribuées suivant la probabilité μ_k-w.

A cause du caractère fortement markovien du processus que nous voulons construire, il est naturel de demander que la distribution des particules, autour de $E_o = D(\gamma,r) \times \mathbb{R}^2$ dans l'espace de phase, soit la même à l'instant O et à l'instant du premier choc. D'après I, cette condition est réalisée en distribuant les particules autour de E_o suivant un $\lambda(h,\mu_k-w)$-processus de Poisson. Les lois du temps de séjour T dans l'état w, de la vitesse de choc V_T et du point de choc U_T sont alors données par la proposition I.2. Remarquons que l'indépendance entre T et (U_T,V_T) affirmée par cette proposition est une condition nécessaire pour la construction envisagée.

Nous construisons

a) sur la boule B(o,k) le processus de Markov à temps discret $(\overline{W}(n))$, représentant les vitesses successives de $\mathcal{P}$, de transition

$$\overline{P}(w,\Gamma) = P^w\left[w + \frac{2}{M+1} V \in \Gamma\right] \quad \text{où} \quad V = \text{proj}_{\gamma U_T} V_T$$

et P^W est la probabilité sur l'espace $(\Omega^W,\mathcal{F}^W)$ construit au chapitre I correspondant au cas particulier du paragraphe I.4 où $\mu = \mu_k$-W, l'opérateur d'espérance correspondant est noté E^W (en utilisant le résultat le résultat du lemme II.1, on vérifie aisément que $\overline{P}(W,B(O,k)) = 1$).

b) les variables aléatoires réelles $T_n(w)$, $w \in B(o,k)$, $n \in \mathbb{N}$ exponentielles de paramètres

$$\rho(w) = 2rh\ \alpha_k(w) = 2rh\ \alpha(\mu_k - w)$$

représentant les temps de séjour ,

de telle façon que les systèmes de variables aléatoires

$$\overline{W}(n),\ n \in \mathbb{N}\ ;\ T_o(w),\ w \in B(o,k)\ ;\ T_1(w),\ w \in B(o,k)\ ;\ldots$$

soient indépendants.

Posons alors

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} R_o = o, \quad R_n = T_o(\overline{W}(o)) + \ldots + T_{n-1}(\overline{W}(n-1)) \quad n \geq 1 \\ n^*(t) = n \quad \text{si} \quad R_n \leq t < R_{n+1} \\ W(t) = \overline{W}(n^*(t)) \end{cases}$$

La condition, aisément vérifiée,

$$\sup_{w \in B(o,k)} \rho(w) < +\infty$$

garanti l'existence et l'unicité d'un processus W satisfaisant à (I), que nous acceptons comme processus des vitesses de la particule $\mathcal{P}$.

II.2 Le théorème de convergence

Soit β et D deux réels > o, rappelons que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck [5] à deux dimensions de paramètres β, D est obtenu par intégration des trajectoires d'une version continue du processus de Markov (Z_t) associé au semi-groupe

$$Q_t(w,dv) = \frac{1}{2\pi\sigma^2(t)}\ e^{-\frac{|v-\alpha(t)w|^2}{2\sigma^2(t)}}\ dv,\ \alpha(t) = e^{-\beta t},\ \sigma^2(t) = \frac{D}{2\beta}\ (1-e^{-2\beta t})$$

ici comme dans tout ce qui suit la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ est notée $|.|$.

Imposons aux paramètres M,k,h,r les relations

$$\text{(II)} \qquad \frac{k^2}{M+1} = \frac{3D}{2\beta}\ ,\quad \frac{(2rh)^2}{M+1} = \frac{\beta^3}{6D}$$

et désignons alors par $W_M(t)$ et $\mathcal{W}_M(t)$ les processus relatifs au mouvement de $\mathcal{P}$.

Théorème 1

Lorsque M *tend vers l'infini, la mesure induite sur* $C[0,1]$ *par le processus* $\mathcal{W}_M(t)$ *de conditions intiales* (0,0) *converge étroitement vers la mesure induite sur le même espace par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à deux dimensions de conditions initiales* (0,0) *de paramètres* β, D.

Pour les définitions de $C[0,1]$ et de la convergence étroite, nous renvoyons à [6].

Les relations (II) sont identiques à celles introduites par Holley, si l'on excepte le diamètre de la particule. Il n'est pas surprenant que ce paramètre n'intervienne que par le produit 2rh.

Soit $(\mathfrak{W}_M^o(t))$ le processus représentant la loi du mouvement de $\mathcal{P}$ lorsque les paramètres k,h,r ont des valeurs données k_o, h_o, r_o, le théorème précédent s'énonce : lorsque M tend vers l'infini, le processus $\frac{\mathfrak{W}_M^o(Mt)}{\sqrt{M}}$ converge en loi vers le processus d'O.U. à deux dimensions.

La continuité de l'application $\Sigma(x) = \int_0 x(t)dt$ de $D[0,1]$ (voir [6]) dans $C[0,1]$ ramène la démonstration du théorème 1 à celle du

Théorème 1'

Lorsque M *tend vers l'infini la mesure, induite sur* $D[0,1]$ *par le processus* $(W_M(t))$ *issu de* 0, *converge étroitement vers la mesure induite sur le même espace par le processus* $(Z(t))$ *issu de* 0.

Dans la suite, nous supposerons toujours qu'entre les paramètres r,h,k,M existent les relations (II).

Au paragraphe II-3 suivant, nous remplaçons le processus W_M par un processus induisant la même mesure sur $D[0,1]$, mais de construction différente, ce processus vérifie les hypothèses d'un théorème général de convergence que nous démontrons au chapitre III, le théorème 1' en résulte.

II.3 Etude du processus W_M

II-3-1 Une autre définition de W_M

Pour $|w| \leq k$

$$\alpha_k(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k^2-2k|w|\cos\theta+|w|^2)^{1/2}\, d\theta = 2k.\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1-2\frac{|w|}{k}\cos\theta+\frac{|w|^2}{k^2})^{1/2} d\theta \leq 2k.$$

Ceci permet une nouvelle définition de W, selon le

Lemme II-2

Soit W *un processus de saut sur une partie* $F \subset \mathbb{R}^2$*, associé à la loi des sauts* $\bar{P}(w,\Gamma)$ *et à la fonction mesurable* $\rho(w)$*, supposons*

$$\sup_{w \in F} \rho(w) \leq K,$$

le processus W *est alors indistingable du processus* $\hat{W}(\Theta(t))$ *obtenu en composant un processus de Markov à temps discret* $(\hat{W}(n))$ *de transition*

$$\Pi(w,\Gamma) = (1 - \frac{\rho(w)}{K})\, 1_\Gamma(w) + \frac{\rho(w)}{K}\, \bar{P}(w,\Gamma)$$

et un processus de Poisson $\Theta(t)$ *de paramètre* K *indépendant du précédent.*

Démonstration du lemme II.2.

Le processus W a son générateur infinitésimal A défini pour tout f borélienne bornée sur F par

$$\begin{aligned} Af(w) &= \rho(w)\, [\bar{P}(w,f)-f(w)] \\ &= K\, [\frac{\rho(w)}{K}\, \bar{P}(w,f) + (1 - \frac{\rho(w)}{K})f(w)-f(w)] = K\, [\Pi(w,f)-f(w)] \end{aligned}$$

le lemme résulte alors de l'interprétation de cette dernière écriture et de la continuité à droite des trajectoires des processus envisagés. ∎

Dans la suite, nous désignons par $(\hat{W}_M(n))$ un processus de Markov à temps discret défini sur $B(o,k)$ associé à l'opérateur

$$\Pi(w,f) = (1 - \frac{\alpha_k(w)}{2k})\, f(w) + \frac{\alpha_k(w)}{2k}\, E^w[f(\bar{W}_M(1))]$$

par $\Theta_M(t)$ un processus de Poisson de paramètre $4rhk = \beta(M+1)$ indépendant de $\hat{W}_M$. On a $W_M = \hat{W}_M(\Theta_M(t))$.

II-3-2 Quelques propriétés du processus $\hat{W}_M$

Proposition II.1

Soit w, $|w| \leq k = \left(\frac{3D}{2\beta(M+1)}\right)^{1/2}$

(i) $E^w[\hat{W}_M(1)] = \left(1 - \frac{1}{M+1} + |w| \cdot \sigma\left(\frac{1}{M+1}\right)\right)w$

(ii) *si* v_i *désigne la ième composante d'un vecteur* $v \in \mathbb{R}^2$ *et si* $\delta_{ij} = o$ *pour* $i \neq j$, 1 *pour* $i = j$

$$E^w[((\hat{W}_M(1))_i - w_i)((\hat{W}_M(1))_j - w_j)] = \frac{D}{\beta} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{1}{M+1} + |w|^2 \cdot \sigma\left(\frac{1}{M+1}\right)$$

(iii) $E^w[|\hat{W}_M(1) - w|^3] = \sigma\left(\frac{1}{M+1}\right)$

(iv) *il existe une constante* K, $o < K < 1$ *telle que pour* M *et* $|w|$ *suffisamment grands*

$$|\hat{W}_M(1) - w| \leq K\ |w| \quad \text{p.s.}$$

où $\sigma\left(\frac{1}{M+1}\right)$ *sont des fonctions mesurables de* w, *majorées par des fonctions* $\delta\left(\frac{1}{M+1}\right)$ *indépendantes de* w *et telles que*

$$\lim_{M \to +\infty} (M+1)\ \delta\left(\frac{1}{M+1}\right) = o.$$

Démonstration de la proposition II.1

D'après II.1

$$|\hat{W}_M(1) - w| = \frac{2}{M+1}\ |\mathrm{proj}_{\gamma U_T}\ V_T| \leq \frac{2}{M+1} \cdot 2k = 4 \cdot \left(\frac{3D}{2\beta(M+1)}\right)^{1/2},$$

ce qui établit (iv).

La preuve de (i) (ii) et (iii) demande un effort plus important, commençons par le

Lemme II.3

$$E^w[V | V_T = v] = \frac{2}{3} v \quad , \quad E^w[|V|^3 | V_T = v] = \frac{3\pi}{16} |v|^3$$

tandis que la matrice, dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur est dirigé par v, *de la forme quadratique*

$$\Psi(w,v)(u) = E^w[(u(\hat{W}_M(1) - w))^2 |\ V_T = v]$$

est

$$\frac{2v^2}{15}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Démonstration du lemme II.3.

Le plan est rapporté à une base orthonormée directe dont le premier vecteur est dirigé par v.

Soit φ l'angle du vecteur v et du vecteur $U_T\gamma$, A un borélien de la frontière de $D(\gamma,r)$

$$P([U_T\in A]\,|V_T=v) = \frac{C(A,v)}{2r} = \frac{1}{2r}\int_{\check{A}} 1_{[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]}(\varphi).r\cos\varphi\, d\varphi = \int_{\check{A}}\delta(\varphi)\, d\varphi$$

$\check{A}$ est le symétrique de A par rapport à γ,

$$\delta(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot 1_{[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]}(\varphi).\cos\varphi .$$

La loi de V sachant $V_T=v$ est alors la mesure image de la loi de densité $\delta(\varphi)$ par l'application $\varphi \longmapsto |v|\cos\varphi.(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Le lemme en résulte.∎

La loi de V_T est définie par

$$P^w[V_T\in \Gamma] = \frac{1}{\alpha_k(w)}\int_\Gamma |v|\, d(\mu_k-w).$$

Rapportons le plan à une base orthonormée directe dont le premier vecteur est dirigé par w, si Θ est l'angle du vecteur w et du vecteur v, la loi de V_T s'interprète comme la mesure image (convenablement normalisée) de la mesure de densité

$$\frac{1}{2\pi}1_{[0,2\pi]}(\Theta)\,(|w|^2-2k|w|\cos\Theta+k^2)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}1_{[0,2\pi]}(\Theta).g(k,w,\Theta)$$

par l'application

$$\Theta \longmapsto -w + k.(\cos\Theta,\sin\Theta).$$

Lemme II-4

$$g(k,w,\Theta) = k\left[1-\frac{|w|}{k}\cos\Theta + \frac{|w|^2}{k^2}b(w)\right]$$

$$(g(k,w,\Theta))^3 = k^3\left[1-\frac{3|w|}{k}\cos\Theta + \frac{|w|^2}{k^2}b(w)\right]$$

$$(g(k,w,\Theta))^4 = k^4\, b(w)$$

où $b(w)$ *désignent des fonctions mesurables de* w, *bornées par une constante pour* $|w| \leq k$ *et* $\theta \in [0,2\pi]$.

Démonstration du lemme II.4.

La première relation résulte de la continuité sur $[0,1] \times [0,2\pi]$ de la fonction

$$(x,\theta) \longmapsto \frac{(1-2x\cos\theta+x^2)^{1/2} - (1-x\cos\theta)}{x^2}$$
$$(0,\theta) \longmapsto 0$$

Les autres se démontrent de façon analogue. ∎

Nous établissons successivement (i), (ii) et (iii), les composantes d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ dans la base associée au vecteur w, décrite précédemment sont affectés des indices 1 et 2.

$$\text{(i)}\ \alpha_k(w)\ E^w[V_1] = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (-|w|+k\cos\theta).\frac{1}{2\pi}\ g(k,w,\theta)d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\frac{k^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\frac{|w|}{k}(1+\cos^2\theta) + \frac{|w|^2}{k^2}b(w))d\theta = k^2\left[-\frac{|w|}{k}+\frac{|w|^2}{k^2}b(w)\right]$$

tandis que

$$\alpha_k(w)\ E^w[V_2] = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} k\ \sin\theta\ .\ \frac{1}{2\pi}\ g(k,w,\theta)d\theta = 0$$

$$i = 1,2 \qquad E^w[(\hat{W}_M(1))_i - w_i] = \frac{2}{M+1}\ \frac{\alpha_k(w)}{2k} E^w\ [V_i]$$

par suite

$$E^w[(\hat{W}_M(1))_1 - |w|] = -\frac{|w|}{M+1} + |w|^2\ \sigma(\frac{1}{M+1})\ ,\ E^w[(\hat{W}_M(1))_2] = 0$$

ce qui établit (i).

(ii) la matrice de la forme quadratique $\Psi(w,v)$ est dans la base considérée

$$\frac{2}{15}\ |v|^2 \begin{bmatrix} 1 + 3\cos^2\theta & -3\sin\theta\cos\theta \\ -3\sin\theta\cos\theta & 1+3\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\alpha_k(w)\ E^w[V_1V_2] = \frac{2}{15}\int_0^{2\pi}(-3\sin\theta\cos\theta)\ \frac{1}{2\pi}\ (g(k,w,\theta))^3\ d\theta = 0$$

$$\alpha_k(w)\ E^w[V_1^2] = \frac{2}{15}\int_0^{2\pi}(1+3\cos^2\theta)\ \frac{1}{2\pi}\ (g(k,w,\theta))^3\ d\theta = \frac{k^3}{3}\left[1 + \frac{|w|^2}{k^2}\ b(w)\right]$$

$$\alpha_k(w)\ E^w[V_2^2] = \frac{2}{15}\int_0^{2\pi}(1+3\sin^2\theta)\ \frac{1}{2\pi}\ (g(k,w,\theta))^3\ d\theta = \frac{k^3}{3}\left[1 + \frac{|w|^2}{k^2}\ b(w)\right]$$

pour $i = 1,2$

$$E^w[((\hat{W}_M(1))_i - w_i)^2] = \frac{4}{(M+1)^2}\,\frac{\alpha_k(w)}{2k}\,E^w[V_i^2] = \frac{2k^2}{3(M+1)^2}\left[1 + \frac{|w|^2}{k^2}\,b(w)\right] = \frac{D}{\beta}\cdot\frac{1}{M+1} + |w|^2\,\sigma(\frac{1}{M+1}).$$

(ii) est alors prouvé par simple changement de base.

(iii) $\alpha_k(w)\,E^w[|V|^3] = \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\,(g(k,w,\theta))^4\,d\theta = k^4\,b(w)$

$$E^w[|\hat{W}_M(1)-w|^3] = \frac{8}{(M+1)^3}\,\frac{\alpha_k(w)}{2k}\,E^w[|V|^3] = \frac{k^3}{(M+1)^3}\,b(w) = \sigma(\frac{1}{M+1}).\ \blacksquare$$

II-3-3 Extension à $\mathbb{R}^2$ du processus W_M

Le processus $\hat{W}_M$ a pour espace des états la boule $B(o,k)$, pour des commodités de démonstration nous le prolongeons à $\mathbb{R}^2$, en posant :

si $|w| > k$ $\quad \Pi(w,f) = \int f((1 - \frac{1}{M+1})w + (\frac{2D}{\beta(M+1)})^{1/2}\,v)\,d\mu(v)$

où μ est la probabilité uniforme sur le cercle unité, ce prolongement sera encore noté $\hat{W}_M$ et la formule $W_M = \hat{W}_M(\Theta_M(t))$ définit un prolongement de W_M à $\mathbb{R}^2$.

Proposition II.2

$\hat{W}_M$ satisfait aux conditions (i), (ii) et (iv) de la proposition II.1 et à (iii)' $E^w[|\hat{W}_M(1)-w|^3] = (1+|w|^3)\,\sigma(\frac{1}{M+1})$.

Démonstration de la proposition II.2.

Il suffit d'effectuer les vérifications dans le cas où $|w| > k$, en remarquant que dans (iii) $\sigma(\frac{1}{M+1})$ peut aussi s'écrire $(1+|w|^3)\,\sigma(\frac{1}{M+1})$.

La vérification de (i) et (ii) est immédiate.

$$\text{Si } |v| = 1,\quad \left|-\frac{w}{M+1} + (\frac{2D}{\beta(M+1)})^{1/2}\,v\right| \le \frac{|w|}{M+1} + (\frac{2D}{\beta(M+1)})^{1/2} \le \frac{2}{3}\,|w|$$

pour $M+1 \ge \sup\{3, \frac{18D}{\beta}\}$ et $|w| \ge 1$, ce qui établit (iv).

Enfin,

$$E^w[|\hat{W}_M(1)-w|^3] = \int \left| -\frac{w}{M+1} + (\frac{2D}{\beta(M+1)})^{1/2}\,v\right| d\mu(v) \le 2^3\left[\frac{|w|^3}{(M+1)^3} + (\frac{2D}{\beta(M+1)})^{3/2}\right] = (1+|w|^3)\,\sigma(\frac{1}{M+1}).\ \blacksquare$$

CHAPITRE III

UN THEOREME GENERAL DE CONVERGENCE

$|.|$ désigne la norme euclidienne de R^2.

Théorème 2

Soient :

(h_n) *une suite de réels positifs décroissant vers* 0.

$(\hat{W}_n)_n$ *une suite de processus de Markov à temps discret sur* $\mathbb{R}^2$.

$(\Theta_n(t))_n$ *une suite de processus de Poisson de paramètre* $\frac{1}{h_n}$, *indépendants des processus* $(\hat{W}_n)_n$.

β *et* D *des réels strictement positifs.*

Supposons que pour tout $w \in \mathbb{R}^2$

(i) $E^w[\hat{W}_n(1)] = (1 - \beta h_n + |w|.\sigma(h_n)).w$

(ii) *si* v_i *désigne la* $i^{\text{ème}}$ *composante d'un vecteur* $v \in \mathbb{R}^2$, *et si* $\delta_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$, 1 *pour* $i=j$

$$E^w[((\hat{W}_n(1))_i - w_i)\ ((\hat{W}_n(1))_j - w_j)] = D.\delta_{ij}\ h_n + |w|^2.\sigma(h_n)$$

(iii) $E^w[|\hat{W}_n(1)-w|^3] = (1+|w|^3)\ \sigma(h_n)$

(iv) *il existe une constante* K, $0 < K < 1$ *telle que pour* n *et* $|w|$ *suffisamment grands, on ait p.s.*

$$|\hat{W}_n(1)-w| \leq K\ |w|$$

où $\sigma(h_n)$ *sont des fonctions mesurables de* w, *majorées par des fonctions* $\delta(h_n)$ *indépendantes de* w *et telles que*

$$\lim_{n \to +\infty} h_n^{-1}.\delta(h_n) = 0$$

alors la suite des mesures $P_n^{w_0}$, *induites sur* $D[0,1]$ *par le processus* $W_n(t) = \hat{W}_n(\Theta_n(t))$ *issu de* w_0, *converge étroitement vers la mesure induite sur le même espace par le processus* $(Z(t))$ *issu de* w_0, *associé au semi-groupe*

$$Q_t(w,dv) = \frac{1}{2\pi\sigma^2(t)}\, e^{-\frac{|v-\alpha(t)w|^2}{2\sigma^2(t)}}\, dv,\quad \alpha(t) = e^{-\beta t},\ \sigma^2(t) = \frac{D}{2\beta}\,(1-e^{-2\beta t}).$$

D'après Billingsley [6] théorème 15.1, il suffit d'établir la convergence marginale de la suite $(P_n^{w_o})$, puis de prouver que $\{P_n^{w_o},\ n\in\mathbb{N}\}$ est étroitement relativement compacte.

III.1 La convergence marginale

$C_o(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ tendant vers 0 à l'infini.

Proposition III.1

Pour tout $f\in C_o(\mathbb{R}^2)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\ \sup\limits_{w} \left|E^w[f(W_n(t))] - E^w[f(Z(t))]\right| = 0.$

Démonstration de la proposition III.2.

$\mathcal{F}$ est l'espace des $f\in C_o(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$|v|^2\,\left|\frac{\partial f}{\partial}(v)\right| \quad,\quad |v|^2\,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial^2}(v)\right| \quad,\quad |v|^3\,\left|\frac{\partial^3 f}{\partial^3}(v)\right| \text{ soient bornés.}$$

Lemme III.1

(Q_t) *est un semi-groupe fortement continu sur* $C_o(\mathbb{R}^2)$

si $(\mathcal{D}(A),A)$ *est son générateur infinitésimal*

$\mathcal{F}\subset\mathcal{D}(A)$ *et pour* $f\in\mathcal{F}$ $\quad Af(w) = -\beta w.\mathrm{grad}f(w) + \frac{D}{2}\,\Delta f(w)$

si R_λ *est sa résolvante il existe* λ_o *tel que*

si $\lambda \geq \lambda_o$ $\quad R_\lambda(CK^3(\mathbb{R}^2))\subset\mathcal{F}$

$(CK^3(\mathbb{R}^2)$ *est l'espace des fonctions trois fois continûment différentiables à support compact dans* $\mathbb{R}^2)$

Démonstration du lemme III.1.

Soit (N_t) le semi-groupe du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$, $(\hat{\alpha}_t)$ le semi-groupe $\hat{\alpha}_t(f) = f(\alpha(t).)$. Pour f borélienne bornée

$$Q_t(f)(w) = \frac{(\alpha(t))^2}{2\pi\sigma^2(t)} \int e^{-\frac{\alpha^2(t)}{2\sigma^2(t)}(v-w)^2}\, f(\alpha(t)v)\,dv = N_{\gamma(t)}\circ\hat{\alpha}_t(f)(w)$$

où $\Upsilon(t) = \dfrac{\sigma^2(t)}{\alpha^2(t)}$ est une fonction continue nulle en 0, il en résulte immédiatement que (Q_t) est un semi-groupe fortement continu sur $C_o(\mathbb{R}^2)$ et que $Q_t(f)$ est indéfiniment différentiable.

Dans le cas où $f \in CK^3(\mathbb{R}^2)$, il vient pour $n \leq 3$

$$\frac{\partial^n}{\partial} Q_t(f) = \frac{\partial^n}{\partial}\left[N_{\gamma(t)}\, f(\alpha(t).)\right] = (\alpha(t))^n\, N_{\gamma(t)}\left[\frac{\partial^n f}{\partial}(\alpha(t).)\right]$$

soit $\dfrac{\partial^n}{\partial} Q_t(f) = (\alpha(t))^n\, N_{\gamma(t)} \circ \hat{\alpha}_t\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial}\right) = e^{-n\beta t}\, Q_t\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial}\right)$

une dérivation sous le signe $\int$ aisément justifiée donne

$$\frac{\partial^n}{\partial}(R_\lambda f)(w) = R_{\lambda+n\beta}\left(\frac{\partial^n f}{\partial}\right)(w).$$

Pour montrer que $R_\lambda(CK^3(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{H}$ pour $\lambda \geq \lambda_o$, il suffit donc de prouver qu'il existe λ_1 tel que pour tout f continue à support compact et tout $\lambda \geq \lambda_1$

$$\lim_{|w| \to +\infty} |w|^3\, |R_\lambda f(w)| = 0.$$

Soit donc f continue dont le support est contenu dans la boule $B(o,r)$, $r > 1$, si $|w| > 1$

$$|R_\lambda f(w)| = \left|\iint f(v) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, Q_t(w,dv)dt\right| \leq \sup_{v \in \mathbb{R}^2} |f(v)| . \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, Q_t(w,B(o,r))dt$$

$$|R_\lambda f(w)| \leq \sup_{v \in \mathbb{R}^2} |f(v)| \left[\int_0^{\mu \operatorname{Log}|w|} e^{-\lambda t}\, Q_t(w,B(o,r))dt + \int_{\mu \operatorname{Log}|w|}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt\right].$$

μ est un réel $> o$, $\displaystyle\int_{\mu \operatorname{Log}|w|}^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda |w|^{\lambda\mu}}$.

Pour majorer la première intégrale remarquons que

si $o < t \leq \mu \operatorname{Log}|w|$ $\quad \alpha(t)|w| \geq |w|\, e^{-\beta\mu \operatorname{Log}|w|} = |w|^{1-\beta\mu}$.

Choisissons μ tel que $o < \beta\mu < 1$, si $|w| > r^{\frac{1}{1-\beta\mu}}$ nous écrirons, utilisant finalement une inégalité classique des lois gaussiennes,

$$Q_t(w,B(o,r)) \leq Q_t(w,\{v : |v-\alpha(t)w| \geq (\alpha(t)|w|-r)\}) \leq Q_t(w,\{v : |v-\alpha(t)w| \geq (|w|^{1-\beta\mu}-r)\})$$

$$\leq 2\, Q_t\left(w,\left\{v : |v_i-\alpha(t).w_i| \geq \frac{|w|^{1-\beta\mu}-r}{\sqrt{2}}\right\}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left\{u_i : |u_i| \geq \frac{|w|^{1-\beta\mu}-r}{\sqrt{2}}\right\}} e^{-\frac{u_i^2}{2}}\, du_i$$

$$\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{|w|^{1-\beta\mu}-r}{\sqrt{2}} \; e^{-\frac{(|w|^{1-\beta\mu}-r)^2}{4}} .$$

On aura donc $\lim\limits_{|w|\to+\infty} |w|^3 \; |R_\lambda f(w)| = 0$ pour $\lambda \geq \lambda_1 > \frac{3}{\mu}$.

La seconde assertion du lemme est obtenue en écrivant le développement de Taylor à l'ordre 3 au point w de $f \in \mathcal{H}$. ∎

Soit A_n le générateur infinitésimal de W_n, en écrivant le développement de Taylor à l'ordre 3 de $f \in \mathcal{H}$ au point w, il vient :

$$\begin{aligned}
A_n f(w) &= \frac{1}{h_n} E^w\left[f(\hat{W}_n(1)-w)\right] \\
&= \frac{1}{h_n}\Big\{E^w\left[((\hat{W}_n(1))_1-w_1)\right] f'_1(w) + E^w\left[((\hat{W}_n(1))_2-w_2)\right] f'_2(w) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[E^w\left[((\hat{W}_n(1))_1-w_1)^2\right] f''_{11}(w) + 2E^w\left[((\hat{W}_n(1))_1-w_1)((\hat{W}_n(1))_2-w_2)\right] f''_{12}(w) + \\
&\qquad + E^w\left[((W_n(1))_2-w_2)^2\right] f''_{22}(w)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{6} E^w\left[D^3_{\tilde{W}_n} \; (\hat{W}_n(1)-w, \hat{W}_n(1)-w, \hat{W}_n(1)-w)\right]\Big\} \\
&= -\beta w.\mathrm{grad} f(w) + \frac{D}{2} \Delta f(w) + R_n(w)
\end{aligned}$$

avec

$$|R_n(w)| \leq \{|w|^2(|f'_1(w)|+|f'_2(w)|) + \frac{|w|^2}{2}(|f''_{11}(w)|+2|f''_{12}(w)|+|f''_{22}(w)|)\} h_n^{-1}.\delta(h_n)$$
$$+ \frac{1}{6h_n} \; E^w\left[\|D^3_{\tilde{W}_n}\| \; . \; |\hat{W}_n(1)-w|^3\right] .$$

Majorons le dernier terme, soit $E_n(w)$. Par hypothèse il existe un entier n_o et un réel positif r tel que si $n \geq n_o$ et $|w| > r$

$$|\hat{W}_n(1)-w| \leq K|w|$$

ce qui implique

$$|\tilde{W}_n| = |w+\rho(\hat{W}_n(1)-w| \geq |w|-|\hat{W}_n(1)-w| \geq |w|-K|w| = (1-K)|w|$$

(ρ est une variable aléatoire réelle $o < \rho < 1$)

si $|w| \leq r$

$$|E_n(w)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sup_{ijk=1,2} \; \sup_{v \in \mathbb{R}^2} |f'''_{ijk}(v)| \; . \; (1+r^3) \; h_n^{-1} \; \delta(h_n)$$

si $|w| > r$

$$|E_n(w)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3h_n} E^w\left[\sup_{i,j,k=1,2} \left[\frac{|\tilde{W}_n|}{(1-K)|w|}\right]^3 |f'''_{ijk}(\tilde{W}_n)| \cdot |\hat{W}_n(1)-w|^3\right]$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{3h_n} \sup_{v \in \mathbb{R}^2} \sup_{ijk=1,2} |v|^3 . |f'''_{ijk}(v)| . \frac{E^w[|\hat{W}_n(1)-w|^3]}{(1-K)^3|w|^3} \leq K_1 . \frac{1+|w|^3}{|w|^3} h_n^{-1} . \delta(h_n)$$

Donc pour $f \in \mathcal{F}$, $A_n f$ converge uniformément vers Af sur $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{F}$ est dense dans $C_o(\mathbb{R}^2)$ et d'après le lemme III.1 $(\lambda I-A)\mathcal{F}$ est dense dans $C_o(\mathbb{R}^2)$ pour λ supérieure à un certain λ_o, le théorème de Trotter-Kato [7] permet de conclure. ∎

Corollaire III.1

Pour tout $w \in \mathbb{R}^2$ *et toute suite* $t_1, t_2, \ldots, t_p$ *telle que* $o < t_1 < t_2 < \ldots < t_p$, $(W_n(t_1), W_n(t_2), \ldots, W_n(t_p))$ *converge en loi vers* $(Z(t_1), Z(t_2), \ldots, Z(t_p))$ *sous la probabilité* P^w.

Démonstration du corollaire III.1.

Nous nous limitons au cas p=2, il suffit alors de prouver que si f_1 et $f_2 \in C_o(\mathbb{R}^2)$

$$\lim_{n\to+\infty} E^w[f_1(W_n(t_1))f_2(W_n(t_2))] = E^w[f_1(Z(t_1))f_2(Z(t_2))]$$

or

$$E^w[f_1(W_n(t_1))f_2(w_n(t_2))] = E^w[f_1(W_n(t_1)).E^{W_n(t_1)}[f_2(W_n(t_2-t_1))]] =$$

$$T^{(n)}_{t_1}(f_1 . T^{(n)}_{t_2-t_1}(f_2))(w)$$

$$E^w[f_1(Z(t_1)).f_2(Z(t_2))] = E^w[f_1(Z(t_1)).E^{Z(t_1)}[f_2(Z(t_2-t_1))]] =$$

$$Q_{t_1}(f_1 . Q_{t_2-t_1}(f_2))(w)$$

$$|T^{(n)}_{t_1} f_1 . T^{(n)}_{t_2-t_1} f_2(w) - Q_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2|$$

$$\leq \left|T^{(n)}_{t_1} f_1 . T^{(n)}_{t_2-t_1} f_2(w) - T^{(n)}_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2(w)\right| + \left|T^{(n)}_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2(w) - Q_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2(w)\right|$$

$$\leq \sup_v |f_1(v)| . \sup_w \left|T^{(n)}_{t_2-t_1} f_2(w) - Q_{t_2-t_1} f_2(w)\right| + \sup_w \left|T^{(n)}_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2(w) - Q_{t_1} f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2(w)\right|$$

La démonstration est achevée si l'on remarque que $f_1 . Q_{t_2-t_1} f_2 \in C_o(\mathbb{R}^2)$. ∎

III.2. La compacité relative de $\{P_n, n \in N\}$.

Il nous suffit de prouver;

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon)$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} P_n^{w_0}\left(\{x : x \in D[0,1], \sup_{0\le t\le 1} |x(t)| > a(\varepsilon)\}\right) < \varepsilon$$

(ii) pour tout $\eta > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to+\infty} P_n^{w_0}\left(\{x : x \in D[0,1], \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta\}\right) = 0$$

où

$$\tilde{\omega}_x(\delta) = \max\left\{ \sup_{t-\delta\le t'\le t\le t''\le t+\delta} \left[\min\left(|x(t') - x(t)|, |x(t'') - x(t)|\right)\right], \right.$$
$$\left. \sup_{0\le t\le\delta} |x(0) - x(t)|, \sup_{1-\delta\le t\le 1} |x(t) - x(1)| \right\}$$

III.2.1. Preuve de (i).

Lemme III.2.

Soit d *un réel* $d > 1$ *et* A_n *l'évènement :* $W_n(t)$ *a plus de* $\frac{d}{h_n}$ *sauts sur* $[0,1]$

$$P^{w_0}(A_n) \le \frac{h_n}{(d-1)^2}$$

Démonstration du lemme III.2.

$$P^{w_0}(A_n) = P^{w_0}\left[\Theta_n(1) > \frac{d}{h_n}\right] \le P^{w_0}\left[|\Theta_n(1) - \frac{1}{h_n}| \ge \frac{d-1}{h_n}\right]$$

d'après l'inégalité de Tchebitchev, ce dernier terme est encore inférieur à $\frac{h_n}{(d-1)^2}$. ∎

Lemme III.3.

$$E^w\left[(\hat{W}_n(1))^2\right] = 2Dh_n + w^2(1-2\beta h_n + \sigma(h_n)) + |w|^3\sigma(h_n)$$

Démonstration du lemme III.3.

$$E^w\left[(\hat{W}_n(1) - w)^2\right] = 2Dh_n + |w|^2\,\sigma(h_n)$$

d'autre part

$$E^w\left[(\hat{W}_n(1) - w)^2\right] = E^w\left[(\hat{W}_n(1))^2\right] - 2w.E^w\left[\hat{W}_n(1)\right] + w^2$$

$$= E^w\left[(\hat{W}_n(1))^2\right] - 2w^2(1-\beta h_n + |w|\sigma(h_n)) + w^2$$

$$= E^w\left[(\hat{W}_n(1))^2\right] - w^2(1-2\beta\, h_n + |w|\,\sigma(h_n)) \quad . \blacksquare$$

Lemme III.4.

Soit τ *le temps de sortie de la boule de centre* 0 *de rayon* a *pour* $\hat{W}_n$,
il existe un entier $n_o(a)$ *tel que si* $n \geq n_o(a)$

$$S_n(k) = (\hat{W}_n(k \wedge \tau))^2 - 2k\,Dh_n$$

est une surmartingale par rapport à $(\mathcal{F}'_{k \wedge \tau})_k$ *sous la probabilité* P^{w_o}, *il en résulte que pour* $b > o$

$$P^{w_o}\left[\sup_{0 \leq k \leq d h_n^{-1}} |\hat{W}_n(k \wedge \tau)| \geq (2dD + b)^{1/2}\right] \leq \frac{w_o^2 + 2dD}{b}$$

Démonstration du lemme III.4.

Soit $\Gamma \in \mathcal{F}'_{k \wedge \tau}$

$$\int_\Gamma (E^{w_o}\left[S_n(k+1) \mid \mathcal{F}'_{k \wedge \tau}\right] - S_n(k))\, dP^{w_o} = \int_\Gamma (S_n(k+1) - S_n(k))\, dP^{w_o}$$

$$= \int_\Gamma \left\{(\hat{W}_n((k+1) \wedge \tau))^2 - (\hat{W}_n(k \wedge \tau))^2 - 2Dh_n\right\} dP^{w_o}$$

$$= -2Dh_n.P^{w_o}(\Gamma \cap [\tau \leq k]) + \int_{\Gamma \cap [\tau \geq k+1]} \left\{(\hat{W}_n(k+1))^2 - (\hat{W}_n(k))^2 - 2Dh_n\right\} dP^{w_o}$$

il suffit de prouver que le second terme est négatif, or, puisque $\Gamma \in \mathcal{F}'_{k \wedge \tau} \subset \mathcal{F}'_k$ et $[\tau \geq k+1] \in \mathcal{F}_k$ impliquent $\Gamma \cap [\tau \geq k+1] \in \mathcal{F}'_k$, il s'écrit

$$\int_{\Gamma \cap [\tau \geq k+1]} \left\{E^{\hat{W}_n(k)}\left[(\hat{W}_n(1))^2\right] - (W_n(k))^2 - 2Dh_n\right\} dP^{w_o}$$

utilisant alors le lemme III.2. en remarquant que sur $[\tau \geq k+1]$, $|\hat{W}_n(k)| < a$

il vient :

$$\int_{\Gamma \cap [\tau \geq k+1]} \{(\hat{W}_n(k+1))^2 - (\hat{W}_n(k))^2 - 2Dh_n\} \, dP^{w_o} = \int_{\Gamma \cap [\tau \geq k+1]} (-2\beta h_n + \sigma(h_n)) \, (\hat{W}_n(k))^2 \, dP^{w_o}$$

ce terme est négatif pour $n \geq n_o(a)$ et $(S_n(k))_k$ est alors une surmartingale.

On a $E^{w_o}[S_n(0)] = w_0^2$ tandis que $S_n([dh_n^{-1}]) \geq - [dh_n^{-1}] \; 2Dh_n \geq - 2dD$,

et si $b > o$, un résultat classique de la théorie des surmartingales, prouve

$$bP^{w_o}\left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} S_n(k) \geq b\right] \leq E^{w_o}[S_n(o)] + E^{w_o}\left[S_n^-([dh_n^{-1}])\right] \leq w_o^2 + 2dD \text{ pour } n \geq n_o(a).$$

La seconde assertion du lemme résulte de l'inclusion

$$\left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} S_n(k) \geq b\right] = \left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} (\hat{W}_n(k \wedge \tau))^2 - 2k\, Dh_n \geq b\right]$$

$$\supset \left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} (\hat{W}_n(k \wedge \tau))^2 \geq (2dD + b)\right] \quad \blacksquare$$

Choisissons d tel que $\dfrac{1}{(d-1)^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis b tel que $\dfrac{w_o^2 + 2dD}{b} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, posons $a(\varepsilon) = (2dD+b)^{1/2}$ et désignons par τ le temps de sortie de la boule $B(0,a(\varepsilon))$ pour $\hat{W}_n$, l'égalité

$$P^{w_o}\left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} |\hat{W}_n(k)| \geq a(\varepsilon)\right] = P^{w_o}\left[\sup_{0 \leq k \leq dh_n^{-1}} |\hat{W}_n(k \wedge \tau)| \geq a(\varepsilon)\right]$$

et l'inclusion

$$\left[\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_n(t)| < a(\varepsilon)\right] \supset A_n^c \cap \left[\sup_{o \leq k \leq dh_n^{-1}} |\hat{W}_n(k)| < a(\varepsilon)\right]$$

prouvent (i). $\blacksquare$

III.2.2. Preuve de (ii).

Commençons par une remarque d'ordre général sur les conditions (i) et (ii).

Si $a > o$

$$P_n^{w_o}\{x : \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta\} = P_n^{w_o}\{x : \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta, \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le a\} +$$

$$+ P_n^{w_o}\{x : \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta, \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| > a\}$$

$$\le P_n^{w_o}\{x : \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta, \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le a\} + P_n^{w_o}\{x : \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| > a\}$$

et il est clair que l'ensemble des conditions (i) et (ii) équivaut à (i) et à :

(ii)' pour tout $\eta > o$ et $a > o$

$$\lim_{\delta \to o} \lim_{n \to +\infty} P_n^{w_o}\{x : \tilde{\omega}_x(\delta) > \eta, \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le a\} = 0$$

III.2.2.1. Le processus W_n^* .

Soit $\hat{W}_n^*$ le processus de Markov à temps discret de transition Π^*

$$\Pi^*(w,f) = E^w\left[f(\hat{W}_n(1))\right] \qquad \text{si } |w| \le a$$

$$\Pi^*(w,f) = \int f((1-\beta h_n)w+(2Dh_n)^{1/2}v)\, d\mu(v) \qquad \text{si } |w| > a$$

où μ est la probabilité uniforme sur le cercle unité.

W_n^* est le composé du processus $\hat{W}_n^*$ et du processus de Poisson $\Theta_n(t)$ indépendant de $\hat{W}_n^*$.

Si ${}^*P_n^{w_o}$ est la mesure sur $D[0,1]$ associé au processus W_n^* issu de w_o pour tout F borélien de $D[0,1]$

$$P_n^{w_o}(F \cap \{x : \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le a\}) = {}^*P_n^{w_o}(F \cap \{x : \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le a\})$$

il nous suffira donc d'établir la condition (ii)' pour les processus W_n^* .

Remarquons que W_n^* satisfait aux conditions du théorème 2 (voir II.3.3) et que par suite, la convergence marginale de W_n^* vers Z est établie.

L'intérêt de l'introduction de W_n^* vient de l'égalité

$$E^W \left[\hat{W}_n^*(1)\right] = w(1-\beta h_n + \sigma(h_n))$$

III.2.2.2.

Soit r > o, puisque pour x D[0,1]

$$(\tilde{\omega}_x(\frac{1}{r}) > \eta) \Longrightarrow (\max_{0 \leq k < r} \sup_{\frac{k}{r} \leq t \leq \frac{k+1}{r}} |x(t) - x(\frac{k}{r})| > \frac{\eta}{3})$$

il nous suffit de prouver

$$\lim_{r \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} {}^*P_n^{w_o} (G^r) = 0$$

où $G_r = \{x : \max_{0 \leq k < r} \sup_{\frac{k}{r} \leq t \leq \frac{k+1}{r}} |x(t) - x(\frac{k}{r})| > \eta, \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq a\}$

Les relations qui suivent sont évidentes :

$$\begin{aligned}
{}^*P_n^{w_o}(G_r) &= \sum_{k=o}^{r-1} {}^*P_n^{w_o}\{x : \sup_{\frac{i}{r} \leq t \leq \frac{i+1}{r}} |x(t)-x(\frac{i}{r})| \leq \eta, i=o\ldots k-1, \sup_{\frac{k}{r} \leq t \leq \frac{k+1}{r}} |x(t)-x(\frac{k}{r})| > \eta, \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq a\} \\
&\leq \sum_{k=o}^{r-1} {}^*P_n^{w_o}\{x : |x(\frac{i+1}{r})-x(\frac{i}{r})| \leq \eta, i=o\ldots k-1, \sup_{\frac{k}{r} \leq t \leq \frac{k+1}{r}} |x(t)-x(\frac{k}{r})| > \eta, \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq a\} \\
&= \sum_{k=o}^{r-1} P^{w_o}\{ |W_n^*(\frac{i+1}{r})-W_n^*(\frac{i}{r})| \leq \eta, i=o\ldots k-1, \sup_{\frac{k}{r} \leq t \leq \frac{k+1}{r}} |W_n^*(t)-W_n^*(\frac{k}{r})| > \eta, \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_n^*(t)| \leq a\} \\
&= \sum_{k=o}^{r-1} P^{w_o}(B_k^r)
\end{aligned}$$

Soient T_ℓ^n le temps de $\ell^{\text{ième}}$ discontinuité des processus W_n^*, σ_t l'opérateur de translation.

On pose

$$A_{kj\ell}^r = \Big[|W_n^*(\frac{1}{r})-W_n^*(o)| \leq \eta, \ldots, |W_n^*(\frac{k}{r})-W_n^*(\frac{k-1}{r})| \leq \eta \ ; \ \Theta_n(\frac{1}{r}) \circ \sigma_{\frac{k}{r}} = j, |W_n^*(\frac{k}{r})-W_n^*(\frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}})| > \eta,$$

$$\forall \ell' = 1\ldots\ell-1 \ |W_n^*(\frac{k}{r})-W_n^*(\frac{k}{r}+T_{\ell'} \circ \sigma_{\frac{k}{r}})| \leq \eta, \sup_{0 \leq t \leq \frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}} |W_n^*(t)| \leq a \Big]$$

il est immédiat que

$$B_k^r \subset \bigcup_{j=o}^{\infty} \bigcup_{\ell=o}^{j} A^r_{kj\ell}$$

$$P^{w_o}\left(A^r_{kj\ell} \cap \left[\left|W^*_n\left(\frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}\right) - W^*_n\left(\frac{k+1}{r}\right)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right]\right)$$

$$= P^{w_o}(A^r_{kj\ell}) \, . \, P^{w_o}\left(\left[\left|W^*_n\left(\frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}\right) - W^*_n\left(\frac{k+1}{r}\right)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right] \;\middle|\; A^r_{kj\ell}\right)$$

et nous admettrons provisoirement le

Lemme III.5.

Pour r *et* n *suffisamment grands, on a*

$$P^{w_o}\left(\left[\left|W^*_n\left(\frac{k}{r} + T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}\right) - W^*_n\left(\frac{k+1}{r}\right)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right] \;\middle|\; A^r_{k,j\ell}\right) \geq \frac{1}{2}$$

pour tout $k \quad 0 \leq k < r$ *et tout* $\ell, j \quad 0 \leq \ell \leq j \leq \frac{2}{rh_n}$

Nous avons alors successivement :

$$P^{w_o}(B_k^r) \leq P^{w_o}\left(\bigcup_{j=o}^{\frac{2}{rh_n}} \bigcup_{\ell=o}^{j} A^r_{kj\ell}\right) + P^{w_o}\left(\bigcup_{j>\frac{2}{rh_n}} \bigcup_{\ell=o}^{j} A^r_{kj\ell}\right)$$

$$\leq 2P^{w_o}\left(\bigcup_{j=o}^{\frac{2}{rh_n}} \bigcup_{\ell=o}^{j} A^r_{kj\ell} \cap \left[\left|W^*_n\left(\frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}\right)-W^*_n\left(\frac{k+1}{r}\right)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right]\right) + P^{w_o}\left[\theta_n\left(\frac{1}{r}\right) \circ \sigma_{\frac{k}{r}} > \frac{2}{rh_n}\right]$$

$$\leq 2P^{w_o}\left(\bigcup_{j=o}^{\infty} \bigcup_{\ell=o}^{j} A^r_{kj\ell} \cap \left[\left|W^*_n\left(\frac{k}{r}+T_\ell \circ \sigma_{\frac{k}{r}}\right)-W^*_n\left(\frac{k+1}{r}\right)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right]\right) + P^{w_o}\left[\theta_n\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{2}{rh_n}\right]$$

$$\leq 2\,{}^*P_n^{w_o}\left[x : \left|x\left(\tfrac{1}{r}\right)-x(o)\right| \leq \eta, \dots, \left|x\left(\tfrac{k}{r}\right)-x\left(\tfrac{k-1}{r}\right)\right| \leq \eta, \left|x\left(\tfrac{k+1}{r}\right)-x\left(\tfrac{k}{r}\right)\right| > \frac{\eta}{2}\right] + P^{w_o}\left[\theta_n\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{2}{rh_n}\right]$$

$$= 2\,{}^*P_n^{w_o}(A_k^r) + P^{w_o}\left[\theta_n\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{2}{rh_n}\right]$$

d'où

$${}^*P_n^{w_o}(G_r) = 2 \sum_{k=o}^{r-1} {}^*P_n^{w_o}(A_k^r) + r.P^{w_o}\left[\theta_n\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{2}{rh_n}\right]$$

or :

(1) d'après Tchebitchev, $rP^{w_o}\left[\theta_n(\frac{1}{r}) > \frac{2}{rh_n}\right] \leq rP^{w_o}\left[|\theta_n(\frac{1}{r}) - \frac{1}{rh_n}| \geq \frac{1}{rh_n}\right] \leq r^2 h_n$.

(2) puisque $P_Z^{w_o}(Fr(A_k^r))=0$, la convergence marginale de W_n^* vers Z implique

$\lim_{n\to+\infty} {}^*P_n^{w_o}(A_k^r) = P_Z^{w_o}(A_k^r)$ et la démonstration est achevée si nous admettons le

Lemme III.6.

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{k=o}^{r-1} P_Z^{w_o}(A_k^r) = 0$$

III.2.2.3. Démonstration du lemme III.5.

Lemme III.7.

$$E^w\left[(\hat{W}_n^*(s))^2\right] \leq 2D\,\frac{1-(1-2\beta h_n + \delta_1(h_n))^s}{2\beta - h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + (1-2\beta h_n + \delta_1(h_n))^s\, w^2$$

où δ_1 *est une fonction ne dépendant pas de* w *telle que* $\lim_{n\to\infty} h_n^{-1}\,\delta_1(h_n) = 0$

Démonstration du lemme III.7.

Un calcul identique à celui du lemme III.3. montre que

$$E^w\left[(\hat{W}_n^*(1))^2\right] = 2Dh_n + w^2(1-\beta h_n + \sigma(h_n))$$

où $\sigma(h_n)$ est une fonction de w telle que $|\sigma(h_n)| \leq \delta_1(h_n)$, δ_1 ayant les propriétés de l'énoncé. Par suite

$$E^w\left[(\hat{W}_n^*(s+1))^2\right] = E^w\left[E^{\hat{W}_n^*(s)}\left[(\hat{W}_n^*(1))^2\right]\right] = 2Dh_n + (1-2\beta h_n)\, E^w\left[(\hat{W}_n^*(s))^2\right] + E^w\left[\sigma(h_n)(\hat{W}_n^*(s))^2\right]$$

puisque $E^w\left[\sigma(h_n)\ (\hat{W}_n^*(s))^2\right] \leq \delta_1(h_n).E^w\left[(\hat{W}_n^*(s))^2\right]$

il vient $E^w\left[(\hat{W}_n^*(s+1))^2\right] \leq 2Dh_n + (1-2\beta h_n + \delta_1(h_n)).E^w\left[(\hat{W}_n^*(s))^2\right]$.

Une itération prouve le lemme. ∎

Lemme III.8.

$$E^w\left[\hat{W}_n^*(s)\right] = (1-\beta h_n)^s w + k_n(w)$$

$$|k_n(w)| \leq \delta^o(h_n) \left[1 + \frac{2D}{2\beta - h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + |w|^2\right]$$

où $\delta^o(h_n)$ *est une fonction indépendante de* w *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta^o(h_n) = o$

Démonstration du lemme III.8.

Rappelons que $E^w\,[\hat{W}_n^*(1)] = w(1-\beta h_n+\sigma(h_n))$

avec $|\sigma(h_n)| \leq \delta_2(h_n)$, δ_2 ne dépend que de h_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n^{-1}\,\delta_2(h_n) = o$

$$E^w\,[\hat{W}_n^*(s+1)] = E^w\left[E^{\hat{W}_n^*(s)}\,[\hat{W}_n^*(1)]\right] = (1-\beta h_n)\,E^w\,[\hat{W}_n^*(s)] + k_s^n(w)$$

$$|k_s^n(w)| = |E^w[\sigma(h_n)\hat{W}_n^*(s)]| \leq \delta_2(h_n)\,E^w\left[|\hat{W}_n^*(s)|\right] \leq \frac{\delta_2(h_n)}{2}\left[1 + E^w\,[(\hat{W}_n^*(s))^2]\right]$$

soit en utilisant le résultat du lemme précédent

$$|k_s^n(w)| \leq \frac{\delta_2(h_n)}{2}\left[1 + \frac{2D}{2\beta - h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + |w|^2\right]$$

On a alors

$$E^w\,[\hat{W}_n^*(s)] = [k_s^n(w)+k_{s-1}^n(w)(1-\beta h_n)+\ldots+k_1^n(w)(1-\beta h_n)^{s-1}] + (1-\beta h_n)^s.w$$

la norme du premier terme est inférieure à

$$\frac{\delta_2(h_n)}{2}\left[1 + \frac{2D}{2\beta-h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + |w|^2\right] . \frac{1-(1-\beta h_n)^s}{\beta h_n}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme III.9.

Pour r *et* n *suffisamment grands*

$$\inf_{|w|\leq a} P^w\left[|\hat{W}_n^*(s)-w| \leq \frac{n}{2}\right] \geq \frac{1}{2} \quad \textit{pour tout } s,\ 0 \leq s \leq \frac{2}{rh_n}$$

Démonstration du lemme III.9.

pour $|w| \leq a$ et $s \leq \frac{2}{rh_n}$

$$|E^w[\hat{W}_n^*(s)]-w| = |(1-\beta h_n)^s w-w+k_n(w)| \leq a\left[1-(1-\beta h_n)^{\frac{2}{rh_n}}\right] + \delta_o(h_n)\left[1+\frac{2D}{2\beta-h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + a^2\right]$$

le second membre ne dépend que de h_n et a pour limite $a\left[1-e^{-\frac{2\beta}{r}}\right]$ lorsque n tend vers l'infini.

Il existe donc n_1 et r_1 tels que $n \geq n_1$ et $r \geq r_1$ impliquent

$$\left|E^w\left[\hat{W}_n^*(s)\right] - w\right| \leq \frac{\eta}{4} \text{ pour } |w| \leq a \text{ et } s \leq \frac{2}{rh_n} .$$

En utilisant l'inégalité de Tchebitchev, nous écrivons alors

$$P^w\left[|\hat{W}_n^*(s)-w| \leq \frac{\eta}{2}\right] = P^w\left[\left|(\hat{W}_n^*(s)-w)-(E^w[\hat{W}_n^*(s)]-w) + (E^w[\hat{W}_n^*(s)]-w)\right| \leq \frac{\eta}{2}\right]$$

$$\geq P^w\left[\left|\hat{W}_n^*(s)-E^w[\hat{W}_n^*(s)]\right| \leq \left(\frac{\eta}{2} - \left|E^w[\hat{W}_n^*(s)] - w\right|\right)\right]$$

$$\geq 1 - \frac{E^w\left[\left|\hat{W}_n^*(s) - E^w[\hat{W}_n^*(s)]\right|^2\right]}{\left(\frac{\eta}{2} - \left|E^w[\hat{W}_n^*(s)] - w\right|\right)^2} \geq 1 - \frac{16}{\eta} \cdot E^w\left[\left|\hat{W}_n^*(s) - E^w[\hat{W}_n^*(s)]\right|^2\right]$$

D'après le lemme précédent

$$\left|E^w[\hat{W}_n^*(s)]\right|^2 = (1-\beta h_n)^{2s} w^2 + k_n'(w), \quad k_n'(w) = 2(1-\beta h_n)^s \, w.k_n(w) + (k_n(w))^2 .$$

puisque pour $|w| \leq a$

$$|k_n(w)| \leq \delta^0(h_n) \left[1 + \frac{2D}{2\beta-h_n^{-1}\delta_1(h_n)} + a^2\right]$$

sous les mêmes conditions $|k_n'(w)| \leq \delta_1^0(h_n)$, $\delta_1^0(h_n)$ est indépendante de w et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_1^0(h_n) = 0$.

D'autre part, pour $s \leq \frac{2}{rh_n}$

$$\left|(1-2\beta h_n + \delta_1(h_n))^s - (1-\beta h_n)^{2s}\right| \leq \sup\left\{1-\left(\frac{1-2\beta h_n + \delta_1(h_n)}{(1-\beta h_n)^2}\right)^s, 1-\left(\frac{(1-\beta h_n)^2}{1-2\beta h_n + \delta_1(h_n)}\right)^s\right\}$$

$$\leq \sup\left\{1-\left(\frac{1-2\beta h_n + \delta_1(h_n)}{(1-\beta h_n)^2}\right)^{\frac{2}{rh_n}}, 1-\left(\frac{(1-\beta h_n)^2}{1-2\beta h_n + \delta_1(h_n)}\right)^{\frac{2}{rh_n}}\right\}$$

ce dernier terme a pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Il en résulte pour $|w| \leq a$ et $s \leq \frac{2}{rh_n}$

$$E^w\left[|\hat{W}^*_n(s) - E^w(\hat{W}^*_n(s))|^2\right] = E^w\left[(\hat{W}^*_n(s))^2\right] - (E^w[\hat{W}^*_n(s)])^2$$

$$\leq 2D\,\frac{1-(1-2\beta h_n+\delta_1(h_n))^s}{2\beta-h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)} + |(1-2\beta h_n+\delta_1(h_n))^s-(1-\beta h_n)^{2s}|\;a^2+\delta_1^o(h_n)$$

le premier terme du second membre étant inférieur à

$$2D\,\frac{1-(1-2\beta h_n+\delta_1(h_n))^{\frac{2}{rh_n}}}{2\beta-h_n^{-1}\,\delta_1(h_n)}$$

nous obtenons une majoration du premier membre par une fonction indépendante de w et de s, dont la limite lorsque n tend vers l'infini est

$$\frac{D}{\beta}\,(1-e^{-\frac{4\beta}{r}})$$

Nous pouvons alors choisir $n_2 \geq n_1$ et $r_2 \geq r_1$ tel que pour $|w| \leq a$ et $s \leq \frac{2}{rh_n}$, $E^w\left[|\hat{W}^*_n(s) - E^w[\hat{W}^*_n(s)]|^2\right] \leq \frac{\eta}{32}$; le lemme est établi. ∎

Achevons maintenant la démonstration du lemme III.5.

Posons :

$$\Delta = \left[|W^*_n(\frac{k}{r}+T_\ell\circ\sigma_{\frac{k}{r}}) - W^*_n(\frac{k+1}{r}) \leq \frac{\eta}{2}\right] \cap A^r_{kj\ell}$$

et pour toute suite croissante d'entier de longueur k, $m_1, m_2, \ldots, m_k$

$$E_{m_1\ldots m_k} = \left[\Theta_n(\frac{1}{r}) = m_1, \ldots\ldots, \Theta_n(\frac{k}{r}) = m_k\right]$$

$$B_{m_1\ldots m_k} = A^r_{kj\ell} \cap E_{m_1\ldots m_k}$$

$$= \Big[|\hat{W}^*_n(m_1)-\hat{W}^*_n(o)| \leq \eta, \ldots, |\hat{W}^*_n(m_k)-\hat{W}^*_n(m_{k-1})| \leq \eta\ ;$$

$$|\hat{W}^*_n(m_k)-\hat{W}^*_n(m_k+\ell)| > \eta,\ \forall \ell'\ \ell'=1\ldots\ell-1\quad |\hat{W}^*_n(m_k)-\hat{W}^*_n(m_k+\ell')| \leq \eta\ ;$$

$$\sup_{0 \leq i \leq m_k+\ell} |\hat{W}^*_n(i)| \leq a\Big]$$

Remarquons que $B_{m_1 \dots m_k}$ est $\mathcal{F}_{m_k+\ell}$-mesurable, que $B_{m_1 \dots m_k} \cap \left[|\hat{W}^*_n(m_k+\ell) - \hat{W}^*_n(m_k+j)| \leq \frac{\eta}{2} \right]$ et $E_{m_1 \dots m_k}$ sont indépendants et que les évènements $B_{m_1 \dots m_k} \cap E_{m_1 \dots m_k}$ forment une partition de $A^r_{kj\ell}$.

Alors

$$P^{w_o}(\Delta) = \sum_{m_1 \dots m_k} P^{w_o}(E_{m_1 \dots m_k} \cap B_{m_1 \dots m_k} \cap \left[|\hat{W}^*_n(m_k+\ell) - \hat{W}^*_n(m_k+j)| \leq \frac{\eta}{2} \right])$$

$$= \sum_{m_1 \dots m_k} P^{w_o}(E_{m_1 \dots m_k}) \int_{B_{m_1 \dots m_k}} P^{w_o}(\left[|\hat{W}^*_n(m_k+\ell) - \hat{W}^*_n(m_k+j)| \leq \frac{\eta}{2} \right] \Big| \hat{W}^*_n(m_k+\ell)) \, dP^{w_o}$$

$$\geq (\sum_{m_1 \dots m_k} P^{w_o}(E_{m_1 \dots m_k}) \, P^{w_o}(B_{m_1 \dots m_k})) \inf_{|w| \leq a} P^w \left[|\hat{W}^*_n(j-\ell) - w| \geq \frac{\eta}{2} \right]$$

et on conclut en utilisant le lemme III.9. ∎

III.2.2.4. <u>Démonstration du lemme III.6.</u>

$$P_Z^{w_o}(A^r_k) = P_Z^{w_o}\{x : |x(\tfrac{1}{r}) - x(o)| \leq \eta, \dots, |x(\tfrac{k}{r}) - x(\tfrac{k-1}{r})| \leq \eta, \; |x(\tfrac{k+1}{r}) - x(\tfrac{k}{r})| > \frac{\eta}{2} \}$$

$$\leq P_Z^{w_o} \{x : |x(\tfrac{k+1}{r}) - x(\tfrac{k}{r})| > \frac{\eta}{2} \} \leq 2.P_Z^{w_o} \{x : |x_i(\tfrac{k+1}{r}) - x_i(\tfrac{k}{r})| > \frac{\eta}{2\sqrt{2}} \}$$

il suffit donc de prouver que si (P_t) est le semi-groupe sur $\mathbb{R}$ du processus d'O.U. à une dimension et si $\eta > o$

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{k=o}^{r-1} F(x,r,\eta,k) = o \quad \text{où} \quad F(x,r,\eta,k) = \int P_{\frac{k}{r}}(x,dy) \, P_{\frac{1}{r}}(y,\{z : |z-y| > \eta\})$$

x,y,z désignent ici des réels

Or si $b > o$

$$F(x,r,\eta,k) \leq \sup_{y, |y| \leq |x|+b} P_{\frac{1}{r}}(y,\{z : |z-y| > \eta\}) + P_{\frac{k}{r}}(x,\{y : |y| > |x|+b\})$$

$$P_{\frac{1}{r}}(y,\{z:|z-y|>\eta\})=1-\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\frac{-\eta+y(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}}^{\frac{\eta+y(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \leq \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-\eta+|y|(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= 2\phi\left(\frac{-\eta+|y|(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}\right)$$

et $\sup\limits_{y,|y|\leq|x|+b} P_{\frac{1}{r}}(y,\{z:|z-y|>\eta\}) \leq 2\phi\left(\frac{-\eta+(|x|+b)(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}\right)$

tandis que pour $1 \leq k \leq r-1$

$$P_{\frac{k}{r}}(x,\{y:|y|>|x|+b\}=1-\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\frac{-|x|-b-x\alpha(\frac{k}{r})}{\sigma(\frac{k}{r})}}^{\frac{|x|+b-x\alpha(\frac{k}{r})}{\sigma(\frac{k}{r})}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \leq \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{b+|x|(1-\alpha(\frac{k}{r}))}{\sigma(\frac{k}{r})}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy =$$

$$= 2\phi\left(-\frac{b+|x|(1-\alpha(\frac{k}{r}))}{\sigma(\frac{k}{r})}\right) \leq 2\phi\left(\frac{-b}{\sigma(\frac{1}{r})}\right)$$

ainsi

$$\sum_{k=o}^{r-1} F(x,r,\eta,k) \leq 2r.\phi\left(\frac{-\eta+(|x|+b)(1-\alpha(\frac{1}{r}))}{\sigma(\frac{1}{r})}\right) + 2(r-1)\,\phi\left(-\frac{b}{\sigma(\frac{1}{r})}\right)$$

et le lemme résulte d'une propriété classique de la fonction ϕ. ∎

REFERENCES

[1] R. HOLLEY : "The motion of a large particle" - Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 144, 1969, 523-534.

[2] T.E. HARRIS : "Diffusion with collisions between particules" - J. Appl. Prob. 2, 323-338, 1965

[3] C. STONE : "On a theorem of Dobrushin" - Annals of Math. Stat. - 1968 Vol. 39, N° 5, 1391 - 1401.

[4] L. BREIMAN : "Probability" - Addison-Wesley, 1968.

[5] E. NELSON : "Dynamical theories of Brownian motion" - Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1967.

[6] P. BILLINGSLEY : "Convergence of probability measures" - Wiley, New-York, 1968.

[7] H.F. TROTTER : "Approximation of semi-groups of operators" - Pacific J. Math 8 - 1958.

[8] J.E. MOYAL : "The generaltheory of stochastic population processes, Acta Math. 108, 1962.